UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

ZAKLJUČNA NALOGA

ZAKLJUČNA NALOGA

LIHO DOMINANTNE MNOŽICE V GRAFIH

MAJA FRANGEŽ

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Liho dominantne množice v grafih

(Odd dominating sets in graphs)

Ime in priimek: Maja Frangež
Študijski program: Matematika
Mentor: doc. dr. Martin Milanič

Koper, september 2013

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Maja FRANGEŽ

Naslov zaključne naloge: Liho dominantne množice v grafih

Kraj: Koper

Leto: 2013

Število listov: 37 Število slik: 17

Število referenc: 39

Mentor: doc. dr. Martin Milanič

Ključne besede: dominantna množica, liho dominantna množica, problem samih enic

Math. Subj. Class. (2010): 05C69, 05C50

Izvleček:
Liho dominantna množica v grafu $G = (V, E)$ je množica točk $S \subseteq V$, ki za vsako točko $v \in V$ vsebuje liho mnogo elementov, ki so bodisi enaki v ali pa povezani z v. V nalogi obravnavamo pojem liho dominantne množice v grafih ter nekatere druge sorodne pojme. Predstavljen je problem "samih enic". Tukaj spoznamo igro prižiganja luči v sobah neke stavbe, stikala pa prižigajo ne le luč svoje sobe, temveč tudi luči v vseh sosednjih. Željen cilj je, da so vse luči na koncu prižgane. Opisan je Sutnerjev izrek, ki pravi, da v vsakem končnem grafu obstaja liho dominantna množica. Predstavljeni in razloženi so en linearno algebraičen in dva kombinatorična dokaza Sutnerjevega izreka. Obravnavamo tudi liho dominantne množice v določenih grafovskih družinah, kot so poti, cikli, polni grafi, polni dvodelni grafi in hiperkocke. Za vsako od teh grafovskih družin podamo preprost algoritem iskanja liho dominantne množice. V zaključku je obravnavan še algoritmični vidik problema iskanja najmanjše liho dominantne množice v danem grafu. Podani so pregledi znanih rezultatov o računski zahtevnosti problema v različnih grafovskih razredih.

Key words documentation

Name and SURNAME: Maja FRANGEŽ

Title of final project paper: Odd dominating sets in graphs

Place: Koper

Year: 2013

Number of pages: 37 Number of figures: 17

Number of references: 39

Mentor: doc. dr. Martin Milanič

Keywords: dominating set, odd dominating set, all-ones problem

Math. Subj. Class. (2010): 05C69, 05C50

Abstract:
An odd dominating set in a graph $G = (V, E)$ is a set of vertices $S \subseteq V$ that has an odd number of vertices for each vertex $v \in V$ that are either equal to v or connected to v. In this final project paper, we discuss the notion odd dominating set in a graph and some related notions. The "all ones"problem is also presented. We consider the game of turning on and off the lights in rooms of a building, where neighboring rooms also change their status when a switch is pressed. The goal is to turn all the lights on. We mention Sutner's Theorem that states that there is an odd dominating set in every finite graph. In this final project paper we present and discuss three proofs of Sutner's Theorem, one linear algebraic one and two combinatorial ones. We discuss odd dominating sets in different classes of graphs such as paths, cycles, complete graphs, complete bipartite graphs, and hypercubes, and present algorithms for each of these graph classes. In the final part we discuss algorithmic aspects of the problem of finding the smallest odd dominating set in a given graph, presenting an overview of known results on the complexity of this problem in different graph classes.

Zahvala

Rada bi se zahvalila mentorju Martinu Milaniču za vso pomoč pri diplomski nalogi, strokovne popravke, hitri odziv in pripravljenost na redne sestanke. Brez vas mi ne bi uspelo. Hvala Vesni za nesebično pomoč pri (lepotnih) zadnjih popravkih, fantu za čustveno podporo in družini, da so verjeli vame in me podpirali.

Kazalo

Seznam slik **VI**

Seznam kratic **VII**

1 Uvod **1**
1.1 Pojem liho dominantne množice v jeziku linearne algebre 6

2 Linearno algebraičen dokaz **11**

3 Kombinatorična dokaza **12**
3.1 Kombinatorični dokaz preko usmerjenih grafov 12
3.2 Lovászov kombinatorični dokaz 14

4 Liho dominantne množice v nekaterih konkretnih grafovskih družinah **16**
4.1 Poti 16
4.2 Cikli 18
4.3 Polni grafi 19
4.4 Polni dvodelni grafi 20
4.5 Hiperkocke 22

5 Pregled računske zahtevnosti **24**

6 Zaključek **26**

Literatura **27**

Seznam slik

1.1 Totalna dominantna množica. 1
1.2 Dvodelna dominacija. 2
1.3 Razdaljno-2-dominantna množica na mreži. 2
1.4 Razdaljno-2-dominantna množica v hiperkocki Q_4. 3
1.5 Radijski oddajniki v vasicah. 3
1.6 Primer grafov brez učinkovito dominantne množice. 4
1.7 Primer grafa brez sodo dominantne množice. 5

4.1 Pot na 8 točkah. 16
4.2 Liho dominantna množica v poti P_8. 18
4.3 Cikel na 6 točkah. 18
4.4 Liho dominantna množica v ciklu C_6. 19
4.5 Poln graf K_8. 19
4.6 Liho dominantna množica v polnem grafu K_8. 20
4.7 Polni dvodelni graf $K_{3,5}$. 20
4.8 Liho dominantna množica v dvodelnem grafu $K_{3,5}$. 22
4.9 Hiperkocka Q_3. 22
4.10 Zgleda liho dominantnih množic v hiperkocki Q_3. 23

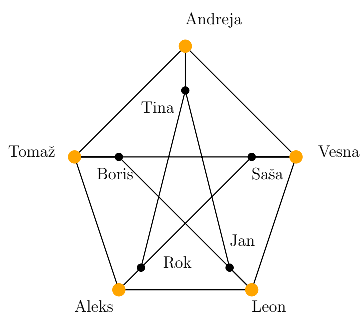
Seznam kratic

tj.	to je
npr.	na primer
oz.	oziroma
itd.	in tako dalje

1 Uvod

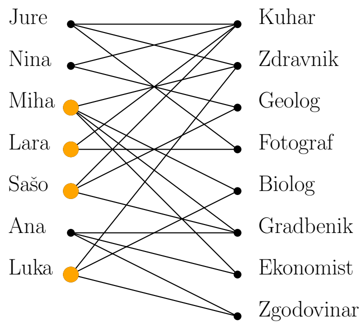
Dominantna množica je podmnožica točk nekega grafa, za katero velja, da dominira vse ostale točke v grafu. Pravimo, da ena točka v grafu dominira drugo točko, če sta bodisi enaki ali povezani s povezavo grafa. V zadnjih 50-ih letih je bilo objavljenih veliko člankov na to temo, kjer so se razvile razne specifične oblike dominantnih množic, nekaj primerov bomo kasneje tudi omenili. V vsakodnevnem življenju lahko najdemo problem iskanja dominantne množice skoraj vsepovsod. Nekaj primerov si lahko ogledamo v naslednjih odstavkih, še več jih najdemo v [21]. Posebna oblika dominantne množice je liho dominantna množica. Tej se bomo tudi najbolj posvetili skozi nalogo. Poglejmo si sedaj primere dominantnih množic iz realnega sveta.

Imamo skupino ljudi, ki si med seboj delijo različne lastnosti. Radi bi sestavili manjšo skupino predstavnikov, tako da ima vsaka oseba neko skupno lastnost z vsaj enim izmed predstavnikov. Tukaj imamo problem dominantne množice v grafu, kjer so ljudje točke, povezava med dvema osebama pa obstaja, če imata skupno lastnost. Lahko tudi želimo, da vsak izmed predstavnikov pozna vsaj še kakšnega predstavnika, Slika 1.1. Temu rečemo problem totalne dominantne množice.



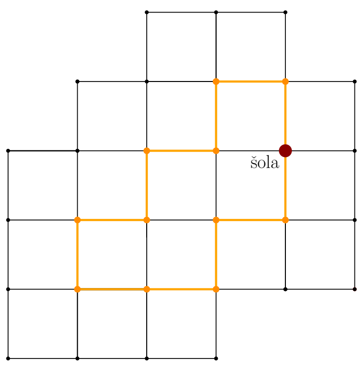
Slika 1.1: Totalna dominantna množica.

Lahko se nam pojavi problem, kjer imamo na eni strani množico ljudi, na drugi pa množico spretnosti, ki jih obvladajo. Radi bi poslali čim manj ljudi na ekspedicijo, vendar bi radi, da je vsaka spretnost obvladana s strani vsaj ene osebe. Iščemo torej najmanjšo podmnožico oseb, da bodo vse spretnosti še vedno zajete. Ti dve skupini si lahko predstavljamo z dvodelnim grafom, za primer glej Sliko 1.2, kjer so osebe točke na eni strani, spretnosti na drugi in povezava obstaja med osebo in spretnostjo, če oseba obvlada to spretnost. Iskanje čim manjše podmnožice oseb, tako da so vse spretnosti še vedno zajete, lahko prevedemo na dvodelno dominacijo.



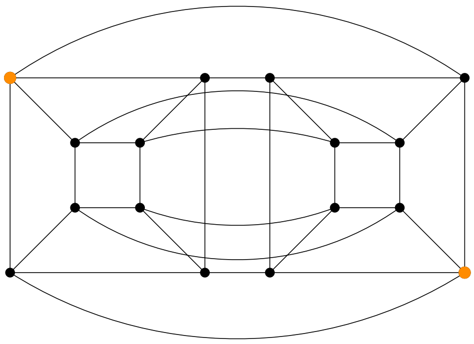
Slika 1.2: Dvodelna dominacija.

Še en zanimiv problem se pojavi, ko šola poskuša izbrati pot, po kateri bo avtobus pobiral otroke in jih nato dostavil v šolo. Večinoma imamo še kakšno dodatno pravilo, kot npr. noben otrok naj ne bi hodil več kot pol kilometra do avtobusne postaje, avtobus lahko vozi le določen čas in določeno število otrok itd. Tukaj si predstavljamo graf kot mrežo, kjer avtobus vozi po povezavah. Ena izmed točk v grafu je šola, druge so možne avtobusne postaje ali hiše otrok. Matematično iščemo razdaljno-2-dominantno množico. S tem povemo, da za vsako točko, ki ni v množici, obstaja razdalja največ 2 do nje (vsak otrok bo hodil največ 2 povezavi do avtobusne postaje). Eno izmed rešitev problema lahko vidimo na Sliki 1.3.



