Il *Debate* metamatematico: un nuovo approccio orientato alla metacognizione per la didattica della matematica
Metamathematical Debate: a new metacognition-oriented approach to mathematics education

Matteo Giangrande
Università "G. d'Annunzio" di Chieti-Pescara - matteo.giangrande@sn-di.it
Amedeo Matteucci
Liceo classico "G. B. Vico" – Chieti - amedeo.matteucci@sn-di.it

ABSTRACT
This paper aims to illustrate the metamathematical debate (MMD) model as a new approach to metacognition-oriented mathematics teaching.
Firstly, after having defined and characterized the debate methodology, we clarify the main questions that its application to mathematics as a discipline raises, such as the rôle of argumentation and dialectical interaction, and the necessity of *lato sensu* metamathematical questions, which allow to discuss *how* and *why* we do *what* we do in our mathematics class.
Secondly, we propose three possible approaches to metamathematical debate, which we call 'worst error', 'comparative analysis', 'best explanation'. Such approaches address some well-known issues of mathematics teaching, namely: overcoming the correct answer compromise; refining fundamental skills of mathematical literacy and competence; also, they enquire into the explanatory capacity of a proof.
Finally, after having shown the feasibility and functionality of this social-constructivist model, illustrating some peculiarities of the format and providing concrete examples of implementation, we observe that metamathematical debate allows, better than other strategies, to renegotiate the didactic contract towards a-didactical situations suitable for teaching productive mathematical skills, such as problem-solving and argumentation, whose learning is influenced by metacognitive, linguistic and affective factors.

L'articolo vuole illustrare il modello del *debate* metamatematico come nuovo approccio, orientato alla metacognizione, per l'insegnamento della metamatematica.
Innanzi tutto, dopo aver definito e caratterizzato la metodologia del *debate*, chiariamo i problemi principali che la sua applicazione alla matematica come disciplina solleva, quali il ruolo dell'argomentazione e della interazione dialettica, e la necessità di questioni metamatematiche *lato sensu*, che consentono di discutere come e perché facciamo ciò che facciamo nelle nostre classi di matematica.

* L'articolo è il frutto di una progettazione condivisa. Matteo Giangrande è autore dei paragrafi 1, 3 (prima metà), 5, 7. Amedeo Matteucci è autore dei paragrafi 2, 3 (seconda metà), 4, 6.

Formazione & Insegnamento XIX – 3 – 2021
Codice ISSN 2279-7505 (on line) © Pensa MultiMedia Editore
Codice doi: 10.7346/-fei-XIX-03-21_20

In secondo luogo, proponiamo tre possibili approcci al *debate* metamatematico, che chiamiamo ‘errore peggiore’, ‘analisi comparativa’, ‘spiegazione migliore’. Tali approcci affrontano alcune questioni ben note della didattica della matematica: ossia, il superamento del compromesso delle risposte corrette; migliorare le competenze e l’alfabetizzazione matematica di base; inoltre, indagano sulla capacità esplicativa di una prova.
Infine, dopo aver mostrato la fattibilità e la funzionalità di questo modello socio-costruttivista, illustrando alcune peculiarità del format e fornendo esempi concreti di attuazione, osserviamo che il *debate* metamatematico consente, meglio di altre strategie, di rinegoziare il contratto didattico verso situazioni a-didattiche adatte all’insegnamento di abilità matematiche produttive, come la risoluzione di problemi e l’argomentazione, il cui apprendimento è influenzato da fattori metacognitivi, linguistici e affettivi.

KEYWORDS
Mathematics Education; Metacognition; Teaching Methodology; Argumentation; Problem-solving.
Didattica della matematica; Metacognizione; Metodologie didattiche; Argomentazione; Problem-solving.

1. La metodologia didattica del *debate*

Il *debate* ha molti volti. Caratterizzare i molteplici modi d’essere del *debate* permette di capire in che senso può essere considerato anche una metodologia didattica applicabile a singole discipline.

