DEDUCCIÓN ALTERNATIVA DE LAS ECUACIONES DE CAMPO MEDIO DE FERMIONES COMPUESTOS

ALTERNATIVE DERIVATION OF MEAN-FIELD EQUATIONS FOR COMPOSITE FERMIONS

Rodolfo M. Id Betan, Edmundo C. Manavella* y Carlos E. Repetto
Instituto de Física de Rosario (CONICET-UNR), Bv. 27 de Febrero 210 bis, S2000EZP Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR), Av. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario

Recibido: 31/10/2013; aceptado: 09/06/2014

La hamiltoniana que describe fermiones compuestos es presentada usualmente en forma fenomenológica, conociendo de antemano la forma funcional que se espera para describir tal sistema. En este trabajo, utilizando una lagrangiana de gauge no relativista $U(1) \times U(1)$ de electrones en un campo electromagnético, mostramos cómo obtener la hamiltoniana de campo medio que describe fermiones compuestos en 2+1 dimensiones en forma rigurosa. Además, comparamos estos resultados con los que obtenemos al considerar la inclusión de un término de masa topológica para el campo electromagnético en la lagrangiana.

Palabras claves: teoría cuántica de campos, formulaciones langragianas y hamiltonianas, método de Dirac.

By assuming the expected functional form which describes composite fermions, the Hamiltonian is usually presented in a phenomenological way. In this paper, by using a $U(1) \times U(1)$ nonrelativistic gauge Lagrangian for electrons in an electromagnetic field, we show how to obtain the mean field Hamiltonian describing rigorously composite fermions in 2+1 dimensions. In addition, we compare these results with those obtained when considering the inclusion of a topological mass term for the electromagnetic field in the Lagrangian.

Keywords: Quantum field theory, Lagrangian and Hamiltonian formulations, Dirac method.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio, desde el punto de vista cuántico, de sistemas electrónicos en bajas dimensiones, es decir, en planos y cadenas de átomos en lugar de los sólidos tridimensionales usuales, es un tema de enorme interés actual en el campo de la materia condensada. Ello se debe, entre otras cosas, a que estos sistemas presentan características especiales que llevan a fenómenos tales como la superconductividad de alta temperatura crítica y a propiedades magnéticas particulares, con potenciales aplicaciones tecnológicas.

Una forma de estudiar estos sistemas es en base a la teoría cuántica de campos. Otra forma consiste en utilizar la teoría cuántica de muchos cuerpos [1], implementada mediante técnicas analíticas y computacionales.

En refs. [2, 3], hemos propuesto modelos de partículas compuestas y los hemos estudiado en base al primer mecanismo citado en el párrafo anterior. Estos modelos constituyen generalizaciones de los modelos analizados en refs. [4–6] mediante el segundo mecanismo.

En esta situación, nuestro propósito es vincular los resultados obtenidos en refs. [2, 3] con los correspondientes a ref. [4] utilizando las técnicas usuales de teoría de campos. De esta manera, mostramos que se llega a las mismas ecuaciones que en los modelos fenomenológicos de materia condensada.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En sec. II, mostramos cómo obtener la hamiltoniana canónica a partir de la lagrangiana de partida. Luego, en sec. III, vemos qué cambios se producen al agregar un término de masa topológica para el campo electromagnético en la densidad lagrangiana. Finalmente, en sec. IV, enunciamos nuestras conclusiones.

II. DENSIDAD LAGRANGIANA

Consideramos una teoría de campos clásica no relativista, con simetría de gauge $U(1)\times U(1)$ en dimensiones $2+1$ para la interacción electromagnética de electrones ψ con un campo auxiliar de Chern-Simons (CS) a_μ con simetría $U(1)$. La densidad lagrangiana singular que proponemos para describir esta interacción es

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\psi^\dagger \mathcal{D}_0\psi + \frac{1}{2m_e}\psi^\dagger \boldsymbol{\mathcal{D}}^2\psi - \mu\psi^\dagger\psi \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu\partial_\nu a_\rho - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Los índices griegos adoptan los valores $\mu,\nu,\rho = 0,1,2$. Utilizamos unidades naturales donde $\hbar = c = 1$. La métrica de Minkowski es $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$ y $\varepsilon^{012} = \varepsilon^{12} = 1$. La derivada covariante que involucra tanto al campo de CS como al campo electromagnético, se escribe como $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ia_\mu - ieA_\mu$, y designamos $\boldsymbol{\mathcal{D}}^2 = \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2$. Además, $F_{\mu\nu}$ es el tensor del campo electromagnético.

