

---

# UNA LICITACIÓN COMBINATORIAL APLICADA A LA PROVISIÓN DE INTERNET A LAS ESCUELAS DE BUENOS AIRES

---

F. BONOMO \*  
J. CATALÁN \*\*\*  
G. DURÁN \*\*  
R. EPSTEIN \*\*\*  
A. JAWTUSCHENKO \*\*\*\*  
J. MARENCO \*\*\*\*\*

## Resumen

Una de las clases de licitación más estudiadas en la literatura es la multi-unidades, aquella en la que se licitan varios ítems idénticos. En este trabajo, definimos una nueva subclase de las licitaciones multi-unidades, que llamamos *multi-unidades logística*. La característica central de una licitación multi-unidades logística es

---

\* Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Argentina. CONICET, Argentina.

\*\* Instituto de Cálculo y Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Argentina. CONICET, Argentina. Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad de Chile, Santiago, Chile.

\*\*\* Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago, Chile.

\*\*\*\* Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Argentina. CONICET, Argentina.

\*\*\*\*\* Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina. Departamento de Computación, FCEN, UBA, Argentina

que existen fuertes asimetrías de costos entre los oferentes a causa de consideraciones logísticas. Ciertas unidades pueden ser atractivas para una firma y no para otra, de acuerdo a dichas consideraciones, y lo contrario puede suceder en otras unidades a licitar. Este tipo de licitación aparece en la provisión de Internet en las escuelas de Buenos Aires, la capital de Argentina. En 2008, la ciudad de Buenos Aires debía licitar la conexión de Internet para sus 709 escuelas públicas. En este trabajo mostramos cómo fue diseñada la licitación para realizar la adjudicación minimizando el gasto de la ciudad destinado a este fin. En nuestro diseño, cada firma debe dar un precio general por el servicio mensual a ser brindado en cada escuela, descuentos por volumen en bandas prefijadas de antemano y el listado de escuelas en las que le interesa brindar el servicio. La licitación multi-unidades logística resultante se puede interpretar como una licitación combinatorial. Se implementó un modelo de programación lineal entera para obtener el conjunto de ofertas más conveniente para el estado. De acuerdo con los análisis presentados en este trabajo, se puede estimar que la ciudad de Buenos Aires obtuvo ahorros cercanos al 20 % por implementar este nuevo modelo de licitación en lugar del formato de licitación originalmente propuesto.

PALABRAS CLAVE: Licitaciones Combinatorias, Licitaciones Multi-unidades, Programación Lineal Entera.

---

## 1. Introducción

---

Los procesos de licitación permiten vender y comprar bienes y servicios en forma eficiente, aumentando el bienestar de todos los actores involucrados. Para ello, es crucial entender las preferencias de los actores y la naturaleza de los productos que se compran y venden. La aparición de Internet y del comercio electrónico han abierto un inmenso campo de aplicación para estudiar y mejorar los mecanismos de licitación, donde la Investigación de Operaciones está jugando un rol central.

En este trabajo proponemos una nueva subclase de licitaciones que se deriva de la clásica subasta conocida como *multi-unidades* (se puede consultar un resumen del estado del arte de licitaciones multi-unidades

en [6]). En la literatura se han propuesto diversos mecanismos para licitar estas unidades idénticas de modo de asignar los artículos a quienes más los valoran maximizando de este modo la recaudación del vendedor, en lo que constituye un mecanismo óptimo. En muchas licitaciones se compran y venden múltiples productos que están compuestos de una compleja mezcla de bienes y servicios, donde la logística juega un rol central. Efectivamente, la componente material de estos productos a licitar entre sí es idéntica, lo que define una licitación multi-unidades, y por lo tanto el precio final debería ser parecido para todos ellos. Sin embargo, la componente logística por lo general cambia esa apreciación porque las habilidades y especialidades de las empresas que proveen estos productos son heterogéneas, lo que provoca que algunas empresas tengan ventajas comparativas para proveer algunos de los productos a licitar, mientras que otras empresas son más competitivas en otros casos. Estas licitaciones las hemos clasificado en este trabajo como “licitaciones multi-unidades logísticas”, y suelen resolverse a través de la formulación de una licitación combinatorial.

Una *licitación combinatorial* (combinatorial auction) es una subasta en la cual los oferentes pueden armar un paquete de ítems y presentan un precio por el conjunto, que se acepta o rechaza en su totalidad. Por lo tanto, el valor de cada ítem es relativo al conjunto en el que está inserto. Esta característica define la propiedad combinatorial de la licitación. Este tipo de licitaciones tiene múltiples aristas que incluyen el diseño de la licitación, el desarrollo de modelos matemáticos que permitan determinar el mejor conjunto de ofertas para el organizador de la licitación y la implementación de algoritmos que permitan resolver estos modelos. El organizador de la licitación busca minimizar costos si es un “comprador”, o maximizar su beneficio si es un “vendedor”. Dada la interdisciplinariedad de los problemas de licitaciones combinatoriales, conviven en su formulación y resolución economistas, expertos en gestión, especialistas en investigación de operaciones y teoría de juegos, y profesionales de las ciencias de la computación. Para más detalle sobre licitaciones combinatoriales ver [1].

En este paper presentamos el caso de la licitación de servicios de Internet para los colegios públicos de la ciudad de Buenos Aires, la capital de la Argentina. Mostramos que esta licitación también clasifica como multi-unidades logística y diseñamos un mecanismo de carácter combi-

natorial para su resolución. En 2008 el gobierno de la ciudad de Buenos Aires lanzó una licitación para instalar servicios de Internet en los 709 establecimientos públicos escolares de la ciudad, por un lapso de dos años. El proyecto preliminar de la licitación involucraba plantear una licitación multi-unidades tradicional. En la propuesta original del gobierno de la ciudad cada empresa debía realizar una oferta individual por cada escuela, pudiendo no ofertar el servicio en algunas de ellas. El valor de la oferta debió corresponder al abono mensual por la provisión de Internet, servicio que estaba sujeto a condiciones técnicas estipuladas de antemano. En cada escuela ganaría la empresa que hiciera la mejor oferta.

