O superalgebrah

Ajda Fošner
Univerza na Primorskem
Fakulteta za management Koper
Cankarjeva 5
6104 Koper
Slovenija
ajda.fosner@fm-kp.si

Maja Fošner
Univerza v Mariboru
Fakulteta za logistiko
Mariborska cesta 2
3000 Celje
Slovenija
maja.fosner@uni-mb.si

Povzetek: V članku bomo predstavili definicijo asociativne superalgebre, osnovne lastnosti in podali nekaj primerov.

Abstract: In this article we introduce the definition of associative superalgebras, basic characteristics, and give some examples.

2000 Math. Subj. Class.: 17A70.

1 Uvod

V moderni literaturi je veliko pozornosti posvečeno tako imenovanim superalgebram. Kac je v enem izmed svojih člankov [11] zapisal, da se je zanimanje za superalgebre pojavilo v fiziki v kontekstu 'supersimetrij'. Do sedaj so na tem področju veliko prispevali Kac, Martinez, Zelmanov, Wall, Shestakov in drugi (glej npr. [6, 7, 8, 10, 12, 13, 14]). Glavni namen tega članka je predstaviti definicijo asociativnih superalgeber, osnovne primere ter nekaj lastnosti.

Pod besedo algebra bomo v nadaljevanju razumeli, da gre za asociativno algebro nad poljem Φ. Predpostavili bomo, da poznamo osnovne pojme kot so algebra, moduli, ideali. Seveda pa na začetku zapišimo nekaj osnovnih pojmov na področju algebre. Algebra $\mathcal{A}$ je *enostavna*, če je $\mathcal{A}^2 \neq 0$ in sta 0 in $\mathcal{A}$ njena edina ideala. Pravimo, da je algebra $\mathcal{A}$ *praalgebra*, če je produkt dveh njenih neničelnih idealov vselej različen od nič. Izkaže se, da je algebra $\mathcal{A}$ praalgebra natanko tedaj, ko iz $a\mathcal{A}b = 0$, kjer sta a in b elementa algebre $\mathcal{A}$, sledi, da je $a = 0$ ali $b = 0$. Primer praalgebre je $M_n(\mathbb{C})$, algebra $n \times n$ kompleksnih matrik. Algebra $\mathcal{A}$ je *polpraalgebra*, če ne vsebuje neničelnih nilpotentnih idealov (ideal I algebre $\mathcal{A}$ je *nilpotenten*, če je $I^n = 0$ za neko naravno število n). Algebra $\mathcal{A}$ je polpraalgebra natanko tedaj, ko iz $a\mathcal{A}a = 0$, kjer je $a \in \mathcal{A}$, sledi, da je $a = 0$. Vsaka praalgebra je tudi polpraalgebra. Obratno ni nujno res. Namreč, če je $0 \neq \mathcal{A}$ praalgebra, potem je $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ polpraalgebra, ki ni praalgebra.

2 Superalgebra

Dragi bralci, v nadaljevanju vas vabimo v svet superalgeber. Predstavili bomo najosnovnejše pojme in podali primere asociativnih superalgeber.

Superalgebra $\mathcal{A}$ nad poljem Φ je $\mathbb{Z}_2$-gradirana (neasociativna) algebra. To pomeni, da obstajata taka Φ-podmodula $\mathcal{A}_0$ in $\mathcal{A}_1$ algebre $\mathcal{A}$, da je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ in velja $\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_0$ (to pomeni, da je $\mathcal{A}_0$ podalgebra algebre $\mathcal{A}$), $\mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$ ter $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0$. Pravimo, da je $\mathcal{A}_0$ sodi del, $\mathcal{A}_1$ pa lihi del superalgebre $\mathcal{A}$.

Asociativna superalgebra $\mathcal{A}$ je asociativna $\mathbb{Z}_2$-gradirana algebra. Pravimo, da je $\mathcal{A}$ *trivialna superalgebra*, če je $\mathcal{A}_1 = 0$. Elementu $a \in \mathcal{A}_k$, kjer je $k = 0$ ali $k = 1$, pravimo *homogen element stopnje* k in pišemo $|a| = k$.

