

三角形 LP テストを用いた区分的線形抵抗回路の 全解探索法に関する研究

Finding All Solutions of Piecewise-Linear Resistive Circuits Using Triangular LP Test

電気電子情報通信工学専攻 高原 弘樹
Hiroki TAKAHARA

1. まえがき

区分的線形抵抗回路のすべての解を求める効率的なアルゴリズムを確立することは、信頼性の高い回路設計を行う上で重要な課題となる。この問題に対してはこれまでに様々なアルゴリズムが提案されている [1]~[7]。これらのアルゴリズムでは、「与えられた領域に解が存在しないことを判定する強力な解の非存在判定テスト」を導入することが、計算効率を決定する最大要因となる。

そのようなテストとして LP テストが知られている [3]~[7]。LP テストとは、区分的線形関数を多角形で囲むことにより区分的線形方程式を線形計画問題に置き換え、それに単体法あるいは双対単体法を適用することにより、与えられた領域における解の非存在を判定する方法である。

本論文では、区分的線形関数が局所的に単調凸である場合を対象に、長方形と三角形を併用する LP テストを用いた区分的線形抵抗回路のすべての解を求める効率的なアルゴリズムを提案する。この方法は、アルゴリズムの初期の段階では長方形を使い、関数が単調凸になれば三角形に切り替える方法である。本論文では、三角形を少ない制約式で表現するため斜交座標系を用いるというアイデアと、アルゴリズム全体で双対単体法を継続して適用するというアイデアを導入することにより、LP テストはより強力であり効率的となることを示す。

2. 基本となるアルゴリズム

n 個の区分的線形抵抗を含む直流回路は、一般に次のような形の区分的線形方程式で記述することができる。

$$f(x) \triangleq Pg(x) + Qx - r = 0 \quad (1)$$

ただし、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ は n 次元変数ベクトル、 P, Q は $n \times n$ 定数行列、 r は n 次元定数ベクトル、 $g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)]^T$ は区分的線形関数である。本論文では、 n 次元直方体で与えられた初期領域 $D \in \mathbb{R}$ に存在する式 (1) のすべての解を求めること考える。

以下、 $f(x)$ が線形となるような領域を線形領域と呼び、複数の線形領域からなる直方体領域を単に領域と呼ぶことにする。簡単のため、区分的線形関数 $g_i(x_i)$ はすべて K 本の線分からなるものとする。

LP テストアルゴリズムはいわゆる分枝限定法の一種で、初期領域 D を各変数方向に再帰的に 2 分割しながら、解の存在しえない領域を除去していくことにより、式 (1) のすべての解を効率よく求める方法である。

次のような領域 X を考える。

$$X = ([a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n])^T \quad (2)$$

定義域 $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) における区分的線形関数 $g_i(x_i)$ の最小値と最大値をそれぞれ c_i, d_i とする。ここで式 (1) を線形等式と線形不等式で表すため、補助変数 y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を導入し、 $y_i = g_i(x_i)$ とおく。このとき、 $a_i \leq x_i \leq b_i$ ならば $c_i \leq y_i \leq d_i$ となる。そしてこれらの線形等式・線形不等式を制約条件とする次のような線形計画問題を考える。

最大化：任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned} Py + Qx - r &= 0 \\ a &\leq x \leq b \\ c &\leq y \leq d \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ とする。幾何学的には、式 (3) の不等式制約は図 1 に示すように区分的線形関数 $g_i(x_i)$ を長方形で囲むことを意味する。

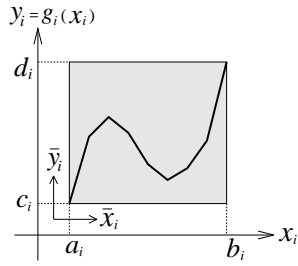


図1 長方形を用いたLPテスト

明らかに式(1)の領域 X 内の解は、 $y_i = g_i(x_i)$ とおくことにより式(3)の制約条件を満足する。したがってもし式(3)に実行可能領域が存在しなければ、 X に式(1)の解は存在しないことになる。

式(3)の実行可能領域が存在するか否かは、式(3)に単体法を適用することにより確認できる。もし存在しなければ、領域 X に式(1)の解は存在しないので、それを除去することができる。式(3)に単体法を適用する際、まず変数変換 $\bar{x}_i = x_i - a_i$ 、 $\bar{y}_i = y_i - c_i$ により長方形を二つの不等式制約 $\bar{x}_i \leq b_i - a_i$ 、 $\bar{y}_i \leq d_i - c_i$ と非負制約 $\bar{x}_i \geq 0$ 、 $\bar{y}_i \geq 0$ で表し(図1の左下の直交座標系 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) を参照)、更にスラック変数 $\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を導入して、式(3)を標準形