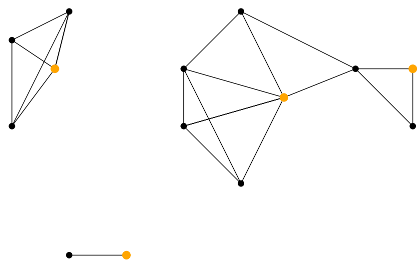
Slika 1.3: Razdaljno-2-dominantna množica na mreži.

Imamo omrežje, ki ga sestavlja 16 računalnikov, ki so med seboj povezani. Vsak lahko deli svoje informacije le s tistimi, s katerimi je povezan. Ko se zgodi, da potrebujemo informacije z vseh v čimkrajšem času na določeni majhni skupini računalnikov, lahko informacija potuje predolgo, če ni blizu te skupine. Izbrati moramo torej takšno skupino, da bo blizu vsem ostalim računalnikom. Ponovno iščemo razdaljno-2-dominantno množico na grafu, kjer so računalniki predstavljeni kot točke, med katerimi obstaja povezava le, če sta računalnika povezana. Primer take množice vidimo tudi na Sliki 1.4.



Slika 1.4: Razdaljno-2-dominantna množica v hiperkocki Q_4.

Radijska postaja želi postaviti svoje oddajnike na oddaljenih koncih države, tako da jo bodo vse vasice prejemale. Vsak oddajnik ima omejen obseg oddajanja, tako da jih bomo morali postaviti več, da bomo lahko dosegli tudi najbolj oddaljene vasice. Oddajniki so pa po drugi strani dragi, zato jih želimo postaviti čim manj. V grafu točke predstavljajo vasice, povezava med vasicama obstaja, če sta oddaljeni manj kot obseg oddajanja oddajnika kot na sliki 1.5. Poiščemo dominantno množico.



Slika 1.5: Radijski oddajniki v vasicah.

Ti primeri aplikacij se pojavijo v [21].

Da bi opredelili pojem dominantne množice, si moramo najprej pogledati ňekaj osnovnih pojmov. Naslednje definicije lahko najdemo v [21, 22].

Definicija 1.1. Točki grafa G $v_i, v_j \in V(G)$ sta *sosedni*, če je $v_iv_j \in E(G)$. *Odprta soseščina* točke v, z oznako $N_G(v)$, je množica vseh točk v grafu G, sosednih točki v, tj., $N_G(v) = \{u \in G : uv \in E(G)\}$, *zaprta soseščina* točke v, z oznako $N_G[v]$, pa unija odprte soseščine točke v in množice s točko v, tj., $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

Indeksa G ne bomo pisali, kadar bo razviden iz konteksta.

Definicija 1.2. Naj bo G graf in V njegova množica točk. Množica $S \subseteq V$ je *dominantna množica*, kadar za vsako točko $y \in V \backslash S$ obstaja $x \in S$, sosedna točki y. Ekvivalentno, množica S je dominantna, če je $|N[v] \cap S| \geq 1$ za vse $v \in V$.

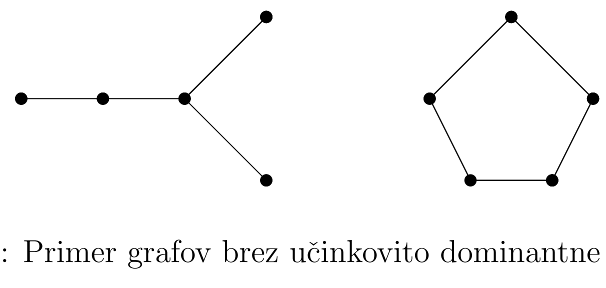
V literaturi je študiranih veliko različic dominantnih množic, kot so npr. najmanjša dominantna množica in totalna dominantna množica [21], globalna ter razdaljno dominantna množica [22], (k,q)-neodvisna dominantna množica v [23], parna dominantna množica [19, 20], dominantna množica ostankov [9], (totalna, neodvisna ali povezana) popolna dominantna množica ter utežena popolna dominantna množica [12, 38, 39], utežena učinkovito dominantna množica [32], povezavno dominantna množica [4].

V nalogi bomo obravnavali liho dominantno množico, predstavili pa bomo tudi sodo in učinkovito dominantno množico. Definicije lahko najdemo v [19, 21, 22].

Definicija 1.3. Naj bo G graf, V njegova množica točk S pa dominantna množica. Množici $S \subseteq V$ rečemo *liho dominantna množica*, kadar za vsak $v \in S$ velja, da ima sodo mnogo povezav s točkami množice S, vsak $u \in V \backslash S$ pa liho mnogo povezav z množico S. Ekvivalentno, množica S je liho dominantna, če je $|N[v] \cap S| \equiv 1 \pmod 2$ za vse $v \in V$.

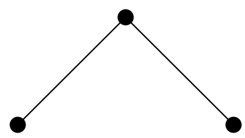
Definicija 1.4. *Stopnja točke* v v neusmerjenem grafu G je število vseh njenih sosednih točk; $d_G[v] = |N_G(v)|$. *Izolirana točka* je točka s stopnjo 0. *Neodvisna množica* S v grafu G je podmnožica $S \subseteq V(G)$ paroma nepovezanih točk, tj., če sta $u, v \in S$, potem $uv \notin E(G)$.

Definicija 1.5. Naj bo G graf in V njegova množica točk. Neodvisna množica $S \subseteq V$ je *učinkovito dominantna množica*, kadar za vsako točko $v \notin S$ velja, da ima natanko eno sosedno točko v S. Vse učinkovite množice v grafu G imajo enako moč.(Za dokaz glej [3]) Ekvivalentno, množica S je učinkovita, če je $|N[v] \cap S| = 1$ za vse $v \in V$.



Slika 1.6: Primer grafov brez učinkovito dominantne množice.

Definicija 1.6. Naj bo G graf, V njegova množica točk. Neprazna množica $S \subseteq V$ je *sodo dominantna množica* grafa G, če je vsaka točka grafa dominirana s sodo mnogo točkami iz množice S. Ekvivalentno, množica S je sodo dominantna, če je $|N[v] \cap S| \equiv 0 \pmod 2$ za vse $v \in V$.



Slika 1.7: Primer grafa brez sodo dominantne množice.

Sutner je predstavil problem samih enic v [34]. Imamo $n \times n$ šahovnico, kjer ima vsak kvadrat stikalo in luč. Kadar pritisnemo na stikalo kvadrata, se spremeni stanje luči (ugasnjeno-prižgano) v tem kvadratu in v vseh sosednjih. Na začetku so vse luči ugasnjene, zanima nas, ali je možno pritisniti na stikala kvadratov v takšnem zaporedju, da bodo na koncu vse luči prižgane. Temu problemu rečemo *problem samih enic*. Problem se v literaturi pojavlja tudi pod imenom "igra prižiganja luči".

Kvadrate si lahko predstavljamo kot točke grafa, kjer sta dve povezani, če sta kvadrata sosednja. Dvojni pritisk na stikalo ima enak učinek, kot da na stikalo ne bi pritisnili. Iščemo torej neko tako množico kvadratov S, da če pritisnemo samo na stikala teh kvadratov, se vse luči prižgejo. Množica S je rešitev problema samih enic le, ko za vsak kvadrat t velja, da je število kvadratov v S sosednjih ali enakih t liho število. To pa je ravno liho dominantna množica v zgoraj opisanem grafu. V istem članku pride Sutner tudi do zaključka, da v vsakem končnem grafu lahko najdemo rešitev problema samih enic.

Izrek 1.7 (Sutnerjev izrek)**.** *Vsak končen neusmerjen graf vsebuje liho dominantno množico.*

Različne dokaze tega izreka bomo predstavili kasneje v nalogi.

1.1 Pojem liho dominantne množice v jeziku linearne algebre

Pojme liho, sodo in učinkovito dominantne množice je moč definirati tudi povsem v jeziku linearne algebre, tako da vsako množico predstavimo z njenim karakterističnim vektorjem.

Naj bo G graf reda $n \geq 1$ z množico točk $V = \{v_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ in množico povezav E. Najprej opišimo splošno zvezo med podmnožicami množice V in vektorji v $\{0, 1\}^V$.

Definicija 1.8. Za vsako podmnožico $S \subseteq V$ lahko definiramo njen *karakteristični vektor* $\chi^S \in \{0, 1\}^n$ s predpisom:

$$\chi_i^S = \begin{cases} 1, & \text{če } i \in S; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Če je S liho dominantna množica, mora za vsako točko $v_i \in V$ veljati $|S \cap N_G[v_i]| \equiv 1 \pmod 2$, kar pa je ekvivalentno temu, da za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ velja, da je skalarni produkt $(\chi^{N[v_i]})^\top \chi^S \equiv 1 \pmod 2$. Oblikujmo matriko A reda $n \times n$ s karakterističnimi vektorji zaprtih soseščin $\chi^{N[v_i]}$. Dobimo matriko $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } v_i v_j \in E \text{ ali } i = j, \text{ kjer je } 1 \leq i, j \leq n; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Naj bo $\mathbf{1}$ vektor samih enic dolžine n. Prišli smo torej do naslednje zveze:

Trditev 1.9. *Neprazna množica $S \subseteq V$ je liho dominantna množica natanko tedaj, ko njen karakteristični vektor $x = \chi^S$ zadošča sistemu linearnih kongruenc $Ax \equiv \mathbf{1} \pmod 2$.*

Kongruenco dveh vektorjev enakih razsežnosti po nekem modulu definiramo po komponentah. Sistem linearnih kongruenc $Ax \equiv \mathbf{1} \pmod 2$ je seveda enakovreden linearnemu sistemu $Ax = \mathbf{1}$ v polju $GF(2)$.

Podobno pridemo do zaključka za sodo in učinkovito dominantno množico.

Trditev 1.10. *Naj bo $\mathbf{0}$ vektor samih ničel dolžine n. Neprazna množica $S \subseteq V$ je sodo dominantna množica natanko tedaj, ko njen karakteristični vektor $x = \chi^S$ zadošča sistemu linearnih kongruenc $Ax \equiv \mathbf{0} \pmod 2$.*

Sistem linearnih kongruenc $Ax \equiv \mathbf{0} \pmod 2$ je enakovreden linearnemu sistemu $Ax = \mathbf{0}$ v polju $GF(2)$.