Gradiran Φ*-podmodul* $\mathcal{B}$ asociativne superalgebre $\mathcal{A}$ je tak podmodul algebre $\mathcal{A}$, da je

$$\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_1.$$

V takem primeru pišemo $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_0$ ter $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_1$. To pomeni, da je $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1$. Če je $\mathcal{B}$ gradirana podalgebra $\mathcal{A}$, je potem $\mathcal{B}$ tudi asociativna superalgebra. *Gradiran ideal* (ali superideal) $\mathcal{I}$ superalgebre $\mathcal{A}$ je ideal algebre $\mathcal{A}$, ki je hkrati gradiran Φ-podmodul. Torej je $\mathcal{I} = \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_1$ oziroma $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \oplus \mathcal{I}_1$.

Ustavimo se pri gradaciji. Kako določimo $\mathbb{Z}_2$-gradacijo? Za superalgebro $\mathcal{A}$ je dana $\mathbb{Z}_2$-gradacija ekvivalentna obstoju takega avtomorfizma σ algebre $\mathcal{A}$, da je $\sigma^2 = id$. V primeru, ko je tak avtomorfizem σ definiran na algebri $\mathcal{A}$, je $\mathbb{Z}_2$-gradacija algebre $\mathcal{A}$ definirana s sodim delom

$$\mathcal{A}_0 = \{x \in \mathcal{A} \mid x^\sigma = x\}$$

in lihim delom

$$\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathcal{A} \mid x^\sigma = -x\}.$$

Namreč, vsak element $x \in \mathcal{A}$ lahko zapišemo kot $x = \frac{1}{2}(x+x^\sigma)+\frac{1}{2}(x-x^\sigma)$, kjer je $x + x^\sigma \in \mathcal{A}_0$ in $x - x^\sigma \in \mathcal{A}_1$. Velja tudi obratno, če je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ superalgebra, definiramo avtomorfizem σ algebre $\mathcal{A}$ s predpisom $x_0^\sigma = x_0$ in $x_1^\sigma = -x_1$, kjer sta $x_0 \in \mathcal{A}_0$ ter $x_1 \in \mathcal{A}_1$.

Podmodul $\mathcal{B}$ superalgebre $\mathcal{A}$ je gradiran natanko tedaj, ko je $\mathcal{B}^\sigma = \mathcal{B}$. Center $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ superalgebre $\mathcal{A}$ naj bo običajni center algebre $\mathcal{A}$, torej $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid ab = ba\ \forall b \in \mathcal{A}\}$. Ker avtomorfizem ohranja center, je le ta gradiran. To pomeni, da je $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathcal{Z}(\mathcal{A})_0 \oplus \mathcal{Z}(\mathcal{A})_1$.

V nadaljevanju bomo podali nekaj primerov asociativnih superalgeber.

Primer 1 Naj bo $\mathcal{A}$ algebra in $c \in \mathcal{A}$ obrnljiv element. Nadalje, naj bo σ avtomorfizem algebre $\mathcal{A}$ definiran s predpisom $x^\sigma = cxc^{-1}$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Kaj hitro vidimo, da je $\sigma^2 = id$ natanko tedaj, ko je $c^2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Torej je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ superalgebra, pri čemer je sodi del algebre $\mathcal{A}_0 = \{x \in \mathcal{A} \mid xc = cx\}$, lihi del pa $\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathcal{A} \mid xc = -cx\}$.

Posebej si poglejmo primer, ko je $\mathcal{A} = M_{r+s}(\Phi)$, algebra $(r+s) \times (r+s)$ matrik nad Φ, $r, s \in \mathbb{N}$. Za element c lahko izberemo matriko oblike $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix}$, kjer je I_r identična matrika algebre $M_r(\Phi)$, I_s identična matrika algebre $M_s(\Phi)$. Potem sta sodi in lihi del podana kot

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} M_r(\Phi) & 0 \\ 0 & M_s(\Phi) \end{bmatrix} \quad \text{in } \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & M_{r,s}(\Phi) \\ M_{s,r}(\Phi) & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemer $M_{r,s}(\Phi)$ označuje množico matrik velikosti $r \times s$. Ta algebra je asociativna superalgebra in jo običajno označujemo s simbolom $M(r|s)$.

