



OBSERVACIONES ACERCA DE LA APLICACIÓN DE LA DERIVADA TOPOLÓGICA EN LA IDENTIFICACIÓN DE CAVIDADES MEDIANTE LA TOMOGRAFÍA DE IMPEDANCIA ELÉCTRICA

Exequiel M. A. Santucho^a, Antonio Orlando^b y Mariela Luege^a

^aCONICET, Instituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, FACET, UNT, Av. Independencia 1800, 4000
S.M. de Tucumán, Argentina, esantucho@facet.unt.edu.ar, mluege@herrera.unt.edu.ar,
<http://www.herrera.unt.edu.ar/iest>

^bInstituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, FACET, UNT; Departamento de Mecánica, FACET,
UNT, aorlando@herrera.unt.edu.ar

Palabras Clave: problema inverso, cavidades, análisis asintótico, derivada topológica.

Resumen. La Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE) es una técnica de ensayo no destructivo que estima las propiedades eléctricas en el interior de un cuerpo, a partir de mediciones electrostáticas tomadas en su contorno. Esta técnica puede ser usada también para determinar defectos como cavidades o fisuras en el interior del material, mediante su identificación con las singularidades en la variación espacial de la función que representa la conductividad eléctrica. Un enfoque común para la solución de este tipo de problemas consiste en su formulación como un problema de optimización topológica, en el cual la función objetivo está dada por una medida de la fidelidad de datos de potencial eléctrico en el contorno, y las incógnitas a determinar son representadas por las cavidades internas del material. En este trabajo discutimos algunos aspectos de la aplicación de la derivada topológica a este problema. La derivada topológica del funcional de costo es un campo escalar que brinda información acerca de su sensibilidad cuando una cavidad infinitesimal es creada en el dominio. Esta propiedad es, por lo tanto, usada en un algoritmo de actualización tal como uno propuesto en (A. Carpio y M. L. Rapún, *Inv. Problems*, 28 (2012)), a fin de determinar la forma, tamaño y ubicación de defectos en el interior del cuerpo. En este trabajo se presenta además el procedimiento de cálculo de la derivada topológica del funcional de costo, siguiendo la metodología propuesta en (A. A. Novotny y J. Sokolowski, *Springer*, (2013)) y se desarrollan experimentos numéricos empleando datos sintéticos para las mediciones de contorno, comentándose los resultados obtenidos.

1. INTRODUCCIÓN

La tomografía de impedancia eléctrica (TIE) es un método que estima la distribución espacial de las propiedades electromagnéticas en el interior de un cuerpo, mediante mediciones de voltaje en la superficie exterior, generado por la aplicación de corriente eléctrica en dicha superficie. La reconstrucción de la forma y ubicación de objetos inmersos en un medio inaccesible, constituye un problema recurrente en varias disciplinas, entre las cuales la TIE se muestra atractiva. La información obtenida de las propiedades electromagnéticas en el interior del cuerpo pueden ser usadas para tal fin, constituyendo una metodología usada, por ejemplo, como ensayo no destructivo (Eggleston et al., 1990), para la ubicación de depósitos minerales (Parker, 1984) o en el ámbito médico para el diagnóstico por imágenes (Holder, 1993). Sin embargo, en contraposición a las numerosas ventajas prácticas de esta técnica, existe una limitación en su uso debido a la ineficiencia de los métodos actuales para la reconstrucción de las propiedades electromagnéticas (Lionheart, 2004). La determinación del campo incógnita constituye un problema inverso no lineal y mal condicionado. La no linealidad se manifiesta por la fuerte dependencia del flujo de corriente y el potencial respecto al campo de conductividad y permitividad. Por otra parte, es bien conocido que este problema es mal condicionado en el sentido de Hadamard (1923), y se debe principalmente a la pérdida de continuidad del mapeo inverso, el cual depende de la regularidad de los campos incógnitas (Borcea, 2002).

Para la aplicación exitosa de la TIE es, por tanto, fundamental el diseño de algoritmos de reconstrucción eficientes y estables. En la literatura se proponen un gran número de métodos numéricos, de entre los cuales se mencionan aquellos de naturaleza variacional (Yorkey et al., 1987; Santosa y Vogelius, 1991; Rondi y Santosa, 2001; Lionheart, 2004; Chung et al., 2005; Lechleiter y Rieder, 2006). Éstos se basan en la minimización de un funcional de ajuste de tipo cuadrados mínimos, definido en el contorno del cuerpo, que considera el error entre los valores reales de potencial y el valor de potencial obtenido con la reconstrucción, y presentan las propiedades eléctricas como incógnitas a determinar.

El problema de identificación de cavidades aisladas en un dominio plano, realizando mediciones electrostáticas en el contorno del cuerpo, puede ser considerado como un caso especial de TIE, en el cual la conductividad se asume conocida, en el sentido que sólo puede tomar dos valores: 0 para aquellos puntos del dominio que representan las cavidades, y 1 para aquellos puntos que conforman el cuerpo macizo. Es decir, la conductividad juega el mismo rol que la función característica del dominio desconocido. En este sentido, un modelo matemático común consiste en la formulación del problema de la TIE como un problema de optimización topológica, en el cual la incógnita a determinar es la función característica de las cavidades del cuerpo. En este trabajo discutimos algunos aspectos de la aplicación de la derivada topológica para la solución del problema de optimización topológica. La derivada topológica del funcional de costo es un campo escalar que brinda información acerca de su sensibilidad cuando el dominio es perturbado con la creación de una cavidad infinitesimal. Esta propiedad es aquí usada en un algoritmo de actualización similar a uno propuesto por Carpio y Rapún (2013), a fin de determinar la forma, tamaño y ubicación de los defectos en el interior del cuerpo.

