Zaporedja, permutacije in kombinacije

Sequences, Permutations and Combinations

Nada Razpet

Pedagoška fakulteta, Koper
Pedagoška fakulteta, Ljubljana

Povzetek

Pregledali bomo nekaj poglavij iz knjige Vorlesungen über die Mathematik I in spoznali Jurija Vego kot pisca učbenikov. Zanimalo nas bo, kako je obravnaval zaporedja in kakšne primere uporabe je navedel. Spoznali bomo, kako je prišel do formul, s katerimi je potem izračunal število topovskih krogel na kupih različnih oblik, nadaljevali s poglavjem o permutacijah in zaključili s kombinacijami. Pri prevodu bomo skušali upoštevati izvirnik in uporabljati pomensko enako matematično izrazoslovje. Le poglavji o permutacijah in kombinacijah bomo skrajšali in navedli le nekatere značilnosti razlage in posebne primere. Na koncu pa bomo dodali še kratek opis igre "pharo", ki jo Vega omenja v eni izmed nalog.

Abstract

We will examine a few chapters form the book Vorlesungen über die Mathematik I and become acquainted with Jurij Vega as a textbook writer. We will be interested in his treatment of sequences and the examples he used. We will find out how he came to use the formulae for calculating the number of cannonballs in piles of different shapes. We will continue by examining a chapter on permutations and conclude with combinations. In translation, an attempt will be made to adhere to the original and to use semantically equivalent mathematical terms. The chapters on permutations and combinations will be abridged and only some of the characteristics of the explanation and special examples will be listed. Finally, a brief description of "pharo", the game Vega mentions in one of his tasks, will be presented.

Šesto predavanje o zaporedjih in njihovi uporabi

Aritmetično in geometrijsko zaporedje

§ 229
O zaporedjih in njihovi uporabi

Zaporedje števil, ki naraščajo ali padajo po nekem zakonu, je splošno zaporedje. V prvem primeru je zaporedje naraščajoče, v drugem pa padajoče. Števila, ki tvorijo zaporedje, imenujemo členi zaporedja. Tako je na primer 1, 2, 4, 8, 16 naraščajoče zaporedje s petimi členi, kjer členi naraščajo po takem zakonu, da je vsak naslednji člen 2-krat tako velik kot prejšnji člen. Pač pa je 24, 18, 12, 6 padajoče zaporedje s štirimi členi, kjer se vsak naslednji člen od prejšnjega dobi tako, da se ga zmanjša za 6.

Zaporedja, katerih členi po nekem zakonu potekajo brez konca, imenujemo neskončna zaporedja. Tako je na primer zaporedje $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \ldots$, ki se nadaljuje brez konca, neskončno zaporedje. Če pa se to zaporedje kjerkoli konča, na primer s tisočim členom, je to končno zaporedje.

§ 230

Iz vsega tega lahko razberemo, da ko enkrat poznamo pravilo (**zakon**) za neko zaporedje, ga lahko poljubno nadaljujemo in lahko določimo katerikoli člen tega zaporedja. Lahko pa dobimo vsoto poljubnega števila členov s seštevanjem. Prav tako bi lahko 1000. člen zaporedja izračunali tako, da bi od vsote 1000 členov odšteli vsoto 999 členov. Težje pa bi bilo seveda izračunati vsoto teh 1000 členov. Zato je potrebno, da pri vsakem zaporedju najdemo tak algebraični izraz, neko funkcijo n-ja, ki je določena tako, da z vstavljanjem za $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ itd. dobimo prvi, drugi, tretji, četrti člen in tako naprej. Funkcijo n-ja, ki ima to lastnost, imenujemo **splošni ali n-ti člen zaporedja**. Tako na primer je v zaporedju 2, 5, 8, 11, 14 ... splošni člen enak $3n - 1$. Če tu vstavimo $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, dobimo prvi, drugi, tretji, četrti člen zaporedja.

Primeri:

			n-ti člen
I.	5, 10, 15, 20, 25,	...	$5n$
II.	4, 7, 10, 13, 16, 19,	...	$3n + 1$
III.	1, 4, 9, 16, 25,	...	n^2
IV.	1, 3, 6, 10, 15, 21,	...	$(n^2 + n)/2$
V.	3, 6, 12, 24, 48,	...	$3 \cdot 2^{n-1}$

Enako lahko pri vsakem zaporedju najdemo tako algebraično funkcijo n-ja, ki ima to lastnost, da če vstavimo za $n = 1$, $n = 2$, $n = 3 \ldots$, dobimo vsoto enega, dveh, treh členov. Taka funkcija n-ja je **sumacijska formula** za n členov ali **sumatorični člen vrste.**

Tako je na primer v zaporedju 2, 5, 8, 11, 14 sumacijska formula $(3n^2 + n)/2$. Kajti če se v to formulo vstavi za $n = 1$, dobimo prvi člen, ki je 2, če vstavimo za $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, dobimo 7, 15, 26, 40. To zaporedje predstavlja vsoto prvih dveh, prvih treh, prvih štirih, prvih petih členov prejšnjega zaporedja.

Na enak način dobimo sumacijsko formulo prej navedenih petih primerov po vrsti:

$$\frac{5n^2 + 5n}{2}, \quad \frac{3n^2 + 5n}{2}, \quad \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}, \quad \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}, \quad 3(2^n - 1).$$

Vse te formule so take, da dobimo vsote zgornjih zaporedij, če n nadomestimo s številom členov, ki jih želimo sešteti.

§ 231

Če pa je pri nekem zaporedju sumacijska formula kot funkcija n-ja že znana, potem iz nje lahko dobimo n-ti člen zaporedja. Če namesto n v sumacijsko formulo vstavimo $n - 1$, dobimo vsoto $n - 1$ členov. **Če odštejemo vsoto $n - 1$ členov od vsote z n členi, dobimo na ta način n-ti člen, ker je pač vsota z n členi ravno za n-ti člen večja kot vsota $n - 1$ členov.**

Na primer pri zaporedju 3, 7, 11, 15, 19 ... je vsota n členov $2n^2 + n$, vsota $n - 1$ členov je enaka $2(n-1)^2 + (n-1) = 2n^2 - 3n + 1$. Če to odštejemo od vsote z n členi, dobimo:

$$(2n^2 + n) - (2n^2 - 3n + 1) = 4n - 1,$$

to je ravno n-ti člen prvotnega zaporedja.

Če je znana sumacijska formula, potem iz nje lahko vedno izpeljemo n-ti člen. Iz členov zaporedja izpeljati sumacijsko formulo pa je že težje, ker ni splošnega pravila. Vsako zaporedje je potrebno obravnavati posebej.

O aritmetičnih zaporedjih

§ 232

Zaporedja, pri katerih se ohranja enaka razlika, če prejšnji člen odštejemo od naslednjega člena, imenujemo **aritmetično zaporedje**.

Primer:
1, 4, 7, 10, 13 ... in 12, 10, 8, 6 ... sta aritmetični zaporedji, ker je razlika pri obeh stalna. V prvem primeru je razlika 3, v drugem pa je stalna razlika -2. Iz tega vidimo, da aritmetično zaporedje določata dva člena ali pa prvi člen in razlika.

Zdaj naj bo prvi člen aritmetičnega zaporedja a, razlika pa d. Potem je drugi člen $a + d$, tretji člen $(a + d) + d = a + 2d$, četrti člen $a + 3d$, peti člen $a + 4d$. To velja tako za naraščajoče, kot za padajoče zaporedje.

mesto	1	2	3	4	...	n
zaporedje	a	$(a+d)$	$(a+2d)$	$(a+3d)$	...	t
razlika		d	d	d		

Pri naraščajočem zaporedju je d pozitiven, pri padajočem pa negativen.

Primera:
Za $a = 1$, $d = 3$ je zaporedje $1, 4, 7, 10, 13, 16 \dots$ Za $a = 12$, $d = -2$ je zaporedje $12, 10, 8, 6, 4 \dots$

Splošni ali n-ti člen t pri aritmetičnem zaporedju z lahkoto najdemo iz pravila, po katerem se členi tvorijo. Vsak člen zaporedja, na primer četrti člen, dobimo iz a in toliko d-jev (iz 3 d-jev), kolikor členov je pred želenim členom. Torej:

$$t = a + (n-1)d. \qquad \text{I. osnovna formula}$$

Opomba: n-ti člen vsakega aritmetičnega zaporedja dobimo, če prvemu členu a prištejemo število predhodnih členov (teh je $(n-1)$), pomnoženih z d.

Primeri:
V zaporedju naravnih števil $1, 2, 3, 4, 5 \dots$ je n-ti člen $t = 1 + 1 \cdot (n-1) = n$, ker je prvi člen $a = 1$ in $d = 1$; n-ti člen zaporednih lihih števil $1, 3, 5, 7, 9, 11 \dots$ pa je $t = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, ker je $a = 1$ in $d = 2$; n-ti člen zaporedja sodih naravnih števil $0, 2, 4, 6 \dots$ je $t = 0 + 2(n-1) = 2n - 2$ ker je $a = 0$ in $d = 2$; (*Opomba:* za Vego je 0 naravno število. Danes pišemo soda števila v obliki $a_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$), n-ti člen zaporedja $12, 10, 8, 6 \dots$ je $t = 12 - 2(n-1) = 14 - 2n$, ker je $a = 12$ in $d = -2$.

