Universidad de Alcalá

Mosaicos y teselaciones. Escher

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Formación del Profesorado

Presentado por:

Dª CINTA SÁNCHEZ RITE

Dirigido por:

Dr. ALBERTO LASTRA SEDANO

Alcalá de Henares, a 11 de febrero de 2020

Índice

Resumen

El presente trabajo fin de máster, describe un análisis de algunas obras de inspiración matemática del famoso artista M. C. Escher relacionadas con mosaicos y teselaciones, y propone un conjunto de actividades que permiten trabajar diferentes contenidos matemáticos especificados en el Real Decreto de 1105/2014, de 26 de diciembre, en la asignatura de "Matemáticas con orientación académica" del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria relacionados con la temática en cuestión.

Previamente al análisis, se considera necesaria la introducción de un fundamento teórico que permita su comprensión, y se responden a algunas preguntas sobre teselaciones del plano, basadas en el fundamento teórico, que llevarán a elaborar las actividades propuestas.

Finalmente, se valoran los objetivos iniciales planteados en el trabajo y se concluye de manera satisfactoria.

Palabras Claves: mosaicos, teselaciones, Escher, matemáticas

1. Introducción

"La mente es un instrumento poderoso de creación en cualquiera de las manifestaciones del saber. Usando nuestra imaginación, nosotros podemos visualizar casi cualquier cosa." (Sánchez & Villalobos, 2004). Es común hoy en día que, cuando se menciona la palabra mosaico a cualquier persona que conozca su significado, la primera imagen mental creada por su imaginación sea la de un conjunto de teselas o piedras pulidas policromadas que colocadas siguiendo un orden, muestran al espectador bonitas composiciones abstractas, figurativas, o geométricas; sin pararse a pensar que tras muchas de ellas existe un pensamiento matemático que permite la elaboración a su artista creador.

Aunque existen muchos artistas que construyendo mosaicos han realizados verdaderas obras de arte, las obras de Maurits Cornelis Escher, más comúnmente conocido como M.C. Escher, destacan, aparte de por una abstracción, surrealismo y juegos visuales, por estar muchas de ellas realizadas siguiendo movimientos en el plano que pueden ser descritos y analizados desde una perspectiva matemática. Este hecho, ha llevado a muchos investigadores a realizar minuciosos análisis de las litografías de Escher. Como define y analiza su amigo personal y biógrafo, (Ernst, 2018), en el conjunto de las obras de Escher pueden encontrarse obras de inspiración matemática extendidas por tres campos distintos: "La estructura del espacio, La estructura de la superficie y La proyección del espacio tridimensional en la superficie plana."

Son muchas las obras de Escher inspiradas en temas matemáticos que serían dignas de ser analizadas para el tema que nos ocupa, pero puesto que éste no es el único objetivo del presente documento y dada la extensión que ocuparía el análisis de todas ellas, sólo se analizan algunas.

Antes de adentrarnos en el mundo de los mosaicos de Escher y más concretamente, en las matemáticas que esconden, se considera conveniente introducir algunas nociones y conceptos teóricos que permitan comprender el proceso de elaboración de sus litografías para poder reproducir la técnica empleada, con el alumnado en las aulas de matemáticas de los centros educativos.

2. Objetivos

Los objetivos que se exponen en el presente trabajo tienen una doble trascendencia: general y específica.

El objetivo general es analizar obras de Escher relacionadas con los contenidos matemáticos de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) establecidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, a fin de diseñar una propuesta didáctica que permita trabajar los mosaicos y teselaciones en la asignatura de "Matemática con orientación académica" en el curso de tercero de E.S.O.

Para ello, se introducirá un fundamento teórico y se planteará un conjunto de actividades estructuradas que busque el logro de los siguientes objetivos específicos:

- Comprender la base matemática sobre la que se fundamentan muchas de las obras de Escher, concretamente, las que están relacionadas con mosaicos y teselaciones.
- Profundizar en el desarrollo de las habilidades de pensamiento matemático del alumnado.
- Evaluar diferentes estándares de aprendizaje.
- Promover un aprendizaje que integre la adquisición de las competencias clave.
- Fomentar en el alumnado, el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra tanto para visualizar y comprender la geometría como para servir de apoyo a la resolución y explicación de problemas.
- Despertar en el alumnado una creatividad inspirada en las matemáticas.

3. Fundamento teórico

Antes de analizar las obras de Escher relacionadas con los contenidos matemáticos de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O), resulta conveniente dedicar un apartado de este trabajo al estudio de las transformaciones geométricas en el plano, conceptos matemáticos que forman la base fundamental de la generación de los mosaicos. Dicha base matemática es la que, posteriormente, se tendrá que enseñar al alumnado de E.S.O para poder conseguir algunos de los objetivos expuestos.

3.1. Transformaciones geométricas

Según El Diccionario de la Real Academia Española, (R.A.E, 2019) la palabra *transformación*, en Matemáticas significa *"Correspondencia entre elementos de dos conjuntos"*, por lo que una transformación geométrica podríamos definirla como *una correspondencia entre elementos de dos conjuntos geométricos*. Dicho esto, quizás no nos extrañe la definición que (Silvestre, 2010) hace sobre las transformaciones geométricas:

> En términos matemáticos simples, las transformaciones geométricas las podemos definir como la operación o el conjunto de operaciones geométricas que permiten generar una nueva figura a partir de otra dada u original. Es decir, hacen corresponder a cada punto del plano otro punto del plano y como consecuencia, las figuras se transforman en otras figuras. A la figura resultante se le denomina homóloga. (p.1)

Dependiendo del sentido y forma de la figura homóloga con respecto a la original, las transformaciones según Rodríguez (2010) pueden clasificarse de la siguiente manera:

- Clasificación según el sentido:
  - **Transformación directa:** La figura homóloga conserva el sentido de la figura original en el plano cartesiano.
  - **Transformación inversa:** La figura homóloga tiene sentido contrario al de la figura original en el plano cartesiano.
- Clasificación según la forma:
  - **Transformación isométrica:** La figura homóloga conserva los ángulos y dimensiones. También se llaman *movimientos del plano*.
  - **Transformación isomórfica:** La figura homóloga conserva la forma de la figura original y los ángulos, pero no las dimensiones, esto es, existe una relación de proporcionalidad entre las dimensiones del homólogo y el original.
  - **Transformación Anamórfica:** La figura homóloga cambia por completo con respecto a la figura original

3.2. Movimientos del plano

Se pueden definir las isometrías o movimientos del plano, como aquellas transformaciones geométricas que conservan las distancias, o lo que es lo mismo, que no deforman la figura respecto a la figura original, conservando, por tanto, ángulos y dimensiones.

"Podría entonces verse la isometría, como un cambio de posición en la figura original tal que, tras la transformación, la figura lo único que ha hecho ha sido cambiar a otro lugar manteniendo la forma y las dimensiones." (Rodríguez, 2010). Los movimientos en el plano capaces de cumplir las condiciones anteriores son cuatro, (o cinco si se considera la *identidad*, donde todos los puntos son fijos), los cuales, además, pueden clasificarse como directos o inversos dependiendo de si la transformación es directa o inversa:

- Movimientos en el plano, directos:

  - **Traslación:** movimiento en el cual todos los puntos de la figura original se desplazan una misma distancia y en una misma dirección. "Dado un vector $\vec{t}$, se denomina *"traslación T según el vector* $\vec{t}$, a una transformación que asocia a cada punto P, otro punto P´= T(P) tal que $\overline{PP'} = \vec{t}$". (Colera, Gaztelu, Oliveira y Colera. 2001). Una traslación queda unívocamente determinada por un punto P, y su imagen P'.

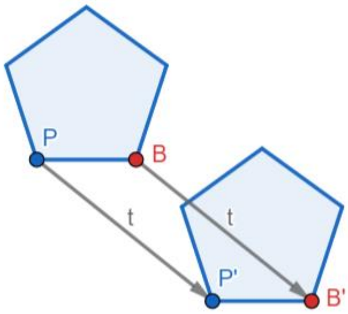


Figura 1: Movimiento de traslación. *Fuente:* propia.

  - **Rotación o Giro:** movimiento que mantiene el tamaño y la forma del objeto. Para ello se necesita conocer un punto alrededor del cual girar, O, denominado "centro de rotación"; un ángulo de giro, α; y un sentido de rotación.
    Toma un punto, P, y lo transforma en otro, P', de forma que la distancia, d, de ambos al centro de rotación es la misma y tal que los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{OP'}$ forman ángulo α.

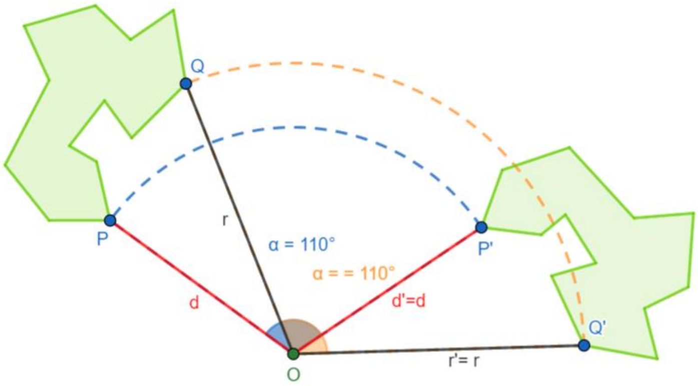


Figura 2: Movimiento de rotación o giro. *Fuente:* propia.

- Movimientos en el plano, inversos:

  - **Reflexión o, simetría axial o especular:** movimiento del plano que invierte la orientación de las figuras. Este tipo de movimiento se produce al fijar una recta r del plano, denominada "eje de simetría", y hallando para cada punto P de una figura, otro punto P' de tal manera que la recta r es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. La aplicación sucesiva de dos reflexiones o simetrías axiales con el mismo eje de simetría deja a cualquier figura invariante.

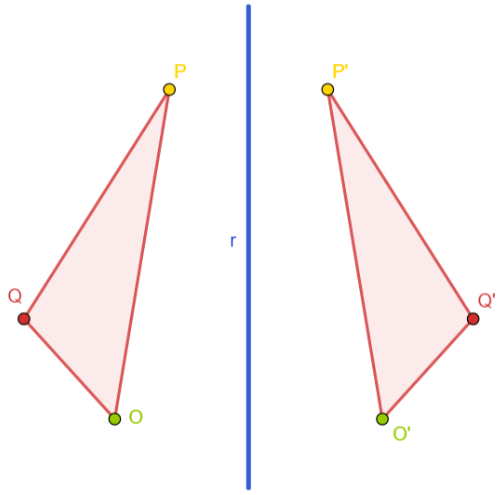


Figura 3: Movimiento de reflexión o simetría. *Fuente*: propia.

- **Reflexión con deslizamiento:** como su propio nombre indica, este movimiento resulta de combinar una reflexión, con una traslación, siendo ésta última, paralela al eje de simetría.

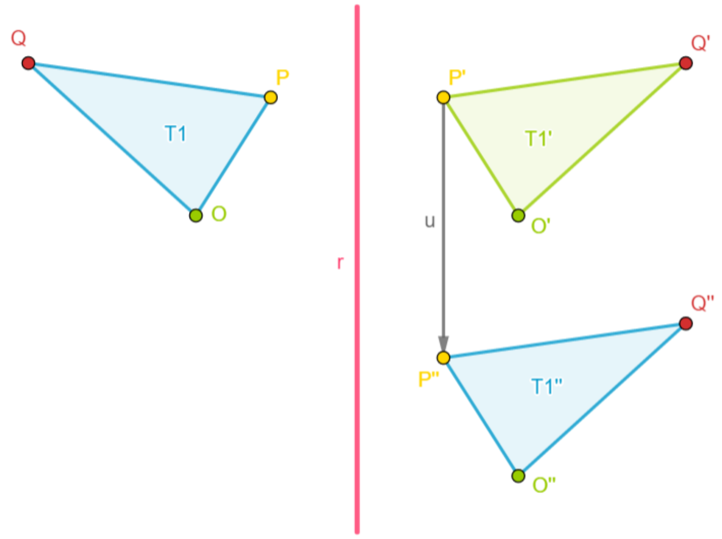


Figura 4: Movimiento de reflexión con deslizamiento. El triángulo T1' es el reflejado de T1 y el triángulo T1'' es el trasladado de T1' a través del vector u. El triángulo T1'' es, por tanto, el reflejado y trasladado de T1. *Fuente:* propia.