Primo: v’è una differenza essenziale, a livello pragmatico, tra il *debate* e tutte le altre tipologie di *argumentative dialogue*, tra cui il dibattito (Walton, 1989, pp. 3-4). Queste presuppongono che i partecipanti esibiscano, o dissimulino, le loro visioni personali sulla questione. Al contrario, nel *debate* le visioni personali sulla questione disputata non contano, perché la posizione da difendere è assegnata alle parti da un soggetto *super partes*. Non solo il *debater* non è chiamato ad esibire un proprio punto di vista, ma nemmeno a dissimularlo: in quanto obbligato a esibire e seguire quella che ritiene essere la strategia argomentativa più convincente per difendere la specifica posizione assegnatagli, il *debater* è esentato dalla necessità, implicita in tutte le tipologie di dialogo, di decidere se e come, in base a considerazioni di opportunità, dissimulare i *propri* pensieri. Il *debate* sublima lo scambio argomentativo da un piano *personale* ad uno più propriamente *dialettico*. Questa caratteristica ci pare tanto dirimente da giustificare un netto distinguo tanto dal dialogo quanto dal dibattito: il *debate*, sebbene *appaia* come un dibattito, non lo è propriamente.

Secondo: in forza di quanto ora detto, il *debate* è propriamente un gioco di ruolo, competitivo, il cui esito dipende da abilità mentali e di *team working*. Alcune sue caratteristiche:

a) È un’attività fine a se stessa, rifugio dove evadere dalla dinamica quotidiana di attività strumentali; è disegnato per dilettare i partecipanti e non per avere effetti nel mondo reale (il che non implica che non possa averne, ovviamente).
b) Il diletto muove dall’attività stessa e non dalla fruizione dei suoi risultati.

c) Non necessita di un pubblico di spettatori, benché presupponga una giuria. Allestire una rappresentazione scenica di un dibattito non è un *debate*.
d) Ciò che caratterizza il *debate* come gioco è il fatto di essere *costituito* da regole. Non si tratta qui semplicemente di regolare forme di comportamento preesistenti; si tratta di crearne di nuove: «Le regole degli scacchi [...] creano la possibilità stessa di giocare a scacchi» (Searle, 1976). Il gioco del *debate* è costituito quando il suo protocollo viene accettato. La possibilità di seguitare il gioco persino nel caso in cui i *debater* violino intenzionalmente (mettendo nel conto delle penalità) alcune sue regole evidenzia come fondamento del gioco sia la promessa di rispettare lo spirito delle norme.

Terzo: quando il gioco competitivo del *debate*, costituito da regole, determinato da abilità mentali e di *team working*, si dota di una organizzazione stabile e accettata e si connota a livello agonistico, lo si può considerare come sport mentale di squadra. È questo il volto del *debate* in auge non solo globalmente da alcuni decenni — dagli Stati Uniti alla Cina, da Singapore ai paesi dell'est Europa — ma anche oggi nel contesto italiano: è praticato per lo più a livello agonistico. Tale *mind sport* sembra coinvolgere esclusivamente studenti di scuola superiore e universitari. Due tratti contraddistinguono poi le competizioni: utilizzare determinati protocolli dibattimentali ampiamente accettati; disputare questioni non derivanti da discipline scolastiche.

Poste queste premesse, il nostro proposito è spiegare perché il *debate* può anche essere considerato una metodologia didattica applicabile a singole discipline di studio. Si racconta che il *debate* aiuti a raffinare alcune delle cosiddette *soft skills* (pensiero critico, abilità di selezione di informazioni, comunicazione efficace, *team working*) e ad acquisire contezza della complessità contradditoria di fenomeni e processi. Ciò, peraltro, sembra essere empiricamente attestato (Akerman & Neale, 2011) e v'è ampio consenso tra gli educatori che testimoniano la valenza formativa della pratica e la sua versatilità come strumento valutativo: il *debate* sembra configurarsi come la metodologia didattica che più di altre agevola un «*embedded* approach to social-emotional development at school» (Scheerens, van der Werf, & de Boer, 2020, p. 237).

I decisori riconoscono nella tecnica del ponderare i *pro et contra* di una questione un efficace metodo di *decision-making*; gli studiosi riconoscono nel dibattito interno alla propria comunità un indispensabile strumento epistemico ed euristico. In breve, *strumentalizzato* in senso non agonistico, il *debate* può essere considerato un *metodo*.

Si distinguono poi le questioni riguardanti azioni reali, nelle quali il tempismo gioca un ruolo decisivo, e per le quali il *debate* rappresenta una tecnica di *decision-making*, dalle questioni che riguardano speculazioni ipotetiche, interpretazioni di fenomeni e processi: tenuto conto di questa distinzione, il *debate* può essere non solo uno strumento epistemico ed euristico per gli studiosi ma anche una metodologia didattica per gli insegnanti.