Luego de esta breve introducción, en la siguiente sección se realiza el planteo formal del problema de la TIE, incluyendo la definición del problema directo y del problema inverso. En la sección 3 se describe la técnica de reconstrucción basada en la derivada topológica del funcional de costo del problema, como así también el procedimiento de obtención de la expresión analítica que la define, siguiendo la metodología propuesta por Novotny y Sokolowski (2013). En la sección 4 se propone una aplicación experimental, comentando los aspectos numéricos

resultantes y finalmente el trabajo concluye con algunas observaciones y agradecimientos.

2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE IMPEDANCIA

En el problema de la TIE se intenta reconstruir la conductividad y la permitividad, empleando mediciones simultáneas de voltaje y corriente en el contorno accesible del cuerpo. Se denota el interior del cuerpo con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y acotado, simplemente conexo, con contorno suave $\partial\Omega$. En el interior, el potencial eléctrico $u = u(x)$ satisface

$$\nabla \cdot \gamma(x, \omega) \nabla u = 0 \quad (1)$$

donde $\gamma = \sigma + i\omega\epsilon$, siendo σ la conductividad eléctrica, ϵ la permitividad y ω la frecuencia angular de la corriente aplicada. La derivación de las ecuaciones de Maxwell puede verse en (Cheney et al., 1999). Cuando se aplica una corriente de frecuencia nula o suficientemente pequeña, el campo magnético puede ser despreciado, es decir $\gamma = \sigma$, obteniéndose el problema inverso de conductividad, el cual se considera en este trabajo.

La corriente es aplicada a través de electrodos ubicados en el contorno del cuerpo. Para considerar este efecto, se pueden proponer diferentes condiciones de contorno. Una forma de hacerlo es con el planteo de una condición de Neumann continua,

$$\sigma \partial_n u = f \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \quad (2)$$

con la correspondiente medición de voltaje en el contorno

$$u = u_m \quad \text{en} \quad \partial\Omega. \quad (3)$$

Aquí, n es la normal unitaria externa, ∂_n denota la derivada normal y f la corriente que ingresa al interior del cuerpo. El problema de Neumann (1)-(2) admite solución siempre que se cumpla $\int_{\partial\Omega} f = 0$, que es precisamente la ley de conservación de la carga eléctrica. Para determinar el potencial de manera unívoca, se propone un potencial de referencia dado por $\int_{\partial\Omega} u = 0$. Se nota también que el potencial medido en el contorno cumple $\int_{\partial\Omega} u_m = 0$.

Si se asume que Ω contiene un número finito de cavidades $\kappa_i \subset \Omega$, el problema inverso de identificación consiste en determinar el dominio desconocido $\kappa = \cup_{i=1}^d \kappa_i$, a partir de la aplicación de la corriente f y la medición correspondiente del voltaje en el contorno. Si se considera la aplicación de un único patrón de corriente, una medición de voltaje, y una conductividad homogénea en el cuerpo, el problema inverso puede ser formulado como: Dados f y u_m pertenecientes a algún espacio apropiado, encontrar (u, κ) tal que satisface

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{en } \Omega \setminus \kappa \\ \partial_n u &= f & \text{en } \partial\Omega \\ \partial_n u &= 0 & \text{en } \partial\kappa \\ u &= u_m & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Introduciendo la función característica χ_κ de κ para representar configuraciones arbitrarias de κ , el problema (4) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (1 - \chi_\kappa) \nabla u &= 0 & \text{en } \Omega \\ \partial_n u &= f & \text{en } \partial\Omega \\ u &= u_m & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Este problema puede escribirse de forma variacional, lo cual resulta muy útil para el tratamiento numérico. Es decir, el problema de la TIE puede reformularse como un problema de optimización con vínculo, este último dado por la ecuación de estado. El problema queda entonces definido como: Encontrar (u, χ_κ) tal que minimiza

$$F_{\chi_\kappa}(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |u - u_m|^2 \quad (6)$$

dónde u resuelve el problema (5). Se nota que siendo $u = u(\chi_\kappa)$, el funcional (6) puede considerarse sólo como función de χ_κ . En lo que sigue usaremos la notación $F(\chi_\kappa)$ para notar explícitamente esta dependencia. El problema así definido presenta similitud al problema de optimización topológica (Bendsøe y Sigmund, 2003) y diseño óptimo (Ambrosio et al., 2000).

3. RECONSTRUCCIÓN DE LOS DEFECTOS

Para la determinación del conjunto κ , se emplea la información brindada por la derivada topológica del funcional de forma que interviene en el problema. La derivada topológica mide la sensibilidad de un funcional con respecto a perturbaciones en el dominio (Novotny y Sokolowski, 2013) y fue introducida en forma rigurosa por Sokolowski y Zochowski (1999) como una justificación matemática del llamado "bubble method" (Eschenauer et al., 1994). La derivada topológica se puede obtener mediante un análisis asintótico de la solución clásica del problema de valor de contorno en un dominio singularmente perturbado, combinado con el análisis asintótico del funcional de forma (Novotny y Sokolowski, 2013).