Este diseño para la licitación exhibía algunos problemas. En primer lugar, no se daba a las empresas la posibilidad de realizar descuentos por volumen, con la consecuente suba del precio promedio del abono mensual. Por otra parte, la provisión de Internet está fuertemente restringida por la tecnología preinstalada, con lo cual la distribución geográfica de las empresas es un factor limitante a la hora de presentarse a la licitación. Por este motivo, con este diseño de licitación era posible que los precios tendieran a ser altos en las zonas de la ciudad con menos competencia (zonas con pocas empresas que ya tuvieran la tecnología instalada), e incluso habría una gran posibilidad de colusión en dichas zonas de baja competencia.

Este trabajo presenta un nuevo diseño que se propuso y se aplicó en esta licitación, con los objetivos de aprovechar descuentos por volumen por parte de las empresas proveedoras –intentando así disminuir la erogación total por parte del gobierno de la ciudad– y dificultar las posibilidades de colusión entre los oferentes. El diseño para la licitación contempla que no todas las empresas participantes pueden proveer el servicio en todas las escuelas, incluyendo también la posibilidad de proporcionar descuentos por volumen. Cada escuela no se considera como una entidad separada, sino que el precio individual que la ciudad abona por ella a una empresa depende del conjunto de escuelas asignado a la empresa. Por estos motivos, la licitación propuesta se puede interpretar como una licitación combinatorial con restricciones logísticas, aunque manteniendo características propias de un proceso multi-unidades. No estamos al tanto de trabajos previos en los que se haya presentado este diseño de licitación.

Existen diversos ejemplos de licitaciones combinatoriales realizadas desde ámbitos públicos, con el objetivo de optimizar el uso del presupuesto, aunque en estos trabajos previos no se aplicó el formato de subasta presentado por primera vez en el presente trabajo. Un ejemplo paradigmático es la licitación de alimentos que realiza el estado de Chile, a través de su agencia JUNAEB, por casi mil millones de dólares por año, para proveer alimentación a los colegios públicos. Este procedimiento se enmarca en esta nueva clasificación de licitación multi-unidades logística. En este caso se entregan dos millones de almuerzo por día a niños que están estudiando en 5,000 colegios y el sistema opera 200 días al año. El producto es un almuerzo que se compone de alimentos, como arroz o pollo, que son bienes muy homogéneos cuya calidad está especificada en detalle y se asemejan a un commodity. Estos alimentos deben ser transportados, almacenados, cocinados y servidos a los niños, lo que significa una operación logística de envergadura. En este caso, la componente espacial juega un rol clave que afecta la logística y por ello la calidad del producto. Es distinto operar en Santiago, una gran ciudad de más de seis millones de habitantes, que operar en una región rural. Las empresas se han especializado y son eficientes para ciertas condiciones pero no para otras. Para optimizar este proceso de compra se diseñó una licitación combinatorial que ha operado exitosamente desde 1997 [2], donde el país se dividió en Unidades Territoriales que constituyen los objetos a licitar y los oferentes las pueden agrupar en paquetes que se aceptan o rechazan en su conjunto. Esta característica da origen a la naturaleza combinatorial de la licitación y al mismo tiempo permite que cada empresa refleje sus costos para cada Unidad Territorial en forma muy eficiente.

Otro ejemplo de uso concreto de una licitación combinatorial en el contexto de la procuración pública está dado por el mercado de omnibus de Londres [3, 5]. Este mercado comprende alrededor de 800 rutas a través de un área de 1630 kilómetros cuadrados, usadas por más de 3,5 millones de pasajeros por día. Antes de la etapa de desregulación los servicios de ómnibus en el Gran Londres eran provistos por una empresa estatal londinense. En 1984 el servicio fue privatizado, y desde entonces es otorgado a empresas de transporte a través de licitaciones combinatoriales anuales. La concreción de las licitaciones se fue haciendo de manera gradual. La primera de ellas fue realizada en 1985, pero recién en 1995 la mitad de las rutas habían sido licitadas al menos una vez. Hoy, el sis-

tema ha llegado a una situación de estabilidad, licitándose alrededor de un 20 % de la red año a año. La licitación de rutas de ómnibus de Londres es considerada un éxito, pues devino en un incremento de la calidad del servicio y en una disminución de los costos para el gobierno de Londres. En este caso nuevamente podemos separar el producto bajo licitación en dos componentes principales: primero están los buses, que son bienes homogéneos, y luego la logística que se necesita para operar estos buses, que incluye abastecerlos con combustible y aceite, realizar los cambios de aceite y otras mantenciones, corregir las fallas, y contratar, entrenar y capacitar a una dotación de conductores profesionales. Las capacidades logísticas de las empresas son diferentes, mientras algunas tendrán ventaja para operar en unos recorridos, otras serán más eficientes en otros. Estas diferencias aparecen por instalaciones físicas que están en lugares específicos de la ciudad, localización de los choferes, conocimiento y habilidad para operar rutas de gran demanda o de baja demanda, entre otros aspectos.

El presente trabajo está organizado del siguiente modo. En la Sección 2 se aborda el diseño de la licitación, mencionando distintas posibilidades para procesos licitatorios de tipo multi-unidades con descuentos por volumen y restricciones dadas por consideraciones logísticas. La Sección 3 contiene dos modelos matemáticos para resolver el problema de adjudicar las escuelas a los oferentes minimizando el costo total, y la Sección 4 describe la experiencia de aplicación de este diseño a la licitación del servicio de Internet a las escuelas públicas de la ciudad de Buenos Aires. Finalmente, la Sección 5 presenta las conclusiones del trabajo.

---

## 2. Diseño de la licitación

---

Se describe en esta sección el proceso de diseño de la licitación realizado por los autores. Se presentan distintos diseños alternativos y se discuten las características de cada uno, arribando al diseño finalmente implementado. El objetivo principal de esta etapa del trabajo es obtener un diseño que genere competencia entre las empresas a través de descuentos por volumen (cuantas más escuelas se asignan a la empresa, el precio por unidad debe ser menor, buscando que la ciudad realice el menor desembolso total posible), manteniendo un proceso transparente y que no

esté sesgado en favor o en contra de ninguna empresa particular. Como se mencionó en la introducción, el principal factor a tener en cuenta con relación a este último punto es que la provisión del servicio de Internet en una escuela depende de la tecnología instalada, y esto define el carácter logístico de la licitación. Para una empresa sin instalaciones en la zona es muy costoso proveer este servicio.