Quando si tratta di *debate* come metodologia didattica non ci si dovrebbe riferire meramente alla valenza educativa del gioco, bensì alla sua applicazione per la trasmissione di particolari conoscenze e lo stimolo allo sviluppo di determinate disposizioni epistemiche, intellettuali, ma anche caratteriali.

Assumendo che il *debate* inteso puramente come sport agonistico non possa essere la matrice per il *debate* come metodologia didattica *disciplinare*, ravvisiamo nella formulazione della questione da dibattere e nella strutturazione del protocollo, inclusa la valutazione, i momenti dirimenti sui quali un insegnante deve focalizzarsi per impostare attività dibattimentali proficue per la disciplina. In questo articolo, applichiamo tale ipotesi alla matematica insegnata nella scuola superiore e affronteremo, nei capitoli 4 e 5, rispettivamente il problema della questione e del protocollo, riservando al tema della valutazione ulteriori approfondimenti. Infine, concluderemo con alcune osservazioni sull'uso del *debate* e la metacognizione.

2. Impossibilità di dibattere mozioni costituite da enunciati matematici

Illustrato in che senso il *debate* possa essere utilizzato nell'insegnamento di singole discipline di studio e prima di discuterne le modalità applicative per la matematica, è opportuno sgomberare il campo da due potenziali equivoci che, se non chiariti e risolti, potrebbero bloccare sul nascere o, peggio, fuorviare qualsiasi tentativo di *debate* entro questa disciplina. Benché il desiderio di aumentare la motivazione degli studenti (Atanasova-Pacemska, 2017) abbia già spinto alcuni sperimentatori a «incorporare brevi *debate* nelle quotidiane lezioni di matematica» (Luzniak, 2020), riteniamo che il mancato riconoscimento di questi due equivoci e la mancanza di una fondazione espressamente metacognitiva per il *debate* disciplinare conducano questi tentativi su binari morti.

Primo equivoco: "la mozione di un *debate* in matematica dev'essere un enunciato matematico".

Per mostrare il carattere autocontraddittorio di questa affermazione esaminiamo come Freeley e Steinberg caratterizzano la *condicio sine qua non* per avere un *debate*: «Debate is a means of settling differences, so there must be a difference of opinion or a conflict of interest before there can be a debate. If everyone is in agreement on a fact or value or policy, there is no need for debate; the matter can be settled by unanimous consent. Thus, for example, it would be pointless to attempt to debate "Resolved: That two plus two equals four," because there is simply no controversy about this statement. *Controversy is an essential prerequisite of debate*» (2009, p. 3).

Appare evidente che la mozione oggetto del contendere non possa essere un enunciato passibile di dimostrazione, pena la non aderenza a quelle regole costitutive che incarnano l'essenza del *debate* stesso.

Ciò non contraddice il caratteristico rigore logico del *debate* poiché l'esclusione di passaggi *stricto sensu* dimostrativi non implica l'esclusione dal *debate* di ragionamenti logicamente corretti, benché partenti da premesse la cui verità è solo probabile, non apoditticamente certa. Ciò richiama la distinzione tra sillogismi scientifici e sillogismi dialettici già presente in Aristotele (*Top*. I 1). Secondo lo Stagirita si ha una dimostrazione (≠όδειξις) quando la conclusione del sillogismo — noi diremmo, più genericamente, del ragionamento — deriva da premesse vere e prime o da premesse derivate da premesse vere e prime — noi diremmo, per usare una terminologia matematica, quando la conclusione, o tesi, deriva da premesse che sono assiomi o teoremi. Si ha invece un sillogismo dialettico quando la conclusione del sillogismo deriva da "opinioni condivise" (ἔνδοξα) — noi diremmo quando si ha a che fare con un ragionamento le cui premesse non sono necessariamente vere ma semplicemente possibili e accettate da molti. Gli *endoxa*, pur non essendo verità assiomatiche o dimostrate, non hanno comunque il carattere di mera opinione (δόξα) ma di opinione dotata di valore, essendo considerate plausibili da una maggioranza, qualificata. Consideriamo qui gli *endoxa* aristotelici come sovrapponibili all'espressione inglese *educated guesses*: affermazioni che caratterizzeremmo come dotate di un adeguato grado di fiducia epistemica.

Secondo equivoco: “il *debate* matematico non è che una gara di matematica in forma di discussione”.