Se considera una perturbación en el dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, confinada en una bola abierta $B_\varepsilon(\hat{x})$, de radio ε y centro $\hat{x} \in \Omega$, con $\overline{B_\varepsilon(\hat{x})} \Subset \Omega$, es decir $B_\varepsilon(\hat{x}) \subset \Omega$ y $\text{dist}(\partial\overline{B_\varepsilon(\hat{x})}, \partial\Omega) > 0$. Si denotamos χ_Ω y χ_{B_ε} a las funciones características de Ω y $B_\varepsilon(\hat{x})$, respectivamente, $\chi_\varepsilon = \chi_\Omega - \chi_{B_\varepsilon}$ es la función característica del dominio perturbado $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(\hat{x})}$. Denotando con $\mathcal{F}(\chi_\Omega)$ un funcional de forma (Sokolowski y Zochowski, 1999), tal como el definido en (6), la derivada topológica de $\mathcal{F}(\chi_\Omega)$ en \hat{x} se define en general como

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\hat{x}, \chi_\Omega) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\chi_\varepsilon) - \mathcal{F}(\chi_\Omega)}{g(\varepsilon)} \quad (7)$$

donde $g(\varepsilon)$ es una función positiva que satisface $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon) = 0$ (Sokolowski y Zochowski, 1999). Si asumimos que el funcional $\mathcal{F}(\chi_\varepsilon)$ admite la siguiente expansión

$$\mathcal{F}(\chi_\varepsilon) = \mathcal{F}(\chi_\Omega) + g(\varepsilon)\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\hat{x}, \chi_\Omega) + o(g(\varepsilon)), \quad (8)$$

donde el residuo $o(g(\varepsilon))$ satisface la propiedad $o(g(\varepsilon))/g(\varepsilon) \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$, se nota que si se remueven de Ω pequeñas bolas centradas en \hat{x} en dónde $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\hat{x}, \chi_\Omega) < 0$, el funcional expandido decrece su valor. Este comportamiento sugiere una estrategia de minimización, la cual es usada por ejemplo en (Carpio y Rapún, 2012; Céa et al., 2000). Para hacer uso de esta técnica de minimización, es necesario obtener una expresión explícita de la derivada topológica del funcional de costo (6), para lo cual se sigue la metodología propuesta por Novotny y Sokolowski (2013). Ésta establece que la derivada topológica de un funcional $\mathcal{F}(\chi_\Omega)$ evaluada en \hat{x} puede determinarse a partir de

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\hat{x}, \chi_\Omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{g'(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(\chi_\varepsilon) \quad (9)$$

donde $\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(\chi_\varepsilon)$ es la derivada ("shape derivative") del funcional $\mathcal{F}(\chi_\varepsilon)$ con respecto a un parámetro pequeño positivo ε . Se nota que (9) se obtiene formalmente a partir de (7) aplicando

el teorema de l'Hôpital. A continuación presentamos los pasos para evaluar (9) considerando el funcional de forma correspondiente al problema de la TIE.

Formulación del problema

El funcional de costo en el dominio original no perturbado se define como

$$\mathcal{F}(\chi_\Omega) := F_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |u - u_m|^2 \quad (10)$$

donde la función escalar u es solución del problema variacional: Encontrar $u \in \mathcal{H}$ tal que resuelve

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega} f w = 0 \quad \forall w \in \mathcal{H}, \quad (11)$$

donde

$$\mathcal{H} := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} v = 0 \right\} \quad (12)$$

La formulación fuerte correspondiente al problema variacional (11) es: Encontrar u tal que

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{en } \Omega \\ \partial_n u &= f & \text{en } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} u &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

A continuación se plantea el problema en el dominio perturbado. Dado $\hat{x} \in \Omega$ y asumiendo $\varepsilon > 0$ se considera el siguiente funcional

$$\mathcal{F}(\chi_\varepsilon) := F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon - u_m|^2 \quad (14)$$

donde la función escalar u_ε resuelve el problema variacional: Encontrar $u_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ tal que resuelve

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f w = 0 \quad \forall w \in \mathcal{H}_\varepsilon, \quad (15)$$

donde

$$\mathcal{H}_\varepsilon := \left\{ v \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \int_{\partial\Omega_\varepsilon} v = 0 \right\} \quad (16)$$

La formulación fuerte correspondiente al problema variacional (15) es: Encontrar u_ε tal que

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon &= 0 & \text{en } \Omega_\varepsilon \\ \partial_n u_\varepsilon &= f & \text{en } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial B_\varepsilon \\ \partial_n u_\varepsilon &= 0 & \text{en } \partial B_\varepsilon \\ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Para los siguientes desarrollos, introducimos también el estado adjunto p_ε , que en este caso se obtiene como solución del problema: Encontrar $p_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$, tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p_\varepsilon \cdot \nabla w &= -\langle D_u F_{\chi_\varepsilon}(u), w \rangle \\ &= - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u - u_m) w \quad \forall w \in \mathcal{H}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (18)$$

La formulación fuerte correspondiente al problema variacional (18) es: Encontrar p_ε tal que

$$\begin{aligned} \Delta p_\varepsilon &= 0 && \text{en } \Omega_\varepsilon \\ \partial_n p_\varepsilon &= -(u - u_m) && \text{en } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial B_\varepsilon \\ \partial_n p_\varepsilon &= 0 && \text{en } \partial B_\varepsilon \\ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Con esta construcción, el lado derecho de la ecuación del estado adjunto no depende del parámetro ε a través de la función u_ε . Esta característica simplifica el análisis asintótico del estado adjunto p_ε . Finalmente, el estado adjunto asociado con el dominio no perturbado se obtiene tomando $\varepsilon = 0$ en (18), es decir, p es la solución del estado adjunto de la forma: Encontrar $p \in \mathcal{H}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla w &= -\langle D_u F_{\chi\Omega}(u), w \rangle \\ &= -\int_{\partial\Omega} (u - u_m)w \quad \forall w \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (20)$$

La formulación fuerte correspondiente al problema variacional (20) es: Encontrar p tal que

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0 && \text{en } \Omega \\ \partial_n p &= -(u - u_m) && \text{en } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} p &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Análisis de sensibilidad de forma

El siguiente paso consiste en determinar la derivada de forma del funcional $F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$ con respecto a una expansión uniforme de la bola B_ε . En los resultados que siguen, se presentan las expresiones de la derivada de forma de F_{χ_ε} , denotada como $\frac{d}{d\varepsilon} F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$.