El campo de materia ψ es un campo espinorial cargado que describe electrones, con carga $-e$, y m_e es su masa efectiva. μ es el potencial químico de los electrones. La constante $\tilde{\phi}$ introducida en la densidad lagrangiana será determinada más adelante.

*e-mail: manavella@ifir-conicet.gov.ar

Las variables de campos dinámicas independientes son $A_{\mathcal{I}} = (a_\mu,\, A_\nu,\, \psi_\alpha,\, \psi^\dagger_\beta)$ y sus respectivos momentos canónicos conjugados $P^{\mathcal{I}} = (p^\mu,\, P^\nu,\, \pi^\dagger_\alpha,\, \pi_\beta)$ que se definen a partir de ec. (1) como: $P^{\mathcal{I}} = \delta\mathcal{L}/\delta\dot{A}_{\mathcal{I}}$. En estas expresiones, los índices griegos asumen los valores $\alpha,\, \beta = 1, 2$. La densidad hamiltoniana canónica se define como $\mathcal{H}_c = \dot{a}_\mu p^\mu + \dot{A}_\mu P^\mu + \dot{\psi}\pi^\dagger + \dot{\psi}^\dagger\pi - \mathcal{L}$, resultando

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c \;=\; & -\frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_0\partial_i a_j + \partial_i a_0 p^i \\ & +\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \partial_i A_0 P^i - \frac{1}{2}P^i P_i \\ & +\mu\psi^\dagger\psi - \psi^\dagger(a_0+eA_0)\psi - \frac{1}{2m_e}\psi^\dagger\boldsymbol{\mathcal{D}}^2\psi, \quad (2)\end{aligned}$$

donde los índices latinos adoptan los valores $i, j = 1, 2$. El momento P^i no genera vínculo y asume la expresión $P^i = F^{i0}$. Los vínculos de primera clase son

$$\Sigma_1 \;=\; e\partial_i p^i - \partial_i P^i + \frac{e}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}\partial_i a_j \approx 0\,, \qquad (3)$$

$$\Sigma_2 \;=\; \psi^\dagger\pi - \psi\pi^\dagger - \frac{i}{e}\partial_i P^i \approx 0\,, \qquad (4)$$

$$\Sigma_3 \;=\; p^0 \approx 0\,, \qquad (5)$$

$$\Sigma_4 \;=\; P^0 \approx 0\,. \qquad (6)$$

y se eligen las siguientes condiciones de fijado de gauge

$$\Theta_1 \;=\; \partial^i a_i \approx 0\,, \qquad (7)$$

$$\Theta_2 \;=\; \partial^i A_i \approx 0\,, \qquad (8)$$

$$\Theta_3 \;=\; a_0 \approx 0\,, \qquad (9)$$

$$\Theta_4 \;=\; \nabla^2 A_0 - \partial_i P^i \approx 0\,. \qquad (10)$$

Todos los anteriores resultados han sido demostrados formalmente en ref. [2].

Al imponer los corchetes de Dirac finales, debemos tomar como ecuaciones fuertemente iguales a cero los vínculos del modelo y las condiciones de fijado de gauge. Luego, las siguientes variables de campos quedan determinadas:

$$a_0 \;=\; 0\,, \qquad (11)$$

$$A_0(x) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int d^2y\frac{\partial_i P^i(y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,, \qquad (12)$$

$$p^0 \;=\; 0\,, \qquad (13)$$

$$p^i \;=\; \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_j\,, \qquad (14)$$

$$P^0 \;=\; 0\,, \qquad (15)$$

$$\pi^\dagger_\alpha \;=\; -i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger_\alpha\,, \qquad (16)$$

$$\pi_\alpha \;=\; i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha\,. \qquad (17)$$

Reemplazando los momentos (16) y (17) en ec. (4) resulta

$$\partial_i P^i = -e\psi^\dagger\psi\,. \qquad (18)$$

En consecuencia, el potencial escalar dado en ec. (12) toma la forma

$$A_0(x) = -\frac{e}{4\pi}\int d^2y\frac{\psi^\dagger(y)\psi(y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,. \qquad (19)$$

El término $eA_0\psi^\dagger\psi$ presente en la densidad lagrangiana de partida da origen a una densidad coulombiana, la cual es agregada *ad hoc* en ref. [4].