## 2.1. Licitación basada en unidades territoriales

Desde el punto de vista administrativo de su sistema educativo, la ciudad de Buenos Aires está dividida en 21 *distritos escolares*, como puede verse en la Figura 1. Para incluir dentro del diseño la posibilidad de que los oferentes realizaran descuentos por volumen, se considera primero la posibilidad de diseñar una licitación como la desarrollada en el caso de los comedores escolares de Chile [2], utilizando los distritos escolares como *unidades territoriales* para la licitación. Las empresas podrían entonces ofertar por combinaciones de distritos escolares, adjudicando a posteriori del modelo matemático la partición de la ciudad que fuera la más conveniente en costos para el estado. Cada unidad territorial se asignaría en forma completa a una empresa (seleccionada por el modelo matemático), de modo que cada empresa ganadora debería instalar el servicio en todas las escuelas de las unidades territoriales obtenidas.

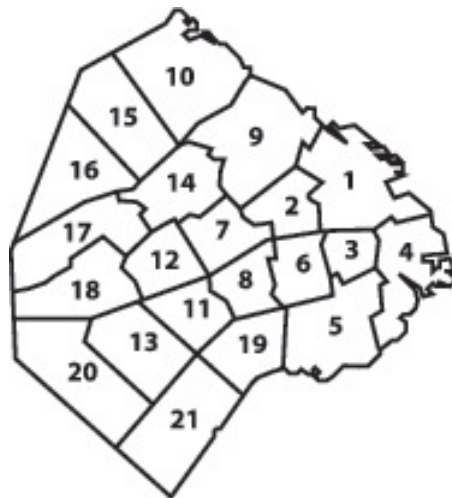


Figura 1: Partición de la ciudad de Buenos Aires en distritos escolares.

Esta propuesta tenía la ventaja de considerar descuentos por volu-

men y la intención de la ciudad de obtener un menor precio total basado en hacer competir entre sí a las empresas, pero seguía adoleciendo de un problema importante: no estaba teniendo en cuenta las tecnologías ya instaladas en la ciudad por parte de las potenciales empresas participantes. Con esta partición de la licitación en distritos escolares, podía suceder que una empresa que tenía ya su tecnología en sólo una parte del distrito subiera fuertemente el precio en todo el distrito para compensar el tener que llegar a zonas donde todavía no había accedido. Las empresas en estas condiciones podían objetar el proceso licitatorio, aduciendo –con razón– que se veían desfavorecidas por el formato de la licitación.

Por lo tanto, se desechó esta posibilidad y se procedió a analizar el radio de acción donde ya tenían tecnología instalada cada una de las empresas que se suponía podían participar de la licitación. Se generó entonces una propuesta que diseñaba nuevas unidades territoriales en base a cruzar los distritos escolares con los radios de acción de las potenciales empresas participantes.

Esta nueva propuesta aglutinaba los distritos escolares en 11 unidades territoriales, teniendo en cuenta los radios de acción de las empresas (ver Figura 2). De todas maneras, la propuesta seguía presentando algunas deficiencias: por un lado, el radio de acción de cada empresa estaba siendo establecido por el gobierno de la ciudad, lo que podía dar lugar a errores en la definición del mismo, y por otra parte, seguía habiendo unidades territoriales con posiblemente muy poca competencia, lo que abría la puerta a intentos de colusión.

## 2.2. Una licitación multi-unidades logística

Se decidió entonces dejar de lado la idea de licitar por unidades territoriales definidas a priori y se procedió a generar la siguiente propuesta, que fue la que finalmente se utilizó en la licitación. Cada empresa tendría que fijar un precio unitario por brindar el servicio en una escuela y asimismo decidiría al ofertar en qué escuelas participar, de acuerdo a las restricciones logísticas. El precio debía ser el mismo para todas las escuelas por las que realizaba ofertas, siendo así un “precio unitario por ítem”, independiente de la ubicación de la escuela. Además, cada empresa tenía la opción de ofrecer descuentos por volumen (con tramos tarifarios prefijados). Estas consideraciones ubican a este formato de licitación dentro de lo que damos en llamar en este trabajo “licitación multi-unidades



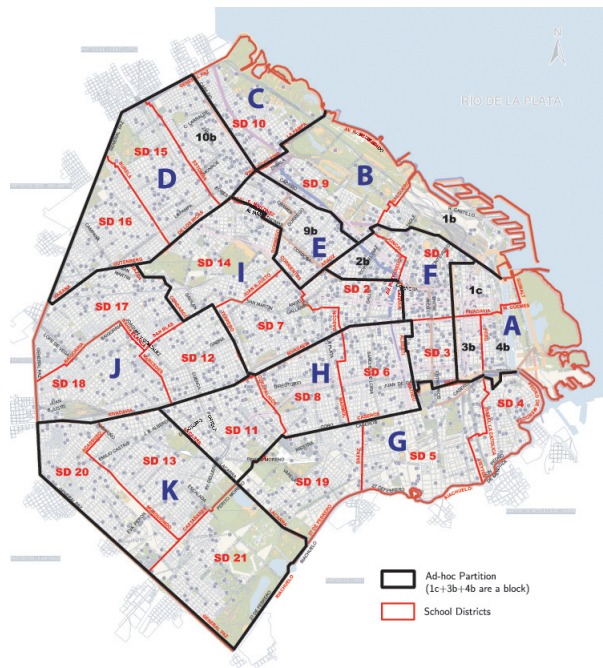


Figura 2: Partición en unidades territoriales considerando radios de acción.

logística”.

A su vez, propusimos que se impusiera una cota superior de escuelas a ser asignadas a una misma empresa, para evitar monopolios. Este último punto finalmente no se aprobó, dado que el gobierno de la ciudad consideró que no era un inconveniente asignar todas las escuelas a una misma empresa, si así se conseguía el mejor precio para el estado.