Proposición 1. Sea $F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$ el funcional de forma definido por (14). Entonces, la derivada de $F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$ con respecto a ε está dada por

$$\frac{d}{d\varepsilon} F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = -\int_{\Omega_\varepsilon} [\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla p_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon - (\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla p_\varepsilon) \mathbf{I}] \cdot \nabla V, \quad (22)$$

donde $V \in \mathcal{V}$, siendo

$$\mathcal{V} := \{S \in C_0^2(\Omega, \mathbb{R}^2) : S|_{\partial B_\varepsilon(\hat{x})} = -n\}, \quad (23)$$

con $x \in \partial B_\varepsilon$ y $n = -(x - \hat{x})/\varepsilon$, \otimes denota el producto tensorial en \mathbb{R}^2 , \mathbf{I} es la matriz identidad de \mathbb{R}^2 , u_ε es solución del problema (17) y p_ε es solución del problema adjunto (19).

Usando la notación anterior, se puede también mostrar el siguiente resultado, donde la integral de volumen (22) se expresa en una integral de línea.

Proposición 2. Sea $F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$ el funcional de forma definido por (14). Entonces, la derivada de $F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon)$ con respecto a ε está dada por

$$\frac{d}{d\varepsilon} F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} [\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla p_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon - (\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla p_\varepsilon) \mathbf{I}] n \cdot V, \quad (24)$$

donde $V \in \mathcal{V}$, con \mathcal{V} definido según (23).

De acuerdo al resultado obtenido en la Proposición 2 y teniendo en cuenta que $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$ con $\partial\Omega \cap \partial B_\varepsilon = \emptyset$, y que $V = 0$ en $\partial\Omega$ y $V = -n$ en ∂B_ε , la expresión (24) se reduce como sigue

$$\frac{d}{d\varepsilon} F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \int_{\partial B_\varepsilon} [\nabla u_\varepsilon \otimes \nabla p_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon \otimes \nabla u_\varepsilon - (\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla p_\varepsilon) \mathbf{I}] n \cdot n. \quad (25)$$

Análisis asintótico de la solución

La ecuación (25) muestra que la derivada de forma del funcional F_{χ_ε} está dada por una integral sobre el contorno ∂B_ε de la bola, y depende de las solución u_ε de la ecuación de estado y de la solución p_ε del problema adjunto, definidas en el dominio perturbado Ω_ε . Sin embargo, esta derivada puede ser evaluada si se conoce el comportamiento explícito de las funciones u_ε y p_ε con respecto a ε . Esto se obtiene realizando un análisis asintótico de la ecuación de estado y de la ecuación adjunta, siguiendo la metodología propuesta por Novotny y Sokolowski (2013).

- *Expansión asintótica del Estado Directo*

Se propone una expansión de u_ε de la forma (Kozlov et al., 1999):

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= u(x) + v_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x) \\ &= u(\hat{x}) + \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(y) (x - \hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \\ &\quad + v_\varepsilon(x) + \tilde{u}_\varepsilon(x) \end{aligned} \quad (26)$$

donde y es un punto intermedio entre x y \hat{x} . En el contorno ∂B_ε de la bola, se cumple que $\partial_n u_\varepsilon = 0$. De esta manera, si se evalúa la derivada normal en la expresión anterior en ∂B_ε se obtiene

$$\nabla u(\hat{x}) \cdot n - \varepsilon \nabla \nabla u(y) n \cdot n + \partial_n v_\varepsilon(x) + \partial_n \tilde{u}_\varepsilon(x) = 0. \quad (27)$$

En particular se puede elegir $v_\varepsilon(x)$ de tal modo que

$$\partial_n v_\varepsilon(x) = -\nabla u(\hat{x}) \cdot n \quad \text{en } \partial B_\varepsilon. \quad (28)$$

Si se considera el problema exterior: Encontrar v_ε tal que

$$\begin{aligned} \Delta v_\varepsilon &= 0 && \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\varepsilon} \\ v_\varepsilon &\rightarrow 0 && \text{en } \infty \\ \partial_n v_\varepsilon &= -\nabla u(\hat{x}) \cdot n && \text{en } \partial B_\varepsilon, \end{aligned} \quad (29)$$

obtenido formalmente cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, tal problema (29) admite la siguiente solución explícita

$$v_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}). \quad (30)$$

A continuación es posible construir \tilde{u}_ε de tal manera que compense las discrepancias introducidas por los términos de orden superior en ε , como así también v_ε en el contorno exterior

$\partial\Omega$. Esto significa que el residuo \tilde{u}_ε debe ser solución del siguiente problema de valores de contorno: Encontrar \tilde{u}_ε tal que

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{u}_\varepsilon &= 0 && \text{en } \Omega_\varepsilon \\ \partial_n\tilde{u}_\varepsilon &= -\partial_n v_\varepsilon && \text{en } \partial\Omega_\varepsilon \\ \partial_n\tilde{u}_\varepsilon &= \varepsilon\nabla\nabla u(y)n \cdot n && \text{en } \partial B_\varepsilon.\end{aligned}\quad (31)$$

Se observa que $\tilde{u}_\varepsilon = O(\varepsilon)$ puesto que $v_\varepsilon = O(\varepsilon^2)$ en el contorno exterior $\partial\Omega$. Finalmente, la expansión asintótica de u_ε se escribe como