Calculando la derivada espacial del momento p^i dado en ec. (14) y reemplazándola en ec. (3), obtenemos la siguiente identidad

$$\frac{1}{2\pi\tilde{\phi}}\,\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\hat{\mathbf{z}} = -\psi^\dagger\psi\,. \qquad (20)$$

En ref. [4], esta ecuación es tomada como un vínculo de la teoría. En dicha densidad lagrangiana aparece este vínculo afectado por a_0, desempeñando el rol de multiplicador de Lagrange. El rotor del campo de CS se asocia a un campo magnético $\nabla\times\boldsymbol{a} = \mathcal{B}$. A partir de ec. (20), puede verse que la distribución del campo magnético de CS coincide con la distribución de partículas.

De esta manera, queda especificada la relación entre la densidad electrónica y los cuantos de flujo magnético. Así, la densidad lagrangiana (1) describe un sistema de fermiones compuestos, donde $\tilde{\phi}$ es la intensidad del tubo de flujo en unidades de cuanto de flujo 2π, como se describe en ref. [2]. En consecuencia, los fermiones compuestos se comportan como fermiones libres en un campo magnético efectivo $\mathbf{B}^* = \mathbf{B} - \mathcal{B}$, donde $\mathbf{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ es el campo magnético físico. En la aproximación de campo medio, el campo $\mathbf{B}^*$ se considera constante y uniforme [7].

Reemplazando todos los resultados hasta aquí obtenidos en ec. (2), obtenemos

$$\mathcal{H}_c \;=\; \mathcal{H}_c^{em} + \mu\,\psi^\dagger\,\psi - \frac{1}{2m_e}\,\psi^\dagger\,\boldsymbol{\mathcal{D}}^2\psi\,, \qquad (21)$$

donde

$$\mathcal{H}_c^{em} = -\frac{1}{2}P_i P^i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\,. \qquad (22)$$

Como el campo A_i verifica el gauge de Coulomb dado en ec. (8), el potencial vector resulta transversal, y se puede mostrar que

$$-\frac{1}{2}P^i P_i = \mathcal{H}_{Coul} - \frac{1}{2}\partial^0 A^i\partial_0 A_i\,, \qquad (23)$$

con

$$\mathcal{H}_{Coul} = \frac{1}{2}\int d^2y\,\rho(\mathbf{x})V(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\,, \qquad (24)$$

donde $V(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = e^2/4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ y $\rho = \psi^\dagger\psi$.

Por otro lado, siguiendo ref. [8], el campo eléctrico puede separarse en las partes transversal y longitudinal $\mathbf{E} = \mathbf{E}^\perp + \mathbf{E}^\parallel$, donde $\mathbf{E}^\perp = -\partial_0\mathbf{A}$ y $\mathbf{E}^\parallel = -\boldsymbol{\nabla}A_0$. Así,

$$-\frac{1}{2}\partial^0 A^i\partial_0 A_i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{E}^\perp)^2 + \mathbf{B}^2\right]\,. \qquad (25)$$

Finalmente, la densidad hamiltoniana canónica queda

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c \;=\; & \mathcal{H}_{Coul} + \mu\,\psi^\dagger\,\psi - \frac{1}{2m_e}\,\psi^\dagger\,\boldsymbol{\mathcal{D}}^2\psi \\ & +\frac{1}{2}\left[(\mathbf{E}^\perp)^2 + \mathbf{B}^2\right]\,. \qquad (26)\end{aligned}$$

III. INCLUSIÓN DE UN TÉRMINO DE MASA TOPOLÓGICA

Como es conocido, el agregado de un término de CS a la acción de Maxwell conduce a la electrodinámica topológicamente masiva (2+1)-dimensional [9]. En esta teoría, aparece una ley de Gauss modificada, con el resultado que cualquier partícula cargada transporta un flujo magnético proporcional a su carga.

En esta sección, estudiaremos las diferencias que surgen al agregar a la densidad lagrangiana original $\mathcal{L}$, dada en ec. (1), un término de masa topológica para el campo electromagnético

$$\mathcal{L}_{tm} = \mathcal{L} + \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \, \partial_\nu A_\rho \, , \tag{27}$$

donde la masa topológica es $2\pi/\sigma$ y el flujo magnético ligado a los electrones es ahora $e\sigma/2\pi$.