Un potencial problema que tiene este mecanismo (compartido con la propuesta original del gobierno de la ciudad) es que podría suceder que para alguna escuela haya solamente una empresa interesada, y que esa empresa oferte un precio excesivamente alto (aunque en ese caso estaría obligada a ofrecer ese precio alto como su precio unitario para toda la ciudad). En estos casos, la ciudad puede declarar “desierto” este ítem de la licitación, y proveerlo de Internet por medios propios (por ejemplo, contratando a la misma empresa en forma particular al precio del mercado). Un mecanismo equivalente consiste en establecer un “precio de reserva” para cada unidad, de modo tal que si el mejor precio ofertado está por debajo del precio de reserva, la unidad no se asigna.

Esta nueva propuesta resolvía prácticamente todos los problemas

planteados en las propuestas anteriores:

- No se puede poner un precio alto donde hay poca competencia y un precio más bajo donde hay mucha competencia, a causa de que el precio unitario es el mismo para todas las escuelas (dentro de cada tramo tarifario).
- Se capturan los descuentos por volumen a través de las rebajas según el tramo tarifario, buscando así el menor precio total para el estado.
- Es prácticamente imposible que dos empresas realicen intentos de colusión en zonas de baja competencia. Por ejemplo, si las dos empresas se ponen de acuerdo para “repartirse” entre ellas las escuelas de una zona de baja competencia a un precio alto, automáticamente estarían perjudicando sus posibilidades en las zonas de alta competencia, dado que el precio unitario es el mismo para todas las escuelas. Como se mencionó en el párrafo anterior, tampoco es conveniente para estas empresas poner un precio excesivamente alto para estas escuelas (apostando a quedarse solamente con las escuelas en zonas de baja competencia pero a un precio muy alto), porque los responsables de la licitación pueden declarar desiertas a estas escuelas en ese caso.
- Es la propia empresa quien define su radio de acción a través de la elección de escuelas.

Éste fue el diseño de licitación que finalmente se aplicó en el llamado. Este mecanismo de licitación es una combinación entre (a) la intención inicial de licitar cada escuela por separado por parte de la ciudad (evitando así que alguna empresa pudiera objetar la licitación al estar conformada por unidades territoriales poco coincidentes con su radio de acción) y (b) la necesidad de generar competencia entre las empresas ofreciendo descuentos por volumen. Dado que cada escuela se licita por separado, este mecanismo corresponde a una licitación multi-unidades, pero además cada empresa define su propio radio de acción y, en consecuencia, se siguen generando unidades territoriales como regiones elementales de competencia directa entre las empresas. La diferencia con otras licitaciones combinatoriales existentes en la literatura es que estas regiones se definen *a posteriori* de la recepción de las ofertas, puesto que

están dadas por las intersecciones maximales de los conjuntos de escuelas para los cuales cada empresa manifestó su interés. Estas intersecciones maximales las llamaremos a lo largo de este trabajo “unidades de competición”.

---

### 3. Formulación matemática de la licitación

---

Describimos en esta sección dos modelos de programación lineal entera para adjudicar las ofertas ganadoras en forma óptima, minimizando los costos totales para el estado. Presentamos en primer lugar una formulación exponencial que muestra claramente la naturaleza combinatorial de la licitación, y luego una formulación compuesta por un número polinomial de variables y restricciones, que fue eficiente de resolver y fue la utilizada en la práctica. En ambos modelos se busca la solución óptima para la ciudad, adjudicando todas las escuelas.

#### 3.1. Formulación exponencial

Sea  $C$  el conjunto de empresas y sea  $E$  el conjunto de escuelas. Para cada empresa  $i \in C$ , definimos  $C_i \subseteq E$  como el conjunto de escuelas para las cuales la empresa realizó ofertas. Con estas definiciones, para cada empresa  $i \in C$  y cada subconjunto  $S \subseteq C_i$ , introducimos la variable binaria  $x_{iS}$ , de modo tal que  $x_{iS} = 1$  si la empresa  $i$  recibe exactamente el conjunto  $S$  de escuelas, y  $x_{iS} = 0$  en caso contrario.

Finalmente, para cada  $k = 0, \dots, |E|$ , llamamos  $\gamma_{ik}$  al precio unitario por escuela que solicita la empresa  $i$  en caso de recibir exactamente  $k$  escuelas. Con estas definiciones, se puede plantear el siguiente modelo de programación lineal entera para el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i \in C} \sum_{S \subseteq C_i} \gamma_{i,|S|} |S| x_{iS} \\ \sum_{i \in C} \sum_{S \subseteq C_i: j \in S} x_{iS} &= 1 \quad \forall j \in E \end{aligned} \tag{1}$$

$$\sum_{S \subseteq C_i} x_{iS} = 1 \quad \forall i \in C \tag{2}$$

$$x_{iS} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in C, \forall S \subseteq C_i \tag{3}$$

La función objetivo solicita minimizar el costo total. Las restricciones (1) especifican que cada escuela debe ser asignada a exactamente una empresa, y las restricciones (2) imponen que cada empresa debe recibir exactamente un subconjunto de las escuelas por las que ofertó. La naturaleza de las variables se define en (3).

Este modelo explicita la naturaleza combinatorial de la licitación, dado que cada empresa finalmente recibirá un subconjunto de las escuelas por las que realizó ofertas, cobrando un precio unitario por escuela que depende de la cantidad de escuelas asignadas.

Sin embargo, desde el punto de vista computacional tiene el problema de que está compuesto por un número exponencial de variables (en el número de escuelas), con lo cual es prácticamente imposible de utilizar a menos que se implemente algún mecanismo de generación de columnas. Por otra parte, este modelo presenta un elevado nivel de simetrías: si por un subconjunto  $T \subseteq E$  de escuelas varias empresas realizaron ofertas y  $T$  se particiona en más de una empresa, entonces cualquier partición de  $T$  que mantenga el número de escuelas asignadas a cada empresa es una solución alternativa con la misma función objetivo. Esta propiedad es conocida como *simetría* en el contexto de la programación lineal entera, puede dificultar enormemente la resolución computacional del modelo involucrado, y ha sido altamente estudiada en la literatura (ver por ejemplo ([4, 7, 8])).