最大化：任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned} P\bar{y} + Q\bar{x} - \bar{r} &= 0 \\ \bar{x}_i + \bar{\lambda}_i &= b_i - a_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{y}_i + \bar{\mu}_i &= d_i - c_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{x}_i \geq 0, \bar{y}_i &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{\lambda}_i \geq 0, \bar{\mu}_i &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

に帰着させる。ただし $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ 、 $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)^T$ 、 $\bar{r} = r - P(c_1, c_2, \dots, c_n)^T - Q(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ である。

一般にLPテストアルゴリズムでは、非常に多くの領域上で単体法を適用する。もし単体法を常にフェーズIの最初から実行すると、アルゴリズム全体で要する総ピボット演算回数は極めて莫大なものとなる。文献[6]では、LPテストに双対単体法を導入することにより、1領域あたり2,3回程度のピボット演算でLPテストを実行できることが示されている。この方法を用いると、LPテストは強力であると同時に効率的な解の非存在判定法となる。

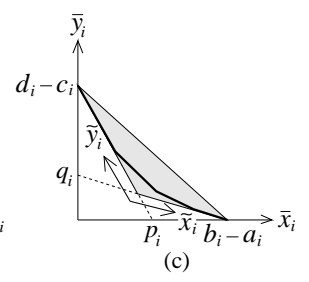
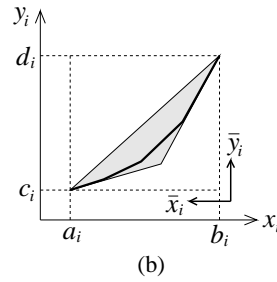
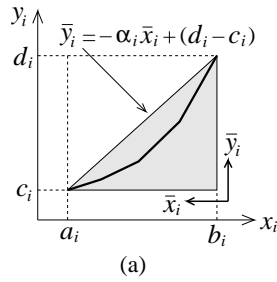


図2 三角形を用いたLPテスト

3. 三角形を用いたLPテスト

一般にLPテストは区分的線形関数を囲む多角形の面積が小さいほど領域除去能力が強くなる。バイポーラトランジスタの指数関数のように $g_i(x_i)$ が単調凸関数の場合、三角形で囲むことによりLPテストをより強力なものにすることができる。文献[5]では、図2(a)に示すような直角三角形を用いるLPテストが最も効率的であることが示されている。これは、直角三角形が変数変換

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= b_i - x_i \\ \bar{y}_i &= y_i - c_i \end{aligned} \quad (5)$$

により、一つの不等式制約

$$\bar{y}_i \leq -\alpha_i \bar{x}_i + (d_i - c_i) \quad \text{ただし} \quad \alpha_i \triangleq \frac{d_i - c_i}{b_i - a_i} \quad (6)$$

と二つの非負制約 $\bar{x}_i \geq 0$ 、 $\bar{y}_i \geq 0$ で表すことができるからである(図2(a)の右下の直交座標系 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) を参照)。すなわち、LPテストはより強力になると同時に、より効率的となる。

本論文では、LPテストをより強力なものにするため、図2(b)のような最も小さい三角形を用いることにする。文献[5]では、このような三角形を用いることによりLPテストは強力になるが、制約式が増えるため効率的ではないことが示されている。この問題を克服するため、本論文では図2(c)に示すような斜交座標系 $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ を用いるアイデアを提案する。すなわち、このような斜交座標系では、最小三角形は変数変換

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{p_i}{d_i - c_i} \\ \frac{q_i}{b_i - a_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

により一つの不等式制約

$$\tilde{y}_i \leq -\alpha_i \tilde{x}_i + (d_i - c_i - q_i) \quad \text{ただし} \quad \alpha_i \triangleq \frac{d_i - c_i - q_i}{b_i - a_i - p_i} \quad (8)$$

と二つの非負制約 $\tilde{x}_i \geq 0$ 、 $\tilde{y}_i \geq 0$ で表すことができる。

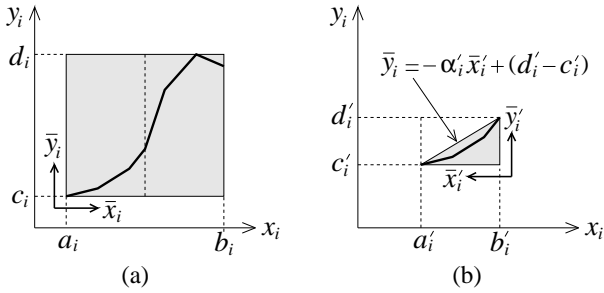


図3 関数が単調凸になればLPテストを長方形から三角形に切り替える。

4. 提案手法

本論文では、アルゴリズムの初期の段階では長方形を使い、関数が単調凸になれば最小三角形に切り替えるLPテストアルゴリズムを提案する。この方法を効率よく実行するためには、アルゴリズム全体で双対単体法を継続的に実行するための変数変換法を確立する必要がある。