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon). \quad (32)$$

• *Expansión asintótica del Estado Adjunto*

Para la expansión asintótica de p_ε , se propone una forma análoga a la expansión del estado directo u_ε (Kozlov et al., 1999), es decir de la forma :

$$\begin{aligned}p_\varepsilon &= p(x) + v_\varepsilon(x) + \tilde{p}_\varepsilon(x) \\ &= p(\hat{x}) + \nabla p(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \nabla\nabla p(y)(x - \hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) \\ &\quad + v_\varepsilon(x) + \tilde{p}_\varepsilon(x)\end{aligned}\quad (33)$$

donde y es un punto intermedio entre x y \hat{x} . En el contorno ∂B_ε de la bola se cumple que $\partial_n p_\varepsilon = 0$. De esta manera, la derivada normal de la expansión anterior, evaluada en ∂B_ε es análoga a (27). De esta manera, el resultado obtenido es similar a (32), es decir

$$p_\varepsilon(x) = p(x) + \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla p(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon). \quad (34)$$

Se observa que tanto u_ε como p_ε están expresadas en términos de las soluciones en el dominio original.

Evaluación de la derivada topológica

Una vez obtenidas las expresiones asintóticas de las soluciones u_ε y p_ε , se puede proceder finalmente a evaluar explícitamente la integral (25). En este caso esto es posible si expresamos u_ε y p_ε en un sistemas de coordenadas polar con centro en \hat{x} . En un sistema de coordenadas curvilíneas $n - \tau$ en el contorno ∂B_ε , los gradientes ∇u_ε y ∇p_ε pueden descomponerse en su componente normal y tangencial, de la forma

$$\nabla u_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = (\partial_n u_\varepsilon)n + (\partial_\tau u_\varepsilon)\tau \quad \nabla p_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = (\partial_n p_\varepsilon)n + (\partial_\tau p_\varepsilon)\tau. \quad (35)$$

Reemplazando en (25) y acomodando la expresión se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon} F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \int_{\partial B_\varepsilon} 2 [((\partial_n u_\varepsilon)n + (\partial_\tau u_\varepsilon)\tau) \cdot n] [((\partial_n p_\varepsilon)n + (\partial_\tau p_\varepsilon)\tau) \cdot n] \\ &\quad - [(\partial_n u_\varepsilon)n + (\partial_\tau u_\varepsilon)\tau] \cdot [(\partial_n p_\varepsilon)n + (\partial_\tau p_\varepsilon)\tau],\end{aligned}\quad (36)$$

y sabiendo que $n \cdot n = 1$, $\tau \cdot \tau = 1$ y $n \cdot \tau = 0$, se llega a

$$\frac{d}{d\varepsilon} F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \int_{\partial B_\varepsilon} \{2(\partial_n u_\varepsilon)(\partial_n p_\varepsilon) - [(\partial_n u_\varepsilon)(\partial_n p_\varepsilon) + (\partial_\tau u_\varepsilon)(\partial_\tau p_\varepsilon)]\} \quad (37)$$

Como $\partial_n u_\varepsilon = 0$ en ∂B_ε , la expresión anterior queda

$$\frac{d}{d\varepsilon} F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = - \int_{\partial B_\varepsilon} (\partial_\tau u_\varepsilon)(\partial_\tau p_\varepsilon) \quad (38)$$

A continuación se escribe la expansión asintótica del estado directo (32), en las cercanías de B_ε , empleando el sistema de coordenadas polar centrado en \hat{x} . Dicha expresión queda

$$u_\varepsilon(r, \theta) = \varphi_0 + \frac{r^2 + \varepsilon^2}{r} (\varphi_1 \cos \theta + \varphi_2 \sin \theta) + O(\varepsilon) \quad (39)$$

en donde se emplea la notación $u(\hat{x}) = \varphi_0$ y $\nabla u(\hat{x}) = (\varphi_1, \varphi_2)^T$. La derivada tangencial de u_ε se obtiene como

$$\begin{aligned} \partial_\tau u_\varepsilon(x) &= -\frac{1}{r} \partial_\theta u_\varepsilon(r, \theta) \\ &= \frac{r^2 + \varepsilon^2}{r^2} (\varphi_1 \sin \theta - \varphi_2 \cos \theta) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (40)$$

Particularizando la derivada en los puntos del contorno ∂B_ε de la bola (es decir, tomando $r = \varepsilon$) se llega finalmente a

$$\partial_\tau u_\varepsilon(x)|_{\partial B_\varepsilon} = 2(\varphi_1 \sin \theta - \varphi_2 \cos \theta) + O(\varepsilon) \quad (41)$$

Realizando un procedimiento análogo para obtener la derivada tangencial del estado adjunto p_ε , y particularizada en el contorno de la bola, se llega a la expresión

$$\partial_\tau p_\varepsilon(x)|_{\partial B_\varepsilon} = 2(\psi_1 \sin \theta - \psi_2 \cos \theta) + O(\varepsilon), \quad (42)$$

donde $p(\hat{x}) = \psi_0$ y $\nabla p(\hat{x}) = (\psi_1, \psi_2)^T$. Considerando estas últimas dos expresiones y reemplazando en (37), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} F_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) &= -\varepsilon \int_0^{2\pi} 4(\varphi_1 \sin \theta - \varphi_2 \cos \theta)(\psi_1 \sin \theta - \psi_2 \cos \theta) + O(\varepsilon^2) \\ &= -4\pi\varepsilon(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (43)$$

Por lo tanto, la derivada topológica es

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\hat{x}, \chi_\Omega) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{g'(\varepsilon)} (4\pi\varepsilon(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) + O(\varepsilon^2)), \quad (44)$$

y si se toma $g(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$, ésta puede expresarse

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\hat{x}, \chi_\Omega) &= -2(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) \\ &= -2\nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla p(\hat{x}). \end{aligned} \quad (45)$$

De esta manera, la expansión asintótica del funcional de costo se escribe

$$\mathcal{F}(\chi_\varepsilon) = \mathcal{F}(\chi_\Omega) - 2\pi\varepsilon^2(\nabla u(\hat{x}) \cdot \nabla p(\hat{x})) + O(\varepsilon^2) \quad (46)$$

Se observa que la expresión de la derivada topológica (45) coincide con la conseguida en (Carpio y Rapún, 2013) particularizando algunos coeficientes.