Da bi našli vsoto poljubnega števila členov in splošno formulo za aritmetično zaporedje, označimo vsoto petih členov s s:

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d),$$
$$s = (a+4d) + (a+3d) + (a+2d) + (a+d) + a.$$

S seštevanjem obeh enačb dobimo:

$$2s = (2a+4d) + (2a+4d) + (2a+4d) + (2a+4d) + (2a+4d) = 5(2a+4d),$$

$$s = (2a+4d) \cdot \frac{5}{2}.$$

Ker pa je $2a + 4d = a + (a + 4d)$, lahko vsoto vseh petih členov dobimo tudi tako, da seštejemo prvi in peti člen in vsoto pomnožimo s polovičnim številom členov.

Na enak način dobimo vsoto poljubnega števila členov aritmetičnega zaporedja.

Pri vsakem aritmetičnem zaporedju izračunamo vsoto tako, da vsoto prvega in zadnjega člena pomnožimo s polovičnim številom členov.

Če označimo pri takem artimetičnem zaporedju z n členi vsoto tako kot prej s s, zadnji n-ti člen s t in se zaporedje z n-tim členom konča, potem je

$$s = (a + t)\frac{n}{2}. \qquad \text{II. osnovna formula}$$

Če iz I. osnovne formule vstavimo t, dobimo formulo:

$$s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2},$$

s katero lahko iz prvega člena in z razliko pri vsakem aritmetičnem zaporedju izračunamo vsoto n členov.

Tako je pri naravnih številih 1, 2, 3, 4, 5 ... vsota n členov

$$s = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pri zaporedju lihih števil 1, 3, 5, 7, 9, 11 ... pa je vsota n členov:

$$s = \frac{2n + 2n^2 - 2n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

§ 233

Sumatorični člen vrste s za vsoto n členov aritmetičnega zaporedja lahko izpeljemo iz splošnega člena $a + dn - d$. Vsota je odvisna od n-ja, zato splošni člen pomnožimo s fn.

Sumatorični člen vrste s je $(a + dn - d)fn = dfn^2 + (af - df)n$. Pri tem mora imeti f tako lastnost, da bo formula pravilna.

Naj bo $df = A$, $af - df = B$, potem je sumatorični člen vrste

$$s = An^2 + Bn. \qquad (K)$$

Če vstavimo za $n = 1$, dobimo vsoto enega člena $s = A + B$, pri $n = 2$ dobimo vsoto prvih dveh členov $s = 4A + 2B$ zaporedja a, $a + d$, $a + 2d$, torej je:

$$A + B = a, \qquad 4A + 2B = 2a + d \qquad \text{in iz tega} \qquad A = \frac{d}{2}, \qquad B = a - \frac{1}{2}d.$$

Če to vstavimo v gornji nastavek (K), dobimo:

$$s = \frac{1}{2}dn^2 + (a - \frac{1}{2}d)n = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}.$$

Opomba: Da sumacijska formula $s = An^2 + Bn$ povsem pravilno pripada (danes bi rekli zadošča) vsakemu aritmetičnemu zaporedju, lahko ugotovimo tudi iz naslednjega:

Če vstavimo v to formulo $n-1$ namesto n, dobimo vsoto $n-1$ členov, ki jo označimo s s^I:

$$s^I = A(n-1)^2 + B(n-1) = An^2 - 2An + A + Bn - B.$$

Odštejmo s^I od s in dobimo: $s - s^I = t$, kar smo pokazali v paragrafu § 231. $t = 2An - A + B$. Za $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ dobimo zaporedje:

mesto	1	2	3	4
zaporedje	$A+B$	$3A+B$	$5A+B$	$7A+B$
diferenca		$2A$	$2A$	$2A$

Torej pripada privzeti sumatorični člen vrste vsakemu aritmetičnemu zaporedju.

§ 234

S pomočjo v paragrafu § 232 vpeljanih osnovnih formul $t = a + (n-1)d$ in $s = \frac{1}{2}n(a+t)$ lahko rešimo mnogo nalog, ki se pojavljajo v matematiki in vsakdanjem življenju. Ker pa v teh dveh formulah nastopa pet različnih števil (prvi člen a, zadnji člen t, število členov n, razlika členov d in vsota členov s) morajo biti tri od teh znane, potem lahko ostali dve števili dobimo po formulah iz § 221. V nasprotnem primeru je naloga nedoločena. Lahko razvijemo formule, po katerih iz treh danih števil izračunamo dve neznani.

Na strani 261 zapišimo le nekatere primere iz Vegove tabele.

Nekaj ustreznih nalog
§ 235

1. Nekdo igra "pharo". Najprej položi 1 gulden, drugič 3 florinte, tretjič 5 florintov, četrtič 7 florintov itd. Koliko bo položil tridesetič in koliko vsega skupaj bo položil, če do takrat izgubi vse (*Opomba: 1 srebrni gulden = 1 florint*).

   Prvo vprašanje rešimo s I. osnovno formulo:

   $$t = a + (n-1)d = 59,$$

   drugo pa po formuli:

   $$s = an + \frac{nd}{2}(n-1) = 900.$$

   Položil je 900 florintov, ker je $a=1$, $d=2$ in $n=30$.

Iščemo	Dano	Zap. štev.	Formula	Od kod jo dobimo (namig)
t	a, d, n	1	$t = a + dn - d$	§ 232, I.
	a, n, s	2	$t = \frac{2s}{n} - a$	§ 232, II.
	d, n, s	3	$t = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}$	a iz I. in II.
	a, d, s	4	$t = -\frac{d}{2} + \sqrt{2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2}$	n iz I., II.
	⋮	⋮	⋮	⋮
s	a, d, n	6	$s = an + \frac{dn}{2}(n - 1)$	t iz I., II.
	⋮	⋮	⋮	⋮
s	t, d, n	8	$s = tn - \frac{dn}{2}(n - 1)$	a iz I., II.
	⋮	⋮	⋮	⋮
d	t, n, s	12	$d = \frac{2nt - 2s}{n - 1}$	a iz I., II.
	⋮	⋮	⋮	⋮
n	a, d, s	15	$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}}$	t iz I., II.
	⋮	⋮	⋮	⋮
a	t, n, s	18	$a = \frac{2s}{n} - t$	iz II.

2. Iz poskusov je znano, da prosto padajoče telo v prvi sekundi prepotuje 5 pariških čevljev in v vsaki naslednji sekundi za 30 čevljev več kot v prejšnji. Predstavljajmo si, da je telo padlo z 960 čevljev visokega stolpa. Koliko časa je padalo?

   $a = 15 \qquad d = 30 \qquad s = 960$
   Izračunamo s 15. formulo (opomba: dano a, d, s, iščemo n):
   $$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}} = 8.$$
   Tako bi lahko tudi iz trajanja pada $n = 8$ sekund izračunali s to formulo višino stolpa.

3. Pet topničarjev strelja v tarčo. Mednje je treba razdeliti 35 florintov tako, da bo najodličnejši dobil 11 florintov, vsak manj odličen pa toliko guldnov manj kot pred njim stoječi. Koliko dobi najslabši in koliko vsak naslednji boljši?

   $s = 35, \qquad t = 11, \qquad n = 5$
   po formuli 18 dobimo a, po formuli 12 pa d:
   $$a = \frac{2s}{n} - t = 3, \qquad d = \frac{2nt - 2s}{n(n-1)} = 2, \qquad 11,\ 9,\ 7,\ 5,\ 3.$$

4. Nekdo na loteriji vplača 1 groš. Ker prvič ne zadene, drugič vplača 2 groša, tretjič 3 groše. Vedno za en groš več. Ta loterija posameznega dobitnika 14-krat poplača. Kolikokrat lahko oseba na ta način igra, da bo nazaj dobila ves vplačan denar?

   $1, 2, 3, 4 \ldots n$-tič n grošev. Če dobi, dobi $14n$ grošev nazaj, v celoti pa je oseba vplačala
   $$\frac{n(n+1)}{2} = 14n, \qquad n = 27.$$
   Vplačati mora 27-krat.

5. Četa vojakov je bila zaradi zavzetja trdnjave poplačana tako, da je tisti, ki je prvi prišel čez obzidje, dobil določeno vsoto denarja, drugi manj, tretji za toliko manj od drugega kot drugi od prvega in tako naprej. Ko se je denar delil, pa dveh borcev ni bilo, ker sta bila ranjena. Pripadajoči delež sta dobila tovariša (kamerada). Ta dva pa sta svoj denar in denar tovarišev dala vsak v svojo vrečo in potem nista vedela, koliko dobi vsak posebej. Eden je zase in za svojega tovariša prejel 92 florintov, spomnil se je, da je bil on drugi, tovariš pa sedmi. Drugi je vedel, da je dobil skupaj 71 florintov in je bil enajsti, tovariš pa četrti. Koliko je dobil vsak od tovarišev?

Pri tej nalogi ni znan niti prvi člen niti razlika zaporedja. Delež, ki pripada najboljšemu, naj bo x, razlika d pa naj bo y. Prvi dobi x, drugi $x - y$, tretji $x - 2y$, četrti $x - 3y$, sedmi $x - 6y$, enajsti $x - 10y$. Drugi in sedmi dobita skupaj 92 florintov, četrti in enajsti pa skupaj 71 florintov.

$$(x - y) + (x - 6y) = 92,$$

$$(x - 3y) + (x - 10y) = 71, \qquad x = 58\frac{1}{4}, \qquad y = 3\frac{1}{2}.$$

Drugi dobi $54\frac{3}{4}$, četrti $47\frac{3}{4}$, sedmi $37\frac{1}{4}$ in enajsti $23\frac{1}{4}$ florinta.