Trditev 1.11. *Neprazna množica $S \subseteq V$ je učinkovito dominantna množica natanko tedaj, ko njen karakteristični vektor $x = \chi^S$ zadošča sistemu linearnih kongruenc $Ax = \mathbf{1}$.*

Definicija 1.12. Naj bo $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ končna množica in x vektor v $\{0,1\}^n$. *Nosilec vektorja x*, z oznako $\operatorname{supp}(x)$, je definiran kot množica vseh elementov $v_i \in V$, kjer je $x_i = 1$.

V nalogi je V vselej množica točk obravnavanega grafa.

Definirajmo operacijo seštevanja množic kot simetrično razliko dveh množic, torej: $A + B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Vsaki množici S priredimo njen karakteristični vektor χ^S. Sledi: $A + B = \operatorname{supp}(\chi^A + \chi^B)$. Definicijo vsote lahko posplošimo na vsoto poljubnega končnega števila podmnožic množice V, s predpisom

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \operatorname{supp}\left(\sum_{i=1}^{k} \chi^{A_i}\right). \tag{1.1}$$

Lema 1.13. *Za vsaki dve podmnožici $A, B \subseteq V$ velja $\chi^{A\cap B} = \min\{\chi^A, \chi^B\}$, kjer je minimum dveh vektorjev računan po komponentah.*

Dokaz. Poglejmo si najprej vektor $\chi^{A\cap B}$. Velja

$$\chi_i^{A\cap B} = \begin{cases} 1, & \text{če } v_i \in A \cap B; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Recimo, da je $v_i \in A \cap B$. Sledi $v_i \in A \wedge v_i \in B \Rightarrow \chi^{A_i} = 1 \wedge \chi^{B_i} = 1$, torej je $\min\{\chi^{A_i}, \chi^{B_i}\} = 1$. Po drugi strani, če pa $v_i \notin A \cap B \Rightarrow v_i \notin A \vee v_i \notin B \Rightarrow \chi^{A_i} = 0 \vee \chi^{B_i} = 0$, torej je $\min\{\chi^{A_i}, \chi^{B_i}\} = 0$. Karakteristična vektorja se ujemata v vsaki komponenti, torej sledi $\chi^{A\cap B} = \min\{\chi^A, \chi^B\}$. □

Lema 1.14. *Za karakteristične vektorje množic A_i, B, kjer $i \in \{1, \ldots, k\}$, velja*

$$\sum_{i=1}^{k} \min\{\chi^{A_i}, \chi^B\} = \min\left\{\sum_{i=1}^{k} \chi^{A_i}, \chi^B\right\}.$$

Dokaz. Dokazali bomo z indukcijo po k. Ko je $k = 1$, je $\sum_{i=1}^{1} \min\{\chi^{A_i}, \chi^B\} = \min\{\chi^{A_1}, \chi^B\} = \min\{\sum_{i=1}^{1} \chi^{A_i}, \chi^B\}$.
Predpostavimo, da trditev velja za nek $k \geq 1$ in jo preverimo za $k + 1$. $\sum_{i=1}^{k+1} \min\{\chi^{A_i}, \chi^B\} = \sum_{i=1}^{k} \min\{\chi^{A_i}, \chi^B\} + \min\{\chi^{A_{k+1}}, \chi^B\}$, kar je po predpostavki enako $\min\{\sum_{i=1}^{k} \chi^{A_i}, \chi^B\} + \min\{\chi^{A_{k+1}}, \chi^B\}$, to pa je kar $\min\{\sum_{i=1}^{k+1} \chi^{A_i}, \chi^B\}$. □

Lema 1.15. *Za množice $A_1, \ldots, A_k, B$ velja: $(\sum_{i=1}^{k} A_i) \cap B = \sum_{i=1}^{k} (A_i \cap B)$.*

Dokaz. Poglejmo si najprej desno stran enačbe.
$\sum_{i=1}^{k}(A_i \cap B)$ je zaradi (1.1) enako $\mathrm{supp}(\sum_{i=1}^{k}\chi^{A_i \cap B})$, po Lemi 1.13 je to enako $\mathrm{supp}(\sum_{i=1}^{k}\min(\chi^{A_i},\chi^{B}))$, to pa je po Lemi 1.14 enako $\mathrm{supp}(\min(\sum_{i=1}^{k}\chi^{A_i},\chi^{B})) = \mathrm{supp}(\min(\chi^{\sum_{i=1}^{k}A_i},\chi^{B})) = \mathrm{supp}(\min(\chi^{(\sum_{i=1}^{k}A_i)\cap B})) = (\sum_{i=1}^{k}A_i)\cap B$. □

Večina teh konceptov se da definirati za usmerjene grafe (digrafe), definicije naslednjih pojmov najdemo v [2]. Pri naslednjih definicijah indeksa G ne bomo pisali, če to ne bo potrebno.

Definicija 1.16. *Vhodna soseščina točke* v, z oznako $N_G^-(v)$, je množica vseh točk $u \in G$, za katere velja $uv \in E(G)$, *izhodna soseščina točke*, v z oznako $N_G^+(v)$, pa je množica vseh točk $u \in G$, za katere velja $vu \in E(G)$. *Soseščino točke* v, z oznako $N_G(v)$, dobimo kot unijo vhodne in izhodne soseščine.

Definicija 1.17. *Vhodna stopnja točke* v, z oznako $d_G^-(v)$, v usmerjenem grafu G je število vseh povezav $\{uv \in E(G)\}$ oz. $|N_G^-(v)|$, *izhodna stopnja točke* v, z oznako $d_G^+(v)$, v usmerjenem grafu G pa število vseh povezav $\{vu \in E(G)\}$ oz. $|N_G^+(v)|$. *Stopnja točke* v v usmerjenem grafu G je število vseh njenih sosednih točk; $d_G(v) = |N_G(v)|$.

Definicija 1.18. Naj bo G usmerjen graf z zanko na vsaki točki. Množica $U \subseteq V(G)$ je *liho dominantna množica*, če za vsako točko $v \in V(G)$ velja, da je $|N^-(v) \cap S|$ liho število.

V nalogi bom v prvem poglavju predstavila linearno algebraičen ter v drugem poglavju še dva grafovsko-teoretična dokaza Sutnerjevega izreka. Ta pravi, da vsak končen neusmerjen graf vsebuje liho dominantno množico. V jeziku igre prižiganja luči je to ekvivalentno pogoju, da so vse luči prižgane po pritiskih na stikala določenih točk, saj te točke ravno sestavljajo našo liho dominantno množico. V tretjem poglavju se bom omejila na določene grafovske družine, kot so poti, cikli, polni grafi, polni dvodelni grafi in hiperkocke, ter za vsako poiskala liho dominantne množice. V zadnjem poglavju bom predstavila še probleme iskanja najmanjše liho dominantne množice, učinkovito dominantne množice in zahtevnost teh problemov v določenih grafovskih razredih.

Zapišimo še definicije nekaterih pojmov, ki se pojavijo v nalogi.

Definicija 1.19. *Induciran podgraf* $G[S]$ je graf na množici točk $S \subseteq V(G), S \neq \emptyset$, z množico povezav $v_iv_j \in E(G[S]) \Leftrightarrow v_iv_j \in E(G)$ za vsak par točk $v_i, v_j \in S$.

Definicija 1.20. Če lahko graf narišemo v ravnini tako, da se povezave med seboj ne sekajo, razen v krajiščih, takemu grafu rečemo *ravninski graf (angl. planar graph)*.

Definicija 1.21. *Enociklični graf (angl. unicyclic graph)* je graf, ki vsebuje natanko en cikel.

Definicija 1.22. *Regularen graf* je graf, kjer imajo vsa vozlišča enako stopnjo. Rečemo, da je graf k-regularen, ko imajo vsa vozlišča stopnjo k. *Kubični graf* je graf, kjer so vse točke stopnje 3.

Definicija 1.23. Naj bo $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset C_1$ množica lokov na fiksni krožnici. Pripadajoči *graf krožnih lokov (angl. circular-arc graph)* je graf $G = (V, E)$, kjer je $V = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ in $I_i I_j \in E(G) \Leftrightarrow I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

Definicija 1.24. Graf z dvema posebej označenima točkama s in t, ki ju imenujemo *izvor* in *ponor*, imenujemo *zaporedno-vzporedni graf (angl. series-paralel graphs)*, če ga lahko spremenimo v polni graf K_2 z naslednjima operacijama:

- zamenjamo par vzporednih povezav z eno povezavo, ki združi njuni skupni točki,
- zamenjamo par povezav, ki vodita do točke stopnje 2 z eno samo povezavo, če točka ni s ali t.

Definicija 1.25. *Tetivni graf (angl. chordal graph)* je graf, ki ima v vsakem ciklu na vsaj 4 točkah tetivo (povezavo med nezaporednima točkama cikla).

Definicija 1.26. *Primerjalni graf (angl. comparability graph)* je graf, ki ima tako usmeritev E' množice povezav, ki je hkrati aciklična (tj., nima usmerjenih ciklov) in tranzitivna (tj., če je $uv \in E'$ in $vw \in E'$, potem je tudi $vw \in E'$). *Neprimerjalni graf (angl. cocomparability graph)* je graf, katerega komplement je primerjalni graf.

Definicija 1.27. *Drevesna dekompozicija* grafa $G = (V, E)$ je par $(X_i | i \in I, T = (I, F))$, kjer je T drevo z vozlišči X_i, kjer za vse $i \in I$ velja $X_i \subseteq V$, in so izpolnjeni naslednji pogoji:

- $\bigcup_{i \in I} X_i = V$;
- za vse povezave $(v, w) \in E$ obstaja $i \in I$, tako da $v \in X_i, w \in X_i$;
- za vse $i, j, k \in I$ velja, če je j na poti med i in k v T, potem $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

Širina drevesne dekompozicije $(X_i | i \in I, T = (I, F))$ je definirana kot $\max_{i \in I} |X_i| - 1$ in *drevesna širina grafa (angl. treewidth of a graph)* G je najmanjša širina med vsemi drevesnimi dekompozicijami v G.

Definicija 1.28. *Povezana komponenta grafa* je tak povezan podgraf, da če mu dodamo katerokoli točko iz nadrejenega grafa, podgraf ni več povezan. *Presečna točka* v grafu G je takšna točka, da njen izbris pomeni povečanje števila povezanih komponent. *Blok* grafa G je največji povezan induciran podgraf, ki ne vsebuje presečnih točk. *Bločni graf (angl. block graph)* je graf, katerega bloki so polni grafi.