3.3. Definición de mosaicos

Según (Godino & Ruíz, 2002) el cubrimiento regular del plano es el resultado de someter a una figura dada a repeticiones (isometrías planas) de tal forma que el plano quede recubierto en su totalidad de dichas figuras, esto es, sin dejar huecos y sin que haya solapamientos entre ellas. Si a la figura la sometemos a traslaciones en una sola dirección obtenemos los frisos, mientras que si la sometemos a dos traslaciones en direcciones distintas, se obtienen los mosaicos.

3.4. Clasificación de mosaicos

Los mosaicos pueden clasificarse según Rodríguez, (2010) en:

1. **Mosaicos periódicos:** Se dice que un mosaico es "periódico" si es posible encontrar una sección finita de la teselación que permita crear el mosaico completo mediante traslaciones en dos direcciones no paralelas prescindiendo de giros y reflexiones.

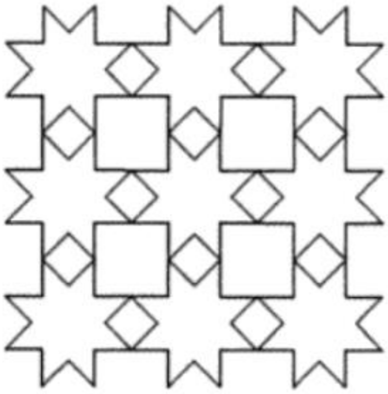


Figura 5: Mosaico periódico. *Fuente:* Solís. L. (2007, p.39)

2. **Mosaicos no periódicos**: Se dice que un mosaico es "no periódico" cuando no es posible encontrar una sección finita de la teselación que permita crear el mosaico completo. Este tipo de mosaicos está cubierto por teselas que siguen un orden que no se repite. Podría decirse que son mosaicos que no coinciden con ninguno de sus trasladados.

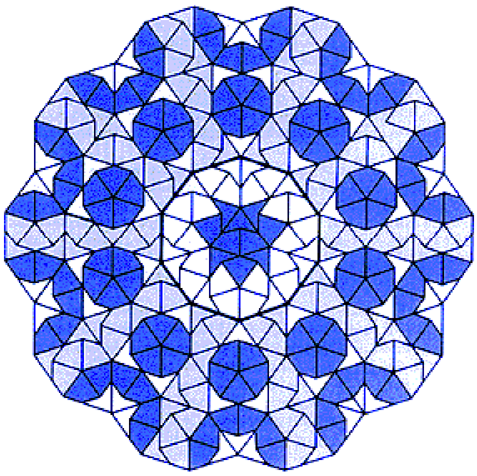


Figura 6: Mosaico no periódico de Penrose. *Recuperado de:* http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/mosa7.htm

A su vez, los mosaicos periódicos pueden dividirse en:

1.1 Mosaicos poligonales: si están compuestos por teselas con forma de polígono.

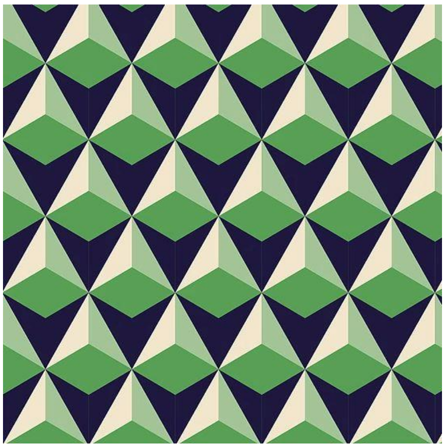


Figura 7: Mosaico poligonal. *Recuperado de:* https://www.pinterest.ca/pin/666673551073941747/

1.2 Mosaicos no poligonales: si las teselas que lo componen no son polígonos. El hecho de trabajar con teselas o formas no poligonales no implica que no puedan generarse mosaicos o teselaciones a partir de ellas. “La generación de teselaciones regulares del plano, pero no poligonales, es un proceso que lleva desde construcciones sumamente simples, a otras mucho más complicadas y laboriosas.” (Rodríguez, 2010)

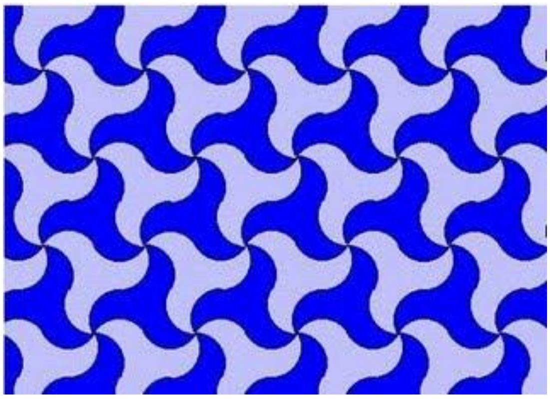


Figura 8: Mosaico no poligonal. *Recuperado de:* http://traselrastrodeecher.blogspot.com/2010/08/teselaciones.html

Y dentro de los mosaicos poligonales, puede hacerse la siguiente distinción:

1.1.1 Mosaicos regulares: Son aquellos que se obtienen a partir de la repetición de un solo tipo de polígono confluyendo en cada vértice, la misma cantidad de polígonos. Dicho polígono puede ser regular, dando lugar a una “teselación regular mediante polígonos regulares"; o puede tratarse de un polígono irregular, en cuyo caso se hablaría de "teselación regular mediante polígonos irregulares"; por ejemplo, los rombos de un retículo plano. Tal y como comenta Rodríguez (2010): "Hay múltiples métodos para construir teselaciones poligonales con formas irregulares. Uno de ellos consiste en modificar polígonos que teselan el plano de forma que los polígonos resultantes permitan el "encaje" con otra tesela con igual forma."

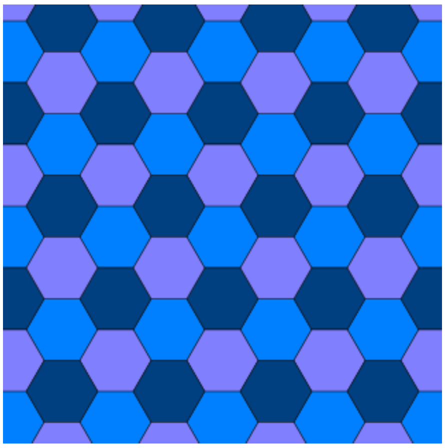


Figura 9: Teselación regular mediante polígonos regulares. *Recuperado de:* http://math.ucr.edu/home/baez/dodecahedron/hexagonal_tiling.png

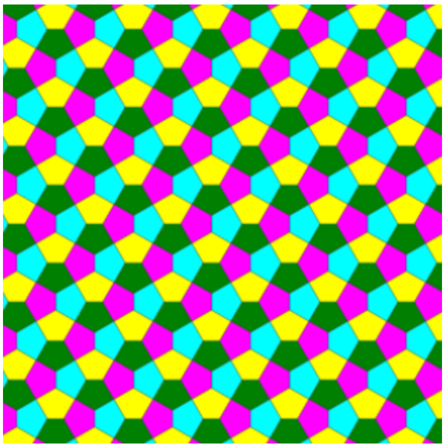


Figura 10: Teselación "El Cairo"; Teselación regular mediante polígonos irregulares. *Recuperado de:* https://felixmaocho.wordpress.com/2015/08/26/embaldosado-o-teselado-del-plano-con-poligonos-iguales/

Un mosaico bastante particular dentro de los mosaicos regulares es el "mosaico cuasirregular"**,** el cual está formado por polígonos iguales tales que al unir sus puntos medios se obtienen polígonos regulares.

1.1.2 Mosaicos semirregulares: son aquellos que se obtienen a partir de la combinación de dos o más polígonos regulares cumpliéndose que en cada vértice concurren los mismos polígonos y aparecen en el mismo orden cíclico. Se forman utilizando triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, octógonos y dodecágonos.

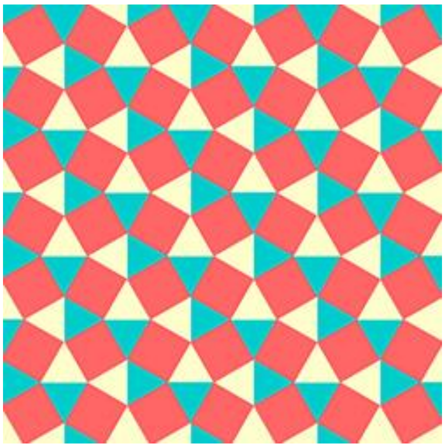


Figura 11: Mosaico semirregular. *Recuperado de:* https://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datda/1491479279/contido/ud08_movimientos_plano/112_mosaicos.htht

3.5. Qué es una teselación

En el punto anterior se ha mencionado la palabra "teselación" en varias ocasiones, pero cabe preguntarse qué es una teselación realmente.

El significado de la palabra "teselación", no forma parte del Diccionario de la Real Academia Española (R.A.E), pero en su defecto, sí que aparece el significado de la palabra "teselado", como un adjetivo que califica algo "formado por teselas" (R.A.E, 2019). Dichas teselas, no son otra cosa que distintos fragmentos que forman parte de un mosaico.

Para conocer el significado de la palabra "Teselación", resulta útil entonces, recurrir a su origen etimológico: procede del latín "tesella", que puede asemejarse a "azulejo", y éste a su vez de la palabra griega "tessares", que es equivalente a "cuatro". Según el diccionario electrónico Definición.de (citado en Cuevas, 2016), la conceptualiza "como el 'patrón' que se sigue al recubrir una superficie en la que se requiere evitar la superposición de figuras y asegurar que no se registran espacios en blanco en el recubrimiento."

O según Rodríguez, 2010:

Una definición más formal de teselación (mosaico) del plano sería una colección de regiones (compactos con interior no vacío) llamadas "teselas" tales que:

- Dos teselas no tienen ningún punto interior en común, es decir, solo pueden compartir parte de su frontera.
- La unión de las teselas cubre totalmente el plano.

4. Cómo teselar un plano: ¿se puede usar cualquier figura geométrica para ello?

Una vez conocido los diferentes tipos de mosaicos y el significado de la palabra "teselación", cabe preguntarse cómo se tesela un plano, si se puede usar cualquier figura geométrica para ello o cuantas maneras posibles existen de cubrir una superficie con polígonos regulares, pues con polígonos irregulares, las posibilidades son múltiples si se modifican polígonos regulares que teselen el plano. Un ejemplo de este tipo de modificación se muestra en la Figura 12.

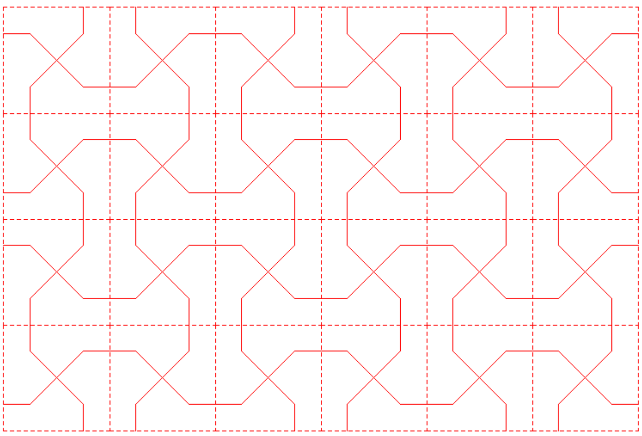


Figura 12: Teselación 'Hueso nazarí', construida a partir de la modificación de polígonos regulares que teselan el plano. *Recuperado de:* http://www.acorral.es/losebasi.htm

4.1. Teselaciones regulares con polígonos regulares e iguales

Para responder a estas cuestiones, comenzaremos por analizar las teselaciones más sencillas de construir, pero no por ello menos importantes, esto es, las teselaciones regulares formadas por polígonos regulares de un solo tipo.