4. ALGORITMO Y EJEMPLO NUMÉRICO

En esta sección se introduce el algoritmo numérico para resolver el problema inverso de identificación de cavidades y se presentan experimentos a fin de mostrar su desempeño. Basados en la expansión del funcional evaluado en el dominio perturbado (8) se observa que si se quitan del dominio de definición del problema original, aquellos puntos en los que la derivada topológica tiene valores negativos y de valor absoluto grande, su valor disminuye. Se puede actualizar la aproximación del dominio Ω_{i+1} computando la derivada topológica de (6), haciendo luego $\Omega_{i+1} = \Omega_i \setminus \Omega_i^\kappa$, donde Ω_i^κ está formado por todos aquellos puntos en los que la derivada topológica cumple la condición antes mencionada. Esto motiva el algoritmo iterativo descrito a continuación, que es similar al empleado en (Carpio y Rapún, 2013). En este último trabajo, además de obtener la aproximación del dominio con inclusiones incógnitas, los autores determinan los valores de admitividad de cada inclusión.

- *Algoritmo iterativo*

- Inicialización: Elegir el dominio inicial Ω_0 .
- Repetir:
 - Calcular u_k y p_k , soluciones del estado directo y adjunto (17) y (19), respectivamente, definidos en el dominio Ω_i .
 - Calcular la derivada topológica (45).
 - Definir el nuevo dominio como $\Omega_{i+1} = \Omega_i \setminus \Omega_i^\kappa$, donde $\Omega_i^\kappa = \{x \in \Omega_i : \mathcal{D}_{\mathcal{J}}(\hat{x}, \chi_{\Omega_i}) \leq -c\}$, y $c > 0$ un umbral de actualización adoptado.
 - Comprobar criterio de detención del método.

A continuación se presentan experimentos numéricos a fin de mostrar el desempeño del método de reconstrucción desarrollado en este trabajo. Los ejemplos propuestos consideran diferentes geometrías del cuerpo a analizar, variando la forma de su contorno y la cantidad, posición y forma de las cavidades interiores. La resolución de los problemas de valores de contorno que intervienen en el proceso de cálculo, se hace con el método de elementos finitos.

Para la primera serie de ejemplos de reconstrucción (figuras 1 a 3 (a)), se considera un dominio cuadrangular $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ con cavidades cuadrangulares de tamaño 0.4×0.4 , ubicadas según se muestra en cada figura. La discretización del dominio se hace de forma estructurada con elementos finitos triangulares de tipo P_1 . La malla se genera a partir de una grilla ortogonal de 50×50 elementos, donde cada uno de ellos es luego dividido por sus diagonales (resultando en 4 triángulos), dando un total de 1×10^4 elementos. El umbral de actualización de dominio, c , se determina con $c = \eta |\min(\mathcal{D}_{\mathcal{J}}(\hat{x}, \chi_{\Omega_i}))|$, donde η se toma igual a $9/10$, y permanece fijo durante todo el proceso iterativo. El criterio de detención del método considera el valor del funcional de costo del problema, cuyo valor aceptable para los ejemplos aquí realizados se fija en 1×10^{-3} . Los datos de entrada de potencial para el problema inverso se generan de manera sintética, resolviendo el problema directo con la cavidad prescrita. Se considera una distribución uniforme de electrodos en el contorno, a través de los cuales ingresa la señal sin ruido de la corriente eléctrica, definida por dos patrones que actúan simultáneamente:

$$f_1(t) = \text{sen}(t), \quad f_2(t) = \text{cos}(t), \quad t \in [0, 2\pi). \quad (47)$$

La segunda serie de ejemplos consiste en un dominio circular de radio unitario, con cavidades circulares de radio 0.1 ubicadas según figuras 4 y 5 (a). En este caso, el dominio es discretizado de forma no estructurada usando elementos finitos triangulares de tipo P_1 , resultando en 2776 y 2846 elementos respectivamente. El valor del umbral de actualización de dominio, c , es el mismo que para los ejemplos anteriores. El valor del funcional de costo para la detención del método se considera aceptable en 3×10^{-3} . Los patrones de corriente empleados son los mismos que en el ejemplo anterior, es decir, definidos según (47).