Primer 2 Naj bo A algebra nad Φ in naj bo $\mathcal{A} = A \times A$. Nadalje, naj bo na algebri $\mathcal{A}$ definiran avtomorfizmom σ s predpisom $\sigma(a, b) = (b, a)$, $a, b \in A$. Potem je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, pri čemer je sodi del $\mathcal{A}_0 = \{(a, a) \mid a \in A\}$ in lihi del $\mathcal{A}_1 = \{(b, -b) \mid b \in A\}$. Izkaže se, da je $\mathcal{A} \cong \{\begin{bmatrix} C & D \\ D & C \end{bmatrix} \mid \quad C, D \in A\}$,

$$\mathcal{A}_0 \cong \{\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \mid \quad C \in A\} \quad \text{in } \mathcal{A}_1 \cong \{\begin{bmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{bmatrix} \mid \quad D \in A\}.$$

V tem primeru pravimo, da je superalgebra $\mathcal{A}$ porojena z avtomorfizmom zamenjave.

Primer 3 Naj bo $\mathcal{A} = Q(\alpha, \beta)$ 4-dimenzionalna algebra nad poljem Φ z bazo $\{1, uv, u, v\}$ in naj bo množenje definirano s predpisom $u^2 = \alpha \in \Phi$, $v^2 = \beta \in \Phi$, $uv = -vu$. V posebnem primeru je $\mathcal{A}$ algebra kvaternionov nad $\mathbb{R}$. Označimo z $\mathcal{A}_0 = \Phi 1 + \Phi uv$ in $\mathcal{A}_1 = \Phi u + \Phi v$. Potem je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ asociativna superalgebra, ki jo imenujemo superalgebra kvaternionov.

Sedaj, ko smo spoznali definicijo superalgebre in osnovne primere, zapišimo še nekaj osnovnih pojmov na tem obravnavanem področju. Asociativna superalgebra $\mathcal{A}$ je *enostavna*, če nima pravih neničelnih gradiranih idealov. Ob tem velja omeniti, da to še ne pomeni, da je superalgebra $\mathcal{A}$ enostavna tudi kot algebra. Če je produkt poljubnih dveh neničelnih gradiranih idealov superalgebre $\mathcal{A}$ neničeln, je $\mathcal{A}$ *pra-superalgebra* in je *polpra-superalgebra*, če ne vsebuje neničelnih nilpotentnih gradiranih idealov. Izkaže se, da je asociativna superalgebra $\mathcal{A}$ pra-superalgebra natanko tedaj, ko iz enakosti $a\mathcal{A}b = 0$, kjer je vsaj eden izmed elementov $a, b \in \mathcal{A}$ homogen, sledi $a = 0$ ali $b = 0$.

Naj bo $\mathcal{A}$ pra-superalgebra. Ob tem se zastavi vprašanje, ali sta potem algebri $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}_0$ tudi praalgebri. Izkaže se, da odgovor na zastavljeno vprašanje ni vedno pritrdilen. To dokazujeta naslednja dva primera.

Primer 4 Naj bo A praalgebra nad poljem Φ in naj bo $\mathcal{A} = A \times A$ superalgebra z gradacijo kot v primeru 2. Ta algebra je pra-superalgebra (produkt poljubnih dveh neničelnih gradiranih idealov je neničeln), ki pa očitno ni praalgebra, saj je $(0 \times A)(A \times 0) = 0$.

Primer 5 Superalgebra $M(r|s)$ je pra-superalgebra. Množici

$$\mathcal{I} = \{ \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid C \in M_r(\mathbb{F}) \} \quad \text{in} \quad \mathcal{J} = \{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \mid D \in M_s(\mathbb{F}) \}$$

sta neničelna ideala algebre $M(r|s)_0$, katerih produkt je nič. Torej algebra $M(r|s)_0$ ni praalgebra.

Odgovor na prej zastavljeno vprašanje o povezavi med pra-superalgebro (oziroma polpra-superalgebro) $\mathcal{A}$ in praalgebrama (oziroma polpraalgebrama) $\mathcal{A}$ ter $\mathcal{A}_0$ je:

Če je $\mathcal{A}$ asociativna polpra-superalgebra, potem sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}_0$ polpraalgebri. V primeru, da je $\mathcal{A}$ asociativna pra-superalgebra, potem je bodisi $\mathcal{A}$ praalgebra bodisi $\mathcal{A}_0$ praalgebra. Dokaz teh dveh rezultatov najdemo v članku [12].