Nelle gare di matematica, così come comunemente praticate, i quesiti e i problemi sottoposti ai concorrenti vengono risolti individualmente in forma scritta e la vittoria nella competizione è assegnata mediante la stesura di una graduatoria basata su un punteggio attribuito, da uno o più giudici/correttori, mediante criteri di valutazione tipicamente rigidi. *Prima facie*, salvo l’esposizione orale, ricorrono molti degli elementi caratterizzanti il *debate*: le squadre di concorrenti, la giuria, l’aspetto agonistico, le griglie valutative. Basterebbe quindi far esporre *viva voce* le procedure risolutive messe per iscritto ed escogitare qualche altro piccolo ritocco per trasformare questo tipo di *contest* in un *debate* in matematica? A nostro avviso non è così.

Condizione necessaria, per quanto non sufficiente, per avere un *debate* è l’interazione *dialettica* tra i contendenti. L’esecuzione di una prova che venga giudicata singolarmente, ancorché confrontata dal giudice con una similare di un altro concorrente, non può costituire un esempio di *debate*, neppure se essa viene prodotta da una squadra e non da singoli o illustrata oralmente e non in forma meramente scritta. Questo perché è assente non solo qualunque interazione tra le squadre partecipanti ma soprattutto la confutazione delle tesi dell’avversario, ineseguibile in un *format* in cui i contendenti operano in parallelo, senza interazione.

Quindi, affinché si possa parlare di *debate* per la matematica è necessario che ci sia interazione dialettica tra i contendenti e che la mozione oggetto di discussione non sia costituita da un enunciato matematico propriamente detto. Come conciliare queste richieste con lo scopo dichiarato di realizzare un *debate* disciplinare per la matematica come materia curricolare? Formulando una mozione che non sia matematica ma che consenta di discutere di *come* e *perché* facciamo matematica, e che potremmo caratterizzare come metamatematica *lato sensu*.

3. Conseguente necessità di un *debate* metamatematico

Contrariamente al *debate* agonistico, ciò che contraddistingue il *debate* come metodologia didattica disciplinare è sia la formulazione di una *quaestio* controversa, relativa alla materia di studio, sia la strutturazione di un protocollo che si adatti alle caratteristiche e alle esigenze di un’interazione dialettica che deve avvenire in classe e con finalità educative. Al riguardo intendiamo fissare due punti: a) l’enunciato da dibattere non può essere passibile di dimostrazione ma solo di argomentazioni probabili; b) il protocollo, invece di prendere a modello quelli utilizzati nelle competizioni, deve essere applicabile alle specificità del contesto classe.

Ora affrontiamo un tema cruciale: la natura dell’enunciato oggetto di contenzioso in un *debate* disciplinare, considerando cosa sia una mozione di dibattito e la tripartizione dei diversi tipi di enunciati all’interno della *debate theory* (Freeley & Steinberg, 2008, pp. 55-58).

La mozione è una controversa soluzione a un problema aperto. Quanto più la risoluzione mostra di essere controversa, ossia di compararsi a soluzioni alternative parimenti giustificate, quanto più la questione *appare* indecidibile agli occhi di una maggioranza qualificata, tanto più la mozione è dibattibile.

Gli enunciati che costituiscono le *debate motions* non sono del tipo di quelli studiati dalla pragmatica, che tratta degli atti linguistici che sono azioni, bensì enunciati, studiati dalla teoria dell'argomentazione, cosiddetti tetici: pongono tesi, passibili di giustificazioni a sostegno o contro la loro approvazione da parte di altri (Piro, 2015, pp. 34-35). V'è corrispondenza tra la classificazione delle tipologie di mozioni in *fact*, *policy* e *value* nella teoria del *debate* e quella degli enunciati dichiarativi, prescrittivi e valutativi nella teoria dell'argomentazione (Wagemans, 2019). Le *fact motions* sono costituite da enunciati dichiarativi, danno conto di una realtà indipendente dalle nostre menti e possono essere o veri o falsi. Gli enunciati dichiarativi sono tipici dei campi disciplinari della matematica e delle *hard sciences*, e più in generale riguardano l'osservazione empirica. Tipicamente i dibattiti su enunciati dichiarativi sorgono in virtù di osservazioni o dati mancanti o insufficienti oppure sull'interpretazione dei nessi causa-effetto.