Los resultados obtenidos pueden apreciarse en las figuras 1 a 5 (b), las cuales muestran los valores de la derivada topológica en el dominio analizado. Se nota que el método propuesto reconstruye la ubicación de las cavidades incógnitas de forma aceptable cuando éstas se ubican en una zona relativamente próxima al contorno del cuerpo, es decir, de la zona donde se ubican los electrodos de inyección de corriente y medición de voltaje. Como se observa en las figuras 1, 2 y 4 (b), los valores negativos de mayor valor absoluto de la derivada topológica se encuentran en coincidencia con la ubicación real de las cavidades. Esta respuesta es igualmente aceptable si se considera más de una cavidad, como puede observarse en la figura 2 (b). Sin embargo, debemos notar que cuando la cavidad se encuentra en la zona central del cuerpo (figura 3 y 5), el resultado obtenido no es del todo satisfactorio. Aún cuando se satisface la condición de detección del método de acuerdo al valor del funcional de costo, la información que brinda la derivada topológica no es suficiente para determinar de forma razonable la ubicación de la cavidad. Esto último puede atribuirse al alto grado de mal condicionamiento y no linealidad, que son características propias del problema inverso de la TIE (Lionheart, 2004). Como se mencionó en la Sección 2, el problema de la TIE definido en este trabajo presenta similitud con el problema de optimización topológica (Bendsøe y Sigmund, 2003) y diseño óptimo (Ambrosio et al., 2000), entre los cuales, el problema de optimización de tipo 0-1 presenta dificultades relacionadas a la inestabilidad numérica debido al mal condicionamiento (Sigmund y Petersson, 1998). Sin embargo, los resultados presentados en este trabajo para cavidades ubicadas en la zona central del cuerpo, son susceptibles de mejorar mediante la regularización del problema inverso original. Esto puede hacerse a nivel del continuo, modificando el modelo mediante la adición de un término de penalización al funcional de costo, o mediante técnicas de regularización a nivel discreto.

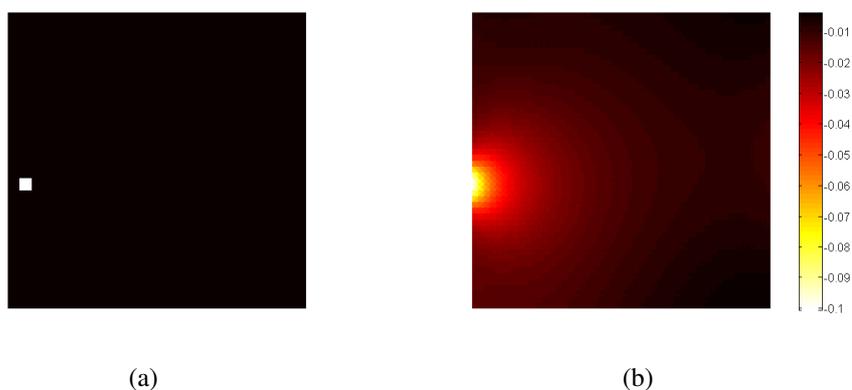


Figura 1: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo $7,09 \times 10^{-5}$.

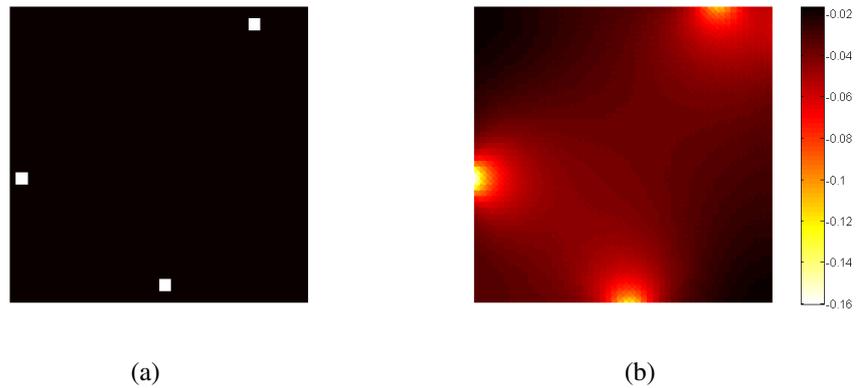


Figura 2: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo $3,37 \times 10^{-4}$.

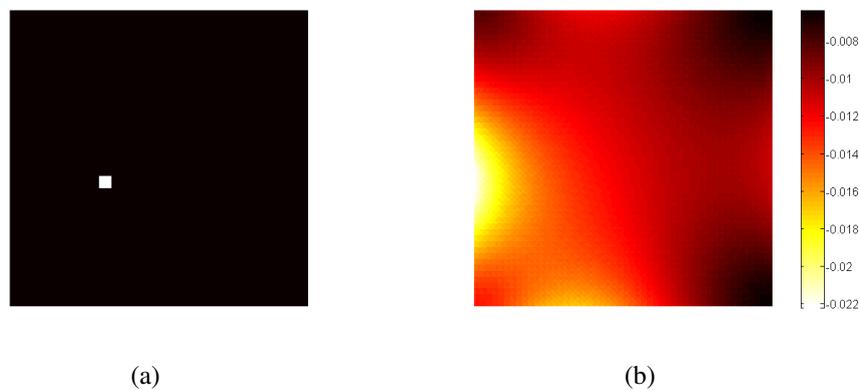


Figura 3: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo $1,61 \times 10^{-5}$.

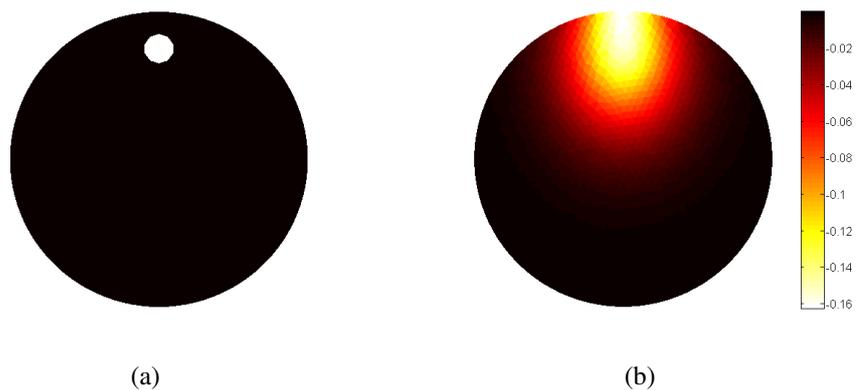


Figura 4: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo $2,39 \times 10^{-3}$.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha presentado el problema de reconstrucción de cavidades mediante el uso de la Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE). Se ha descrito el concepto de derivada topológica, su forma de obtención para el problema de la TIE y su aplicación numérica en varios ejemplos, a fin de observar su desempeño. Los ejemplos propuestos consideran diferentes