Según La Asociación Mexicana de Ciencias en el comunicado de divulgación "Teselaciones, arte y matemática" (2013), para rellenar el plano con polígonos regulares e iguales,

(…) la única condición es que en cada vértice confluya un número entero de figuras, de donde se deduce que el ángulo formado entre dos lados consecutivos debe ser divisor de 360º. Esto deja tres opciones: los cuadrados (90º), los triángulos equiláteros (60º) y los hexágonos (120º). Las posibilidades se multiplican si se combinan figuras, figuras no regulares o deformaciones varias.

Pero… ¿por qué de entre todos los polígonos regulares que existen, sólo los cuadrados, los triángulos equiláteros y los hexágonos son los únicos que pueden generar teselaciones regulares?

Para responder a esta cuestión, (Solís, 2007) analiza de una forma más detallada este hecho:

Si se quiere teselar un plano con polígonos regulares, es decir, cubrirlo en su totalidad por polígonos regulares sin que existan solapamientos ni huecos, la suma de los ángulos interiores de los polígonos que concurren en un mismo vértice del teselado, ha de ser igual a 360º.

Ahora bien, el ángulo interior, de un polígono regular viene dado por la expresión:

$$\alpha = \frac{180 \cdot (n-2)}{n} \tag{1}$$

donde n es el número de lados del polígono regular y α su ángulo interior en grados, y dado que éste último ha de ser divisor de 360º, para buscar el valor de α, bastará con realizar la siguiente operación:

$$\frac{360°}{\alpha} = \beta \tag{2}$$

Donde β es un número entero que representa el número de polígonos regulares iguales, que concurren en un mismo vértice del teselado.

Introduciendo la Ecuación 1, en la Ecuación 2, se tiene que:

$$\beta = \frac{360^\circ}{\frac{180 \cdot (n-2)}{n}} = \frac{n \cdot 360^\circ}{180 \cdot (n-2)} = \frac{2n}{n-2} \tag{3}$$

Es decir, buscamos los valores de n tales que $2n$ es múltiplo de $(n-2)$. Para simplificar los cálculos, la Ecuación 3, puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{2 \cdot (n+2-2)}{n-2} = \frac{2 \cdot (n-2)+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{(n-2)} \tag{4}$$

Donde puede observarse que β será un entero cuando $4/(n-2)$ sea un entero. Como los divisores enteros de 4 son $\pm 1;\ \pm 2$ y ± 4, entonces:

$$n - 2 = \pm 1;\ \pm 2 \text{ o } \pm 4 \tag{5}$$

De donde se deduce que los posibles valores de n son: $-2,0,1,2,3,4$ y 6. Ahora bien, como un polígono debe tener al menos 3 lados, se tiene que cumplir que $n \geq 3$. Por tanto, los únicos valores que puede tomar n son 3, 4, y 6.

Dado que n es el número de lados del polígono regular, en particular, se ha demostrado que los únicos polígonos regulares que pueden teselar el plano son aquellos que tienen 3, 4, o 6 lados, es decir, los triángulos $(n = 3)$, los cuadrados $(n = 4)$ o los hexágonos $(n = 6)$.

A nivel visual es fácil de ver, tal y como se muestra en las siguientes figuras, que, si se toma un vértice, designado por la letra V, de uno de los polígonos regulares que teselan el plano, en él concurren un número entero de polígonos regulares consiguiéndose que no exista ningún espacio del plano sin cubrir.

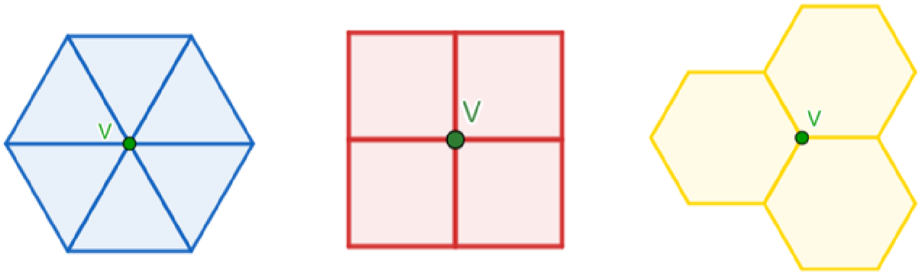


Figura 13: Teselación del plano en un vértice, con polígonos regulares de 3, 4, y 6 lados respectivamente. *Fuente:* propia

Este hecho, sin embargo, no ocurre cuando se elige como polígono regular un pentágono $(n = 5)$, pues existiría en el plano un ángulo de 36º sin cubrir.

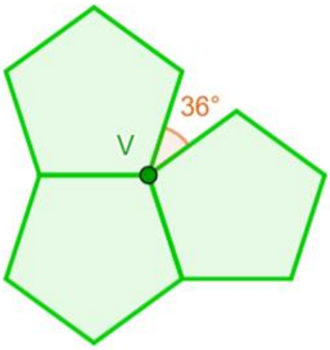


Figura 14: Intento de cubrir el plano utilizando como polígono regular un pentágono. *Fuente:* propia

4.2. Teselaciones regulares mediante combinación de polígonos regulares.

Otra de las cuestiones que se formulaba al inicio de este apartado era cuantas maneras posibles existen de cubrir una superficie con polígonos regulares. Se acaba de analizar el caso de que todos los polígonos regulares fuesen iguales, pero si se utilizan diferentes polígonos regulares, ¿será posible encontrar alguna combinación que permita cubrir todo el plano sin dejar hueco? ¿Existe más de una? Trataremos de encontrar una respuesta a estas preguntas en las líneas que siguen:

El primer estudio de las teselaciones formadas por polígonos regulares, lo realizó el astrónomo y matemático Johannes Kepler en su libro *Harmonices Mundi* de 1619. En él, “Kepler trataba de explicar la armonía del universo y sus manifestaciones en términos geométricos, físicos y musicales.” (Alatorre, 2018).

Para Kepler, (como se citó en Alatorre, 2018) los polígonos regulares eran las figuras más armónicas y perfectas, pues cuando se juntan crean una congruencia que el propio Kepler define como: “En el plano hay congruencia cuando ángulos individuales de varias figuras se juntan en un punto sin dejar espacio entre ellos.” Y continúa Kepler:

> “La congruencia es perfecta cuando los ángulos de las figuras que se juntan lo hacen de igual manera en todos los puntos de encuentro, por lo tanto, todos los puntos de encuentro son similares y el patrón de estos puntos puede continuarse indefinidamente.”

“Finalmente define la congruencia más perfecta como: ‘La congruencia es la más perfecta si, además, las figuras que se juntan en el plano son todas del mismo tipo.’.” (Alatorre, 2018)

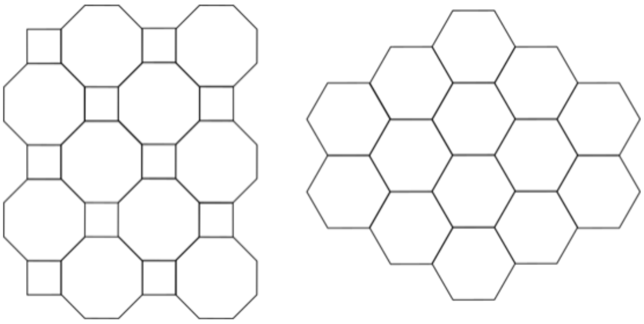


Figura 15: Un tipo de congruencia perfecta y de la congruencia más perfecta, según las definiciones de Kepler. *Recuperado de:* http://motivos.matem.unam.mx/vol1/num2/artest.html

Kepler (como se citó en Alatorre, 2018) clasificó las congruencias más perfectas y las congruencias perfectas (Figura 15) hasta con tres polígonos regulares y semirregulares (polígonos con todos sus lados iguales, pero ángulos diferentes), analizando caso por caso. Las posibles “congruencias”, que logró encontrar se muestran en la Figura 16.

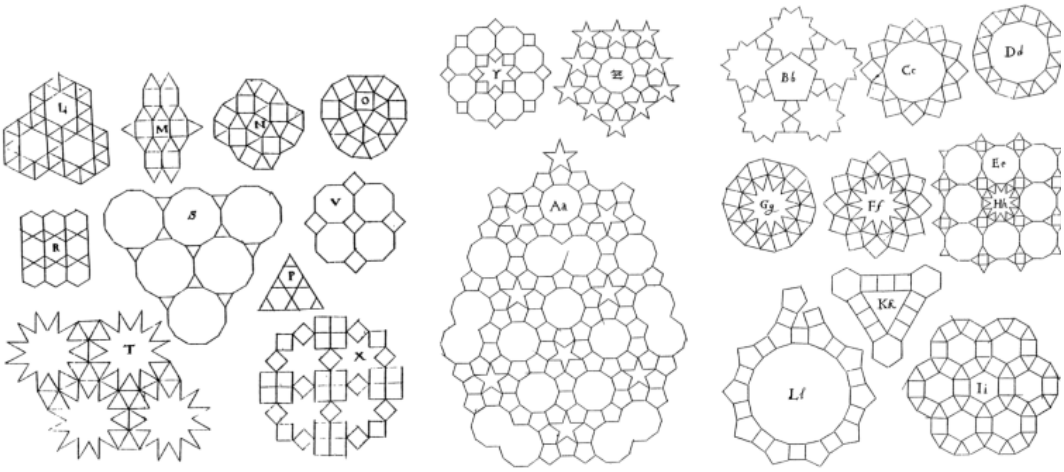


Figura 16: Ilustraciones parte del Harmonice Mundi de Kepler. *Recuperado de* http://motivos.matem.unam.mx/vol1/num2/artest.html

La búsqueda sistemática que realizó Kepler consistió en disponer los polígonos regulares, iguales o no, alrededor de un mismo vértice para ver cuáles de ellos conseguían teselar el plano.

Las matemáticas permiten obtener todas las combinaciones posibles que Kepler consiguió encontrar. El razonamiento seguido es análogo al realizado para encontrar las teselaciones regulares con polígonos regulares e iguales.

Mora y Rodrigo (2007) lo detallan dese una óptica algebraica:

Si se parte de que el ángulo interior α de un polígono de n lados viene dado por:

$$\alpha = 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \tag{6}$$

Cuando concurren 3 polígonos en un vértice tendremos la ecuación:

$$180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) = 360° \tag{7}$$

Donde n_i representa el número de lados del polígono i-ésimo y debe cumplir que $n_i > 3$. Operando es posible llegar a una expresión más sencilla:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \tag{8}$$

Operando de la misma manera para 4, 5, y 6 polígonos, se obtienen las siguientes expresiones respectivamente:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1 \tag{9}$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2} \tag{10}$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2 \tag{11}$$

A partir de las ecuaciones 8, 9, 10 y 11, es posible construir la tabla que se muestra en la Figura 17, donde los números de la tercera columna representan los n_i.

Ecuación	Solución	Polígonos							
a	1	3	7	42					
	2	3	8	24					
	3	3	9	18					
	4	3	10	15					
	5	3	12	12				*	
	6	4	5	20					
	7	4	6	12				*	
	8	4	8	8				*	
	9	5	5	10					
	10	6	6	6				*	*
b	11	3	3	4	12				
	11'	3	4	3	12				
	12	3	3	6	6				
	12'	3	6	3	6			*	
	13	3	4	4	6				
	13'	3	4	6	4			*	
	14	4	4	4	4			*	*
c	15	3	3	3	3	6		*	
	16	3	3	3	4	4		*	
	16'	3	3	4	3	4		*	
d	17	3	3	3	3	3	3	*	*

Figura 17: Tabla de posibles combinaciones de polígonos para teselar el plano. *Fuente:* Mora & Rodrigo, (2007), (p.90).