En este caso, la densidad hamiltoniana canónica resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c^{tm} &= \mathcal{H}_c - \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij} A_i P_j \\ &\quad - \frac{1}{8\sigma^2} A_i A^i - \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij} A_0 \, \partial_i A_j \, , \end{aligned} \tag{28}$$

donde $\mathcal{H}_c$ está dado en ec. (2), y ahora $P^i = F^{i0} + (1/2\sigma)\varepsilon^{ij} A_j$.

Los únicos vínculos de primera clase que se modifican respecto de los anteriores son

$$\Sigma_1^{tm} = \Sigma_1 - \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0 \, , \tag{29}$$

$$\Sigma_2^{tm} = \Sigma_2 - \frac{i}{2\sigma e}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0 \, . \tag{30}$$

Asimismo, sólo cambia la siguiente condición de fijado de gauge:

$$\Theta_4^{tm} = \Theta_4 + \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0 \, . \tag{31}$$

Estos resultados han sido demostrados formalmente en ref. [3].

Trabajando de la misma manera que en el caso descripto en la sección anterior, se puede demostrar que el vínculo (20) sigue siendo válido.

La componente A_0 queda determinada ahora como

$$A_0(x) = -\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{y} \frac{e\psi^\dagger(y)\psi(y) + \frac{1}{\sigma}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j(y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \, . \tag{32}$$

Finalmente, la densidad hamiltoniana canónica resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c^{tm} &= -\frac{1}{2} e A_0 \psi^\dagger \, \psi - \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij} A_0 \partial_i A_j + \mu \, \psi^\dagger \, \psi \\ &\quad - \frac{1}{2m_e} \, \psi^\dagger \, \boldsymbol{\mathcal{D}}^2 \psi + \frac{1}{2}\left[(E^\perp)^2 + B^2\right] \, . \end{aligned} \tag{33}$$

Si reemplazamos A_0 de ec. (32) en ec. (33), podemos relacionar esta densidad hamiltoniana con la de la sección anterior en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c^{tm} &= \mathcal{H}_c + \frac{e}{8\pi\sigma}\int d\mathbf{y} \frac{\varepsilon^{ij}\partial_i A_j(y)\psi^\dagger(x)\psi(x)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \\ &\quad + \frac{e}{8\pi\sigma}\int d\mathbf{y} \frac{\varepsilon^{ij}\partial_i A_j(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \\ &\quad + \frac{1}{8\pi\sigma^2}\int d\mathbf{y} \frac{\varepsilon^{ij}\partial_i A_j(x)\varepsilon^{kl}\partial_k A_l(y)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \, . \end{aligned} \tag{34}$$

IV. CONCLUSIONES

En el tratamiento usual de modelos que consideran la interacción electromagnética de fermiones compuestos se parte de una hamiltoniana fenomenológica. En este trabajo, hemos demostrado que utilizando las técnicas usuales de la teoría de campos, se puede llegar a la misma hamiltoniana (26).

Por otro lado, en sec. II hemos demostrado cómo la interacción de Coulomb aparece en forma natural mientras que en la formulación usual es introducida *ad hoc*. La ec. (20) en la formulación usual es tomada como un vínculo de la teoría. En este trabajo, deducimos su validez a partir de la estructura de vínculos.

Finalmente, en sec. III vemos cómo la inclusión de un término de masa topológica para el campo electromagnético en la densidad lagrangiana introduce términos de interacción ausentes en la hamiltoniana canónica de sec. II.

V. REFERENCIAS

[1] Schrieffer, J. R., en Theory of Superconductivity. W. A. Benjamin, Inc., New York (1964); Mahan G. D., Many-Particle Physics. 3rd Ed., Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2000).
[2] Manavella, E. C., Int. J. Theor. Phys. **40**, 1453 (2001).
[3] Manavella, E. C. and Addad, R. R., Int. J. Theor. Phys. **48**, 2473 (2009).
[4] Halperin, B. I., Lee, P. A. and Read, N., Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993).
[5] Lopez, A. and Fradkin, E., en “Composite Fermions”, Ed. O. Heinonen, World Scientific, Singapore (2003).
[6] Lopez, A. and Fradkin, E., Phys. Rev. B **44**, 5246-62 (1991).
[7] Jain, J. K., en “Composite Fermions”, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
[8] Greiner; W. and Reinhardt, J., in “Field Quantization”, Springer-Verlag, Berlin (1996) (págs. 200,201).
[9] Jackiw, R. and Templeton; S., Phys. Rev. D **23**, 2291 (1981).