Le *policy motions* sono costituite da enunciati prescrittivi per l'agire. Le *value motions* sono costituite invece da enunciati valutativi. Elencare qui le loro caratteristiche peculiari sarebbe *futilis digressio*. Esponiamo solo alcune considerazioni dettate non dal gusto della complicazione ma dal bisogno di chiarire la grammatica per la formulazione delle questioni di dibattito. Quando il criterio valutativo (esplicatività, immediatezza, accessibilità, etc.) è esplicitato nell'enunciato oggetto di disputa, il criterio è imposto e la discussione è a esso vincolata e circoscritta: per la *debate theory* abbiamo a che fare con *value motions* e il dibattito verte sulla caratterizzazione del criterio e sul perché una data procedura lo soddisfa meglio di altre. Quando, invece, il criterio valutativo non è esplicitato nell'enunciato da dibattere, diversi criteri sono tipicamente posti *licenter* durante la discussione dai *debaters*, che si confrontano con una *policy motion*: il dibattito verte non solo sulla comparazione di quanto i metodi in contrasto soddisfino i criteri proposti ma anche sulla loro priorizzazione. Analoga osservazione è da fare per le *policies* alternative. Quando le procedure da comparare sono esplicitate, i *debater* sono chiamati a difenderne una, rispetto ad altre *pre*determinate. Quando non sono esplicitate, gli *opponentes* hanno il compito di selezionare la procedura, la cui difesa ritengono strategicamente più adatta per contrastare le argomentazioni che il *respondens* avanza a sostegno della posizione assegnatagli.

Padroneggiare la grammatica della formulazione delle questioni di dibattito permette di meglio formularle in relazione agli specifici obiettivi didattici. Le caratteristiche semantiche che una buona mozione di dibattito deve soddisfare sono la dibattibilità, l'essere adeguatamente circoscritta e l'essere interessante.

Sulla dibattibilità si è già detto: l'enunciato concerne un determinato metodo di risoluzione per un problema e implica uno o più criteri valutativi; apre il dibattito con una o più opzioni concorrenti; è tanto più dibattibile quanto più le posizioni alternative offrono «uguali opportunità di difesa razionale» (De Conti, & Giangrande, 2018, p. 32).

Sull'essere adeguatamente circoscritto: l'ampiezza della questione di dibattito deve essere commisurata al tempo di preparazione e alle tempistiche dell'intervento. L'ampiezza della questione dipende dal numero e dalla complessità degli *status quaestionum*, o *clash points*, che solleva e dalle argomentazioni che a questi si riferiscono. Il principio di cautela impone al docente di iniziare con questioni circoscritte per poi gradualmente aumentare la complessità. È possibile ridurre l'ampiezza delle questioni vincolandole ad alcune condizioni: ad esempio, ponendo un criterio valutativo, o assumendo un vincolo o un fine. Oppure vincolando anche la squadra di opposizione a una determinata tesi da difendere. Di qui, l'importanza per il docente, in un concreto contesto di classe e per una realistica attività didattica, di saper individuare il giusto equilibrio tra due estremi ugualmente da evitare: non questioni troppo circoscritte, tali da rendere difficoltoso il rinvenimento di argomentazioni *pro et contra*, né questioni troppo ampie, tali da rendere lacunosa e inappagante la preparazione del *debate*.

Chiarito che nel *debate* le mozioni assumono necessariamente la forma di enunciati che vanno oltre — sia come collocazione, sia come profondità[1] — gli enunciati dichiarativi dimostrabili, sembra che, nel caso di *debate* disciplinare per la matematica, le mozioni assumano tipicamente un carattere *meta*disciplinare: nel caso di specie, una mozione che tratti di come (*policy*) e perché (*value*) facciamo matematica.

Prima di dettagliare i possibili approcci nel costruire una mozione metamatematica per il *debate* disciplinare, sarà opportuno sgomberare il campo da *ulteriori* due potenziali equivoci.

Terzo equivoco: "una mozione di *debate* metamatematico deve trattare della metamatematica così come storicamente intesa e praticata".

Il termine "metamatematica" nasce per indicare una ben determinata teoria, cioè la teoria della dimostrazione (*Beweistheorie*) di David Hilbert. Il suo scopo era sistematizzare i fondamenti della matematica, dando attuazione a quel tentativo di formalizzare tutta la matematica e di dimostrare la sua non contraddittorietà, che diventerà noto come "programma di Hilbert".[2]

Riteniamo non necessario dilungarsi sulla difficoltà — e sulla sostanziale inutilità — di un simile approccio nell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria. Quel che è opportuno precisare è, invece, perché *non* sia inutile avere a che fare con la metamatematica — intesa *lato sensu* — e il *debate*, nell'insegnamento disciplinare della matematica, a tutti i livelli.