3 Zaključek

Ob pojmu superalgebre se naravno porajajo vprašanja, kako posplošiti nekatere klasične strukturne izreke, ki veljajo za algebre, na superalgebre. Dotaknimo se nekoliko ozadja problemov. Na primer: Naj bo $\mathcal{A}$ asociativna algebra. Če v $\mathcal{A}$ vpeljemo t.i. jordanski produkt s predpisom $a \circ b = ab + ba$, $\mathcal{A}$ postane jordanska algebra, ki jo navadno označujemo s simbolom $\mathcal{A}^+$. Ob tem se zastavlja vprašanje povezave med strukturnimi značilnostmi algeber $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^+$ (npr. vsak ideal algebre $\mathcal{A}$ je ideal algebre $\mathcal{A}^+$, ali velja tudi obratno?). Tovrstna vprašanja je obravnaval že Herstein v petdesetih letih prejšnjega stoletja (glej npr. [9]). Omejil se je predvsem na študij enostavnih algeber. Kasneje je bila njegova teorija na različne načine posplošena. Na tem področju so rezultate prispevali Lanski, Martindale, McCrimmon, Miers, Montgomery in številni drugi. Z definiranjem superalgeber lahko na podoben način vpeljemo jordanske superalgebre. In kakšna je povezava med strukturo superalgebre in prirejene jordanske superalgebre? Nekaj primerov obravnave tovrstnih vprašanj najdemo na primer v člankih [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12].

Na koncu naj omenimo, da lahko pojem superalgebre razširimo na $\mathcal{G}$-gradirane algebre, kjer je $\mathcal{G}$ Abelova grupa. Algebra je $\mathcal{G}$-gradirana, če obstajajo taki podprostori $\mathcal{A}_g$, $g \in \mathcal{G}$, algebre $\mathcal{A}$, da je $\mathcal{A} = \oplus_{g\in\mathcal{G}}\mathcal{A}_g$ in $\mathcal{A}_g\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{gh}$ za vsaka $g, h \in \mathcal{G}$. Superagebre so torej poseben primer $\mathcal{G}$-gradiranih algeber. V tem primeru je $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2$. V $\mathcal{G}$-gradiranih algebrah na naraven način definiramo strukture kot so moduli, ideali, gradirane praalgebre ... In tukaj so novi odprti problemi.

Literatura

[1] K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, Jordan superhomomorphisms, *Comm. Algebra* 31 (2003), 633–644.

[2] M. Brešar, A. Fošner, M. Fošner, Jordan ideals revisited, *Monatsh. Math.*, 1 (2005), 1–10.

[3] M. Fošner, Jordan superderivations, *Comm. Algebra* 31 (2003), 4533–4545.

[4] M. Fošner, Jordans superderivations, II, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 2004 (2004), 2357–2369.

[5] M. Fošner, On the extended centroid of prime associative superalgebras with applications to superderivations, *Comm. Algebra* 32 (2004), 689–705.

[6] C. Gómez-Ambrosi, J. Laliena, I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a prime superalgebra with superinvolution, *Comm. Algebra* 2 (2000), 3277–3291.

[7] C. Gómez-Ambrosi, F. Montaner, On Herstein's constructions relating Jordan and associative superalgebras, *Comm. Algebra* 28 (2000), 3743–3762.

[8] C. Gómez-Ambrosi, I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a simple superalgebra with superinvolution, *J. Algebra* 208 (1998), 43–71.

[9] I. N. Herstein, Topics in ring theory, The University of Chicago Press, Chicago 1969.

[10] V. G. Kac, Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras, *Comm. Algebra* 13 (1977), 1375–1400.

[11] V. G. Kac, Lie superalgebras, *Advances in mathematics* 26 (1977), 8–96.

[12] F. Montaner, On the Lie structure of associative superalgebras, *Comm. Algebra* 26 (1998), 2337–2349.

[13] S. Montgomery, Constructing simple Lie superalgebras from associative graded algebras, *J. Algebra* 195 (1997), 558–579.

[14] I. P. Shestakov, Prime alternative superalgebras of arbitrary characteristic, *Algebra and logic* 36 (1997), 389–420.