4.1 長方形から三角形への変数変換

いま、領域 X に対する「長方形と双対単体法を用いたLPテスト」が完了し、式(4)に対する最適タブローが得られたものとする。ここで図3に示すように、次の領域 $X' = ([a'_1, b'_1], \dots, [a'_n, b'_n])^T$ でLPテストを長方形から直角三角形に切り換えるものとする。この場合、線形計画問題次のようになる。

最大化：任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned} P\bar{y} - Q\bar{x} - \bar{r} &= 0 \\ \bar{y}_i + \bar{\mu}_i &= -\alpha_i \bar{x}_i + (d_i - c_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{x}_i \geq 0, \bar{y}_i \geq 0, \bar{\mu}_i \geq 0, \quad i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

式(4)では変数変換 $\bar{x}_i = x_i - a_i$, $\bar{y}_i = y_i - c_i$ とスラック変数の導入 $\bar{x}_i + \bar{\lambda}_i = b_i - a_i$, $\bar{y}_i + \bar{\mu}_i = d_i - c_i$ が行われる。また式(9)では、変数変換 $\bar{x}'_i = b'_i - x_i$, $\bar{y}'_i = y_i - c'_i$ とスラック変数の導入 $\bar{y}'_i + \bar{\mu}'_i = -\alpha'_i \bar{x}'_i + (d'_i - c'_i)$ が行われる。これらの式から、次のような変数変換式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= -\bar{x}'_i + (b'_i - a_i) \\ \bar{y}_i &= \bar{y}'_i + (c'_i - c_i) \\ \bar{\mu}_i &= \bar{\mu}'_i + \alpha'_i \bar{x}'_i + (d_i - d'_i) \end{aligned} \quad (10)$$

式(4)の最適タブローに式(10)を代入することにより、式(9)の双対実行可能タブローを得ることができる。こ

のとき式(7)の座標変換を適用すると、図2(c)に示すような最小三角形の双対実行可能タブローを得ることができる。このタブローからスタートして双対単体法を行うことにより、領域 X' に対する「最小三角形を用いたLPテスト」を行うことができる。

ここで、式(7)の座標変換を適用する前に、式(4)の最適タブローから冗長な情報を消去する。式(10)より、式(4)の制約条件である $\bar{y}_i + \bar{\mu}_i = d_i - c_i$ は、式(9)の制約条件である $\bar{y}'_i + \bar{\mu}'_i = -\alpha'_i \bar{x}'_i + (d'_i - c'_i)$ に変換される。あとはタブローから $\bar{x}_i + \bar{\lambda}_i = b_i - a_i$ の情報を消去することにより、冗長な行を含まない適正なサイズのタブローを得ることができる。

式(4)で変数 $\bar{\lambda}_i$ は制約式 $\bar{x}_i + \bar{\lambda}_i = b_i - a_i$ にしか現れないので、長方形LPテストの終了時に $\bar{\lambda}_i$ が基底になっている場合は、タブローの $\bar{\lambda}_i$ 行を削除することによりこの制約式を消去できる。また制約式 $\bar{x}_i + \bar{\lambda}_i = b_i - a_i$ より、 \bar{x}_i と $\bar{\lambda}_i$ は同時に非基底となることはない。したがってあとは \bar{x}_i が基底、 $\bar{\lambda}_i$ が非基底である場合を考えればよい。この場合、タブローの \bar{x}_i 行 $\bar{\lambda}_i$ 列の要素をピボットとしてピボット演算を行えば $\bar{\lambda}_i$ は基底になるので、ピボット演算を行ってから $\bar{\lambda}_i$ 行を削除すればよい。

4.2 三角形から三角形への変数変換

いま、領域 X に対して最小三角形を用いたLPテストが完了し、最適タブローが得られたものとする。ここで、次の領域 X' に対して最小三角形を用いたLPテストを行うものとする。このとき、領域 X における最小三角形から領域 X' における最小三角形への変換を次のような三段階：(i) 領域 X における最小三角形から直角三角形、(ii) 領域 X における直角三角形から領域 X' における直角三角形、(iii) 領域 X' における直角三角形から最小三角形、で行うことを考える。