Por otra parte, este alto nivel de simetría conspira contra la pretensión de encontrar todos los óptimos alternativos del problema. En el contexto de una licitación, es crucial determinar todas las soluciones óptimas del modelo, para ponerlas en manos de los decisores a cargo de la licitación. Al haber tantas soluciones equivalentes, determinar si existe alguna solución óptima *esencialmente distinta* puede no ser una tarea sencilla con este modelo.

Por estos motivos, se diseñó el modelo que se presenta en la siguiente sección, que evita estas simetrías recurriendo a variables enteras generales.

### 3.2. Formulación polinomial

Este modelo surge de observar que si para un subconjunto de escuelas hay un mismo grupo de empresas interesadas, entonces no es relevante para la optimización determinar qué escuelas recibe cada empresa,

sino que alcanza con determinar *cuántas* escuelas del subconjunto son asignadas a cada firma. Llamamos *región* a un conjunto maximal de escuelas con estas características; es decir, un conjunto de escuelas para las cuales exactamente las mismas empresas realizaron ofertas, y tal que no está estrictamente contenido en otro conjunto que tiene esta misma propiedad. Estas regiones son una especie de “unidades de competencia”, en las cuales las mismas empresas se disputan las escuelas, que a su vez son indistinguibles para la decisión final.

Las regiones se arman entonces a posteriori en función de las escuelas que eligió cada empresa, y el modelo determina cuántas escuelas se asignan a cada empresa en cada una de las regiones que se generaron con las ofertas de las empresas (no necesariamente una región se asigna íntegra a una empresa). A posteriori de la resolución del modelo, si hubiera regiones cuyas escuelas fueron asignadas a más de una empresa, se asigna qué escuelas van para cada empresa en cada región. Este proceso se puede realizar de manera manual o de manera algorítmica, siguiendo criterios de proximidad geográfica. Es importante mencionar que esta asignación no tiene impacto en la función objetivo final.

#### 1. Parámetros del modelo:

- $C$ : conjunto de empresas;
- $R$ : conjunto de regiones, definido por la intersección de las ofertas de cada empresa;
- $E_r$ : conjunto de escuelas de la región  $r \in R$ ;
- $p_{ji}$ : 1 si la empresa  $i$  ofrece el servicio en la región  $j$ , 0 si no, para toda región  $j \in R$  y para toda empresa  $i \in C$ ;
- $T$ : conjunto de tramos tarifarios, en este caso particular se consensuó con el gobierno de la ciudad  $T = \{0-19, 20-39, \dots, 80-99, 100-149, 150-199, 200-299, \dots, 600-699, 700-709\}$ ;
- $\min_t$  y  $\max_t$ : los límites inferior y superior de escuelas para el tramo  $t \in T$ ;
- $c_{ti}$ : costo por escuela en el tramo  $t \in T$  ofrecido por la empresa  $i \in C$ , de modo tal que si una empresa recibe entre  $\min_t$  y  $\max_t$  escuelas, entonces cobrará un valor de \$  $c_{ti}$  por cada una.

## 2. Variables del modelo:

- $x_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $j \in R$ ,  $i \in C$ : cantidad de escuelas en la región  $j$  asignadas a la empresa  $i$ ;
- $y_{it} \in \{0, 1\}$ ,  $i \in C$ ,  $t \in T$ : variable que define si a la empresa  $i$  se le aplica el tramo tarifario  $t$ ;
- $z_{it} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $i \in C$ ,  $t \in T$ : cantidad de escuelas asignadas a la empresa  $i$  en el tramo tarifario  $t$ .

## 3. Formulación del modelo:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i \in C} \sum_{t \in T} c_{ti} z_{it} \\ \sum_{i \in C} x_{ji} &= |E_j| \quad \forall j \in R \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_{j \in R} x_{ji} \geq \min_t - M(1 - y_{it}) \quad \forall i \in C, \forall t \in T \quad (5)$$

$$\sum_{j \in R} x_{ji} \leq \max_t + M(1 - y_{it}) \quad \forall i \in C, \forall t \in T \quad (6)$$

$$\sum_{t \in T} y_{it} = 1 \quad \forall i \in C \quad (7)$$

$$z_{it} \geq \sum_{j \in R} x_{ji} - M(1 - y_{it}) \quad \forall i \in C, \forall t \in T \quad (8)$$

$$x_{ji} \leq p_{ji} |E_j| \quad \forall i \in C, \forall j \in R \quad (9)$$

$$x_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall j \in R, \forall i \in C \quad (10)$$

$$y_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in C, \forall t \in T \quad (11)$$

$$z_{it} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall i \in C, \forall t \in T \quad (12)$$

La función objetivo busca minimizar el costo total. Las restricciones (4) especifican que se deben cubrir todas las escuelas de cada región. Las restricciones (5) y (6) vinculan las variables  $x$  con las variables  $y$ , de modo tal que  $y_{it} = 1$  si la empresa  $i$  recibe un número de escuelas incluido dentro del tramo tarifario  $t$ . Para nuestro caso particular, tomamos  $M = 709$ . Las restricciones (7) especifican que cada empresa debe estar asociada a un único tramo tarifario. Las restricciones (8) fuerzan a que  $z_{it}$  sea a lo menos la cantidad total de escuelas asignadas a la empresa, siempre que  $y_{it} = 1$  (es decir, siempre que la empresa deba utilizar el tramo tarifario  $t$ ). Las restricciones (9) indican que no se pueden asignar a una empresa más escuelas que las existentes en una región, si es que

dicha empresa participa en esa región, y que no se puede asignar a una empresa una escuela de una región en la cual no participa. Finalmente, las restricciones (10)-(12) especifican la naturaleza de las variables. Es interesante mencionar que las variables  $z$  se pueden definir como reales no negativas (es decir,  $z_{it} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  para  $i \in C$  y  $t \in T$ ), ya que en la solución óptima van a resultar enteras por las restricciones del modelo.