Las ecuaciones a, b, c, y d que aparecen en la Figura 17, corresponden a las ecuaciones 8, 9, 10 y 11 que se acaban de obtener, respectivamente.

Las soluciones 11, 12, 13 y 16 están designadas, además, con una comilla (‘) porque admiten dos posibles formas de disponer los polígonos alrededor del vértice. Teniendo en cuenta esta aclaración, las formas de combinar polígonos alrededor de un vértice se muestran en la Figura 18.

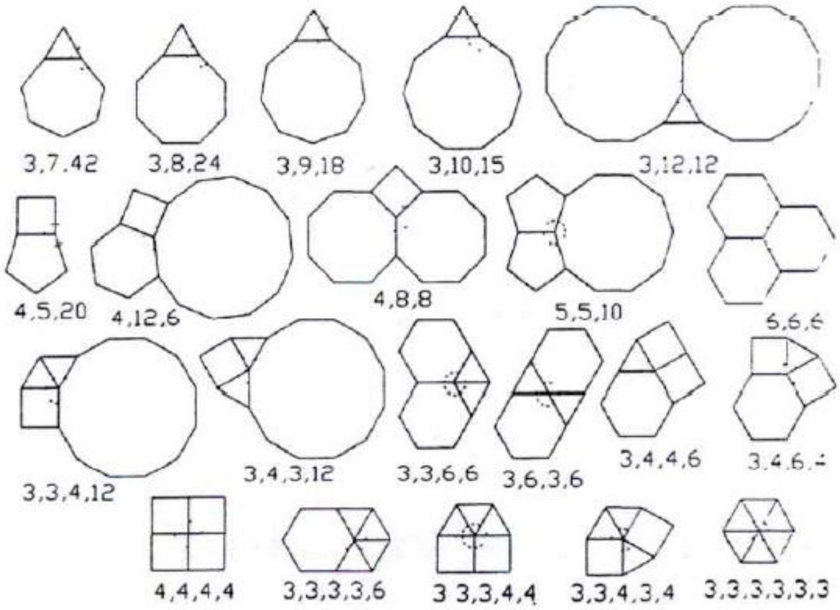


Figura 18: Formas de combinar polígonos para teselar el plano. *Fuente*: Mora & Rodrigo, (2007), (p.90).

Mora & Rodrigo (2007) analizan las distintas soluciones de la tabla de la Figura17, para extraer la siguiente información:

- Las soluciones 10, 14 y 17, (marcadas con **) corresponden a los mosaicos regulares obtenidos en el punto anterior.
- Las soluciones 5,7, 8, 12, 13’,15,16 y 16’ se pueden extender a todo el plano haciendo que los vértices del mosaico en cuestión sean iguales, por lo que dan lugar a mosaicos semirregulares.
- Las soluciones 1 a 4 presentan un inconveniente para el caso que nos ocupa de trabajar con polígonos regulares, pues contienen un triángulo y dos polígonos diferentes, A y B, con ángulos interiores distintos, a y b respectivamente, que generan en un tercer

polígono C dos ángulos interiores valores de $(300 - a)$ grados y $(300 - b)$ grados, rompiéndose así la regularidad del polígono C. Ver Figura 19.

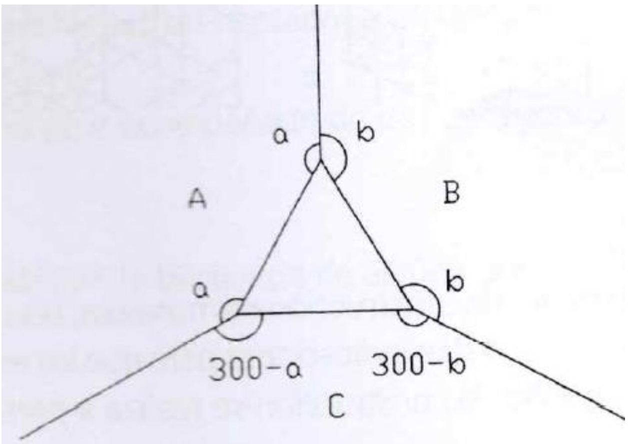


*Figura 19:*Análisis de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo en mosaico formado por un triángulo y dos polígonos diferentes. *Fuente:* Mora & Rodrigo, (2007), (p.91)

- Un razonamiento similar al anterior puede ser aplicado a la solución 9 con el pentágono en lugar del triángulo.
- Las soluciones 11, 11', 12' y 13 no se pueden extender a todo el plano, por lo que no permiten poder teselarlo.

Sintetizando toda la información extraída por Mora & Rodrigo (2007) de la tabla de la Figura 17, puede obtenerse una respuesta a la pregunta planteada al inicio de este apartado: existen sólo 8 configuraciones de polígonos regulares diferentes que permiten teselar el plano. Éstos, generan mosaicos semirregulares.

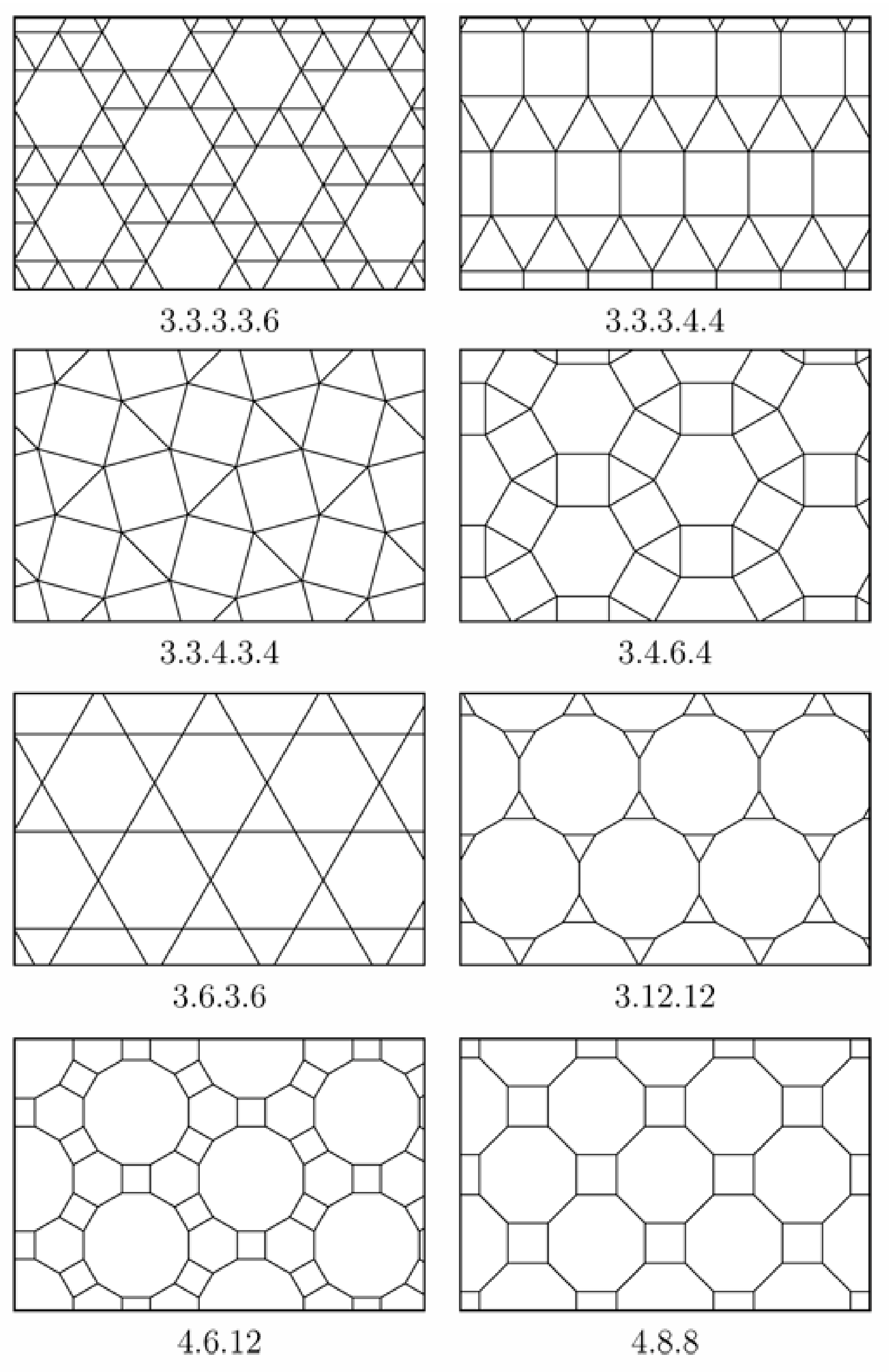


Figura 20: Los 8 mosaicos semirregulares hallados por Kepler. *Recuperado de:* http://urban-networks.blogspot.com/2016/07/cuando-las-paredes-hablan-epigrafias-y.html

Junto con las 3 configuraciones que generan mosaicos regulares, se eleva a 11 el número de formas posibles de teselar el plano utilizando polígonos regulares.

5. Nomenclatura para designar las teselaciones regulares

Según Reyes, (como se citó en Hernández, 2014) una de las mayores aportaciones que el geómetra suizo Ludwig Schläfli (1814-1895) realizó fue la notación o símbolo que lleva su nombre, "notación Schläfli", para designar poliedros regulares. El símbolo Schläfli $\{p,q\}$, designa un poliedro de p aristas en una cara y q caras adyacentes a un vértice.

La notación de Schläfli sirve también para describir o denotar teselaciones regulares, ya que, con dicha notación se puede indicar el número de polígonos que concurren en cada vértice (identificando cada polígono por su número de lados) y el orden en que lo hacen. Así, si en un vértice concurren p polígonos de n lados cada uno, describiremos el mosaico mediante la notación $\{n, p\};\ np$; o bien $n,\ldots(p$ veces).

Algunos ejemplos de notación de teselaciones regulares aplicando la notación de Schläfli son los siguientes:

- Triángulos equiláteros (seis en cada vértice) $\{3,6\}$, 36 o $\{3.3.3.3.3.3\}$.

- Cuadrados (cuatro en cada vértice) $\{4,4\}$,44 o $\{4.4.4.4\}$.

- Hexágonos regulares (tres en cada vértice) $\{6,3\}$,63 o $\{6.6.6\}$.

6. ¿Dónde podemos encontrar mosaicos actualmente?