Che le mozioni di un *debate* sulla matematica non possano essere enunciati matematici rende chiaro che tale strumento non possa essere usato *sic et simpliciter* per "portare avanti il programma". Ciò potrebbe indurre a concludere che tale pratica sia al meglio un bizzarro *divertissement* da utilizzare *una tantum* come giocoso intermezzo tra una lezione frontale e un compito in classe, al peggio, pura e semplice perdita di tempo. Al contrario, riteniamo che il *debate* metamatematico possa essere uno strumento utile ad affrontare — e, si spera, ad aiutare a risolvere — un problema ben noto a chi si occupa di insegnamento della matematica (o di insegnamento *tout court*) ed efficacemente descritto da Robert Kaplinsky nell'*incipit* del suo libro sugli *open-middle problems*: «Have you ever felt like your students understood what you taught them, only to find out later that you were mistaken? This has happened to me more times than I can count! What made this feel especially frustrating was that I didn't see these issues coming during the lessons. It really seemed like they understood what I was teaching them, and I rarely figured out that I was mistaken until after I saw the assessment results and was already teaching something else» (2019, 1).

La predicibilità del metodo di risoluzione è spesso un "rifugio" decettivo per lo studente, una comoda scusa che solleva dal ponderare e prendere una decisione sulle strategie di risoluzione. Ma anche nella costruzione di una dimostrazione matematica si possono rintracciare momenti decisionali che, tuttavia, scompaiono nel resoconto finale. Come in una partita a scacchi: tutte le mosse che leggiamo sono interpretabili sulla base delle regole del gioco e, in sé, non mostrano nessuna deviazione da poche norme rigide, però nella partita concreta

1 Ci stiamo permettendo un'innocente, ma non inutile, analogia con le vicissitudini etimologico-semantiche del termine metafisica.

2 Per un *excursus* storico sulla genesi, lo sviluppo e il fallimento di tale programma si veda Lolli (2016).

esiste una strategia, esiste una creatività ed esistono decisioni, anche se non appaiono al livello della mera registrazione delle mosse conformi alle regole.

Qui entra in gioco il carattere metamatematico della mozione del *debate*. Nella sua accezione più ampia, la metamatematica è inscindibilmente legata all'aspetto del come e perché si fanno le cose che si fanno in matematica. Citando *verbatim* Lolli: «Imparare e ripetere dimostrazioni non serve se queste sono svolte solo a livello oggetto, e non condite di metalogica. Se uno parla (o scrive), senza prendere nota di come sta parlando e perché, attento solo al significato di quello che dice, non vede la struttura logica del proprio discorso; quando si parla in italiano non si pensa alle regole grammaticali ma al contenuto; per vedere la struttura logico-grammaticale il discorso stesso dev'essere oggetto di riflessione. Anche solo segnare a fianco di ogni espressione quella da cui essa deriva e la regola per cui deriva significa compiere un'azione diversa da quella materiale di eseguire una sostituzione o più in generale una trasformazione sintattica; significa gestire un sistema di logica (invece che una formula) e compiere una scelta, un'azione strategica. Da una parte l'agente non è meccanico (=sintattico), dall'altra *ragiona sul* formalismo invece che *eseguire il* formalismo. Questa è metamatematica» (2014, 79).

Quarto equivoco: "una mozione di *debate* metamatematico è di fatto una mozione di filosofia della matematica; dovrebbe essere quindi appannaggio dei docenti di filosofia".

Non è immediato definire che cosa sia — e di che si occupi — la filosofia della matematica. Se ci affidiamo allo *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* leggiamo che: «For any field of study X, the main purposes of the philosophy of X are to interpret X and to illuminate the place of X in the overall intellectual enterprise. The philosopher of mathematics immediately encounters sweeping issues, typically concerning all of mathematics. Most of these questions come from general philosophy: matters of ontology, epistemology, and logic» (Shapiro, 2005).

Riteniamo quindi capzioso qualsiasi tentativo di elevare — o derubricare — allo status di *esclusiva* mozione filosofica qualunque mozione di *debate* metamatematico che non sia incentrata *principalmente* su aspetti ontologici, epistemologici o logici. Peraltro, la discussione di mozioni metamatematiche concepite secondo il *format* proposto ha come prerequisito fondamentale specifiche conoscenze disciplinari di matematica.

In definitiva, il *debate* metamatematico non è uno strumento riservato al docente di filosofia per trattare esclusivamente questioni fondazionali della matematica, bensì è uno strumento a disposizione di tutti i docenti di matematica per aiutarli ad affrontare e risolvere i problemi di metacognizione degli studenti nella loro disciplina.