6. Nekdo je dal izkopati vodnjak. Delavec dela na akord (*Opomba prev.*: učinek dela, ki ni vezan na čas). Za prvo izkopano klaftro dobi 5 florintov, za drugo klaftro 11 florintov in za tretjo klaftro 17 florintov. Za vsako naslednjo klaftro dobi 6 florintov več, ker je delo čedalje težje. Vodnjaški mojster je izkopal $2\frac{1}{2}$ klaftre. Koliko plačila je dobil?

Plačila sestavljajo aritmetično zaporedje za globino celih klafter. Tudi po pol klaftre mora iti v takem zaporedju. Za plačilo pol klaftre je x florintov, razlika za pol klaftre je y.

Druga polovica klaftre stane	$x + y$ florintov,
tretja polovica	$x + 2y$,
četrta polovica	$x + 3y$,
peta polovica	$x + 4y$.

Prva klaftra stane 5 florintov, torej $x + (x + y) = 5$, ker druga stane 11 florintov, je $(x + 2y) + (x + 3y) = 11$. Izračunamo $x = \dfrac{7}{4}$, $y = \dfrac{6}{4}$.
Lahko seštejemo:

$$\frac{7}{4} + \frac{13}{4} + \frac{19}{4} + \frac{25}{4} + \frac{31}{4} = 23\frac{3}{4},$$

ali po formuli:

$$s = an + \frac{dn}{2}(n - 1), \qquad a = 5, \qquad d = 6, \qquad n = 2\frac{1}{2}.$$

O aritmetičnih zaporedjih drugega, tretjega itd. ranga in njihovi uporabi
§ 236

Aritmetična zaporedja, ki smo jih obravnavali doslej, imenujemo tudi **aritmetična zaporedja prvega ranga**, ker so prve razlike členov stalne. Obstajajo pa zaporedja, pri katerih odštevanje členov še ne da stalnih razlik, ampak lahko diference tvorijo aritmetično zaporedje. Šele diference tega zaporedja (druge diference) so stalne. Tako zaporedje imenujemo aritmetično zaporedje drugega ranga.

Na primer zaporedje 1, 4, 9, 16, 25, 36 ..., razlike členov 3, 5, 7, 9, 11 ... so členi aritmetičnega zaporedja, katerega razlike so stalno 2.

Zaporedje, pri katerem so druge diference enake, imenujemo zaporedje drugega ranga. Za zaporedje drugega ranga potrebujemo prve tri člene, da lahko zaporedje nadaljujemo. Pri zaporedju 4, 7, 12 je zaporedje prvih diferenc 3, 5, 7, 9 ... (razlika je 2). Dano zaporedje je potem 4, 7, 12, 19, 28, 39, ker je 19=12 +7, 28= 19+9, 39=28+11 itd.

§ 237

Naj bo prvi člen zaporedja drugega ranga e in zaporedje prvih diferenc a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$. Poiščimo splošni člen zaporedja drugega ranga:

$$
\begin{aligned}
&1.\ \text{člen} = e \\
&2.\ \text{člen} = e + a \\
&3.\ \text{člen} = e + a + (a+d) \\
&4.\ \text{člen} = e + a + (a+d) + (a+2d) \\
&5.\ \text{člen} = e + a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) \\
&6.\ \text{člen} = e + a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) \\
&n.\ \text{člen} = e + a + (a+d) + \ldots + (a+(n-2)d)
\end{aligned}
$$

Iz tega vidimo, da je v vsakem členu zaporedja e povečan za vsoto toliko členov aritmetičnega zaporedja prvega ranga, kolikor členov nastopa v zaporedju pred njim. Torej je zmeraj $(n-1)$ sumandov tega zaporedja. Naj bo n-ti člen t. Potem lahko iz § 234 formula 6. dobimo

$$
\begin{aligned}
t &= e + \frac{2a(n-1) + d(n-1)^2 - d(n-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}dn^2 + (a - \frac{3}{2}d)n + (e + d - a)\,.
\end{aligned}
$$

Naj bo $\frac{1}{2}d = P$, $a - \frac{3}{2}d = Q$, $e + d - a = R$. Potem je

$$t = Pn^2 + Qn + R,$$

in je t kvadratna funkcija n-ja.

Koeficiente P, Q in R lahko določimo pri vsakem danem zaporedju drugega ranga na naslednji način. Vstavimo v formulo za $n = 1$, potem $n = 2$ in $n = 3$ in dobimo prvi, drugi in tretji člen zaporedja. Ker so ti trije znani, lahko na ta način dobimo tri enačbe s tremi neznankami P, Q in R.

Primer:
Zaporedje drugega ranga naj bo 35, 26, 20, 17 ... Vstavimo v enačbo za t za $n = 1$,

potem $n = 2$ in $n = 3$ in dobimo: $P + Q + R = 35$, $4P + 2Q + R = 26$ in $9P + 3Q + R = 20$. Izračunamo:

$$P = \frac{3}{2}, \qquad Q = -\frac{27}{2}, \qquad R = 47, \qquad t = \frac{3}{2}n^2 - \frac{27}{2}n + 47.$$

Naj bo aritmetično zaporedje drugega ranga tako, da je prvi člen a, drugi člen b in tretji člen c, potem je

$$\begin{aligned} P + Q + R &= a \qquad & n &= 1,\\ 4P + 2Q + R &= b & n &= 2,\\ 9P + 3Q + R &= c & n &= 3. \end{aligned}$$

Izračunamo

$$P = \frac{a + c - 2b}{2}, \qquad Q = \frac{8b - 5a - 3c}{2}, \qquad R = \frac{6a + 2c - 6b}{2},$$

in iz tega

$$t = \frac{(a + c - 2b)n^2 + (8b - 5a - 3c)n + (6a + 2c - 6b)}{2}.$$

§ 238

Ko imamo splošni člen $t = Pn^2 + Qn + R \quad (I)$ aritmetičnega zaporedja drugega ranga, potem ni več težko najti sumatorični člen vrste. Prav tako kot v § 233 dobimo sumatorični člen vrste tako, da splošni člen $t = Pn^2 + Qn + R$ (po formuli I) pomnožimo s Fn. Sumatorični člen vrste je potem:

$$s = FPn^3 + FQn^2 + FRn.$$

Postavimo: $FP = A$, $FQ = B$ in $FR = C$. Zapišimo sumatorični člen še v drugi obliki:

$$s = An^3 + Bn^2 + Cn \qquad (II),$$

kjer so A, B in C nedoločeni koeficienti zaporedja dane oblike.

Primer:
Zaporedje naj bo 35, 26, 20, 17 … Določi formulo za sumatorični člen.

V formulo (II) vstavimo za $n = 1$ in dobimo:

$$A + B + C = 35.$$

Potem vstavimo za $n = 2$:
$8A + 4B + 2C = 61$, ker je vsota dveh zaporednih členov $35 + 26 = 61$
in za $n = 3$:
$27A + 9B + 3C = 81$, ker je vsota treh zaporednih členov $35 + 26 + 20 = 81$.
Iz enačb dobimo:

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -6, \qquad C = \frac{81}{2},$$

$$s = \frac{1}{2}n^3 - 6n^2 + \frac{81}{2}n.$$

Posplošitev: aritmetično zaporedje drugega ranga ima člene a, b, c:

$$\begin{aligned} A + B + C &= a && \text{za } n = 1, \\ 8A + 4B + 2C &= a + b && \text{za } n = 2, \\ 27A + 9B + 3C &= a + b + c && \text{za } n = 3. \end{aligned}$$

Iz enačb dobimo:

$$s = \left(\frac{a + c - 2b}{6}\right)n^3 + \left(\frac{9b - 6a - 3c}{6}\right)n^2 + \left(\frac{11a + 2c - 7b}{6}\right)n.$$

Opomba: Tako kot pri zaporedjih prvega ranga lahko formulo $s = An^3 + Bn^2 + Cn$ preverimo tako, da izračunamo splošni člen t z odštevanjem tako kot v paragrafu § 233 in § 231, in pogledamo, če zaporedje t-jev sestavlja aritmetično zaporedje prvega ranga, kjer so razlike členov stalne.

§ 239

Vzemimo zaporedje:

I. $1, 1 + d, 1 + 2d, 1 + 3d \ldots$ in sestavimo novo aritmetično zaporedje drugega ranga s seštevanjem členov,

II. $1, 2 + d, 3 + 3d, 4 + 6d, 5 + 10d, 6 + 15d \ldots$

Splošni člen za t in vsota n členov s je po § 237 in § 238:

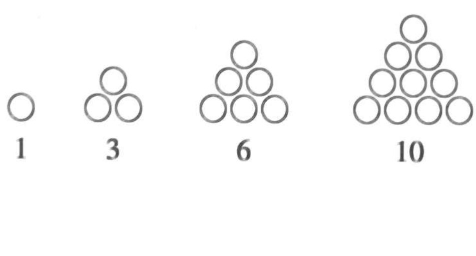
$$t = \frac{1}{2}dn^2 + (1 - \frac{1}{2}d)n, \qquad s = \frac{1}{6}dn^3 + \frac{1}{2}n^2 + (\frac{1}{2} - \frac{d}{6})n,$$

in postavimo v II. zaporedje po vrsti za $d = 1$, potem $d = 2$, $d = 3$ in $d = 4$. Dobimo:

1) $1, 3, 6, 10, 15, 21 \ldots$
2) $1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots$
3) $1, 5, 12, 22, 35, 51 \ldots$
4) $1, 6, 15, 28, 45, 66 \ldots$

Ta števila v vsakem od navedenih zaporedij imenujemo **poligonalna ali mnogokotniška števila**, ker njihovim členom priredimo pravilne mnogokotnike, in sicer:

- Pod 1) so trikotniška števila, ker so prirejena trikotniku na naslednji način:



- pod 2) so iz enakega razloga štirikotniška (kvadratna) števila,
- pod 3) so pentagonalna ali petkotniška števila,
- pod 4) so šestkotniška števila.