6.1. Espacios urbanos:

Figura 21: Teselación regular del plano en el Pabellón español para la Exposición Universal de 2005 en Aichi (Japón). *Recuperado de:* https://cargocollective.com/jbono/filter/jean-nouvel/Arquitectura-y-matematicas-en-el-siglo-XXI-6-conceptos-matematicos

Figura 22: Mosaico metálico con polígonos hexagonales en la decoración de las paredes de una casa. *Recuperado de:* https://www.porcelanosa.com/trendbook/dinamismo-y-sofisticacion-con-los-mosaicos-metalicos-de-lantic-colonial/

6.2. Naturaleza:

Figura 23: Teselación formada en panales de abeja. *Recuperado de: http:*//santi3siberiano.blogspot.com/2014/10/las-matematicas-y-la-naturaleza.html

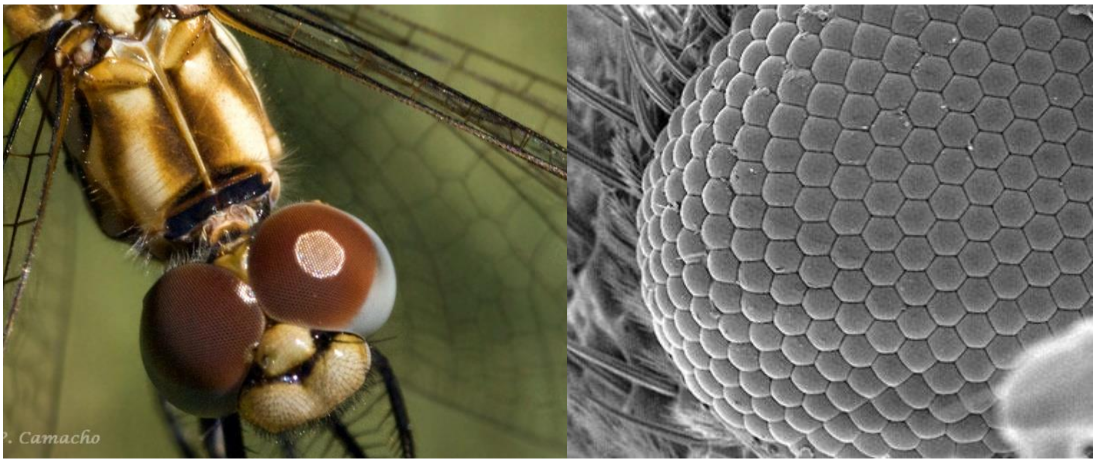


Figura 24: Teselación en ojos de insecto. A la derecha, imagen vista en microscopio. *Recuperado de:* https://bishoverde.wordpress.com/tag/faceta/

6.3. Arte y arquitectura:

Figura 25: Mosaicos en las paredes de la Alhambra. Recuperado de: legadonazari.blogspot.com/2016/07/los-mosaicos-y-la-geometria-de-la.html

Figura 26: Metamorfosis de una teselación de Escher en la fachada de un edificio. *Recuperado de:* https://www.glosarioarquitectonico.com/wp-content/uploads/2015/12/esgrafiado4-1.jpg

Figura 27: Teselación de Escher en el suelo del Palacio de Gaviria, Exposición sobre obras de Escher. *Recuperado de:* https://elpais.com/ccaa/2017/02/02/madrid/1486031145_850997.html?rel=mas

Figura 28: Mosaicos de Escher. *Recuperado de:* https://evamartinezolalla.com/2016/04/05/arte-y-matematicas-con-escher/

7. Análisis de mosaicos de Escher

Frente al mundo cristiano, el rechazo de la cultura islámica a la representación de seres vivos impuesta por El Corán los llevó a diseñar un nuevo sello de identidad que les permitiese diferenciarse con claridad de otras culturas: el arte geométrico; y a perfeccionarlo hasta niveles inalcanzables.

Históricamente, el gran auge de la civilización árabe,

> (…) coincide con la época de esplendor de la dinastía Nazarí en el sur de España, en el llamado Reino de Granada. De aquellos tiempos, siglos XIII y XIV, nos han quedado grandes monumentos, entre los que destaca la Alhambra. Su arquitectura es relativamente pobre si se compara con la riqueza en la decoración de sus paredes y techos con motivos caligráficos y mosaicos geométricos. (Gómez, 2009, p.1).

En palabras del propio Escher, (citado en Ernst, 2018):

> << Los árabes alcanzaron una gran maestría en el arte de rellenar superficies con figuras que se repiten sin dejar un solo hueco libre. Así lo hicieron en la Alhambra, donde decoraron paredes y suelos con mayólicas multicolores. Es lástima que el Islam prohíba las imágenes. Por ello, en sus mosaicos se limitaron al empleo de formas geométricas

> abstractas. Ningún artista árabe se atrevió a usar figuras reconocibles – p.ej. pájaros, peces, reptiles, hombres – como elementos decorativos (o tal vez ni siquiera se les ocurrió idea semejante). El ceñirse a las formas geométricas me resulta tanto más inadmisible cuanto que la posibilidad de reconocer las figuras es para mí el motivo principal de mi permanente interés en la materia.>> (p.41).

Quizás después de estas palabras, no sorprenda que, a diferencia del empleo exclusivo de figuras geométricas que se observan en los mosaicos de la Alhambra, en los de Escher encontremos imágenes de seres vivos con la particularidad de saber ocultar a simple vista ante cualquier ojo humano, los patrones matemáticos sobre los que se apoyan sus litografías y haciendo de éstas, auténticas obras de arte.

El interés de Escher por la partición regular de la superficie se vio particularmente estimulado tras visitar la Alhambra en Granada. Según su biógrafo Ernst, (2018), "Tras un estudio intenso – que le costó no mucho trabajo debido a su falta de cualificación matemática – inventó un método para partir regularmente la superficie plana, el cual sería más tarde motivo de admiración tanto de cristalógrafos como de matemáticos.". Este hecho, llevó al propio Escher a confesar lo siguiente:

> <<Con la consciencia tranquila, creo poder alegrarme de la perfección de que doy testimonio, ya que no he inventado yo, ni quiera la he descubierto. Las leyes matemáticas no son ni creaciones ni inventos del hombre. ´Son´ sencillamente, y existen con total independencia del espíritu humano. Una persona de claro entendimiento podrá a lo sumo constatar que existen y dar cuenta de ellas.>> (citado en Ernst, 2018, p.39)

Y a escribir, refiriéndose a la partición de la superficie (como se citó en Ernst, 2018): "Es la fuente más rica de inspiración que jamás haya encontrado, y muy lejos está todavía de haberse agotado".

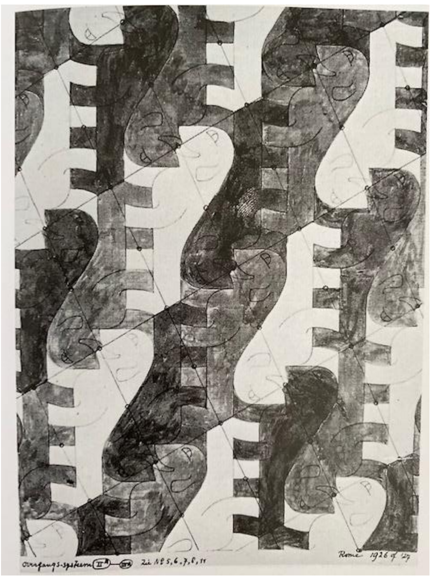


Figura 29: Primer intento de Escher de partición regular de la superficie con animales imaginarios. *Fuente:* Ernst 2018. (p.39).

Inspirado en los mosaicos que cubren las paredes de la Alhambra, son muchas las obras que nos ha legado el gran pintor y grabador holandés, Maurits Cornelius Escher, relacionadas con el mundo matemático; en particular, con las teselaciones regulares, donde predomina el empleo que hace de la técnica de compensación de áreas que más adelante será explicada.

Según (Cuevas, 2016),

> (…) apreciar la geometría en la obra de Escher es un proceso de mate-alfabetización que implica además de reconocer el valor estético cultural de sus realizaciones, la necesidad de replantear su significado en una realidad que nos invita a incursionar en el concepto de procesos geométricos como las proyecciones simétricas o la compensación de áreas en los polígonos. (…) El estudio de la relación arte-matemática en la obra de este singular arquitecto es un interesante objeto de estudio que presenta áreas de oportunidad para la investigación (p.2).

A fin de entender y saber reconocer esa relación arte-matemática de la que habla Cuevas (2016) para, en nuestro caso, poder ser llevada posteriormente a las aulas de Educación Secundaria Obligatoria, en el presente trabajo se analizan desde el punto de vista geométrico, sólo algunas de las muchas obras de arte de Escher relacionadas con mosaicos y teselaciones del plano.

Tras la lectura y búsqueda de información para ello, la mayoría de los autores coinciden en que las teselaciones de Escher se construyen modificando una pieza o polígono inicial que tesele el plano mediante el método de áreas compensadas. Según Cuevas (2016), este método "(…) consiste en realizar en uno de los lados del polígono tomado como base, una deformación a la cual debemos aplicarle una isometría, con el fin de que la figura formada mantenga la misma área que la original."

La Figura 30, muestra una famosa teselación de Escher:

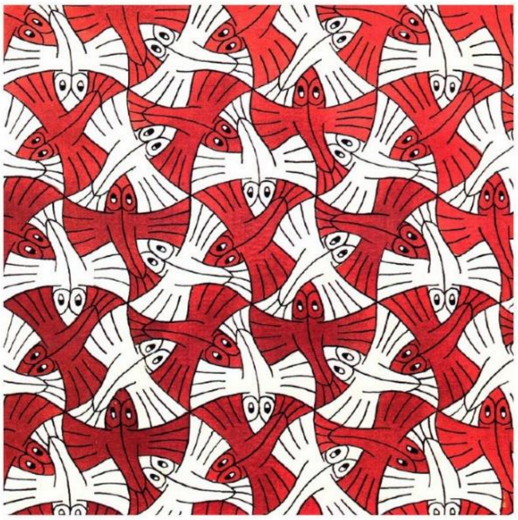


Figura 30: Teselación con pez volador realizada por Escher. *Recuperado de:* https://culturacolectiva.com/arte/la-genialidad-de-maurits-cornelis-escher

En ella, es fácil identificar que el patrón que se repite es una especie de "pez volador" en colores rojo y blanco que puede ser obtenido a través de la deformación de un triángulo equilátero aplicando el método de áreas compensadas; esto es, Escher utiliza como polígono regular para teselar el plano los triángulos equiláteros.

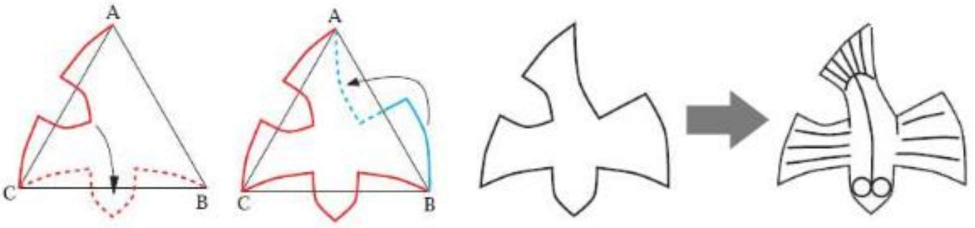


Figura 31: Ejemplo de aplicación del método de compensación de áreas. *Recuperado de:* https://matemelga.wordpress.com/2014/06/05/teselaciones/

Lo que sorprende en la Figura 30 no solo es la complicación aparente de conseguir encajar todas las figuras como si de un puzle se tratase, sino el hecho de que los peces voladores se encuentren orientados en diferentes direcciones.