4. Possibili approcci nel *debate* metamatematico (errore peggiore, analisi comparativa, spiegazione migliore)

Spiegata la possibilità di un *debate* metamatematico per la matematica, ossia di un *debate* (quindi di una metodologia didattica regolata da un preciso protocollo) metamatematico (quindi avente come mozioni non enunciati matematici ma enunciati che parlano, *lato sensu*, di matematica) per la matematica (non di matematica *stricto sensu*, ma *per* la matematica, intesa come disciplina di insegnamento), è precipuo enunciare che in un *debate* per la matematica, a) le *fact motions* sono impossibili; b) si discute sempre di *policies*, specificatamente metodi e procedure di risoluzione, alternative e parimenti giustificabili, di problemi matematici; c) si comparano sempre metodi concorrenti in base a *evaluation criteria*.[3]

Ora, mostrata la possibilità astratta di realizzare un *debate* con tali caratteristiche, rimane da spiegare come dette caratteristiche — protocollo, enunciati, disciplina — siano da intendere nel dettaglio. Inizieremo a ritroso, partendo dal legame che ci può essere tra la matematica, come disciplina di insegnamento, e gli enunciati oggetto di *debate*: ci stiamo, quindi, ponendo una questione squisitamente didattica.

Per muoversi nel *mare magnum* della didattica disciplinare senza perdere la trebisonda, sono necessarie una carta e una bussola che ci permettano di individuare e seguire le rotte di interesse. Un recente libro che espone lo stato dell'arte dei risultati che la ricerca internazionale ha conseguito nel campo della didattica della matematica è il volume realizzato dal *team* composto da Anna Baccaglini-Frank, Pietro Di Martino, Roberto Natalini, Giuseppe Rosolini (Rosolini *et al*., 2018). Tale libro fungerà da valida carta nautica. In quanto alla bussola, essa non può che essere rappresentata dalla nostra esperienza di insegnamento e dai nostri interessi personali: scegliamo quindi tre temi prepotentemente presenti nella pratica didattica: la gestione degli errori, il legame tra competenza e *problem solving*, la distinzione tra argomentazione e dimostrazione. Esamineremo, ora, questi temi, uno alla volta, vedendo come collegarli a una qualche forma peculiare di mozione.

Nella prassi comune dell'apprendimento-insegnamento della matematica è spesso considerato preferibile evitare gli errori. Non nel senso di non farli, ma proprio di scansarli. L'errore è il convitato di pietra della matematica: c'è sempre ma raramente se ne parla, ancor meno lo si problematizza. L'insegnante sovente si limita a rilevare l'errore e a usare la sua oggettività per valutare una prova; l'alunno prende atto dell'esistenza dell'errore commesso ma non della sua natura. Il secondo si risparmia la fatica della comprensione, giustificato anche dal silenzio del primo, che si risparmia comunque e il rischio di dover rispondere ad obiezioni inattese e il peso della decisione nella valutazione.

Questo *modus supravivendi* tende a perpetuare il cosiddetto "compromesso delle risposte corrette": la tacita assunzione, da parte di entrambi — professore e studente — che la *ratio cognoscendi* dell'avvenuta comprensione sia l'assenza di errori. Di conseguenza il fine "sbinariato" dell'insegnamento della matematica diventa l'assenza di errore, *a prescindere* dalla comprensione. Questo risultato potrebbe sembrare il male minore, ma non è privo di pesanti conseguenze. «Il compromesso delle risposte corrette, e tutte le scelte che ne conseguono, limitano molto il campo dell'azione educativa, per esempio portando l'insegnante ad evitare di proporre cose che i ragazzi "non sanno già fare"» (Rosolini *et al*., 2018, p. 66). La paura di sbagliare, e di far sbagliare, tende a far privilegiare attività di tipo riproduttivo (esercizi, meglio se meccanici) rispetto ad attività di tipo produttivo (problemi) e, comunque, ad abbassare la proverbiale asticella.