Če seštevamo člene tako, da seštejemo najprej en člen, potem prva dva člena, nato prve tri člene, in zapišemo zaporedja, dobimo iz zgornjih zaporedij:

a) $1, 4, 10, 20, 35, 56 \ldots$
b) $1, 5, 14, 30, 55, 91 \ldots$
c) $1, 6, 18, 40, 75, 126 \ldots$
d) $1, 7, 22, 50, 95, 161 \ldots$

Na splošno imenujemo člene teh zaporedij **piramidalna števila**, ker nastajajo piramide ali koničasti stebri, če nalagamo ustrezno število stvari drugo nad drugo.

§ 240

Iz krogel enakih velikosti se da sestavljati tako trikotne kot štiristrane piramide na zgornji način po plasteh, kot to delajo v skladiščih orožja (arzenalih).

Lege (plasti) se štejejo od zgoraj navzdol do n-te lege. Pri eni in drugi piramidi se da iz n-tega člena t, to je iz števila krogel v n-ti plasti, določiti število vseh krogel v piramidi, ki je enako sumatoričnemu členu s. Torej:

$$t = \frac{1}{2}dn^2 + (1 - \frac{d}{2})n, \qquad s = \frac{1}{6}dn^3 + \frac{n^2}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}d)n.$$

Pri trikotniški piramidi je $d = 1$, pri štiristrani piramidi $d = 2$ in tako naprej.

Primeri:

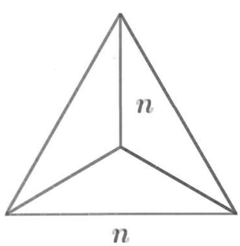
Število krogel v n-ti plasti trikotniške piramide je:

$$t = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

vseh krogel v n plasteh je

$$s = \frac{1}{6}dn^3 + \frac{n^2}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}d\right)n,$$

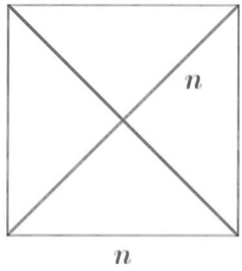
$$s = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}.$$



Trikotniška piramida, ki ima 20 plasti, ima v 20. plasti, ki leži na tleh, $(20 \cdot 21)/2 = 210$ krogel, v celem kupu pa je $s = (20 \cdot 21 \cdot 22)/6 = 1540$ krogel.

Štirikotna piramida ima v n-ti plasti $t = n^2$ krogel, število vseh krogel v n plasteh pa je:

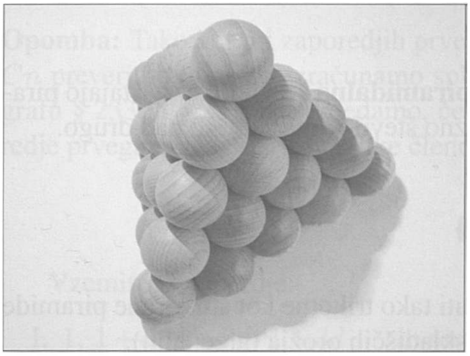
$$s = \frac{n(n+1)(n+n+1)}{2 \cdot 3}.$$



Štirikotna piramida, ki ima 20 plasti, ima na plasti, ki leži na tleh, 400 krogel. Vseh krogel pa je:

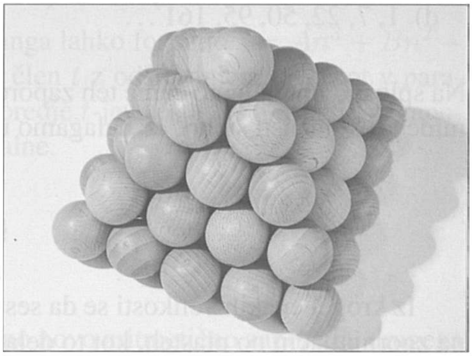
$$s = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 2870.$$

Število krogel na stranici piramide (stranski rob piramide) je enako številu plasti.



Osnovnica ima n krogel (in prav toliko plasti). Vseh krogel v kupu je

$$s = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}.$$



Osnovnica ima n krogel. Vseh krogel v kupu je

$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}.$$

Število krogel je preprosto določiti tudi za nepopolno piramido (po naše prisekano piramido). Računamo jih tako, kot bi računali za celo piramido, in potem odštejemo število krogel, ki jih ima piramida, ki manjka nepopolni piramidi.

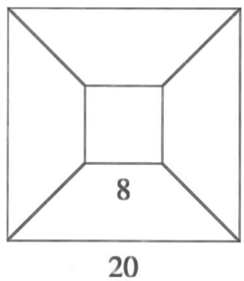
Primer: Spodnja stranica štirikotne nepopolne piramide ima 20 krogel, zgornja pa 8. Popolna piramida ima

$$s = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 2870 \text{ krogel},$$

piramida, ki jo dopolnimo, ima

$$s = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 140 \text{ krogel},$$

torej ima nepopolna piramida $2870 - 140 = 2730$ krogel.



§ 241

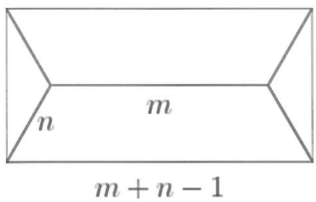
Če je potrebno zložiti veliko krogel, se navadno zlagajo v dolge kupe, katerih osnovne ploskve so pravokotniki, zloženi drug na drugega tako, da na vrhu pride ena sama vrsta krogel, kar bomo imenovali *sleme*.

Če se na slemenu kupa nahaja m krogel, potem sta na naslednji nižji legi dve vrsti krogel in vsaka ima $m+1$ krogel, se pravi v celoti $2m+2$ krogli. V tretji legi so tri vrste s po $m+2$ kroglami, skupaj $3m+6$ krogel. V četrti legi z $m+3$ kroglami v vrsti je $4m+12$ krogel in tako naprej. V n-ti legi je n vrst s po $m+(n-1)$ kroglami v vrsti, torej skupaj $n(m+n-1)$ krogel. Število krogel je kvadratna funkcija n-ja, to je aritmetično zaporedje drugega ranga.

1. lega		2. lega		3. lega		4. lega		n-ta lega
m		$2m+2$		$3m+6$		$4m+12$	$\dots$	$n(m+n-1)$
razlike	$m+2$		$m+4$		$m+6$			

Iz § 238 lahko izračunamo vsoto s:

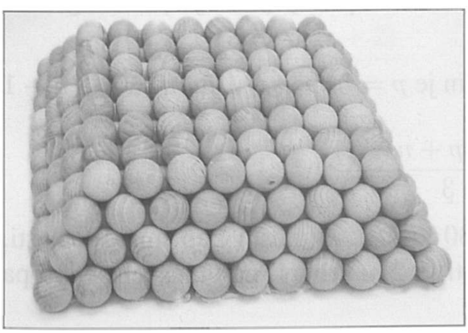
$$s = \frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{2\cdot 3}.$$



Primer: Na slemenu je 100 krogel, na poševnem robu pa 10. Torej je $m = 100$, $n = 10$. Na plasti, ki je na tleh, je 1090 krogel, vseh krogel na kupu pa je 5830.

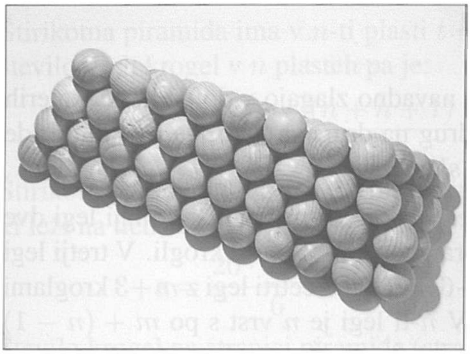
Vpeljimo število p, ki pove, koliko krogel ima stranica v najnižji vrsti: $p = m+n-1$. Iz tega je $m = p-n+1$, in zato

$$s = \frac{n(n+1)(3p+1-n)}{2\cdot 3}.$$



Stranica na tleh ima 11 krogel, zgornja osnovnica ima 8 krogel. Od števila krogel za popolno piramido z osnovnico 11 odštejemo število krogel dopolnilne piramide, ki ima osnovnico 7:

$$s = \frac{11\cdot 12\cdot 23}{6} - \frac{7\cdot 8\cdot 15}{6} = 366.$$

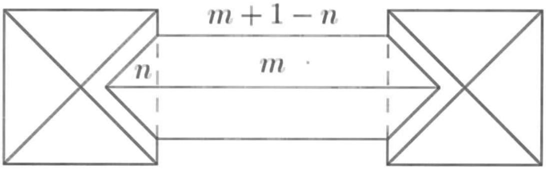


Na slemenu je 8 krogel, skladovnica ima 4 plasti (leg). Vseh krogel je:

$$s = \frac{4(4+1)(8+24-2)}{2 \cdot 3} = 100.$$

§ 242

Uporabljajo se tudi taki kupi, pri katerih je na obeh straneh štirikotna piramida.