Definicija 1.29. Imamo množico intervalov na množici realnih števil. Naj intervali predstavljajo točke v množici V in če presek dveh intervalov ni prazen, obstaja povezava med točkama intervalov v E. Tako dobljen graf $G = (V, E)$ se imenuje *intervalni graf.*

Definicija 1.30. *Klika (angl. clique)* v neusmerjenem grafu $G = (V, E)$ je podmnožica točk $C \subseteq V$, za katere velja, da je vsak par točk v C povezan. Z drugimi besedami, C je klika, če je induciran podgraf $G[C]$ poln graf. *Razcepljen graf (split graph)* je graf, katerega točke lahko razdelimo v kliko in neodvisno množico.

Definicija 1.31. *Ožina (angl. girth)* grafa je dolžina njegovega najkrajšega cikla. Če graf ne vsebuje ciklov, rečemo, da je njegova ožina neskončna.

Definicija 1.32. Če je $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ permutacija števil od 1 do n, lahko definiramo *permutacijski graf* s točkami $v_1, v_2, \ldots, v_n$, kjer obstaja povezava $v_i v_j$, če velja $i < j$ in $S_j > S_j$.

Definicija 1.33. Če vsaki povezavi v G priredimo točko v $L(G)$ in nato v $L(G)$ povežemo točke, ki ustrezajo incidenčnim povezavam v G, dobimo *povezavni graf (angl. line graph).*

Definicija 1.34. *Razdaljno-hereditaren graf (angl. distance-hereditary graph)* je graf, za katerega velja, da so v njegovem povezanem induciranem podgrafu razdalje med točkami enake kot v originalnem grafu. Rečemo, da induciran podgraf podeduje razdalje večjega grafa.

Definicija 1.35. *Trapezoidni graf* je graf, ki ima za množico točk množico trapezov med dvema vzporednima premicama in dve točki sta povezani natanko takrat, ko presek ustreznih dveh trapezov ni prazen.

Definicija 1.36. Za tri paroma nepovezane točke v grafu rečemo, da tvorijo *asteroidni trojček*, če za vsak par teh točk velja, da sta povezani s potjo, ki ne vsebuje nobene točke iz zaprte soseščine tretje točke. *AT-prosti grafi* so grafi, ki ne vsebujejo asteroidnih trojčkov.

Vsi grafi in digrafi, obravnavani v nalogi, so končni. Za grafovsko-teoretične pojme, ki so ostali nedefinirani, glej [37], za osnovne pojme linearne algebre pa [26].

2 Linearno algebraičen dokaz

Poglejmo si Lossersov dokaz Sutnerjevega izreka, ki ga lahko najdemo v [30].

Imamo graf $G = (V, E)$ z množico točk $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in množico povezav E. Definirajmo matriko $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ s predpisom

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } v_i v_j \in E \text{ ali } i = j, \text{ kjer je } 1 \leq i, j \leq n; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Imamo torej simetrično (0,1) matriko A z diagonalo samih enic. Izrek 1.7 je ekvivalenten temu, da je ena izmed linearnih kombinacij vseh stolpičnih vektorjev matrike A tudi vektor samih enic, ko računamo v polju GF(2). Po definiciji je *stolpični prostor*, označimo ga z ImA, prostor vseh linearnih kombinacij vseh stolpičnih vektorjev matrike A.

Trditev 2.1. *Naj bo $\underline{d}$ diagonala simetrične binarne matrike A, torej $d_i = a_{ii}$ za vse $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in naj bo ImA stolpični prostor matrike A. Potem velja, da je $\underline{d} \in ImA$, ko računamo v polju GF(2).*

Dokaz. Dokazati moramo, da diagonala $\underline{d}$ simetrične binarne matrike A pripada stolpičnemu prostoru ImA v polju GF(2). Ta trditev je ekvivalentna temu, da je ortogonalni komplement $(ImA)^\perp$ podmnožica ortogonalnega komplementa linearne ogrinjače diagonale $\underline{d}$:

$$\underline{d} \in ImA \text{ je ekvivalentno } (ImA)^\perp \subseteq \langle \underline{d} \rangle^\perp.$$

Dokažimo torej, da je $(ImA)^\perp \subseteq \langle \underline{d} \rangle^\perp$. Naj bo $\underline{x} \in (ImA)^\perp$. Velja, da je $\underline{x}$ ortogonalen na vse vektorje iz ImA, kar lahko zapišemo kot $\sum_{i=1}^n x_i a_{ij} = 0$ za vse j. Temu sledi, da je $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j = 0$, ker pa je A simetrična matrika, imamo element $x_i a_{ij} x_j = x_j a_{ji} x_i$, kar pomeni, da lahko izpostavimo a_{ij} in za $i \neq j$ dobimo $a_{ij}(x_i x_j + x_j x_i)$, ter zaradi komutativnosti dobimo $2a_{ij} x_i x_j = 0$, saj smo v polju $GF(2)$. Ostanejo nam torej le diagonalni členi a_{ii} in vsota $\sum_{i=1}^n x_i^2 a_{ii} = 0$. Vse operacije potekajo v polju GF(2), kjer $0^2 = 0, 1^2 = 1$, torej $x_i^2 = x_i$, po definiciji pa je tudi $a_{ii} = d_i$. Dobimo $\sum_{i=1}^n x_i d_i = 0$, kar je ekvivalentno temu, da je $\underline{x} \in \langle \underline{d} \rangle^\perp$. □

3 Kombinatorična dokaza

Poglejmo si sedaj še dva dokaza Sutnerjevega izreka, ki sta grafovsko-teoretična in dokazujeta preko indukcije. V prvem podpoglavju bomo najprej dokazali, da lahko najdemo lihe dominantne množice tudi v usmerjenih grafih, nato pa posplošili na neusmerjene grafe. V drugem podpoglavju bomo izrek dokazali z razdelitvijo grafa na dva dela, za katera bomo pokazali, da imata določene lastnosti. Omeniti še velja, da obstaja tudi Galvinov dokaz [36], vendar je omejen le na drevesa in ga ne bomo posebej predstavili.

3.1 Kombinatorični dokaz preko usmerjenih grafov

Poglejmo si grafovsko-teoretični dokaz Sutnerjevega izreka, kot so ga predstavili H. Eriksson, K. Eriksson in J. Sjöstrand v [17]. Dokaz smo dodatno razširili s koncepti linearne algebre za lažje razumevanje. Ogledali si bomo usmerjene grafe, kjer ima vsaka točka tudi zanko, ki prispeva tako k vhodni kot izhodni stopnji točke. Spomnimo se, da je liho dominantna množica digrafa G taka podmnožica $S \subseteq V(G)$, da za vsako točko $v \in V(G)$ velja, da je $|N^{-}(v) \cap S|$ liho število. Pogoj, da graf vsebuje liho dominantno množico je ekvivalenten pogoju, da je možno prižgati vse luči. Problem vseh enic oz. igro prižiganja luči je zlahka moč posplošiti na usmerjene grafe. Pritisk na stikalo v točki u spremeni stanje luči v točki u in v vseh njenih izhodnih sosedih.

V podpoglavju 1.1 smo definirali preslikavi χ in supp ter dokazali nekaj lem, ki nam bodo pomagale pri dokazu naslednjega izreka.

Izrek 3.1. *Naj bo G usmerjen graf na množici točk V. Če za vsako podmnožico lihe moči $U \subseteq V$ velja, da vsebuje točko z liho izhodno stopnjo v induciranem podgrafu, potem je možno prižgati vse luči.*

Dokaz. Dokaz bo potekal z indukcijo po številu točk. Trditev drži za $|V| = 1$, saj ima točka liho izhodno stopnjo zaradi zanke. Predpostavimo, da trditev drži za $|V| = n \geq 1$ in si poglejmo primer $|V| = n+1$. Če si izberemo eno točko v in jo odstranimo z vsemi njenimi povezavami, potem indukcijska hipoteza še vedno drži, torej je možno prižgati vse luči. Recimo temu n-prižiganje glede na v ter naj bo S_v liho dominantna množica v grafu $G - v$. Uporabimo to n-prižiganje na G (torej dodamo v). Sledi možnost, da se tudi v prižge, S_v je torej tudi liho dominantna množica za graf G in smo končali, ali pa je točka v še vedno ugasnjena, S_v ni liho dominantna množica v G. Ostane nam le primer, ko so vsa je vseh $n+1$ n-prižiganj takšnih, da pustijo eno točko temno, za vsak $v \in V$ velja, da S_v ni liho dominantna množica v G, ekvivalentno

$$\forall v \in V : |S_v \cap N_G^-[v]| \equiv 0 \pmod 2. \tag{3.1}$$

Predpostavimo najprej, da je $n+1$ sodo število. Seštejmo vsa $n+1$ n-prižiganja, torej naj bo $S := \sum_{v \in V} S_v$. Vse točke bodo prižgane liho mnogo krat in torej končale prižgane. Preverimo to z računom. Da bi dokazali, da je S liho dominantna množica, moramo preveriti, da za vsak $v \in V$ velja $|S \cap N_G^-[v]| \equiv 1 \pmod 2$. Po definiciji množice S je $|S_v \cap N_G^-[v]|$ enako $|(\sum_{w \in V} S_v) \cap N_G^-[v]|$, kjer uporabimo Lemo 1.15 in razčlenimo na $|\sum_{w \in V}(S_v \cap N_G^-[v])|$. Izraz razčlenimo na S_v in S_w, kjer $w \in V \backslash \{v\}$, ter dobimo $|S_v \cap N_G^-[v]| + \sum_{w \in V \backslash \{v\}} |S_w \cap N_G^-[v]|$. Zaradi enačbe (3.1) je prvi člen kongruenten $0 \pmod 2$. Vemo, da je S_w liho dominantna množica v grafu $G - w$, kar nam pove, da je $|S_w \cap N_G^-[v]| \equiv 1 \pmod 2$ za vsak $w \in V \backslash \{v\}$, teh členov je n, torej liho število. Dobimo $|S \cap N_G^-[v]| \equiv 1 \pmod 2$ za vsak $v \in V$, množica S je liho dominantna množica v grafu G.

Predpostavimo sedaj, da je $n+1$ liho število. Predpostavka nam pove, da imamo točko u lihe izhodne stopnje. Pritisnimo gumb na tej točki. Naj bo U množica vseh trenutno prižganih luči, $U = N_G^+[u]$. Sledi, da je $|U|$ liho število in $|V \backslash U|$ sodo število. Zdaj seštejemo n-prižiganja glede na vsako točko v $V \backslash U$, po eno naenkrat. To bo prižgalo vse luči v $V \backslash U$, medtem ko bodo luči v U ostale prižgane. Definiramo množico $S := \{u\} + \sum_{v \in V \backslash U} S_v$. Za vsak $v \in V$ računamo: $|S \cap N_G^-[v]|$ je po definiciji množice S enako $|(\sum_{w \in V \backslash U} S_w + \{u\}) \cap N_G^-[v]|$, kar je po Lemi 1.15 enako $\sum_{w \in V \backslash U} |S_w \cap N_G^-[v]| + |\{u\} \cap N_G^-[v]|$. Obravnavamo dva primera, glede na to ali je $v \in U$ ali $v \in V \backslash U$.