Notar que el número de variables y de restricciones de esta formulación está acotada superiormente por el número de escuelas (dado que el número de regiones está acotada por el número de escuelas, si asumimos como sucede en la práctica que el número de empresas oferentes y el número de tramos tarifarios es mucho menor que el número de escuelas). Esta formulación es más eficiente que aquella más natural (y también polinomial en el número de escuelas) que se obtiene considerando a cada escuela en forma individual; es decir, con una variable binaria por cada escuela y por cada empresa, que determine si la escuela es asignada a la empresa o no. Además de estar compuesta por un número mayor de variables y restricciones, esta formulación tendría serios problemas de simetría, y esta última característica impactaría negativamente en el procedimiento considerado en la próxima sección.

### 3.3. Búsqueda de óptimos múltiples

Una característica interesante de los modelos de programación lineal entera aplicados a licitaciones es que no sólo se debe encontrar una solución óptima, sino que se deben poner a disposición de los decisores *todas* las soluciones óptimas, con el objetivo de realizar un proceso transparente y que no perjudique a ninguna empresa. En caso de que exista más de una solución óptima, la decisión sobre cómo asignar queda a criterio de los funcionarios responsables del proceso licitatorio.

Por ello, una vez obtenido el óptimo del modelo anterior, agregamos nuevas restricciones al modelo de modo que la solución obtenida deje de ser factible y no se pierda ninguna otra solución factible. Volvemos a correr entonces el modelo para ver si obtenemos el mismo valor de la función objetivo o uno mayor. Repetimos este procedimiento mientras sigamos obteniendo el mismo valor de la función objetivo original, generando así todos los óptimos alternativos.

Describimos a continuación las restricciones que deben ser agregadas a fin de excluir sólo al punto óptimo del conjunto de las soluciones factibles.

Sea  $x_{ji} = a_{ji}$  la solución óptima, para cada empresa  $i \in C$  y cada región  $j \in R$ . Para cada valor  $a_{ji} > 0$ , agregamos dos variables binarias  $w_{ji}$  y  $w'_{ji}$ , que tomarán valor 1 si  $x_{ji} < a_{ji}$  y  $x_{ji} > a_{ji}$ , respectivamente (y 0, en caso contrario). Para expresar esta situación y lograr que al menos una de las variables  $x$  cambie su valor en la nueva solución óptima, agregamos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_{ji} &\geq (a_{ji} + 1)w_{ji} && \forall i \in C, j \in R \text{ tales que } a_{ji} \neq 0 \\ 709 - x_{ji} &\geq (709 - (a_{ji} - 1))w'_{ji} && \forall i \in C, j \in R \text{ tales que } a_{ji} \neq 0 \\ \sum_{a_{ji} \neq 0} (w_{ji} + w'_{ji}) &\geq 1 \end{aligned}$$

El agregado de estas nuevas variables y restricciones potencialmente puede complicar los tiempos de resolución del modelo, en especial luego de varias iteraciones de eliminación de óptimos alternativos. Esto puede suceder si hay varias empresas que realizan ofertas similares, dando origen a muchas soluciones óptimas pero esencialmente distintas. Finalmente, es interesante mencionar que este proceso de eliminación de óptimos alternativos es posible porque el modelo determina cantidades de escuelas “equivalentes” a ser asignadas a cada empresa, y no contiene un nivel de detalle por escuela. Si éste fuera el caso, la cantidad de óptimos alternativos al modelo (pero correspondientes a soluciones esencialmente equivalentes) sería un número excesivamente grande para todo fin práctico.

---

## 4. Ofertas y resultados

---

Cuatro empresas participaron del proceso licitatorio. La empresa A ofertó por las 709 escuelas, lo que era previsible dado que era sabido que contaba con cobertura al momento de la licitación en toda la ciudad. La empresa B ofertó por 348 escuelas, abarcando toda la zona central de la ciudad. La empresa C ofertó por 99 escuelas en la zona norte de la ciudad, mientras que la empresa D ofertó por 97 escuelas también en el norte de Buenos Aires (la zona de mayores recursos de la ciudad y donde se esperaba que hubiera más competencia). En la Figura 3 pueden verse los sectores ofertados por cada empresa y en la Figura 4 se observan las



seis regiones (o “unidades de competencia”) que quedaron determinadas a posteriori de las ofertas. Notar que en la zona sur de la ciudad quedaron determinadas 248 escuelas donde sólo ofertó la empresa A. Es importante destacar que ni la empresa ni el gobierno de la ciudad sabían previo a las ofertas que esta empresa iba a ser la única en presentarse en la región sur de la ciudad.

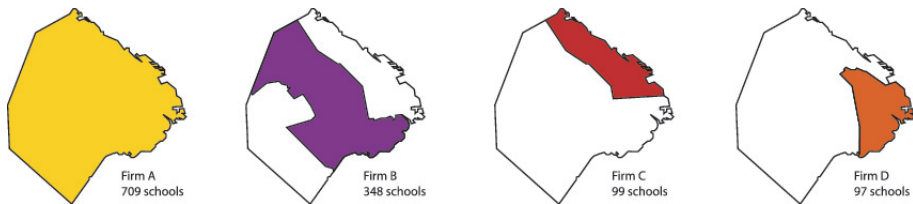


Figura 3: Ofertas de las 4 empresas.

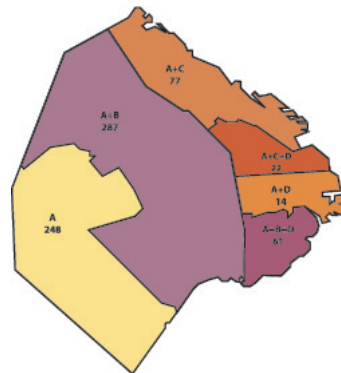


Figura 4: Regiones determinadas una vez conocidas las ofertas de cada empresa.