Naj bo na slemenu vmesnega kupa m krogel. Naslednja nižja vrsta ima $m-1$ krogel, še nižja $m-2$ krogel, spodnja stranica $m-n+1$ krogel. Število krogel v posameznih legah je torej:

1. lega	2. lega	3. lega	4. lega		n-ta lega
m	$2m-2$	$3m-6$	$4m-12$	$\ldots$	$n(m+1-n)$.

Spet je to aritmetično zaporedje drugega ranga. Po formuli iz § 238 je število krogel v vmesnem kupu:

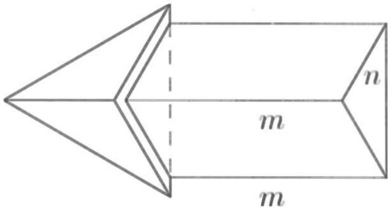
$$s = \frac{n(n+1)(3m-2n+2)}{2 \cdot 3}.$$

Primer: Na slemenu vmesnega kupa je 30 krogel, krajša stranica na osnovni ploskvi pa ima 10 krogel. Torej: $m = 30$, $n = 10$. Na spodnji plasti je 210 krogel, na vmesnem kupu pa 1320 krogel.

Število krogel v spodnji vrsti je p. Potem je $p = m - n + 1$ in $m = p + n - 1$ ter

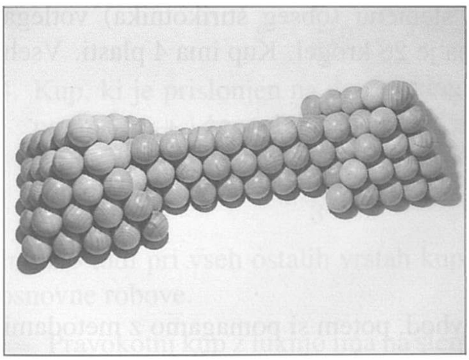
$$s = \frac{n(n+1)(3p+n-1)}{2 \cdot 3}.$$

Primer: Na slemenu vmesnega kupa je 30 krogel. Vmesni kup ima 10 plasti. Torej: $m = 30$, $n = 10$. Na spodnji plasti je 210 krogel, na vmesnem kupu pa 1320 krogel.



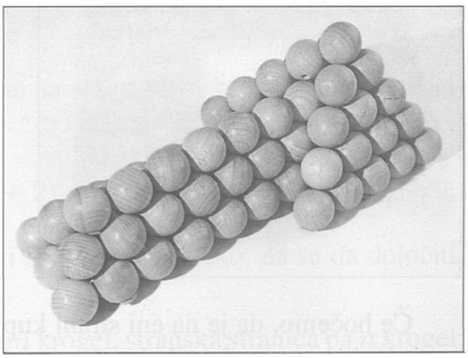
Opomba: Če je kup samo z ene strani naslonjen na piramido in se lege štejejo od zgoraj navzdol, potem sestavlja število krogel po legah aritmetično zaporedje prvega ranga. Na slemenu je m krogel, ena lega nižje ima $2m$ krogel, tretja lega ima $3m$ krogel, četrta lega ima $4m$ krogel. Vseh krogel na naslonjenem kupu je:

$$s = \frac{1}{2}n(m + nm) = \frac{mn(n+1)}{2}.$$



Vmesni kup je naslonjen na dve piramidi. Na slemenu vmesnega kupa je m krogel. Kup ima n plasti. Število krogel v vmesnem kupu je:

$$s = \frac{n(n+1)(3m - 2n + 2)}{2 \cdot 3}.$$



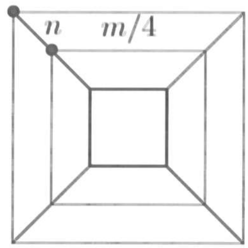
Kup je naslonjen na eno piramido. Na slemenu naslonjenega kupa je m krogel. Število plasti v kupu je n. Vseh krogel v naslonjenem kupu je:

$$s = \frac{mn(n+1)}{2}.$$

§ 243

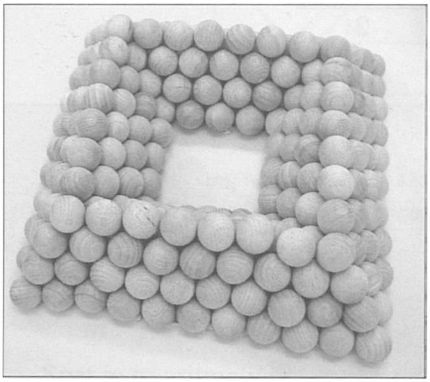
Krogle se lahko zlagajo tudi v kupe, katerih osnovna ploskev je štirikotnik, iz katerega je odstranjen manjši štirikotnik. Na sredini takega kupa je luknja.

S preiskovanjem takega kupa ugotovimo: če je na slemenu m krogel (obseg štirikotnika), potem je v drugi legi na zunanji strani $m+4$ krogel, na notranji strani pa $m-4$ krogel, skupaj $2m$ krogel. Na tretji legi je znotraj $m-8$ krogel, na sredini m krogel, na zunanji strani $m+8$ krogel, skupaj $3m$ krogel. V četrti legi je $4m$ krogel, v peti legi $5m$ krogel, v n-ti legi nm krogel. Ko vse skupaj seštejemo, dobimo:



$$s=\frac{1}{2}n(m+nm)=\frac{n(n+1)m}{2}.$$

Krogle vsake lege tvorijo aritmetično zaporedje prvega ranga.



Na slemenu (obseg štirikotnika) votlega kupa je 28 krogel. Kup ima 4 plasti. Vseh krogel je:

$$s=\frac{mn(n+1)}{2}=\frac{28\cdot 4\cdot 5}{2}=280.$$

Če hočemo, da je na eni strani kupa še vhod, potem si pomagamo z metodami iz prejšnjih paragrafov, da izračunamo, koliko krogel moramo odšteti.

§ 244

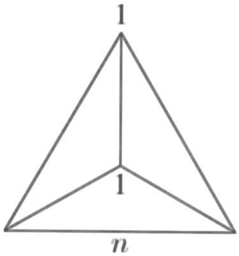
Iz sumacijskih formul za kupe krogel lahko dobimo pravilo za računanje vseh možnih tipov skladovnic. **Če številu krogel na slemenu kupa prištejemo število krogel na obeh enako ležečih osnovnih stranicah in pomnožimo s številom krogel na stranskem trikotniku $n(n+1)/2$ in vzamemo tretji del tega, potem je to število vseh krogel na kupu.**

Primeri:

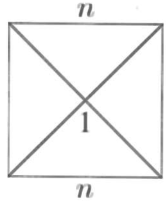
1. Trikotniška piramida ima na slemenu eno kroglo. Osnovna vrstica ima n krogel, njej enako ležeča stranica 1 kroglo (v oglišču trikotnika). Na stranskem

trikotniku je $n(n+1)/2$ krogel. Vseh krogel na kupu je:

$$s = \frac{1}{3}(2+n) \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$



Tristrana piramida



Štiristrana piramida

2. Štirikotna piramida: na slemenu je 1 krogla, spodnji stranici imata po n krogel torej:

$$s = \frac{1}{3}(1+n+n) \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Dolg prosto stoječi kup ima na slemenu m krogel, na osnovni stranici pa n krogel. Vseh krogel je:

$$s = \frac{1}{3}(m+2m+2n-2) \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Kup, ki je prislonjen na dve piramidi, ima na slemenu m krogel, na osnovnici pa $m-n+1$ krogel. Vseh krogel je:

$$s = \frac{1}{3}(m+2m-2n+2) \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

In tako tudi pri vseh ostalih vrstah kupov, ki so sestavljeni tako, da se da določiti osnovne robove.

Pravokotni kup z luknjo ima na slemenu m krogel, stranska stranica pa n krogel in vsota krogel na notranji in zunanji osnovnici je $2m$. Vseh krogel na kupu, kjer je na sredini luknja, je:

$$s = \frac{1}{3}(m+2m) \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

§ 245

I. Število krogel s v trikotni piramidi (po § 241 in § 243) je:

$$s = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}.$$

Kako dobimo iz tega število plasti ali lege oziroma število krogel na stranskem robu? Če iz zgornje formule izračunamo n, dobimo zapleteno enačbo, katere rešitev bo sledila v prihodnjih predavanjih, vendar lahko n dobimo na naslednji način:

ker je

$$n^3 + 3n^2 + 2n = 6s,$$

potem je $n^3 < 6s$, ker smo odšteli $3n^2 + 2n$ in $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > 6s$, ker smo prišteli $n + 1$. Iz prvega dela sledi $n^3 < 6s$ in iz drugega $(n + 1)^3 > 6s$, to pa pomeni, da je $n < \sqrt[3]{6s}$ in $(n + 1) > \sqrt[3]{6s}$ in torej $n < \sqrt[3]{6s}$ in $n > \sqrt[3]{6s} - 1$.

Ker je razlika med $\sqrt[3]{6s}$ in n celo število in tudi n je celo število, imamo naslednje pravilo:

Izračunamo tretji koren iz šestkratnika števila krogel in vzamemo celi del tega tretjega korena in vstavimo to za n v formulo $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$. Dobimo dano število s, in tedaj lahko te krogle zložimo v tristrano piramido z n kroglami v osnovni vrstici. Če pa dobimo manj, kot je število vseh krogel, se ne da teh krogel postaviti v trikotno piramido. Če pa dobimo več, kot je dano število krogel, potem osnovnico zmanjšamo za eno in potem še nekaj krogel ostane.