Poglejmo si najprej primer, ko je $v \in V \backslash U$. Vemo, da $v \notin U$, zato lahko nadalje razčlenimo enačbo v $|S_v \cap N_G^-[v]| + \sum\limits_{w \in V \backslash U \backslash \{v\}} |S_w \cap N_G^-[v]|$, kjer je prvi člen zaradi (3.1) kongruenten $0 \pmod 2$. Vemo, da je S_w liho dominantna množica za $G - w$, kar nam pove, da je drugi člen enak $n-1$, kar je kongruentno $1 \pmod 2$, saj je $n-1$ liho število. Oglejmo si sedaj primer, ko je $v \in U$. Drugi člen je enak 1, saj je presek natanko $\{u\}$, drugi člen pa je enak n po opazki, da je S_w liho dominantna množica za $G - w$. Število $n+1$ je liho, torej kongruentno $1 \pmod 2$. S tem smo prišli do zaključka, da je v vseh primerih moč najti liho dominantno množico. □

Trditev drži le v primerih, ko predpostavimo, da ima vsaka točka zanko, saj drugače ne moremo zadovoljiti pogoja, ko ima npr. U eno samo točko. Kadar imamo neusmerjen graf, je število povezav v vsakem induciranem grafu lihe podmnožice U liho, kar nam da Sutnerjev rezultat.

Posledica 3.2 (Sutnerjev izrek)**.** *Vsak neusmerjen graf ima liho dominantno množico.*

Dokaz. Naj bo G graf z množico vozlišč V in G' usmerjen graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da vsako povezavo nadomestimo s parom dveh nasprotno usmerjenih povezav in dodamo zanko nad vsako točko. Število povezav v digrafu G' dobimo tako, da štejemo vsako povezavo v G dvakrat in prištejemo še število zank. Vsaka točka ima svojo zanko, zato lahko prištejemo kar moč celotne množice točk. Dobimo $|E(G')| = 2|E(G)| + |V(G)|$. Predpostavimo, da je $G'[U]$ induciran podgraf lihe podmnožice $U \subseteq V$. Vsota vseh stopenj točk v induciranem podgrafu je liho število, saj $\sum_{v\in S} d^+_{G'[U]}(v) = |E(G'[U])| = 2|E(G[U])| + |U| \equiv 1 \pmod 2$, saj je U lihe moči. Sledi, da za nek $v \in U$ velja, da je $d^+_{G'[U]}(v)$ liho število. Po Izreku 3.1 sledi, da graf G vsebuje liho dominantno množico. □

Posledica 3.3. *Naj bo G tak usmerjen graf na množici točk V z zanko na vsaki točki, da množica neusmerjenih povezav tvori poln dvodelen graf na V. Potem je možno prižgati vse luči.*

Dokaz. Poln dvodelen graf na lihi množici točk U ima sodo število povezav. Induciran podgraf na lihi podmnožici $U \subseteq V$ ima liho število povezav (imamo liho število zank in sodo število neusmerjenih povezav), torej ima vsaj ena točka liho izhodno stopnjo. Po prejšnjem izreku sledi, da je možno prižgati vse luči. □

3.2 Lovászov kombinatorični dokaz

V tem podpoglavju si bomo ogledali Lovászov kombinatoričen dokaz Sutnerjevega izreka, ki se nahaja v literaturi [31]. Dokaz sledi kot posledica trditve, da je možno razdeliti množico točk vsakega grafa na dva taka dela, da oba inducirata soda podgrafa. Induciran podgraf grafa G je *sod*, če so vse točke v njem sode stopnje. Omejili se bomo na enostavne grafe, saj odstranitev dveh vzporednih povezav ne vpliva na našo trditev.

Trditev 3.4. *Naj bo $G = (V, E)$ graf reda n na množici točk V z množico povezav E. Množico točk grafa G se da razdeliti na dva taka dela V_1, V_2, da oba inducirata soda podgrafa.*

Dokaz. Poglejmo si primer, ko je $n = 1$. Imamo torej eno samo točko sode stopnje. $V_1 = V(G), V_2 = \emptyset$ zadosti pogoju. Podoben zaključek dobimo, če predpostavimo, da je vsaka točka v grafu G sode stopnje, za V_1, V_2 si izberemo $V_1 = V(G), V_2 = \emptyset$.

Predpostavimo sedaj, da imamo točko u lihe stopnje. Naj bo S množica njenih sosednih točk. Definirajmo nov graf $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ reda $n-1$ kot

$$V(G_1) = V(G) - \{u\},$$

$$\{x,y\} \in E(G_1) \iff \begin{cases} \{x,y\} \notin E(G), & \text{če } x,y \in S \\ \{x,y\} \in E(G), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Po indukciji na n lahko predpostavimo, da trditev drži za graf G_1 in dokažimo, da velja tudi za G. Množico točk grafa G_1 lahko razdelimo na $V(G_1) = W_1 \cup W_2$, kjer W_1 in W_2 inducirata podgrafa G_1 s sodimi stopnjami. Glede na to, da je $S \subseteq V(G_1)$ lihe moči, velja:

$$|S \cap W_1| + |S \cap W_2| = |S| \equiv 1 \pmod 2,$$

Torej lahko predpostavimo, da je $|S \cap W_1|$ sodo število, $|S \cap W_2|$ pa liho. Določimo $V_1 = W_1 \cup \{u\}, V_2 = W_2$. Sledi: V_1, V_2 inducirata podgrafa grafa G sodih stopenj.

Preverimo. Naj bo $x \in V_1$. Če $x \notin S$, potem je njegova stopnja očitno soda v $G[V_1]$. Naj bo $x \in S$ in $d_{G[V]}(x)$ stopnja točke x v induciranem grafu $G[V]$. Potem

$$\begin{aligned} d_{G[V_1]}(x) &= d_{G_1[W_1]}(x) - d_{G_1[W_1 \cap S]}(x) + d_{G[W_1 \cap S]}(x) + 1 = \\ &= d_{G_1[W_1]}(x) - d_{G_1[W_1 \cap S]}(x) + (|W_1 \cap S|) - 1 - d_{G_1[W_1 \cap S]}(x) + 1 = \\ &= d_{G_1[W_1]}(x) - 2d_{G_1[W_1 \cap S]}(x) + |W_1 \cap S|, \end{aligned}$$

in tukaj je vsak člen sod. Podobno opazimo za $x \in V_2$, da ima sodo stopnjo v $G[V_2]$. □

Trditev 3.5. *Naj bo $G = (V, E)$ graf stopnje n. Množico točk grafa G se da razdeliti na dva taka dela V_1, V_2, da V_1 inducira podgraf sode stopnje, V_2 pa podgraf lihe stopnje.*

Dokaz. Vzamimo novo točko v in jo pridružimo množici točk $V(G)$, dobimo nov graf G_1. Po Trditvi 3.4 vemo, da lahko razdelimo množico točk $V(G_1)$ kot unijo dveh množic $V(G_1) = U_1 \cup U_2$, kjer U_1, U_2 inducirata podgrafa sodih stopenj. Recimo, da je $v \in U_1$, potem je naša željena particija $V_1 = U_1 - \{v\}, V_2 = U_2$. □

Posledica 3.6 (Sutnerjev izrek)**.** *Vsak neusmerjen graf ima liho dominantno množico.*

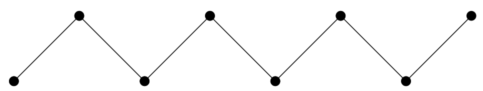
Dokaz. Najti moramo tako množico $S \subseteq V(G)$, da ima vsaka točka znotraj množice S sodo mnogo povezav s točkami v S, vse točke iz $V(G)\backslash S$ pa imajo liho mnogo povezav s točkami množice S. Dodajmo novo točko u grafu G in jo povežimo z vsemi točkami sode stopnje. Uporabimo Trditev 3.4 na novem grafu G', da dobimo particijo $V_1 \cup V_2 = V(G) \cup \{u\}$, tako da je $G'[V_i]$ sode stopnje. Predpostavimo, da je $u \in V_1$; s tem je naša željena množica $S = V_2$. □

4 Liho dominantne množice v nekaterih konkretnih grafovskih družinah

V naslednjih razdelkih si bomo pogledali, kako izgleda liho dominantna množica v poteh, ciklih, polnih grafih, polnih dvodelnih grafih in hiperkockah.

4.1 Poti

Pot reda $n \geq 1$ je graf P_n z množico točk $V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in množico povezav $E(P_n) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$.



Slika 4.1: Pot na 8 točkah.

V vsaki poti lahko najdemo do simetrije natančno eno samo liho dominantno množico, za katero velja tudi, da je učinkovita.

Trditev 4.1. *Naj bo P pot reda n in naj bo $S \subseteq V(P)$. Tedaj je S liho dominantna množica v P natanko tedaj, ko velja:*

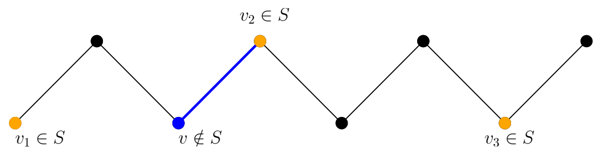
- *če je $n \equiv 0 \pmod 3$, je $S = \{v_{3i-1}; 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$;*
- *če je $n \equiv 1 \pmod 3$, je $S = \{v_{3i-2}; 1 \leq i \leq \frac{n+2}{3}\}$;*
- *če je $n \equiv 2 \pmod 3$, je $S \in \{\{v_{3i-2}; 1 \leq i \leq \frac{n+1}{3}\}, \{v_{3i-1}; 1 \leq i \leq \frac{n+1}{3}\}\}$.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da imamo $S \subseteq V(P)$ podano kot $\{v_{3i-1}; 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$, kjer je $n \equiv 0 \pmod 3$. Dokazati želimo, da je S liho dominantna množica. Za vsako točko $v_i \in S$ velja, da je povezana s točkama v_{i-1}, v_{i+1} (če obstajata), ki pa nista elementa množice S. Sledi, da točka v nima povezav z ostalimi točkami iz S, kar potrjuje zahtevo, da je sode stopnje. Za točke iz $V \backslash S$ pa velja, da imajo do točk v množici S samo eno povezavo, kar zadostuje pogoju, da imajo liho število povezav z množico S. Množica S je torej učinkovito dominantna množica in zato tudi liho dominantna množica. Podoben razmislek velja tudi za drugi dve možnosti.