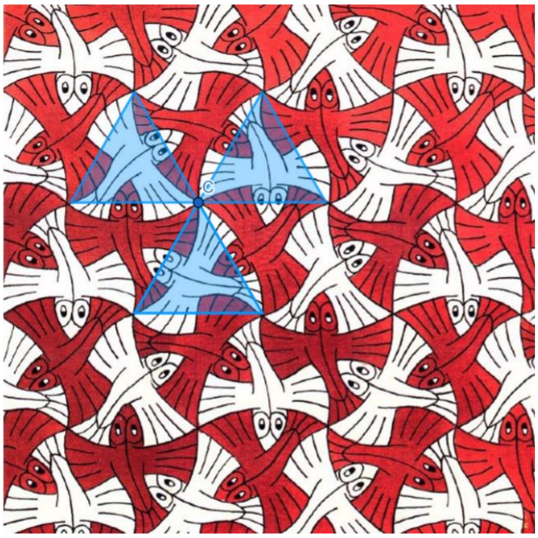


Figura 32: Triángulo rotador en la teselación con pez volador realizada por Escher. *Recuperado de:* https://culturacolectiva.com/arte/la-genialidad-de-maurits-cornelis-escher

En la figura 32 puede apreciarse cómo los peces voladores blancos, marcados con un triángulo azul, pueden obtenerse a partir de una rotación de centro C. Lo mismo ocurriría con los peces voladores rojos, marcados con un triángulo amarillo. (Ver Figura 33)

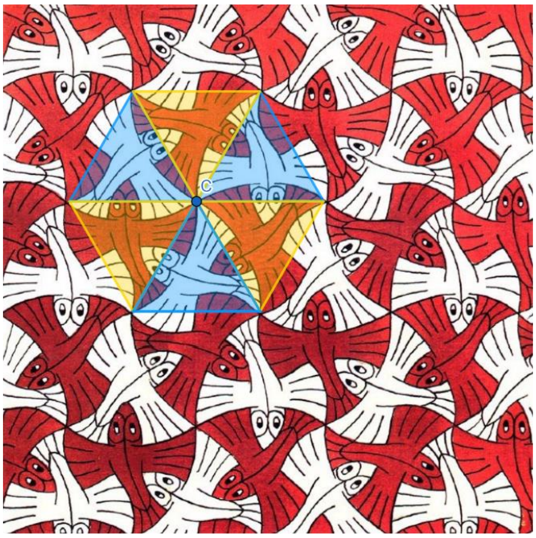


Figura 33: Triángulos rotadores en la teselación con pez volador realizada por Escher. *Recuperado de:* https://culturacolectiva.com/arte/la-genialidad-de-maurits-cornelis-escher

Si esta teselación fuera monocolor, y nos centrásemos en el hexágono que forman los 6 triángulos equiláteros dibujados en la figura 33, lo único que tendríamos sería un pez volador que rota alrededor de un punto fijo, pasando del triángulo azul al amarillo a través de rotaciones de 60º. El hecho de que Escher haya elegido dos colores para los peces, obliga a que, para pasar de un pez a otro de su mismo color, la rotación tenga que ser de 120º.

Observando la obra de Escher en su totalidad, con simples rotaciones de 60 o 120 grados es imposible construirla. Otros movimientos en el plano que pueden apreciarse son traslaciones.

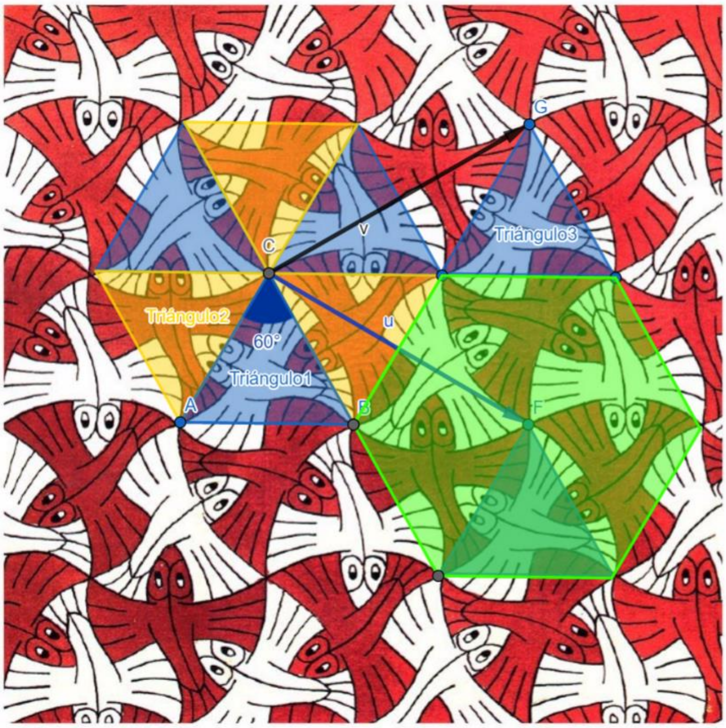


Figura 34: Movimientos en el plano en la teselación con pez volador realizada por Escher. *Recuperado de:* https://culturacolectiva.com/arte/la-genialidad-de-maurits-cornelis-escher

Pasar del designado "Triángulo 1" al "Triángulo 3" en la Figura 34, es posible a través de una traslación de "vector v" (Ver Figura 34), y lo mismo ocurriría para cada uno de los peces voladores rotados alrededor del punto C. Así, mediante rotaciones y traslaciones de la tesela del pez volador, es posible construir la obra de Escher en su totalidad. Otra opción, sería considerar como tesela base el hexágono con centro en C, y realizar traslaciones de "vector u" y "vector v" en el plano (ver hexágono verde en la figura 34).

La mayoría de las obras de Escher relacionadas con mosaicos y teselaciones siguen un proceso de construcción similar al que se acaba de detallar. Podría decirse que, para crear sus obras, Escher sigue una serie de pasos:

- En primer lugar, construye mentalmente una teselación regular del plano formada por polígonos regulares.
- Posteriormente, emplea la técnica de compensación de áreas para crear teselas originales y que se aproximen a figuras de seres vivos.
- Finalmente, mediante la combinación de movimientos en el plano de rotación, traslación, simetrías, o simetrías con deslizamientos aplicados a la tesela creada, consigue teselar el plano y realizar obras realmente sorprendentes.

8. Mosaicos y teselaciones en los contenidos de Educación Secundaria Obligatoria.

8.1. Mosaicos y teselaciones en la asignatura de Matemáticas

En el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Concretamente, para la asignatura y etapa en la que se contextualiza este trabajo, "Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 3º E.S.O.", encontramos diferentes contenidos curriculares que pueden ser abordados dentro del estudio de los "mosaicos y teselaciones".

En la tabla 2, se han extraído los más relevantes y necesarios.

Tabla 2

Contenidos relevantes y necesarios para el estudio de mosaicos y teselaciones establecidos en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre.

Bloque	Contenidos
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas	- Planificación del proceso de resolución de problemas: Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.

	- Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: (…) c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.
Bloque 2. Números y álgebra	- Operaciones con fracciones y decimales. - Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico. - Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas.
Bloque 3. Geometría	- Mediatriz, bisectriz, ángulos y sus relaciones, perímetro y área. Propiedades. - Traslaciones, giros y simetrías en el plano. - Geometría del espacio: áreas y volúmenes.

Fuente: https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

8.2. Mosaicos y teselaciones en otras materias

Aunque no es el principal objetivo de este trabajo fin de máster, conviene destacar la gran implicación que tiene el estudio de mosaicos y teselaciones con otras materias del currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria.

La importancia de este hecho ofrece una doble ventaja:

- Por un lado, poder trabajar con el alumnado la mayoría de las competencias básicas desde una única materia y tema, "Matemáticas" y "mosaicos y teselaciones", respectivamente;
- Y por otro, desarrollar un proyecto global de aprendizaje para la etapa en cuestión; entendiéndose aquí por global, que reúna la implicación de varias materias.

Según Mora y Rodrigo (s.f.) con la asignatura de Educación Plástica y Visual, el diseño de los mosaicos y teselaciones establece interesantes conexiones:

- El uso de figuras geométricas para la construcción de símbolos y signos utilizados en el lenguaje visual.
- Proporciona herramientas para la composición: la simetría, la estructura y la armonía de los diseños.
- Cuando se estudia la representación de formas planas, se dedica un apartado tanto al módulo en el plano como a sus aplicaciones en la ornamentación.

En la asignatura de Geografía e Historia, el estudio de la cultura árabe permite establecer una relación directa entre el arte de la ornamentación y el diseño de los mosaicos. Un trabajo interdisciplinar, por ejemplo, sobre La Alhambra, llevaría a la conexión entre Matemáticas, Historia y Arte. (Mora y Rodrigo, s.f.)

La conexión del estudio de los mosaicos con la asignatura de Lengua es inmediata cuando, por ejemplo, se le exige al alumnado el uso del lenguaje apropiado tanto para describir como para comunicar matemáticamente cómo se construyen los mosaicos en general y alguno en particular. Leer de forma comprensiva los enunciados para proporcionar soluciones correctas y coherentes a los mismos, es otra de las grandes vinculaciones que puede establecerse entre los mosaicos y la materia de Lengua.

A pesar de que en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, no encontramos en los contenidos de las asignaturas de Física y Química o de Geología de 3º E.S.O. ninguno que pueda ser relacionado con los mosaicos o teselaciones, encontrar las configuraciones posibles de teselar el plano puede ser una buena introducción a la forma en la que cristaliza La Materia.

9. Propuesta didáctica para trabajar mosaicos en 3º E.S.O.

El estudio de los mosaicos en el tercer curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria con orientación académica, permite trabajar diferentes contenidos y estándares de aprendizaje recogidos en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre.

Los conocimientos, aptitudes y capacidades que el alumnado desarrolla durante su etapa académica en un centro escolar, son fundamentales para la innovación, la productividad y la competitividad de la Unión Europea (Figel', 2007), de ahí que los nuevos desarrollos curriculares y metodológicos de Educación Secundaria Obligatoria incidan cada vez más en un aprendizaje basado en las competencias claves por las que apuesta la LOMCE.

Según el Ministerio de Educación y Formación Profesional (2019), la adquisición de las competencias clave permite al alumnado alcanzar un pleno desarrollo a nivel personal, social y profesional de acuerdo a la demanda de un mundo globalizado, y debe abordarse desde todas las áreas de conocimiento -matemáticas entre ellas- y establecerse a través de los diferentes documentos oficiales que conforman la comunidad educativa.

La propuesta didáctica que a continuación se detalla, ha sido diseñada teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

1) Conseguir los objetivos definidos al inicio de este trabajo fin de máster.

2) La adaptación de la teoría desarrollada en este trabajo a las especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje y que concretan lo que el alumno debe saber, comprender y saber hacer en la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académica de 3ºE.S.O., así como su evaluación; definidos en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre.

3) La evaluación de todas las competencias claves en el Sistema Educativo Español:
    a) Comunicación lingüística. (C.C.L.)
    b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. (C.M.C.T)
    c) Competencia digital. (C.D.)
    d) Aprender a aprender. (C.P.A.A.A)
    e) Competencias sociales y cívicas. (C.S.C.)
    f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. (S.I.E.)
    g) Conciencia y expresiones culturales. (C.E.C.)

4) Un aprendizaje guiado y que parte de lo que el alumnado ya sabe, que lleve a conseguir un aprendizaje significativo.

5) Una secuencia didáctica con un aumento gradual de la dificultad de las actividades propuestas que permita alcanzar con éxito el aprendizaje deseado.

6) Que el alumnado pueda resolver tareas académicas y profundizar en su propio aprendizaje a través de relaciones interpersonales dentro de grupos de trabajo.

7) Facilitar la comprensión, visualización y el dibujo de figuras geométricas mediante el uso de GeoGebra.

   GeoGebra es una aplicación de código abierto diseñada especialmente para el aprendizaje y la enseñanza de las materias de geometría, álgebra y cálculo, que cada vez está más presente en las aulas de informática de los centros educativos. Su uso es bastante intuitivo para un alumnado que vive inmerso en un mundo plagado de tecnologías, aunque es recomendable que el profesor dedique una primera sesión de clase a explicar algunas nociones básicas de su manejo sobre todo si es la primera vez que el alumnado utiliza esta herramienta informática.

Con el fin de trabajar la "competencia social y cívica", y promover las relaciones educativas y construcción de conocimientos que se derivan del aprendizaje cooperativo y colaborativo, todas las actividades propuestas, excepto la primera que es de introducción al tema y una parte de la última, están pensadas para ser realizadas en grupos de 2 a 3 alumnos dependiendo del número de ordenadores de que disponga el centro educativo. Las competencias clave que se trabajan en cada caso, están designadas con sus siglas de abreviatura al lado de cada estándar de aprendizaje evaluable.

Actividad 1: Introducción a mosaicos y teselaciones.

<u>Objetivos:</u> Con esta actividad se pretende:

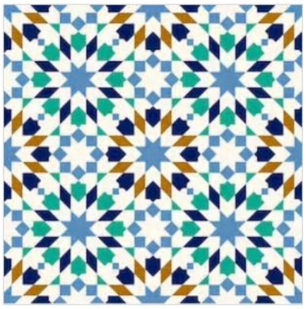
- Que el alumnado empiece a trabajar el contenido recogido en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre:

  Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.