Primeri:

1. 1140 krogel bi radi postavili v trikotno piramido. $\sqrt[3]{6 \cdot 1140} = 18$, vstavimo v formulo $(18 \cdot 19 \cdot 20)/6 = 1140$. Torej lahko sestavimo trikotno piramido.
2. Število krogel je 7775.
   $\sqrt[3]{6 \cdot 7775} = 35$ in nekaj več. Vstavimo v formulo $(35 \cdot 36 \cdot 37)/6 = 7770$. Ostane 5 krogel.
3. Imamo 4000 krogel, ki bi jih radi zložili v trikotniško piramido. $\sqrt[3]{6 \cdot 4000} = 28$ in nekaj več. Vstavimo v formulo $(28 \cdot 29 \cdot 30)/6 = 4060$. Stranico zmanjšamo, stranica ima 27 krogel, ostane še 346 krogel.

II. Število krogel v štirikotni piramidi je:

$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}.$$

Izračunajmo stranico n. Iz § 240 je

$$3s = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

iz tega sledi, da je $n^3 < 3s$ in $(n+1)^3 > 3s$ in od tod $n < \sqrt[3]{3s}$ in $(n+1) > \sqrt[3]{3s}$. Tako kot prej izračunamo celi del $\sqrt[3]{3s}$, vstavimo v formulo za s in ponovimo postopek tako kot prej.

III. Če je dano število krogel v prosto stoječem dolgem slemenu, potem je (§ 241):

$$s = \frac{2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n}{2 \cdot 3}.$$

Imamo dve neznanki pri danem s, eni je treba dati neko vrednost. Dobro je vzeti n za znano in izračunati dolžino slemena m. Deloma tako zato, ker se višina uravnava ravno po n-ju, pa tudi zato, ker m nastopa v prvi potenci:

$$m = \frac{6s + 2n - 2n^3}{3n^2 + 3n} = \frac{2s}{n(n+1)} - \frac{2}{3}(n-1).$$

Če lahko n izberemo tako, da je m celo število, potem lahko dano število krogel postavimo v prosto stoječi kup; če ni celo število, izberemo n, izračunamo m do celega dela in potem pogledamo, koliko ostane.

Primer:
1155 krogel bi radi zložili v prosto stoječi kup. Za $n = 10$ dobimo $m = 15$.
Če bi bilo 1623 krogel, pa takega kupa ne bi mogli zložiti. Če je potrebno zložiti veliko takih kupov, je dobro narediti tabelo.

Poglejmo le del Vegove tabele.

n	Število krogel na slemenu (m)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
3	14	20	26	32	38	44	50	56	62
4	30	40	50	60	70	80	90	100	110
5	55	70	85	100	115	130	145	160	175
Osnovna stranica $= m + n - 1$									

Ta tabela je dobra tudi za štirikotne piramide, takrat je $m = 1$ in se število krogel preprosto izračuna po formuli $n(n+1)(2n+1)/6$ tudi za velike n, kot na primer za $n = 20$ ali več. V prvem stolpcu izračunamo števila kar po tej formuli. Vse ostale stolpce ni težko dopolniti, saj tvorijo števila v posameznih vrsticah aritmetično zaporedje prvega ranga. Razlike števil po vrsticah so trikotniška števila ($n(n+1)/2$). (Opomba: v prvi vrstici je razlika 3, v drugi 6, v tretji 10 itd.)

Na podoben način lahko naredimo tabelo za kup, ki se na obeh straneh naslanja na tristrano piramido.

n	Število krogel na slemenu (m)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	7	10	13	16	19	22	25
3	10	16	22	28	34	40	46	52
4	20	30	40	50	60	70	80	90
5	35	50	65	80	95	110	125	140
6	56	77	98	119	140	161	182	203
Osnovna stranica $= m - n + 1$								

V prvi stolpec (za $m = 1$) zapišemo število krogel, zloženih v trikotno piramido (po formuli $n(n+1)(n+2)/6$. Števila v vrsticah so členi aritmetičnega zaporedja prvega ranga in zopet so razlike vrstic trikotniška števila $n(n+1)/2$.

§ 246

Zaporedje, katerega prve diference so členi nekega aritmetičnega zaporedja II. ranga, zato 3. diference konstantne, so **aritmetična zaporedja III. ranga**. Tako je na primer zaporedje tretjih potenc naravnih števil aritmetično zaporedje III. ranga, ker je namreč:

Zaporedje	$1, 8, 27, 64, 125 \dots$
prve diference	$7, 19, 37, 61 \dots$
diference II. reda	$12, 18, 24 \dots$
diference III. reda	$6, 6 \dots$

To pojasnjuje, da morajo biti za tako zaporedje znani štirje členi, da ga lahko nadaljujemo oziroma znamo določiti splošni člen.

Če naredimo podobno obravnavo kot pri aritmetičnem zaporedju II. ranga, potem vidimo, da je vsak člen takega zaporedja sestavljen iz danega števila S, povečanega za vsoto nekaterih členov aritmetičnega zaporedja II. ranga. Tako vsoto pa lahko, kot smo videli v razdelku § 238, predstavimo z izrazom $Pn^3 + Qn^2 + Rn$. Posledično lahko določimo tudi n-ti oziroma splošni člen vsakega aritmetičnega zaporedja III. ranga na naslednji način:

$$I. \qquad t = Pn^3 + Qn^2 + Rn + S.$$

Zato, da najdemo vsoto s, pomnožimo splošni člen t z nekim Fn (tako kot v § 238), preimenujemo $PF = A, QF = B, RF = C, SF = D$. Potem je sumatorični člen vsakega aritmetičnega zaporedja II. ranga oblike:

$$II. \qquad s = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn.$$

Pri tem so A, B, C, D tako kot koeficienti P, Q, R in S v (I) določljivi s štirimi členi danega zaporedja III. ranga, če postavimo $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ in $n = 4$. Tako je na primer n-ti člen zaporedja $1, 8, 27 \dots t = n^3$ in potem

$$s = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2.$$

§ 247

Prav tako obstajajo zaporedja, katerih 4., 5., 6. diference so konstantne in ki jih zaradi tega imenujemo aritmetična zaporedja četrtega, petega, šestega ranga. Tako je na primer zaporedje četrtih potenc naravnih števil zaporedje četrtega ranga, zaporedje petih potenc naravnih števil petega ranga, na splošno zaporedje m-tih potenc naravnih števil zaporedje m-tega ranga. Ker se taka zaporedja v **vadbeni** matematiki redko pojavljajo, tukaj ne bomo navajali nobenega nadaljnjega zaporedja.

Tako lahko zaključimo zakonitost formul za n-te člene zaporedij in vsote n-tih členov. Vsak, ki je prejšnje dobro razumel, lahko uporabi tabelo:

Rang	n-ti člen t	Vsota n-tih členov s
1	$Pn + Q$	$An^2 + Bn$
2	$Pn^2 + Qn + R$	$An^3 + Bn^2 + Cn$
3	$Pn^3 + Qn^2 + Rn + S$	$An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$
4	$Pn^4 + Qn^3 + Rn^2 + Sn + T$	$An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En$
...	...	...
m	$Pn^m + Qn^{m-1} + \cdots + Yn + Z$	$An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + \cdots + Hn$

Iz tega se vidi, da je vsako tako zaporedje, katerega splošni in sumatorični člen lahko izrazimo kot celo racionalno funkcijo n-ja (take oblike kot je bila pravkar navedena), da tako zaporedje sodi v družino aritmetičnih zaporedij in da se iz najvišjega eksponenta v izražavi s oziroma t vidi, katerega ranga je bilo aritmetično zaporedje in tudi koliko členov zaporedja mora biti danih, da lahko določimo koeficiente v izrazu za t oziroma s.

Poglavje o razporeditvah

(O kombinacijah in permutacijah)

§ 248

Pogosto je potrebno tako pri matematičnih raziskavah kot tudi v vsakdanjem življenju navesti vse možne primere neke zadeve, v določenih primerih pa tudi določiti razmerje verjetnosti proti *neverjetnosti* nekega uspeha, na primer, da se pri aritmetičnem zaporedju I. ranga pojavi 5 količin, od katerih jih poznamo le 3, pa bi radi določili četrto in se lahko vprašamo, kolikokrat se da 5 količin tako povezati, da bodo vsakokrat 4 skupaj; ali pa bi radi vedeli, kolikšna je verjetnost, da bomo zadeli na loteriji, kjer je 90 srečk, pa izvlečemo 5 srečk in bodo 3 zadele ali da so med izbranimi 10 srečkami 3 zadele. Za odgovore na taka vprašanja je potrebno narediti raziskave, na koliko načinov lahko izmed n reči izbereš m reči. To naredimo takole:

§ 249

Imamo dve reči: a in b. Možen je en način povezave teh dveh reči: ab. Če imamo eno reč, potem je 0 možnosti povezave dveh reči. Če pa k dvema rečema a in b dodaš še tretjo reč c, potem so tri povezave dveh reči: ab, ac, bc. Če so 4 reči a, b, c, d, potem so še tri možnosti poleg prejšnjih povezav ad, bd, cd, torej je vseh kombinacij $3 + 3 = 6$. Če dodamo še peto reč e, potem prejšnjim 6 dodamo še 4 možnosti in jih je vseh 10. Tako najdemo, da je pri 6 rečeh 15 možnosti, da damo po dve reči skupaj itd.