Sedaj predpostavimo, da je S liho dominantna množica v P_n. Predpostavimo, da S ni neodvisna množica in naj bo $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ največji tak indeks, da je $v_i, v_{i+1} \in S$. Če je $i + 1 = n$, je v_{i+1} stopnje 1 v $G[S]$, kar vodi v protislovje, saj liho dominantna množica S inducira podgraf s točkami samih sodih stopenj. Če je $i + 1 < n$, naslednja točka v_{i+2} ni element množice S zaradi definicije indeksa i, torej je v_{i+1} stopnje 1 v $G[S]$, kar pa ponovno vodi v protislovje z definicijo liho dominantne množice. Naj bo torej množica S neodvisna množica, torej velja za vsak par točk $u, v \in S \Rightarrow uv \notin E(G)$. Za vsak par indeksov i, j, kjer $v_i, v_j \in S$ ter $i \neq j$ velja, da je $|i - j| \geq 3$. V nasprotnem primeru bi lahko imeli le $|i - j| = 2$, saj je S neodvisna množica, tukaj pa lahko brez škode za splošnost sklepamo, da je $j = i + 2$, kar pa implicira, da ima $v_{i+1} \notin S$ natanko 2 soseda v S. To pa je v nasprotju z definicijo liho dominantne množice. Pokažimo sedaj, da za vsako točko $v_i \in S$ velja $v_{i+3} \in S$. Ugotovili smo že, da $v_{i+1}, v_{i+2} \notin S$. Predpostavimo, da tudi $v_{i+3} \notin S$. Od tod sledi, da točka v_{i+2} nima nobene povezave z množico S in pridemo do protislovja. Posledica naših ugotovitev je:

$$v_i, v_j \in S \Rightarrow i \equiv j \pmod 3. \tag{4.1}$$

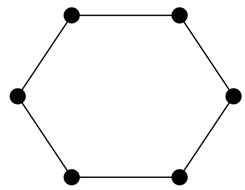
Poglejmo si obliko liho dominantne množice S v primeru, ko je $n \equiv 0 \pmod 3$, definirajmo $n = 3k$. Po definiciji množice S hitro sklepamo, da imamo $v_1 \in S$ ali $v_2 \in S$, sicer bi imela v_1 sodo število povezav v S. Obravnavajmo najprej primer, ko je $v_1 \in S$. Zaradi (4.1) vemo, da zadnji in predzadnji člen v_{3k}, v_{3k-1} nista elementa množice S, to pa je v protislovju z definicijo množice S. Sklepamo, da $v_1 \notin S$, torej $v_2 \in S$. Dobimo obliko množice $S = \{v_{3j-1}; 1 \leq j \leq \frac{n}{3}\}$. Sedaj si poglejmo obliko liho dominantne množice S v primeru, ko je $n \equiv 1 \pmod 3$. Definirajmo $n = 3k + 1$. Po podobnem razmisleku hitro sklepamo, da $v_2 \notin S$, torej $v_1 \in S$. Dobimo obliko množice $S = \{v_{3j-2}; 1 \leq j \leq \frac{n+2}{3}\}$. Poglejmo si še obliko liho dominantne množice S v primeru, ko je $n \equiv 2 \pmod 3$. Po definiciji množice S ponovno sklepamo, da imamo $v_1 \in S$ ali $v_2 \in S$. Obravnavajmo najprej primer, ko je $v_1 \in S$. Dobimo $S = \{v_{3j-2}; 1 \leq j \leq \frac{n+1}{3}\}$, v primeru, ko je $v_2 \in S$, pa dobimo množico $S = \{v_{3j-1}; 1 \leq j \leq \frac{n+1}{3}\}$. S tem smo zajeli vse možne liho dominantne množice v grafu P_n. Za zgled liho dominantne množice v poti glej Sliko 4.2. □



Slika 4.2: Liho dominantna množica v poti P_8.

4.2 Cikli

Cikel reda n je graf C_n z množico točk $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in množico povezav $E(C_n) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$, ekvivalentno, cikel je 2-regularen povezan graf z n točkami.



Slika 4.3: Cikel na 6 točkah.

Trditev 4.2. *Naj bo C cikel reda n in naj bo $S \subseteq V(C)$. Tedaj je S liho dominatna množica v C natanko tedaj, ko velja:*

- *če je $n \equiv 0 \pmod 3$, je*

$$S \in \{\{v_{3i-1}; 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}, \{v_{3i-2}; 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}, \{v_{3i}; 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}, V(C)\};$$

- *če je $n \equiv 1 \pmod 3$, je $S = V(C)$;*

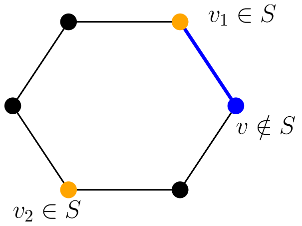
- *če je $n \equiv 2 \pmod 3$, je $S = V(C)$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je S liho dominantna množica v C_n. Predpostavimo najprej, da S ni neodvisna množica, da torej vsebuje vsaj eno povezavo. Brez škode za splošnost naj bo to $v_1 v_2$. liho dominantna množica inducira podgraf s točkami samih sodih stopenj, torej tudi $v_3, v_n \in S$. Razmislek ponovimo in ugotovimo, da je $S = V(C)$. Predpostavimo sedaj, da je S neodvisna množica. Brez škode za splošnost sklepamo, da je točka v_1 element množice S. Velja torej, da $v_2 \notin S$. Ugotovimo, da tudi $v_3 \notin S$, saj ima v nasprotnem primeru v_2 sodo število povezav z množico S. Po hitrem premisleku vidimo, da sedaj točka $v_4 \in S$, saj tako dobimo liho število povezav točke v_3 z množico S. Postopek ponovimo za vsak sklop točk $v_{3i+1}, v_{3i+2}, v_{3i+3}$, kjer

$0 \leq i \leq \frac{n-3}{3}$. Sledi $S = \{v_{3j-2}, 1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil\}$. V primeru, da točki v_{n-1} in v_n nista elementa množice S, je postopek zaključen, kar pa velja le, ko je $n \equiv 0 \pmod 3$. Sledi $S = \{v_{3i-1}, 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$. Primera, ko je $v_2 \in S$ ali $v_3 \in S$, vodita do preostalih dveh lihih dominantnih množic. Očitno je, da $S \cap \{v_1, v_2, v_3\} \neq \emptyset$.

Sedaj predpostavimo, da je S ena izmed množic, eksplicitno opisanih v trditvi. Če je $S_2 = V(C)$, torej vse točke grafa C so v množici S. Vsaka točka grafa je sode stopnje, zunanjih točk ni, torej hitro sklepamo, da je S liho dominantna množica. Ostane še primer, ko je $n \equiv 0 \pmod 3$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $S = \{v_{3i-1}; 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$. Za vsako točko $v \in S$ velja, da nima povezav z ostalimi točkami iz S, torej je sode stopnje. Za vsako točko $v \in V(C) \backslash S$ pa velja, da ima natanko 1 povezavo z množico S. Sledi, S je liho dominantna množica.

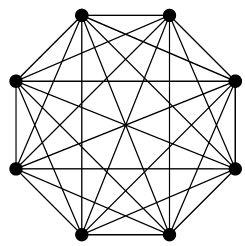
□



Slika 4.4: Liho dominantna množica v ciklu C_6.

4.3 Polni grafi

Poln graf je graf, kjer je vsaka točka povezana z vsemi ostalimi točkami. Poln graf reda $n \geq 1$ je graf K_n z množico točk $V(K_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in množico povezav $E(K_n) = \{v_i v_j; 1 \leq i, j \leq n \text{ in } i \neq j\}$.

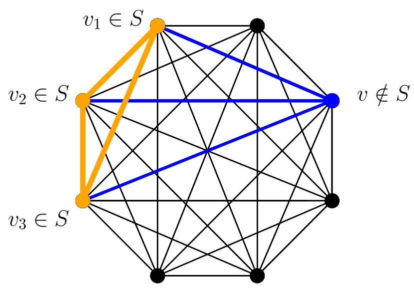


Slika 4.5: Poln graf K_8.

Trditev 4.3. *Naj bo $G = K_n$ polni graf in $S \subseteq V(G)$. Tedaj je S liho dominantna množica natanko tedaj, ko je lihe moči.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $|S| = k$. Naj bo S liho dominantna množica grafa G. Dokazati želimo, da je lihe moči. Za liho dominantno množico velja, da ima vsaka točka v S sodo število povezav znotraj S, za vsako točko iz $V \backslash S$ pa velja, da ima liho mnogo povezav z množico S. Vzamimo točko $v \in S$. Sledi, da ima ta točka $k-1$ povezav s točkami iz S, saj smo v polnem grafu, kjer je vsaka točka povezana z vsemi ostalimi točkami, $k-1$ pa je sodo število iz predpostavke, da je S liho dominantna množica. Sledi, da je k liho število in torej množica S lihe moči.

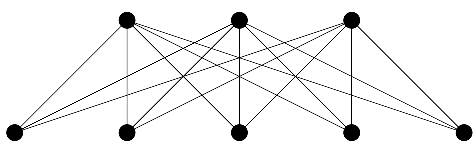
Sedaj naj bo S liha podmnožica $V(G)$. Dokazati želimo, da je liho dominantna množica. Vemo, da je $|V| = n$. Imamo liho podmnožico $|S| = k$, kjer je k liho število. Poglejmo si točke grafa G. Če je točka v element množice S, je povezana s $k-1$ točkami znotraj S in vsaka točka $v \in V \backslash S$ je povezana s k točkami iz množice S. Po predpostavki, da je S liha podmnožica V, vidimo da je k liho število, $k-1$ sodo število in S je torej liho dominantna množica. □



Slika 4.6: Liho dominantna množica v polnem grafu K_8.

4.4 Polni dvodelni grafi

Polni dvodelni graf je graf $K_{m,n}$, z množico točk $V(G) = A \cup B$, kjer $|A| = m, |B| = n, A \cap B = \emptyset$ in množico povezav $E = \{ab; a \in A, b \in B\}$.