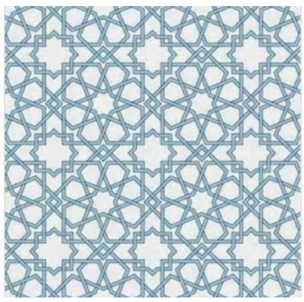
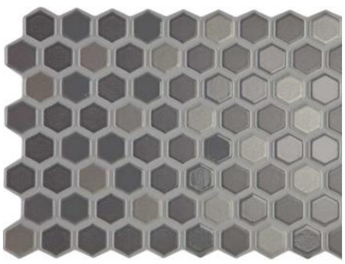
- introducir al alumnado en el tema de mosaicos y teselaciones,
- descubrir los conocimientos que ya poseen sobre el tema para conseguir que el aprendizaje de nuevos conceptos y contenidos sea significativo,
- despertarles la curiosidad por los mosaicos, su construcción, y consecuentemente por las matemáticas,
- trabajar el estándar de aprendizaje 6.2 del "Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas":

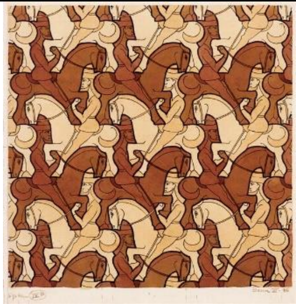
  6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. (C.M.C.T.)

Para conocer los conocimientos que el alumnado tiene sobre los contenidos que se van a trabajar, se les mostrarán diferentes imágenes:



y se le formularán las siguientes preguntas:

- ¿Alguno sabe cómo se llaman este tipo de dibujo?
- ¿Habéis visto alguna vez alguno de ellos o parecido? ¿Para qué creéis que se utilizan
- ¿Qué te llama la atención y por qué?
- ¿Cuántas figuras geométricas puedes identificar en ellos?
- Imagina que tienes que darle a un compañero el trozo más pequeño posible de estos dibujos para que él pueda realizar el dibujo completo repitiéndolo varias veces, ¿qué parte elegirías?
- Imagina ahora que los dibujos son en blanco y negro, ¿Elegirías el mismo trozo de dibujo que en el caso anterior?
- ¿Cómo creéis que se construyen? ¿Se repiten las figuras? ¿Cuales?

Actividad 2: Movimientos en el plano.

Objetivos: Con esta actividad se pretende:

- Trabajar los siguientes contenidos matemáticos recogidos en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre:
    - *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: (…) c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.*
    - *Traslaciones, giros y simetrías en el plano.*
    - *Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.*
- Evaluar los siguientes estándares de aprendizaje:

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

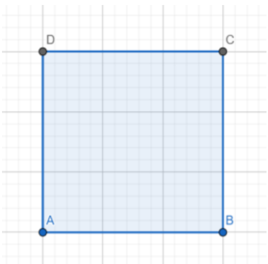
- *2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). (C.C.L.)*
- *6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. (C.M.C.T.)*
- *8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. (C.P.A.A. y C.M.C.T.)*
- *11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. (C.M.C.T. y C.M.C.T.)*

Bloque 3. Geometría

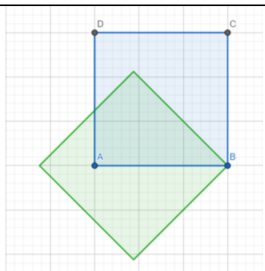
- *1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. (C.M.C.T.)*
- *4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. (C.M.C.T. y C.E.C.)*

Se utilizará GeoGebra para realizar la actividad (todas las figuras de GeoGebra son de diseño propio y representan lo que se pide que hagan los alumnos en cada caso):

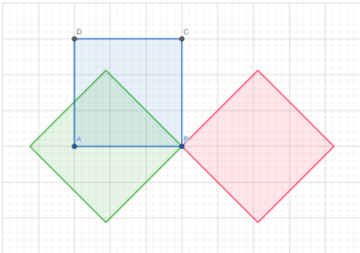
a) - Dibuja un cuadrado de lado 3.



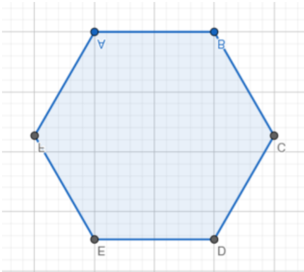
- Aplícale una rotación en sentido antihorario de 45º al vértice inferior derecho.



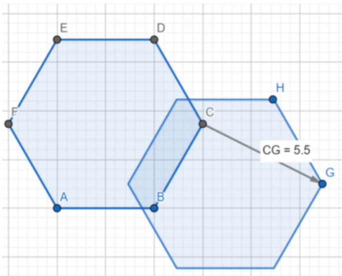
- Aplica una rotación al primer cuadrado de 135º al vértice inferior derecho en sentido horario.



b) - Dibuja ahora un hexágono de lado 2

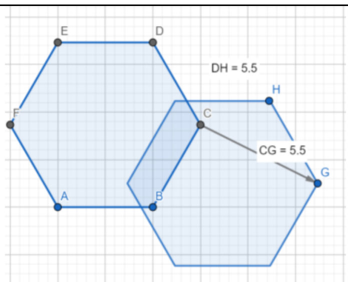


- Con centro en el vértice que se encuentra más a la derecha, traslada el hexágono manteniendo la figura original y calcula cuanto mide el vector de traslación.

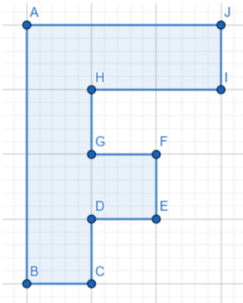


- Elige otro vértice del primer hexágono, busca su homólogo, y calcula nuevamente cuánto mide el vector de traslación.

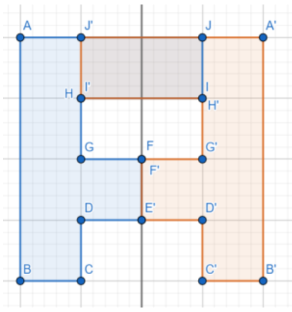
  ¿Cuánto miden en cada caso cada uno de los vectores? ¿Si realizas el cálculo para cada uno de los vértices y sus homólogos, cuanto miden los vectores de traslación?



c) - Dibuja la siguiente figura en GeoGebra:



- ¿Es posible realizar una simetría axial que deje invariante el punto F? Si existe, dibújala.



Actividad 3: Descubriendo los mosaicos semirregulares con material manipulativo.

Objetivos: Con esta actividad se pretende:

- Trabajar los siguientes contenidos matemáticos recogidos en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre:
  - *Planificación del proceso de resolución de problemas.*
  - *Reflexión sobre los resultados: (...) comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.*
  - *Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos.*

- *Operaciones con fracciones.*
- *Geometría del plano.*
- *Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.*

- Evaluar los siguientes estándares de aprendizaje:

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

- *2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). (C.C.L.)*
- *2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. (C.C.L)*
- *4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. (C.P.A.A)*
- *8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. (C.P.A.A. y C.M.C.T.)*

Bloque 3. Geometría

- *1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. (C.M.C.T.)*
- *1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. (C.M.C.T.)*
- *2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados. (C.M.C.T.)*

Materiales: Cartulina, tijeras, regla, lápiz y compás.

- Elabora una tabla de polígonos regulares de hasta 12 lados, donde se indique el nombre del polígono que es, el número de lados que tiene, y la medida del ángulo interior del mismo.
- Diseña en cartulina un total de 8 polígonos de cada tipo, con el mismo lado, aplicando el "Teorema de Thales" para los polígonos de 6 a 12 lados.

  Nota: Los polígonos de 3, 4 y 6 lados es fácil construirlos con un compás, una regla y un lápiz. Para los polígonos de 6 a 12 lados se partirá del radio del hexágono obtenido y se dividirá éste en 6 partes iguales tal y como se muestra en la siguiente figura:

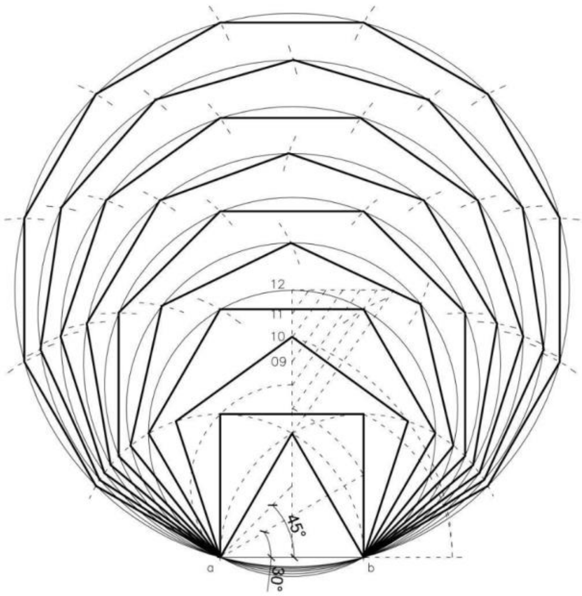


Figura 35: Construcción de polígonos hasta 12 lados que comparten el lado $\overline{ab}$. Recuperado de https://www.10endibujo.com/poligonos-regulares-lado/

  Cada una de estas partes será el radio de la circunferencia que circunscribe a cada uno de los polígonos regulares que se quieren dibujar.
- Una vez elaboradas las figuras en cartulina, averigua de qué forma tienes que combinar los polígonos recortados para conseguir teselar el plano, y anótala en tu cuaderno según la nomenclatura de Schläfli. ¿Existe más de una forma de conseguir que no queden huecos vacíos? ¿Cuántas?
- Para las combinaciones que has encontrado, calcula la suma de los ángulos de los polígonos que has unido en cada vértice.

Actividad 4: Construyendo mosaicos semirregulares en Geogebra

Objetivos: Con esta actividad se pretende:

- Trabajar los siguientes contenidos matemáticos recogidos en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre:
    - *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: (…) c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.*
    - *Traslaciones, giros y simetrías en el plano.*
    - *Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.*

- Evaluar los siguientes estándares de aprendizaje:

    Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
    - 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. (C.D. y C.M.C.T.)

Dibuja en GeoGebra cada uno de los mosaicos semirregulares que encontraste en la actividad anterior con tus compañeros.

Actividad 5:

Objetivos: Con esta actividad se pretende:

- Trabajar los siguientes contenidos matemáticos recogidos en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre:
    - *Planificación del proceso de resolución de problemas*
    - *Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.*

- *Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.*
- *Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.*
- *Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: (…) c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.*
- *Geometría del plano.*
- *Traslaciones, giros y simetrías en el plano.*
- *Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas*

- Evaluar los siguientes estándares de aprendizaje:

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

- *1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. (C.C.L.)*
- *2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). (C.C.L.)*
- *3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos. (C.M.C.T.)*
- *4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. (S.I.E.)*
- *4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. (C.P.A.A.)*
- *5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico. (S.I.E. y C.C.L.)*
- *6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que*

subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. (C.P.A.A. y C.M.C.T.)