Opomba: za lažje razumevanje zapišimo Vegovo razlago po vrsticah:

Štev. reči	Od prej	Kaj dodamo	Vseh možnosti
a			0
a,b	0	ab	1
a,b,c	ab	ac, bc	3
a, b, c, d	ab, ac, bc	ad, bd, cd	6
a, b, c, d, e	ab, ac, bc, ad, bd, cd	ae, be, ce, de	10

Dodane možnosti dobimo tako, da delamo vse pare starih elementov z dodanimi.

Število kombinacij po dveh rečeh pri 1, 2, 3, 4, 5 ... stvareh je aritmetično zaporedje II. ranga.

število reči	1, 2, 3, 4, 5, 6 ...
možnosti 2 skupaj	0, 1, 3, 6, 10, 15 ...

Druge diference so konstantne, pomeni, da je to zaporedje II. ranga in je splošni člen (po § 237) enak $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Torej je posledično:

I. Število kombinacij 2. razreda pri n rečeh *amb* je $\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$.

- Če bomo te reči kombinirali po 3, potem iz 1 ali 2 reči ne moremo narediti *terne*, ko so 3 reči: a, b, c, lahko naredimo 1 terno: abc.
- Če k trojici stvari dodamo še d, potem naredimo vse ambe prvih treh reči, to je ab, ac, bc, dodamo d; abd, acd, bcd in prve tri reči so same še ena terna, torej je vseh tern: abd, acd, bcd, abc.
- Če imamo 5 reči, potem naredimo vse ambe prvih 4 reči: ab, ac, ad, bc, bd, cd, dodamo e k tem šestim ambam abe, ace, ade, bce, bde, cde, s prvimi štirimi rečmi pa vemo že od prej, da lahko naredimo 4 terne, torej je vseh tern 10.
- Ko dodamo še f, je tern toliko, kot je amb s 5-timi rečmi (to je 10), potem je še 10 tern s petimi rečmi, torej je vseh kombinacij s šestimi rečmi po tri, skupaj 20.
- Ko je sedem reči, je torej: s šestimi rečmi je 15 amb, s šestimi rečmi je 20 tern, skupaj 35 tern. In tako naprej.

Torej je pri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ... rečeh 0, 0, 1, 4, 10, 20, 35 ... tern.

To pa je aritmetično zaporedje III. ranga, torej je splošni člen za terne:

$$\text{tern} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}.$$

Posledično je:

II. Število kombinacij 3. razreda ali *tern* pri n rečeh je

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}.$$

- Kombinacije po 4 pri 1, 2, 3 rečeh niso možne.
- Pri štirih rečeh je ena možnost.
- Ko dodamo k rečem a, b, c, d še e, naredim četverke tako, da poiščemo terne prvih 4 reči, teh je 4, dodamo e, in same prve štiri reči so še ena terna, torej jih je skupaj 5.
- Ko k petim rečem a, b, c, d, e dodam še f, je iz petih reči 10 tern, s f torej 10 četverk, iz 5 reči pa je še 5 četverk, skupaj 15 četverk.

Torej je pri 1, 2, 3, 4, 5, 6 rečeh 0, 0, 0, 1, 5, 15 četverk.

To pa je aritmetično zaporedje IV. ranga, torej je splošni člen: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$.

III. Število kombinacij 4. razreda ali *četveric* pri n rečeh je

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}.$$

IV. Če pri n rečeh kombiniramo po m teh reči, je vseh načinov

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-(m+1))}{m(m-1)(m-2)\cdot 1}.$$

Ko vemo, katerega ranga je zaporedje, lahko vse izračunamo s koeficienti tako kot v (§ 248). Vega navede še nekaj številskih primerov.

§ 250 in § 251

V teh dveh poglavjih Vega obravnava primere pri loteriji. Ker je razlaga zelo podrobna, se bomo omejili le na bistvene dele in uporabili sodobne oznake, da bo manj pisanja.

Opomba: Izrazi kot so amba in terna so znani tudi nekaterim starejšim ljudem. V času monarhije so na Dunaju igrali loterijo, pri kateri je igralec lahko zadel terno. Vrednost tega dobitka je bila velika, zato so z izrazom, ta je zadel "terno" označili človeka, ki je imel veliko srečo. Igralec na loteriji je lahko stavil na eno, dve, tri, štiri ali pet številk. Na loteriji so izmed številk od 1 do 90 izžrebali 5 različnih številk. Če je igralec stavil na eno številko in je bila ta izžrebana, je zadel **unijo**, če je stavil na dve in sta bili ti dve številki izžrebani, je zadel **ambo**, če je stavil na tri številke in so bile vse tri izžrebane, je zadel **terno**, če je stavil na štiri številke in so bile tudi izžrebane, je zadel **kvaterno** in če je stavil na pet številk in so bile vse izžrebane, je zadel **činkvino**. Ob stavi je igralec vplačal določen znesek.

Vseh možnih izborov petih številk izmed 90 je $\binom{90}{5} = 43949268$. Ugodne izide za igralce označimo z m. Številka v oklepaju pa naj pomeni, na koliko številk je igralec stavil.

$$m(5) = \binom{5}{5} = 1 \qquad m(4) = \binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} = 425$$

$$m(3) = \binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} = 35700 \qquad m(2) = \binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} = 987700$$

$$m(1) = \binom{5}{1} \cdot \binom{85}{4} = 10123925$$

$$P(5) = \frac{1}{43949268},\ P(4) = \frac{1}{511038},\ P(3) = \frac{1}{11748},\ P(2) = \frac{2}{801},\ P(1) = \frac{1}{18}$$

§ 252

Kako lahko 6 oseb posedemo za mizo (mišljeno v vrsto)? Vega ima naslednji postopek.

Eno reč lahko razporedimo na en način. Dve reči na dva načina *ab* ali *ba*. Tri reči tako, da k prejšnjima dvema načinoma dodamo tretjo reč, ki pa jo lahko dodamo spredaj, zadaj ali vmes, torej: *abc, cab acb* in *bac cab bca*, torej skupaj $2 \cdot 3 = 6$.

Štiri reči pa tako, da k prejšnjim 6 načinom dodamo četrto reč in sicer lahko na začetek, drugo mesto, tretje mesto ali na konec, torej je vseh $6 \cdot 4 = 24$.

Pet reči pa tako, da k prejšnjim 24 načinom dodamo peto reč zopet na začetek, drugo mesto, tretje mesto, četrto mesto ali na konec, torej je vseh: $24 \cdot 5 = 120$.

Ko imam n reči, pa je vseh možnosti torej:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n.$$

Torej je 6 oseb možno posesti za mizo (mišljeno v vrsto) na 720 načinov.

V nadaljevanju na podoben način obravnava tudi permutacije s ponavljanjem.

Geometrijska zaporedja

§ 253

Zaporedja, pri katerih je stalen kvocient med naslednjim in pred njim stoječim členom, je geometrijsko zaporedje, na primer 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... ali padajoče 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$ ... V prvem primeru je kvocient 2, v drugem pa $\frac{1}{3}$. V geometrijskem zaporedju dobiš vsak naslednji člen iz predhodnega tako, da tega pomnožiš s kvocientom. Geometrijsko zaporedje je podano, če sta znana prvi člen in kvocient. Če je prvi člen 2 in kvocient 3, potem je drugi člen 6, tretji 18 itd. Splošno: prvi člen je a in kvocient je q, potem je:

mesto	1	2	3	4	...	n
člen	a	qa	q^2a	q^3a	...	t

Gledamo q. Če je $q > 1$, potem je zaporedje naraščajoče, če je $q < 1$, pa zaporedje padajoče.

Splošni člen zapišemo kot:

I. $\quad t = aq^{n-1}$

Lahko izračunamo vsoto n členov s:

$$s = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}.$$

Da bi enačbo poenostavili, jo pomnožimo s q:

$$sq = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n,$$

zgornjo enačbo odštejemo od spodnje in dobimo:

$$sq - s = aq^n - a, \qquad s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{aq^{n-1}q - a}{q - 1}.$$

II. $\quad s = \frac{tq-a}{q-1}$

Enačbi (I.) in (II.) zapiše Vega še z besedami.

Primera:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 32 = \frac{32 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 63,$$

$$81 + 27 + 9 + 3 = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} - 81}{\frac{1}{3} - 1} = (-80) : \left(-\frac{2}{3}\right) = 120.$$

Opomba: Zanimivo je, da piše Vega izraze, kot je recimo $-80 : -\frac{2}{3}$ brez oklepajev, pomeni, da ima skupaj dva računska znaka.

Iz teh dveh primerov vidimo, da je pri padajočem zaporedju kot pri naraščajočem zaporedju možno obrniti vrstni red seštevanja.

Zapišimo vsoto členov geometrijskega zaporedja:

$$s = a + aq + aq^2 + \cdots + t.$$

Če od vsote s odštejemo zadnji člen, dobimo $s - t$, če pa odštejemo prvi člen, dobimo $s - a$. Kvocient teh dveh izrazov je tudi kvocient geometrijskega zaporedja.

$$\frac{s-t}{s-a} = \frac{a}{aq},$$

in iz tega sledi, da je

$$s = \frac{tq-a}{q-1}.$$

§ 254

Pri geometrijskih zaporedjih je prav tako kot pri aritmetičnih zaporedjih možnih 5 količin: prvi člen a, splošni člen t, kvocient q, število členov n in vsota n členov s. Če so znane tri količine, na primer s, n in a ali pa s, n, t, lahko ostali dve, q in t oziroma a in q, izrazimo z njimi.