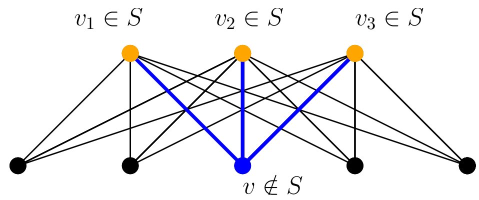
Slika 4.7: Polni dvodelni graf $K_{3,5}$.

Trditev 4.4. *Naj bo $G = K_{m,n}$ polni dvodelni graf in naj bo $V(G) = A \cup B$, kjer je $|A| = m, |B| = n$ in $E(G) = \{xy; x \in A, y \in B\}$. Tedaj za vsako podmnožico $S \subseteq V(G)$ velja, da je liho dominantna množica v G natanko tedaj, ko velja:*

- *če je m lih in n lih, potem je $S = A$ ali $S = B$;*
- *če je m lih in n sod, potem je $S = A$;*
- *če je m sod in n lih, potem je $S = B$;*
- *če je m sod in n sod, potem je $S = V(G)$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je S liho dominantna množica grafa $K_{m,n}$. Naj bo $A' = A \cap S$. Pokažimo najprej, da A' ne more biti prava neprazna podmnožica A. Če $A' \neq \emptyset, A' \subset S$, obstajata točki $a \in A \backslash A'$ in $a' \in A'$. Točki po definiciji grafa nista povezani. Točka a mora imeti liho število povezav z množico S, torej sklepamo, da je liho število točk iz B v množici S. Podobno sklepamo, da mora imeti točka a' sodo mnogo povezav z množico S, torej S vsebuje sodo mnogo točk iz B, kjer pa pridemo do protislovja s prejšnjo ugotovitvijo. Sklepamo, da je $A \cap S \in \{\emptyset, A\}$. Po podobnem razmisleku pridemo do ugotovitve $B \cap S \in \{\emptyset, B\}$. Liho dominantna množica S je unija $(A \cap S) \cup (B \cap S)$ in je torej $S \in \{\emptyset, A, B, A \cup B\}$. Očitno $S = \emptyset$ ni liho dominantna množica.

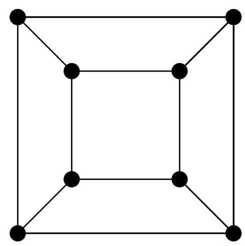
Naj velja: m je liho število, n je liho število. Pogoju v definiciji liho dominantne množice zadostita (neodvisni!) množici $S = A, S = B$, saj imamo za vsak $v \notin S$ liho mnogo povezav z množico S v obeh primerih. Pri $A \cup B$ pridemo do protislovja, saj je vsaka točka v S sode stopnje. Če je m liho število, n pa sodo, pogoju zadosti le neodvisna množica $S = A$, saj ima vsaka točka $b \notin S$, natanko m povezav z množico S, torej liho število. Pri $S = B$ hitro ugotovimo, da ima vsak $a \notin S$ sodo število povezav z množico S, saj ima natanko n povezav z množico B. V primeru, ko je $S = A \cup B$, imajo točke v $B \cap S$ liho mnogo povezav s točkami v S, kar vodi v protislovje. Podoben razmislek uporabimo, ko je m sodo število, n pa liho, da dobimo $S = B$. Naj bosta sedaj obe števili m in n sodi. Edina liho dominantna množica $S = V(K_{m,n}) = A \cup B$. Vse točke v S so sode stopnje, zunanjih točk ni. Poglejmo si $S = A$ in $S = B$, kjer opazimo, da ima vsaka točka $v \notin S$ sodo mnogo povezav z množico S. $\square$



Slika 4.8: Liho dominantna množica v dvodelnem grafu $K_{3,5}$.

4.5 Hiperkocke

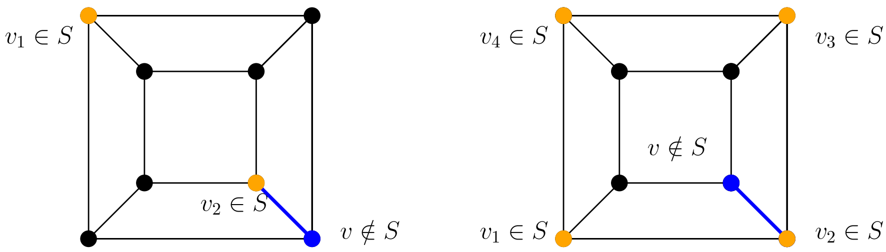
Hiperkocka Q_n je $n-$regularen graf, kjer je $|V| = 2^n$, $|E| = 2^{n-1}n$, kjer si lahko predstavljamo točke kot podmnožice množice $\{1, \ldots n\}$, dve točki sta povezani, če se razlikujeta v natanko 1 elementu.



Slika 4.9: Hiperkocka Q_3.

Trditev 4.5. *Naj bo $G = Q_n$ hiperkocka reda n. Če je n sodo število, je množica $V(Q_n)$ liho dominantna množica v grafu Q_n. Če je n liho število, pa je množica $S = V(Q_{n-1})$ liho dominantna množica v grafu Q_n.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je n sodo število. Graf Q_n je $n-$regularen, kar pomeni, da ima vsaka točka stopnjo n. V splošnem velja, da je ena izmed lihih dominantnih množic v grafih, kjer imajo vsa vozlišča sodo stopnjo, kar cela množica vozlišč. Hitro sklepamo, da to velja tudi za naš graf Q_n. Sedaj predpostavimo, da je n liho število. Vemo, da je graf Q_n sestavljen iz dveh kopij grafa Q_{n-1}, recimo jima C_1 in C_2, kjer je vsaka točka iz grafa C_1 povezana z natanko eno točko grafa C_2 in obratno [37]. Lahko definiramo $C_1 = Q_{n-1}$, C_2 pa definiramo kot $V(C_2) = \{S \cup \{n\}; S \subseteq \{1, \ldots, n-1\}\}, E(C_2) = \{(X \cup \{n\})(Y \cup \{n\}); XY \in E(Q_{n-1})\}$. Naj bo $S = V(C_1) = V(Q_{n-1})$. Število $n-1$ je sodo, torej lahko sklepamo, da je vsaka točka v množici S povezana z natanko $n-1$ točkami iz množice S, za vsako točko iz $V(Q_n) \backslash S$ pa velja, da ima natanko 1, torej liho število povezav z množico S. $\square$



Slika 4.10: Zgleda liho dominantnih množic v hiperkocki Q_3.

5 Pregled računske zahtevnosti

Poglejmo si znane rezultate o računskih zahtevnostih problema v različnih grafovkih razredih.

Problem najmanjše liho dominantne množice	
Vhodni podatki:	Graf G.
Naloga:	Poišči najmanjšo liho dominantno množico v grafu G.

Sutner je v [35] pokazal, da je problem v splošnem NP-težek. Za dvodelne grafe je to pokazano v [7, 9], za ravninske grafe največje stopnje 6 pa v [9]. Za grafe omejene drevesne širine je problem linearno rešljiv [7], prav tako obstaja linearen algoritem za drevesa, enociklične grafe [15, 16] in za zaporedno-vzporedne grafe [1, 39]. Nekateri drugi grafovski razredi so študirani v [8, 9].

Poglejmo si še nekatere grafe, obravnavane v prejšnjem razdelku. Predpostavimo, da je vsak graf G reda n. Za poti velja, da imajo do simetrije natanko eno liho dominantno množico, torej je ta tudi najmanjša, oblike $S \in \{v_{3i-2}; 1 \le i \le \frac{n+1}{3}\}, \{v_{3i-1}; 1 \le i \le \frac{n+1}{3}\}$. V ciklih reda $n \equiv 1 \pmod 3$ in $n \equiv 2 \pmod 3$ je liho dominantna množica enolično določena, in sicer kot celotna množica točk grafa. Torej je ta tudi najmanjša liho dominantna množica. V ciklih reda $n \equiv 0 \pmod 3$ je najmanjša liho dominantna ena izmed $S \in \{\{v_{3i-1}; 1 \le i \le \frac{n}{3}\}, \{v_{3i-2}; 1 \le i \le \frac{n}{3}\}, \{v_{3i}; 1 \le i \le \frac{n}{3}\}\}$. V polnih grafih najmanjša liho dominantna množica vsebuje poljubno točko grafa, saj je množica z enim samim elementom lihe moči. V polnih dvodelnih grafih je večinoma najmanjša liho dominantna množica kar edina liho dominantna množica tega grafa, le v primeru, ko imamo dve, A in B in velja $|A| < |B|$, je najmanjša liho dominantna množica kar množica A.

V vseh teh primerih lahko najmanjšo liho dominantno množico poiščemo s preprostim algoritmom linearne časovne zahtevnosti.

Problem najmanjše povezane liho dominantne množice	
Vhodni podatki:	Graf G.
Vprašanje:	Ali G vsebuje povezano liho dominantno množico?

Definicija 5.1. *Povezana liho dominantna množica* je liho dominantna množica S, kjer za vsak par točk $a, b \in S$ velja, da med njima obstaja pot v $G[S]$.

Problem je trivialen za drevesa in enociklične grafe, NP-poln za grafe v splošnem [10]. Tudi tukaj se je problem izkazal NP-poln za dvodelne grafe [7]. V [7] so avtorji postavili pogoj, naj liho dominantna množica ne vsebuje izoliranih točk, ter dokazali, da je problem prav tako trivialno rešljiv za drevesa in enociklične grafe, linearno rešljiv za grafe omejene drevesne širine ter NP-poln v splošnem. Tudi če se omejimo na ravninske grafe, grafe širine vsaj 5 in na grafe, kjer je največja stopnja točke omejena z majhno konstanto, na primer na 3-regularne grafe, je problem še vedno NP-poln. Podobni rezultati veljajo tudi za povezano liho dominantno množico.

Za poti P_n za vse n velja, da ne vsebujejo povezane liho dominantne množice. Za cikle C_n, polne grafe K_n in hiperkocke Q_n velja, da jo vsebujejo za vse n, polni dvodelni grafi $K_{m,n}$ vpa sebujejo povezano liho dominantno množico le, če sta m, n sodi števili.

Za konec si poglejmo še primer učinkovito dominantne množice. Spomnimo se, da je podmnožica $S \subseteq V$ učinkovito dominantna, če velja $|N[v] \cap S| = 1$ za vsak $v \in V$.

PROBLEM UČINKOVITO DOMINANTNE MNOŽICE	
Vhodni podatki:	Graf G.
Vprašanje:	Ali G vsebuje učinkovito dominantno množico?