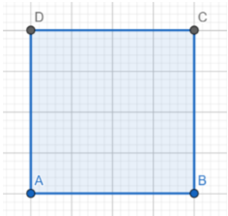
- *8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. (C.P.A.A. y C.M.C.T.)*
- *8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. (C.P.A.A.)*
- *11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. (C.M.C.T. y C.C.L.)*
- *11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. (C.M.C.T. y C.D.)*
- *12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. (C.C.L., C.D., y C.M.C.T.)*

Bloque 3. Geometría

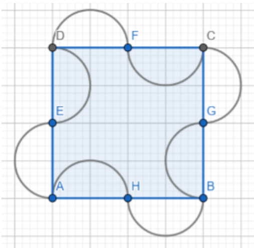
- *2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. (C.M.C.T.)*
- *4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. (C.M.C.T. y C.E.C.)*
- *4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. (C.M.C.T. y C.E.C.)*
- *5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, en la naturaleza y en el arte. (C.M.C.T.)*

Teselando al estilo Escher con GeoGebra. (Todas las figuras de GeoGebra son de diseño propio y representan lo que se pide que hagan los alumnos en cada caso)

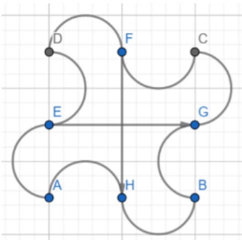
a) Construye un polígono regular de 4 lados y calcula en tu cuaderno su área y perímetro.



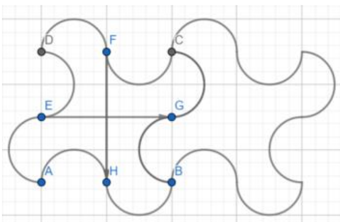
- Desde uno de sus vértices dibuja una semicircunferencia cóncava de radio igual a la mitad del lado del polígono dibujado y traza otra circunferencia convexa desde el punto medio del lado del polígono hasta el otro vértice de ese mismo lado del polígono.



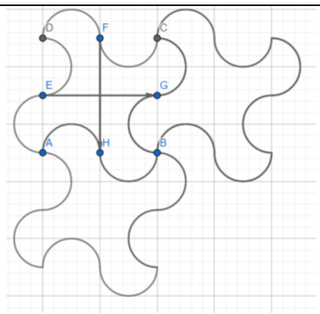
- Repite la operación para cada uno de los lados del polígono. La figura obtenida es ahora curvilínea. Oculta el cuadrado inicial que dibujaste. ¿Qué área y perímetro tiene la nueva figura? Anótala en tu cuaderno.



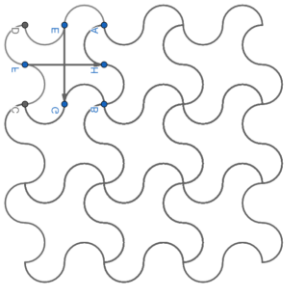
- Selecciona la figura curvilínea resultante, y realiza una traslación en la dirección paralela al eje X.



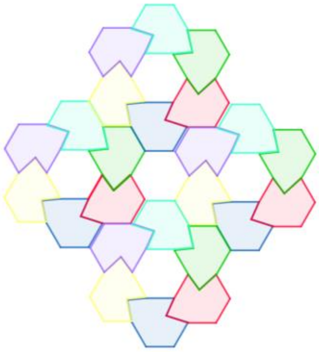
- Vuelve a seleccionar la figura curvilínea y realiza ahora una traslación en la dirección paralela al eje Y.



- Repite el proceso varias veces para seguir rellenando el plano con la figura obtenida.



b) Diseña una figura no regular aplicando el método de compensación de áreas, que permita teselar el plano y construye un mosaico con ella de tal manera que en tu mosaico puedan apreciarse giros y traslaciones. Un ejemplo de ello es el siguiente figura, donde la tesela va girando y trasladándose en el plano:



Posteriormente tu grupo realizará una exposición donde tendréis que explicar los pasos seguidos para su construcción y las dificultades encontradas.

c) Analiza las siguientes obras de Escher realizadas con Geogebra:

Para esta actividad se accederá en una pantalla de proyección al recurso web:

http://jmora7.com/Mosaicos/

donde existen varios ejemplos de obras de Escher realizadas en GeoGebra, con un deslizador que muestra todos los movimientos en el plano que utiliza Escher en cada caso.

Nota: La idea de proyectarlo es que los alumnos no accedan a las soluciones de las preguntas que se plantean a continuación. Una vez resueltas éstas, se les permitirá acceder a la web desde los ordenadores para que puedan analizar tranquilamente la simulación del deslizador.

Preguntas:

- ¿Cuantos movimientos del plano eres capaz de encontrar? Anótalos detallando en cada caso:
  - Si hay simetrías: los ejes de simetría
  - Si hay rotaciones: los centros de rotación y sentido de giro: horario o antihorario.
  - Si existen traslaciones: cuál es el vector de traslación.
- ¿Cómo calcularías el área de una de las figuras que generan el mosaico de Escher?

Nota: La idea es que busquen sobre qué polígono regular se ha aplicado el método de áreas compensadas para crear la teselación y vean cómo poder resolver un problema aparentemente complicado de una forma bastante sencilla.

9.1. Procedimientos de evaluación

La evaluación de los diferentes estándares de aprendizaje evaluables indicados en cada una de las actividades propuestas, requiere la identificación por parte del profesor, de los conocimientos y competencias desarrollados y adquiridos por el alumnado.

A continuación, se enumeran algunos instrumentos y procedimientos que pueden ser empleados para dicha evaluación:

1. Observación directa del desempeño y trabajo del alumno o alumna en el aula.
2. Elaboración y entrega de trabajos escritos.
3. Preguntas de respuesta abierta que admitan varias soluciones a fin de que el alumnado se cuestiones la validez de las mismas y adquieran un espíritu crítico.
4. Exposiciones orales del trabajo realizado en el aula por el alumnado.

5. Elaboración de pruebas escritas donde tengan que detallar las respuestas y el procedimiento que emplearían para ser resueltas con GeoGebra.
6. Preguntas directas al alumn@ que se considere oportuno.

10. Conclusiones

El objetivo general de este trabajo era analizar las obras de Escher relacionadas con contenidos matemáticos de E.S.O. y hacer una propuesta didáctica para trabajar los mosaicos y teselaciones en la asignatura de "Matemática con orientación académica" en el curso de tercero de E.S.O. Para ello, ha sido preciso revisar ciertos conceptos y definiciones matemáticas que se consideraban necesarios para comprender dicho análisis.

Tras consultar el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre para el curso en el que se contextualiza este trabajo, se ha planteado un conjunto de actividades estructuradas que han permitido la consecución de los objetivos específicos propuestos y que se detallan a continuación:

- Con respecto al primer objetivo específico considerado: *comprender la base matemática sobre la que se fundamentan muchas de las obras de Escher, concretamente, las que están relacionadas con mosaicos y teselaciones;* se ha recurrido a diferentes fuentes bibliográficas para conocer las técnicas que este gran artista emplea en la creación de sus obras y se ha procedido a la explicación de las mismas buscando en todo momento la conexión con las Matemáticas.
- En relación al segundo y cuarto objetivos específicos propuestos: *Evaluar diferentes estándares de aprendizaje*, y *promover un aprendizaje que integre la adquisición de las competencias clave;* se han elaborado actividades concretas para ello, identificando en cada una de ellas tanto los estándares de aprendizaje evaluables como las competencias claves que se estaban evaluando y adquiriendo, respectivamente, en cada momento. Asimismo, para los estándares de aprendizaje se ha especificado, además, la forma de llevar a cabo su evaluación.
- El tercer objetivo específico propuesto: *Profundizar en el desarrollo de las habilidades de pensamiento matemático del alumnado*, está explícito en el propio currículo básico de la asignatura de "Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas" para todo alumno o alumna que curse dicha asignatura.

- Respecto al quinto objetivo específico: *Fomentar en el alumnado, el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra tanto para visualizar y comprender la geometría como para servir de apoyo a la resolución y explicación de problemas;* se puede afirmar que se consigue por un lado gracias a que el alumnado tiene que realizar más del 80% de las actividades propuestas con GeoGebra, y por otro, a que se plantea una actividad de exposición con su correspondiente explicación, del trabajo realizado con dicha herramienta tecnológica. Los mosaicos que aparecen en el recurso web "http://*jmora7.com/Mosaicos/*" de la actividad 5, son un claro ejemplo del uso que se le puede dar a GeoGebra como *apoyo a la resolución y explicación de problemas* y está en el docente el recalcarles este hecho a los alumnos y alumnas.
- En relación con el sexto y último objetivo específico: *Despertar en el alumnado una creatividad inspirada en las matemáticas,* se ha propuesto una actividad específica para que el alumnado ponga en práctica no solo los conocimientos matemáticos aprendidos a lo largo de todo el tema, sino también su capacidad para crear patrones matemáticos al estilo de Escher, esto es, haciendo uso del método de áreas compensadas y de su propia creatividad.

Aunque las actividades propuestas en este trabajo fin de máster no han podido ponerse en práctica en ningún centro educativo, los argumentos que se acaban de detallar son más que suficientes para concluir que es posible trabajar los mosaicos y teselaciones de Escher en una etapa de Educación Secundaria Obligatoria empleando una metodología que puede ser bastante atractiva para el alumnado y que le permite, además de aprender matemáticas, auto-valorar sus fortalezas al enriquecer el aprendizaje de sus compañeros y compañeras, promover su creatividad y adquirir destrezas para resolver problemas a través de medios tecnológicos.

11. Referencias Bibliográficas

Alatorre, D. (Febrero de 2018). Sobre el problema del einstein. *Motivos matemáticos. (Vol 1. Núm.2)*. Recuperado de: motivos.matem.unam.mx/vol1/num2/artest.html

Asociación Mexicana de Ciencias. (6 de Junio de 2013). Teselaciones, Arte y Matemáticas. *Boletín AMC(208), 13.* Recuperado de: www.comunicacion.amc.edu.mx/comunicados/teselaciones-arte-y-matematicas

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M. J., & Colera Cañas, R. (2001). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas 3. ESO. Profesorado. Anaya On.* Madrid: ANAYA.

Cuevas, A. (2016). Las matemáticas en las teselaciones regulares de Escher. 1-12.

de España, G. (2015). Competencias clave. *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero*. Recuperado de: https://www.educacionyfp.gob.es/educacion/mc/lomce/el-curriculo/curriculo-primaria-eso-bachillerato/competencias-clave/competencias-clave.html

de España, G. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, (3).* Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid.

De la lengua Española, D. (2019). *Real Academia Española*. Recuperado de: https://dle.rae.es/transformación

Diccionario electrónico Definición.de. (s.f.). Recuperado de: http://definicion.de/teselacion/

Ernst, B. (2018). *El espejo mágico de M.C. Escher.* Polonia: Taschen.

Europeas, C., & Figel'. (2007). *Competencias clave para el aprendizaje permanente. Un marco de referencia europeo.* Luxemburgo: Oficina de Publicaciones Oficiales de las Comunidades Europeas. Recuperado de: http://www. mecd. gob. es/dctm/ministerio/educacion/mecu/movilidad-europa/competenciasclave. pdf.

Godino, J. D., & Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros.* Granada: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Gómez, A. (2009). *Mosaicos: de la Alhambra a la sartén antiadherente.* Recuperado de: http://www.alhambra-patronato.es/ria/bitstream/handle/10514/145/Mosaicos%20de%20la%20Alhambra%20a%20la%20sart%EF%BF%BDn%20antiadherente%20Antonio%20Gomez%20Tato.pdf?sequence=3

Hernández, A. R. (2014). Transformaciones geométricas para el diseño y construcción de teselados: una propuesta sobre el uso de la tecnología en el aula. Recuperado de: 48.222.11.200:8080/jspui/bitstream/123456789/2966/1/Capturado%20RIBC142244.pdf

Mora, J., & Rodrigo, J. (2007). *Mosaicos I.* Granada: Proyecto Sur de Ediciones, S.A.L.

Rodríguez, M. (2010). *Generación de teselaciones periódicas: Grupos Cristalográficos.* Madrid, España: Universidad Politénica de Madrid.

Sánchez, L., & Villalobos, E. (2004). El camino de las imágenes. *XVI CONGRESO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA GRÁFICA* (pág. 9). Cuba: Universidad de Camagüey. Recuperado de: www.egrafica.unizar.es/ingegraf/pdf/Comunicacion17121.pdf

Solís, L. H. (2007). *Mosaicos.* México: UNAM.