En la Figura 5 presentamos los valores ofertados por cada empresa para cada tramo tarifario. Cabe notar que el gobierno de la ciudad estimaba como un buen precio un valor del abono mensual cercano a los U\$S 250 y que las cuatro empresas ofertaron en su mejor precio valores en torno de esa cifra. La Figura 6 muestra estos mismos valores en forma gráfica, poniendo en evidencia que la empresa A armó su oferta con el propósito de entregar el servicio a las 709 escuelas.

El modelo arrojó como resultado que la empresa A se adjudica el servicio para las 709 escuelas a un costo total mensual para la ciudad de Buenos Aires de U\$S 166.501 (y este es el único óptimo del problema), lo

Interval	Firm A		Firm B		Firm C		Firm D	
	Discount	Unit price	Discount	Unit price	Discount	Unit price	Discount	Unit price
1 - 19	0%	\$ 1,174.18	0%	\$ 665.50	0%	\$ 497.92	5%	\$ 401.38
20 - 39	0%	\$ 1,174.18	18%	\$ 545.71	0%	\$ 497.92	10%	\$ 380.25
40 - 59	0%	\$ 1,174.18	28%	\$ 479.16	0%	\$ 497.92	20%	\$ 338.00
60 - 79	0%	\$ 1,174.18	32%	\$ 452.54	33%	\$ 268.88	25%	\$ 316.88
80 - 99	0%	\$ 1,174.18	40%	\$ 399.30	45.02%	\$ 222.52	33%	\$ 283.08
100 - 149	10%	\$ 1,056.76	50%	\$ 332.75	---	---	---	---
150 - 199	15%	\$ 998.05	59%	\$ 272.86	---	---	---	---
200 - 299	20%	\$ 939.34	61%	\$ 259.55	---	---	---	---
300 - 399	30%	\$ 821.92	70.5%	\$ 196.32	---	---	---	---
400 - 499	40%	\$ 704.51	---	---	---	---	---	---
500 - 599	50%	\$ 587.09	---	---	---	---	---	---
600 - 699	60%	\$ 469.67	---	---	---	---	---	---
700 - 709	80%	\$ 234.84	---	---	---	---	---	---

Figura 5: Ofertas de cada empresa para cada tramo tarifario.

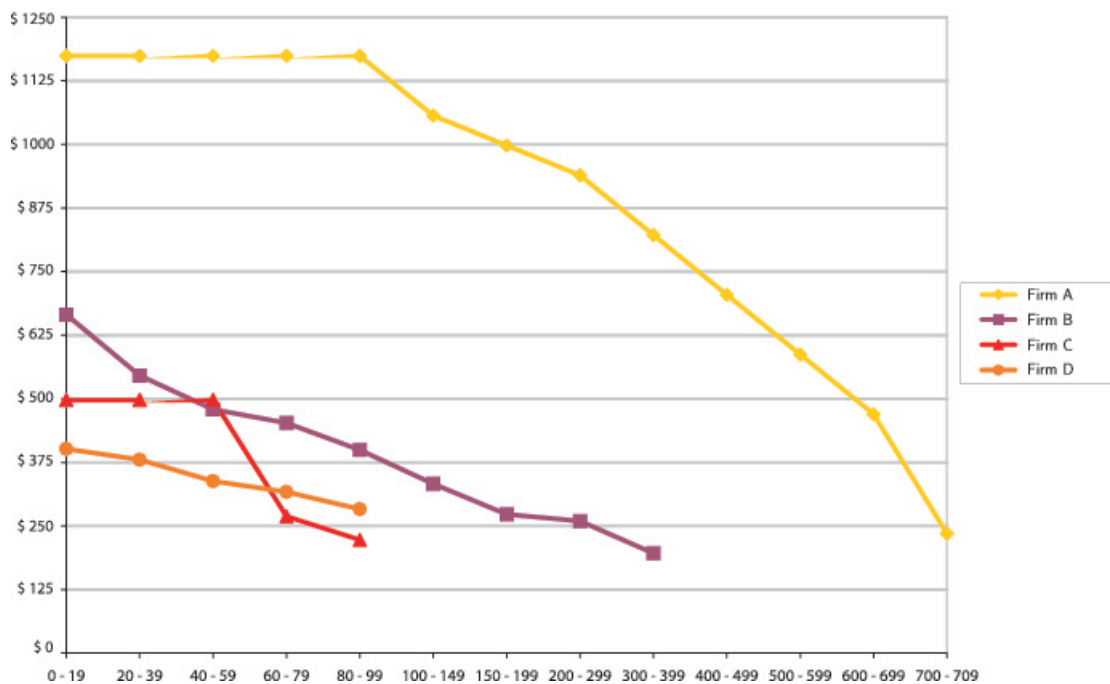


Figura 6: Gráfico de las ofertas de las 4 empresas.

que da una erogación total para los dos años de U\$\$ 3.996.024. El costo promedio mensual por escuela es de U\$\$ 234,84 (la oferta hecha por la empresa A para el último tramo tarifario).

---

## 5. Conclusiones

---

Consideramos que el principal aporte de este trabajo es el de proponer un nuevo formato de licitación, que llamamos *licitación multi-unidades logística*, que es útil para el caso en el que los ítems licitados tienen interés individual, se buscan descuentos por volumen, y tal que la provisión del servicio para un ítem depende de su ubicación geográfica y esta valoración es distinta para cada oferente. Estas consideraciones de orden logístico determinan “unidades de competencia” entre las empresas (llamadas también *regiones* en la Sección 3.2), cuya definición permite la formulación de un modelo de programación lineal entera compacto y que elimina las simetrías presentes en los modelos que identifican individualmente a cada ítem de la licitación.