Problem učinkovito dominantne množice je NP-poln za ravninske kubične grafe [24], dvodelne grafe [33, 38], ravninske dvodelne grafe [32], tetivne dvodelne grafe [32], tetivne grafe [33, 38] in povezavne grafe ravninskih dvodelnih grafov največje stopnje 3 [4]. Polinomsko je rešljiv za drevesa [3, 18], zaporedno-vzporedne grafe [39], bločne grafe [38], intervalne grafe [13, 14, 23, 25], grafe krožnih lokov [13, 23], neprimerjalne grafe [11, 14], dvodelne permutacijske grafe [32], permutacijske grafe [28], razdaljno-hereditarne grafe [32], trapezoidne grafe [28, 29], razcepljene grafe [12], dualno tetivne grafe in AT-proste grafe [6]. Drevesa na n točkah z največjim številom učinkovitih dominantnih množic so bila karakterizirana v [5].

Poglejmo si še grafe iz naloge. Učinkovito dominantno množico imajo poti P_n in polni grafi K_n za vsak n. Cikli C_n imajo učinkovito dominantno množico le, če $n \equiv 0 \pmod 3$, dvodelni grafi $K_{m,n}$, če $m = 1 \vee n = 1$ ter hiperkocke Q_n, če je $n = 2^m - 1$ za neko naravno število m [27].

6 Zaključek

V nalogi smo spoznali pojme dominantne, liho dominantne, sodo dominantne ter učinkovito dominantne množice. Osrednja motivacija je bil Sutnerjev izrek, ki nam pove, da v vsakem končnem neusmerjenem grafu obstaja liho dominantna množica. Pogledali in razložili smo različne dokaze tega izreka, enega linearno-algebraičnega ter dva grafovsko-teoretična. Spoznali smo problem samih enic, katerega rešitev je ravno liho dominantna množica. Obravnavali smo tudi primere liho dominantnih množic v poteh, ciklih, polnih grafih, polnih dvodelnih grafih in hiperkockah, ter za vsako grafovsko družino sestavili preprost algoritem iskanja take množice. Na koncu smo si še ogledali računske zahtevnosti problema iskanja najmanjše liho dominantne množice v različnih grafovskih družinah. Za nadaljno branje bi priporočila tematiko dominantnih števil grafov, ki jih v nalogi ne obravavamo [8, 9], lahko pa si bralec ogleda še druge različice dominantnih množic, reference za le-te so že predstavljene v uvodu.

Literatura

[1] A. Amin in P. Slater, Neighborhood domination with parity restriction in graphs, *Congr. Numer.* 91 (1992), 19–30. *(Citirano na strani 24.)*

[2] J. Bang Jensen in G.Z. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, London, 2000. *(Citirano na strani 8.)*

[3] D.W. Bange, A.E. Barkauskas in P.J. Slater, Efficient Dominating Sets in Graphs, v: Applications of Discrete Mathematics, *(R.D. Ringeisen, F.S. Roberts (ur.))*, SIAM, Philadelphia, PA, 1988, strani 189–199. *(Citirano na straneh 4 in 25.)*

[4] A. Brandstädt, C. Hundt in R. Nevries, Efficient edge domination on hole-free graphs in polynomial time, v: Proceedings LATIN 2010: Theoretical Informatics, 9th Latin American Symposium, Lecture Notes in Computer Science 6034, *(A. López-Ortiz (ur.))*, Springer, Berlin, 2010, strani 650–661. *(Citirano na straneh 4 in 25.)*

[5] D. Bród in Z. Skupień, Recurrence among trees with most numerous efficient dominating sets, *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.* 10 (2008), 43–56. *(Citirano na strani 25.)*

[6] H. Broersma, T. Kloks, D. Kratsch in H. Müller, Independent sets in asteroidal triple-free graphs, *SIAM J. Discrete Math.* 12 (1999), 276–287. *(Citirano na strani 25.)*

[7] H. Broersma in X. Li, On the complexity of dominating set problems related to the minimum all-ones problem, *Theoretical Computer Science* 385 (2007), 60–70. *(Citirano na straneh 24 in 25.)*

[8] Y. Caro in W. Klostermeyer, The odd domination number of a graph, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 44 (2003), 65–84. *(Citirano na straneh 24 in 26.)*

[9] Y. Caro, W. Klostermeyer in J. Goldwasser, Odd and residue domination numbers of a graph, *Discuss. Math. Graph Theory* 21 (2001), 119–136. *(Citirano na straneh 4, 24 in 26.)*

[10] Y. Caro, W. Klostermeyer in R. Yuster, Connected odd dominating sets in graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* 25 (2005), 225–239. *(Citirano na strani 25.)*

[11] M.S. Chang, Weighted domination of cocomparability graphs, *Discrete Appl. Math.* 80 (1997), 135–148. *(Citirano na strani 25.)*

[12] M-S. Chang in Y-C. Liu, Polynomial algorithm for the weighted perfect domination problems on chordal graphs and split graphs, *Inform. Process. Lett.* 48 (1993), 205–210. *(Citirano na straneh 4 in 25.)*

[13] M-S. Chang in Y-C. Liu, Polynomial algorithms for weighted perfect domination problems on interval and circular-arc graphs, *J. Inf. Sci. Eng.* 11 (1994), 549–568. *(Citirano na strani 25.)*

[14] G.J. Chang, C. Pandu Rangan in S.R. Coorg, Weighted independent perfect domination on cocomparability graphs, *Discrete Applied Math.* 63 (1995), 215–222. *(Citirano na strani 25.)*

[15] W.Y.C. Chen, X. Li, C. Wang in X. Zhang, The minimum all-ones problem for trees, *SIAM J. Comput* 33 (2004), 379–392. *(Citirano na strani 24.)*

[16] W.Y.C. Chen, X. Li, C. Wang in X. Zhang, Linear time algorithms to the minimum all-ones problem for unicyclic and bicyclic graphs, *Electron. Notes Discrete Math.* 17 (2004), 93–98. *(Citirano na strani 24.)*

[17] H. Eriksson, K. Eriksson in J. Sjöstrand, Note on the lamp lighting problem, *Adv. Appl. Math.* 27 (2001), 357–366. *(Citirano na strani 12.)*

[18] M.R. Fellows in M.N. Hoover, Perfect domination, *Australas. J. Combin.* 3 (1991), 141–150. *(Citirano na strani 25.)*

[19] J.L. Goldwasser in W.F. Klostermeyer, Odd and even dominating sets with open neighborhoods, *Ars Combinatoria* 83 (2007), 229–247. *(Citirano na strani 4.)*

[20] M.M. Halldórsson, J. Kratochvíl in J.A. Telle, Mod-2 independence and domination in graphs, v: Proceedings workshop on graph-theoretic concepts in computer science '99, *Lecture Notes in Computer Science*, 1999, 101–109. *(Citirano na strani 4.)*

[21] T.W. Haynes, S. Hedetniemi in P. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, Marcel Dekker, 1998. *(Citirano na straneh 1, 3 in 4.)*

[22] T.W. Haynes, S. Hedetniemi in P. Slater (ur.), *Domination in graphs: advanced topics*, Marcel Dekker, 1998. *(Citirano na straneh 3 in 4.)*

[23] W.F. Klostermeyer in E.M. Eschen, Perfect codes and independent dominating sets, *Congr. Numer.* 142 (2000), 7–28. *(Citirano na straneh 4 in 25.)*

[24] J. Kratochvíl, Perfect codes in general graphs, *Rozpravy Československé Akad.* Věd Řada Mat. Přírod Vď (7), (Akademia, Praha, 1991). *(Citirano na strani 25.)*

[25] J. Kratochvíl, P. Manuel in M. Miller, Generalized domination in chordal graphs, *Nordic J. Comput.* 2 (1995), 41–50. *(Citirano na strani 25.)*

[26] S. Lang, *Linear algebra, Third Edition*, Springer, 1987. *(Citirano na strani 10.)*

[27] J. Lee, Independent perfect domination sets in Cayley graphs, *Journal of Graph Theory* 37 (2000), 219–231. *(Citirano na strani 25.)*

[28] Y.D. Liang, C.-L. Lu in C.-Y. Tang, Efficient domination on permutation graphs and trapezoid graphs, v: Proceedings of the Third COCOON Conference, *(T. Jiang in D.T. Lee (ur.))*, Lecture Notes in Computer Science 1276, Springer, Berlin, 1997. strani 232–241 *(Citirano na strani 25.)*

[29] Y.L. Lin, Fast algorithms for independent domination and efficient domination in trapezoid graphs, v: Proceedings of ISAAC'98, *(K.-Y. Chwa in O.H. Ibarra (ur.))*, Lecture Notes in Computer Science 1533, Springer, Berlin, 1998. strani 267–275 *(Citirano na strani 25.)*

[30] O.P. Lossers, Solution to problem 10197, *Amer. Math. Monthly* 100 (1993), 806–807. *(Citirano na strani 11.)*

[31] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises, Second Edition*, North Holland, 1979, Exercise 5.17. *(Citirano na strani 14.)*

[32] C.L. Lu in C.Y. Tang, Weighted efficient domination problem on some perfect graphs, *Discrete Appl. Math* 117 (2002), 163–182. *(Citirano na straneh 4 in 25.)*

[33] C.B. Smart in P.J. Slater, Complexity results for closed neighborhood order parameters, *Congr Numer* 112 (1995), 83–96. *(Citirano na strani 25.)*

[34] K. Sutner, Linear cellular automata and the Garden-of-Eden, *Math. Intelligencer* 11 (1989), 49–53. *(Citirano na strani 5.)*

[35] K. Sutner, Additive automata on graphs, *Complex Systems* 2 (1988), 1–28. *(Citirano na strani 24.)*

[36] S.H. Weintraub, Mathematical entertainments, (F. Galvin: Solution to problem 88-8), *Math. Intelligencer* 11 (1989), 31-32. *(Citirano na strani 12.)*

[37] D.B. West, *Introduction to Graph Theory, Second Edition*, Prentice Hall, 2001. *(Citirano na straneh 10 in 22.)*

[38] C.-C. Yen in C.T. Lee, The weighted perfect domination problem and its variants, *Discrete Appl. Math.* 66 (1996), 147–160. *(Citirano na straneh 4 in 25.)*

[39] C.-C. Yen in R.C.T. Lee, A linear time algorithm to solve the weighted perfect domination problem in series-parallel graphs, *Eur. J. Oper. Res.* 73 (1994), 192–198. *(Citirano na straneh 4, 24 in 25.)*