V tabeli vidimo, da so nekatere enačbe, kot so 4., 12., 15. in 16. višje stopnje (polinomi n-te stopnje). Iz enačb 17., 18., 19. in 20. lahko najdemo n le z znanjem logaritmov, ki pa sledijo temu poglavju.

Iščemo	Dano	Štev.	Formula	Namig
	a, q, n	1	$t = aq^{n-1}$	§ 253, I.
	a, q, s	2	$t = \dfrac{a + (q-1)s}{q}$	§ 253 II.
t	q, n, s	3	$t = \dfrac{q^{n-1}(q-1)s}{q^n - 1}$	I., II
	a, n, s	4	$t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$	I. in II.
	a,q,t	5	$s = \dfrac{tq-a}{q-1}$	§ 258, II.
	a,q,n	6	$s = \dfrac{a(q^n - 1)}{q-1}$	I., II.
s	q,n,t	7	$s = \dfrac{t(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}$	I., II.
	a,n,t	8	$s = \dfrac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$	I., II.

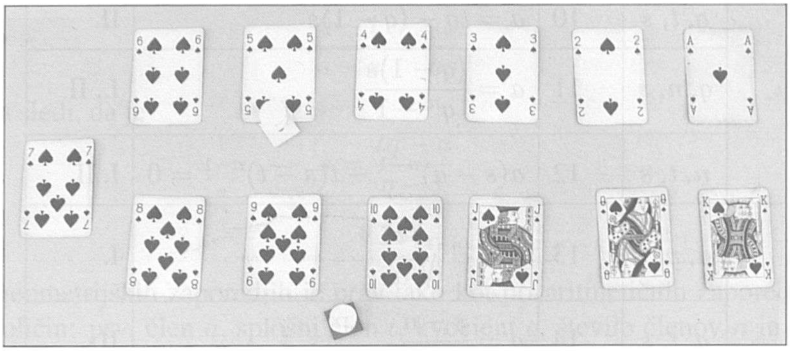
Iščemo	Dano	Štev.	Formula	Namig
	q, n, t	9	$a = \dfrac{t}{q^{n-1}}$	I.
	q, t, s	10	$a = tq - (q-1)s$	II.
a	q, n, s	11	$a = \dfrac{(q-1)s}{q^n - 1}$	I., II.
	n, t, s	12	$a(s-a)^{n-1} - t(s-t)^{n-1} = 0$	I.,II.
	a, n, t	13	$q = \sqrt[n-1]{\dfrac{t}{a}}$	I.
	a, t, s	14	$q = \dfrac{s-a}{s-t}$	II.
q	a, n, s	15	$q^n - \dfrac{s}{a}q + \dfrac{s-a}{a} = 0$	I., II.
	n, t, s	16	$q^n - \dfrac{s}{s-t}q^{n-1} + \dfrac{t}{s-t} = 0$	I., II.
	a, q, t	17	$q^n = \dfrac{tq}{a}$	I.
	a, t, s	18	$\left(\dfrac{s-a}{s-t}\right)^{n-1} = \dfrac{t}{a}$	I.
n	q, t, s	19	$q^n = \dfrac{tq}{tq - (q-1)s}$	I., II.
	a, q, s	20	$q^n = \dfrac{a + (q-1)s}{a}$	I., II.

Igra pharo ali faro

Na eni izmed 52 kart, ki so jih igrali na dvoru kralja Ludvika XIV., je bila slika egipčanskega faraona, od tod ime igre pharo oziroma faro. Karte so bile pravokotne oblike (niso imele zaobljenih robov, kot jih imajo danes) in slike na njih niso bile dvodelne (na primer: na vsaki polovici karte je danes narisana dama). Navedli bomo le osnovna pravila igre.

Igro je vodil delitelj (dealer ali bankir). Ta je najprej dobro premešal 52 kart in jih dal v posebno delilno škatlo. Škatla je imela vzmetni mehanizem, ki je omogočal, da so iz kupa kart vlekli posamezne karte z licem, obrnjenim navzgor.

Na igralnih mizah so bile slike kart. Igralci so na izbrano karto (ali več izbranih kart) položili vrednostne žetone (včasih tudi kar denar) in svoj kupček označili s posebnimi značkami (markerji), ki so bile značilne za posameznega igralca. Tako ni prišlo do pomot.



Z današnjimi kartami smo prikazali sliko igralne mize in stavi dveh igralcev. Če so žetoni med dvema kartama, pomeni, da je igralec stavil na obe sosednji karti hkrati.

Delilec je prvo karto, ki jo je izvlekel iz škatle, odstranil (rekli so ji *soda*). Odstranil jo je zato, ker bi pri vstavljanju kupa kart v delilno škatlo igralci lahko to karto videli. Naslednja karta, ki jo je delilec izvlekel iz delilne škatle, je bila karta, ki je igralcem prinesla izgubo (*losing card*). Delilec jo je postavil na desno stran delilne škatle. Nato je iz škatle izvlekel še eno karto, ta pa je igralcem prinesla dobiček. Ko sta bili izvlečeni obe karti, je delilčev asistent pobral ves denar, ki je bil stavljen na *izgubljeno* karto in vrnil denar tistim, ki so stavili na zmagovalno karto. Navadno je bila menjava 1 : 1, kar pomeni, da je igralec dobil toliko denarja, kot je stavil. Vse ostale stave, ki so bile na drugih kartah, je delilec pustil pri miru. Igralci so med dvema *rundama* lahko spremenili svojo odločitev ali pa dodali še kakšno stavo.

Delilec je sproti vodil kontrolo, katere karte so bile že izvlečene. V ta namen je imel posebno napravo, podobno abakusu, kjer so bile v sredini označene karte (tako kot na igralni mizi), nad kartami in pod njimi pa na palicah (kot pri abakusu) posebne značke. Z značkami, ki jih je premikal, je označil, katera karta je bila izvlečena (recimo trije asi), in še, ali je dobila ali izgubila.

Ko so vsi stavili, je delilec znova iz delilne škatle potegnil dve karti. Po nekaj takih *rundah* se je kateri od igralcev lahko zmotil in stavil na karto, ki je že bila izvlečena. Če je to opazil kateri od soigralcev, je lahko ves denar, ki je bil naložen na to karto, pobral.

Igra se je izvajala zelo hitro, saj so bile lahko vse karte izvlečene v dobrih 15 minutah.

Delitev dobička v primeru, ko je stavil igralec na dve karti hkrati, pa je ena od njih izgubila, druga pa dobila, je bila posebej določena. Najpogosteje je pol denarja igralec izgubil. Če pa je bila izvlečena le ena karta od stavljenih dveh kart, pa je igralec izgubil ali dobil ves zastavljeni denar.

Poseben postopek je veljal za zadnje tri karte, to je po 24 rundah. Igralci so stavili, v kakšnem zaporedju bodo izvlečene zadnje tri karte. Pogoji izplačil v takem primeru so bili različni. Za zadete vse tri karte v pravem vrstnem redu je lahko delilec izplačal stavo v razmerju 4 : 1.

Dogajanje okrog igralne mize je bilo zelo glasno. Delilec je imel navadno še pomočnika, ki je pazil na goljufe. Goljufali pa so lahko tudi delilci, saj so ti navadno potovali iz kraja v kraj in s seboj nosili delilno škatlo in karte. Izdelovalci škatel so znali narediti škatlo, ki je omogočala goljufanje, pa čeprav je bila navzven popolnoma enaka *pošteni* škatli. Največ dobička pri tej igri so imeli delilci.

Zaključek

Vegova razlaga je natančna in lahko razumljiva. Začne s konkretnimi primeri, preide na izpeljavo formul in konča z rešenim primerom. Vse obrazce na neki način tudi dokaže, saj v razlagi zaslutimo dokazovanje z indukcijo. Za utrjevanje poskrbi s poglavji, ki imajo besedilne naloge (včasih smo temu rekli uporabne naloge). Primeri so zajeti iz vsakdanjega življenja in so poučni. Tabele in skice v knjigi so skrbno izdelane. Matematične količine piše ležeče, uporabljen je razprti tisk. Vegovo poimenovanje nekaterih količin je nenavadno, ne uporablja izrazov, kot so delne vsote, variacije itd. Zanimivo je tudi, da število členov zaporedja ni vedno naravno število (pri nalogi o kopanju vodnjaka dobi rezultat 2,5). Pisanje izrazov je za današnji čas nenavadno, saj sta včasih dva računska znaka skupaj (brez oklepajev), tudi vrstni red računskih operacij ne navaja z oklepaji (primer: zapiše $s - t : s - a$ za izraz $(s-t)/(s-a)$). Izbrane teme iz knjige se učijo tudi današnji gimnazijci (in nekateri drugi srednješolci). Če primerjamo Vegovo razlago z razlago v današnjih učbenikih, ugotovimo, da je v današnjih učbenikih manj "besedne razlage" in več zapisa s simboli, da formule le redko pišemo z besedami (to je v navadi v osnovnošolskih učbenikih) in da se ukvarjamo le z zaporedji prvega in drugega ranga. Tudi zapis vseh izpeljanih izrazov (formul) za posamezne količine (na primer zapisani v tabelah pri zaporedjih) danes ni v navadi.

Vir

(1.) http://www.bcvc.net/faro