始めに、式(7)を最適タブローに代入して変換(i)を行う。次に、変数変換式

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \bar{x}'_i + (b_i - b'_i) \\ \bar{y}_i &= \bar{y}'_i - (c_i - c'_i) \\ \bar{\mu}_i &= \bar{\mu}'_i - (\alpha_i - \alpha'_i) \bar{x}'_i - \alpha_i (b_i - b'_i) + (d_i - d'_i) \end{aligned} \quad (11)$$

をタブローに代入して変換(ii)を行う。式(11)は式(5), $\bar{x}'_i = b'_i - x'_i$, $\bar{y}'_i = y'_i - c'_i$, $\bar{y}_i + \bar{\mu}_i = -\alpha_i \bar{x}_i + (d_i - c_i)$, $\bar{y}'_i + \bar{\mu}'_i = -\alpha'_i \bar{x}'_i + (d'_i - c'_i)$ から得られる[7]。最後に、式(7)の逆変換をタブローに代入して変換(iii)を行う。

表 1 例 1 の計算結果

	探索領域数	総ピボット回数	計算時間 (秒)
長方形+単体法 [5]	3064701	692429203	21880
直角三角形+単体法 [5]	1633983	260616315	6294
長方形+双対単体法 [6]	3064701	14027500	602
直角三角形+双対単体法 [7]	1633983	5356915	148
提案手法 (最小三角形+双対単体法)	63801	360998	8

5. 数値例

本章では数値実験結果をいくつか示し、提案したアルゴリズムの有効性を検証する。

例 1: 文献 [5] の Example 3 で扱われている区分的線形方程式を考える。ただし、 $n = 100$, $K = 100$ とする。この問題に対し、従来法と提案手法を適用したときの計算結果を表 1 に示す。表 1 より、提案手法が最も効率的であることがわかる。

例 2: 文献 [5] の図 5~8 に示されている 4 種類のトランジスタ回路に $K = 100$ として提案手法を適用した。このとき提案手法はすべての例題で従来法よりも効率的であった。

6. むすび

本論文では、区分的線形抵抗回路のすべての解を求めるための効率的なアルゴリズムを提案した。斜交座標系を用いるというアイデアと、アルゴリズム全体で双対単体法を継続して適用するというアイデアを導入することにより、LP テストはより強力でより効率的となることが示された。

文 献

- [1] L.O. Chua and R.L.P. Ying, "Finding all solutions of piecewise-linear circuits," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.10, no.3, pp.201–229, July 1982.
- [2] K. Yamamura and M. Ochiai, "An efficient algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.39, no.3, pp.213–221, March 1992.
- [3] K. Yamamura, H. Kawata, and A. Tokue, "Interval solution of nonlinear equations using linear programming," *BIT Numerical Mathematics*, vol.38, no.1, pp.186–199, March 1998.
- [4] K. Yamamura and T. Ohshima, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.45, no.4, pp.434–445, April 1998.

- [5] K. Yamamura and K. Yomogita, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using an LP test," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.47, no.7, pp.1115–1120, July 2000.
- [6] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the dual simplex method," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.30, no.6, pp.567–586, Nov. 2002.
- [7] K. Yamamura and A. Machida, "An efficient algorithm for finding all DC solutions of piecewise-linear circuits," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.36, no.8, pp.989–1000, Nov. 2008.

研究業績

- [1] K. Yamamura, R. Watanabe, and H. Takahara, "Complete analysis of piecewise-linear resistive circuits using integer programming," *Proc. 2016 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks*, pp.24–27, Tokushima, Japan, Dec. 2016.
- [2] 高原弘樹, 渡辺涼太, 山村清隆, "整数計画ソルバーを用いた区分的線形抵抗回路の完全解析," 第 30 回 回路とシステムワークショップ論文集, pp.243–248, May 2017.
- [3] K. Yamamura and H. Takahara, "Complete analysis of piecewise-linear resistive circuits using integer programming," *Proc. 23rd IEEE European Conference on Circuit Theory and Design*, Catania, Italy, Sept. 2017.
- [4] 渡辺涼太, 高原弘樹, 山村清隆, "整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析," 電子情報通信学会技術研究報告, NLP2017-51, pp.11–16 Oct. 2017.
- [5] K. Yamamura, H. Takahara, and Y. Takane, "Finding all solution sets of piecewise-linear interval equations using integer programming," *Proc. 2017 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks*, pp.78–81, Tokushima, Japan, Dec. 2017.
- [6] K. Yamamura and H. Takahara, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using triangular LP test," *Proc. 2018 IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems*, pp.243–246, Chengdu, China, Oct. 2018.
- [7] K. Yamamura and H. Takahara, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using rectangular and triangular LP tests," *Proc. 2018 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks*, pp.62–65, Tokushima, Japan, Dec. 2017.