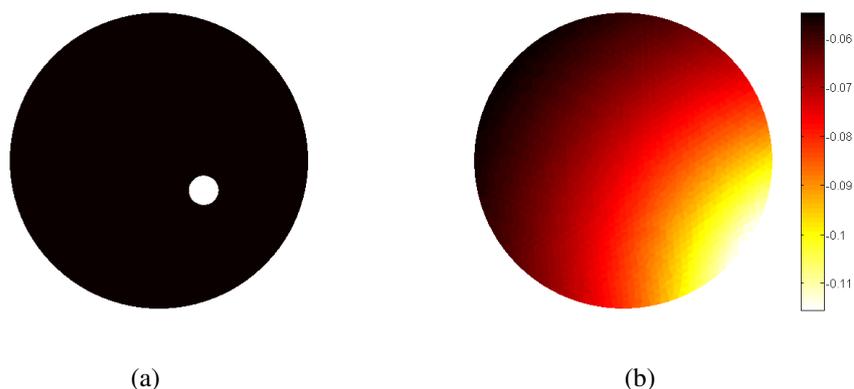


Figura 5: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo $1,30 \times 10^{-3}$.

geometrías del cuerpo analizado, variando la forma de su contorno y la cantidad, posición y forma de las cavidades interiores. Se consideró una distribución uniforme de electrodos en el contorno, a través de los cuales ingresa la señal (sin ruido) de la corriente eléctrica, definida por dos patrones de tipo trigonométrico. Los resultados obtenidos muestran que si se emplean estos tipos de patrones de corriente, y la ubicación de las cavidades incógnitas es próxima al contorno del cuerpo, el método de tipo gradiente basado en la derivada topológica, constituye una metodología válida para resolver el problema de identificación de defectos. Cuando las cavidades se ubican en la zona central del cuerpo, y son iluminadas con el mismo patrón de corriente, la identificación parece ser transparente a tal configuración. Esto se debe al mal condicionamiento y la alta no linealidad, características propias del problema inverso de la TIE. Una manera de abordar esta dificultad consiste en la regularización del problema inverso mediante la adición de un término de penalización al funcional de costo, o emplear alguna técnica de regularización a nivel discreto. Los problemas de valores de contorno intervinientes se han resuelto con el método de elementos finitos, con una triangulación regular del dominio con elementos de tipo P_1 .

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido soportado financieramente por CONICET, Proyecto Préstamo BID PICT PRH 30 N° 94, y Proyecto PIUNT E527. Los autores agradecen a Ana Carpio y María Luisa Rapún por sus valiosos comentarios y sugerencias en el tema abordado. También agradecen las observaciones realizadas por los revisores, las cuales fueron de mucha utilidad para mejorar este trabajo.

REFERENCIAS

- Ambrosio L., Fusco N., y Pallara D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford University Press, 2000.
- Bendsøe M. y Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 2003.
- Borcea L. Electrical Impedance Tomography. *Inverse Problems*, 18:99–136, 2002.
- Céa J., Garreau S., Guillaume P., y Masmoudi M. The shape and topological optimizations connection. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188:713–726, 2000.
- Carpio A.A. y Rapún M.L. Hybrid topological derivative and gradient-based methods for electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, 28, 2012.
- Carpio A.A. y Rapún M.L. Hybrid Topological Derivative-Gradient Based Methods for Non-

- destructive Testing. *Hindawi Publishing Corporation*, 2013.
- Cheney M., Isaacson D., y Newell J.C. Electrical Impedance Tomography. *SIAM*, 41:85–101, 1999.
- Chung E., Chan T., y Tai X.C. Electrical Impedance Tomography using level set representation and total variational regularization. *J. Comput. Phys.*, 205:357–372, 2005.
- Eggleston M.R., Schwabe R.J., Isaacson D., y Coffin L.F. The Application of Electric Current Computed Tomography to Defect Imaging in Metals. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, páginas 455–462, 1990.
- Eschenauer H.A., Kobelev V.V., y Schumacher A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, 8(1):42–51, 1994.
- Hadamard J. *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, USA, 1923.
- Holder D. *Clinical and Physiological Applications of Electrical Impedance Tomography*. UCL Press, 1993.
- Kozlov V.A., Maz'ya V.G., y Movchan A.B. *Asymptotic analysis of fields in multi-structures*. Clarendon Press, 1999.
- Lechleiter A. y Rieder A. Newton regularizations for impedance tomography: a numerical study. *Inverse Problems*, 22:1967–1987, 2006.
- Lionheart W. EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments. *Physiological Measurement*, 25:125–142, 2004.
- Novotny A.A. y Sokolowski J. *Topological Derivatives in Shape Optimization*. Springer, 2013.
- Parker R.L. The inverse problem of resistivity sounding. *Geophysics*, 49:2143–2158, 1984.
- Rondi L. y Santosa F. Enhanced electrical impedance tomography via the Mumford-Shah functional. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6:517–538, 2001.
- Santosa F. y Vogelius M. A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements. *International Journal of Engineering Science*, 29:917–937, 1991.
- Sigmund P. y Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 16:68–75, 1998.
- Sokolowski J. y Zochowski A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(4):1251–1272, 1999.
- Yorkey T., Webster J., y Tompkins W. Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 34:843–852, 1987.