Este tipo de licitación es interesante para el caso en el cual los costos marginales de la provisión del servicio son bajos o nulos, y estas consideraciones típicamente se originan cuando la provisión del servicio ofertado depende de tecnología instalada (que denominamos “consideraciones logísticas” en este trabajo). En el caso particular de la provisión del servicio de Internet, una empresa que ya tiene tecnología instalada en las inmediaciones de una escuela puede proporcionar el servicio con un costo de instalación mínimo, correspondiente a las horas de trabajo del técnico que realiza la instalación (y que a los efectos del precio total, puede considerarse prácticamente nulo). Por el contrario, si la empresa no tiene tecnología instalada cercana a la escuela, el costo de proveer el servicio es muy alto, y en ese caso el precio por el servicio también lo será debido a que debe incluir los costos de instalación de tecnología. En este sentido, los costos de la provisión del servicio son casi en su totalidad “costos hundidos”, y debido a estas consideraciones la definición de las escuelas por las cuales cada empresa está interesada en proveerle el servicio pasa a ser un componente crucial de la licitación. El formato de licitación propuesto en este trabajo es útil para aprovechar estas características de la estructura de costos de las empresas participantes.

Como se mencionó en la Sección 2.2, este formato impide que un oferente ponga un precio alto donde hay poca competencia y un precio más bajo donde hay más competencia, a causa de los precios unitarios iguales para todos los ítems. Por otra parte, es difícil que dos empresas realicen intentos de colusión. Finalmente, el formato de la licitación incluye descuentos por volumen, y a pesar de que se trata de una licitación con características combinatoriales, no se definen conjuntos de ítems (en nuestro contexto, las “unidades territoriales”) de antemano, sino que los propios oferentes definen los conjuntos de ítems por los cuales están interesados.

En cuanto al potencial ahorro que este modelo de licitación le generó a la ciudad de Buenos Aires en contraposición a una licitación multi-unidades estándar, podemos hacer el siguiente análisis. Supongamos de manera optimista que en todas las escuelas donde hubo más de un postulante se hubiera podido conseguir el mejor precio ofrecido (U\$S 196,32, el mejor precio ofertado por la empresa B), y que en las escuelas donde la empresa A terminó siendo monopólica, esta empresa hubiera ofertado su segundo mejor precio (U\$S 469,67). En ese caso el costo total mensual para la ciudad hubiera sido de U\$S 206.982,83, lo que significa en base a esta estimación que se obtuvo un 20 % de ahorro para la ciudad. Este 20 % llevado a los dos años de contrato implica un ahorro global cercano a U\$S 800.000.

Es interesante analizar cuál habría sido el costo para la ciudad si hubiera sido posible contratar dentro de cada región a la empresa con el mejor precio final, correspondiente a su último tramo tarifario (aunque no se correspondiera con la cantidad de escuelas asignadas a la empresa). Por ejemplo, en la región determinada por las empresas A y B, se contrataría a la empresa B por su mejor precio, que es de U\$S 196,32. Esta asignación no es realista porque cada empresa ofertó su mejor precio por un número alto de escuelas y puede no estar recibiendo esa cantidad en este caso, pero proporciona una cota inferior muy optimista del precio total que podría haber pagado la ciudad. Si se realizara esta asignación, el precio total por mes abonado por la ciudad sería de U\$S 151.704,44, que es sólo 8.8 % más bajo que el precio finalmente obtenido por la ciudad. Este porcentaje es relativamente bajo, y da una idea de que el diseño de la licitación generó una alta competencia entre las empresas participantes.

Dadas las ofertas recibidas, la solución final asigna todas las escuelas

al mismo oferente (la empresa A, en nuestro caso) por un precio unitario de U\$S 234.84. Es interesante analizar cuál hubiera sido el precio unitario más alto que podía haber ofertado la empresa A en el último tramo tarifario, de modo tal que siguiera recibiendo la provisión del servicio para todas las escuelas. Este valor puede calcularse corriendo el modelo de la Sección 3.2 con diferentes valores para el último tramo tarifario de la empresa A (realizamos una búsqueda binaria sobre el rango de valores posibles para dicho precio, hasta obtener el valor límite buscado). En este caso, el valor máximo resulta de U\$S 401.38, es decir un 71 % por encima del valor ofertado. Este valor sugiere que la licitación fue efectivamente competitiva y que no hubo colusión entre los oferentes.

**Agradecimientos:** El presente trabajo fue parcialmente financiado por los proyectos ANPCyT PICT-2012-1324 (Argentina), CONICET PIP 112-200901-00178 (Argentina), UBACyT 20020100100980 (Argentina), y por el Instituto Milenio “Sistemas Complejos de Ingeniería” (Chile). El tercer autor es parcialmente financiado por el proyecto FONDECyT 1110797 (Chile). Los autores quieren agradecer a la Agencia en Sistemas de Información (ASI) del gobierno de la ciudad de Buenos Aires, responsable de la organización de la licitación, y en particular a Julián Dunayevich y Eduardo Terada, funcionarios de la ASI durante la concreción de este proyecto, por su colaboración para la realización de este proyecto. También agradecen a los dos revisores anónimos por sus sugerencias que permitieron mejorar la versión final del trabajo.

## Referencias

- [1] P. Cramton, Y. Shoham, and R. Steinberg, *Combinatorial Auctions*, MIT Press, 2006.
- [2] R. Epstein, L. Henríquez, J. Catalán, G. Weintraub, and C. Martínez, A Combinatorial Auction Improves School Meals in Chile, *Interfaces* **32(6)** (2002), 1–14.
- [3] S. Glaister, and M. Beesley, Bidding for Tendered Bus routes in London, *Transportation Planning and Technology* **15** (1991), 349–366.

- [4] R.G. Jeroslow, Trivial integer programs unsolvable by branch-and-bound, *Mathematical Programming* **6** (1974), 104-109.
- [5] D. Kennedy, London bus tendering: an overview, *Transport Reviews* **15(3)** (1995), 253–264.
- [6] A. Kwasnica, and K. Sherstyuk, Multi-Unit Auctions, manuscript (2012), ([http://www2.hawaii.edu/~katyas/pdf/Kwasnica\\_Sherstyuk\\_multiunit\\_101912\\_wp.pdf](http://www2.hawaii.edu/~katyas/pdf/Kwasnica_Sherstyuk_multiunit_101912_wp.pdf)).
- [7] F. Margot, Symmetry in Integer Linear Programming, *in 50 Years of Integer Programming*, Springer (2009).
- [8] P. A. Rey, Eliminating Redundant Solutions of Some Symmetric Combinatorial Integer Programs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **18** (2004), 201–206.