Questi temi sono ampiamente discussi nel capitolo 4 del libro sopra citato. Troviamo di particolare interesse, per l'argomento che qui stiamo trattando, la chiusura dello stesso: «Concludiamo questo capitolo con un'osservazione a livello *meta* [...]. La varietà dei processi possibili, il fatto che dietro a risposte corrette ci possono essere difficoltà e, viceversa che alcuni errori possono risultare da pro-

3 Benché solo parzialmente rispondente al modello proposto, un precedente storico di una *quaestio* metamatematica può essere la "disputa" tra Poncelet e Gergonne sulla "superiorità" della geometria sintetica o analitica (Boyer, 1954).

cessi di pensiero significativi, dovrebbe aumentare la consapevolezza della differenza cruciale [...] tra osservazione e interpretazione. [...] questa confusione è pericolosissima e deriva dalla convinzione che ci sia un'unica interpretazione possibile di una certa risposta o non risposta dello studente, o di un suo comportamento. Essere consapevoli che una risposta o un comportamento osservato possono avere origini molto diverse è il primo passo [...] per differenziare osservazioni (oggettive) e interpretazioni (soggettive) e far diventare queste ultime ipotesi di lavoro e non verità assolute [...]» (Rosolini *et al*., 2018, p. 79). Quest'ultima riflessione ci mostra chiaramente i possibili agganci con il *debate* metamatematico: le risposte date sono o giuste o sbagliate, c'è poco da discutere, ma le motivazioni che hanno portato a dare tali risposte sono soggette ad interpretazioni plurime e, nonostante — o forse grazie a — questo aspetto di soggettività, la loro analisi riveste un'importanza non trascurabile per la valutazione.

La prima tipologia peculiare di mozione per il *debate* metamatematico che proponiamo, quella che chiameremo dell'"errore peggiore", è così strutturata: dati questi due (o più) svolgimenti sbagliati del medesimo esercizio (o problema), qual è il "peggiore"? Quale dovrebbe ricevere la valutazione più bassa in una verifica? Per quanto tale questione possa apparire singolare, non è granché diversa dalla domanda che molti docenti si sono talvolta sentiti rivolgere in classe in occasione della restituzione di un compito: perché io, Caio, ho preso un voto diverso da quello di Tizio, visto che entrambi abbiamo sbagliato gli stessi esercizi? Può accadere che il docente non risponda (esaurientemente) a tale domanda perché la ritiene pretestuosa o perché ritiene la risposta ovvia. Però, se la domanda è posta non retoricamente, evidentemente non è scontata l'ovvietà della risposta, e la sottigliezza della questione potrebbe essere sfuggita non solo all'alunno ma anche all'insegnante. Inoltre, quale occasione migliore per introdurre una nuova pratica didattica che prendere spunto dall'esame di un problema interpretativo noto e sentito dagli alunni, piuttosto che da un quesito calato dal cielo?

Nel proporre tipologie di mozioni per il *debate* metamatematico non siamo obbligati a fermarci all'analisi in negativo dei possibili processi risolutivi di un esercizio. Se la gestione dell'errore è importante, non lo è unicamente al fine di evitarlo; altrimenti si ricadrebbe nell'identificazione del successo formativo come assenza di errori, invece che con la capacità di padroneggiare la disciplina, anche commettendone accidentalmente qualcuno. Ma che significa padroneggiare la matematica? La questione, oltre che didatticamente, non è di facile risoluzione neppure sul piano epistemologico, in quanto è opinione diffusa che «padroneggiare la matematica non si esaurisca nella conoscenza di alcune nozioni e nel possesso di abilità procedurali» (Rosolini *et al*., 2018, p. 93). Ora, non è nostra intenzione discutere la questione della competenza matematica *generaliter*. Ci limiteremo a far cenno a quelle che il *Quadro di Riferimento analitico per la Matematica 2012*, prodotto dal *Programme for International Student Assessment* (PISA), chiama «capacità matematiche fondamentali che stanno alla base di ciascuno dei processi riferiti e dell'applicazione pratica della *literacy* matematica» (PISA, 2012, p. 30). Il *Quadro* ne enumera sette e tra queste ce ne sono due — ragionamento e argomentazione, elaborazione di strategie per la risoluzione di problemi — che si prestano bene ad essere affinate dall'utilizzo del *debate* metamatematico (*cfr*. i temi scelti come rilevanti per la didattica *supra*). Esaminiamo prima la seconda.

Trattando la relazione tra le capacità matematiche fondamentali e la difficoltà di risoluzione degli *item* proposti nelle prove di rilevazione delle medesime (come, ad esempio, le prove INVALSI), il documento PISA di cui sopra alla voce sull'elaborazione di strategie recita: «I compiti più difficili prevedono l'elaborazione di una strategia complessa per arrivare a una soluzione esauriente o a una conclusione generalizzata; oppure la valutazione e il *raffronto* di diverse strategie possibili» (PISA, 2012, 46). Il raffronto tra più strategie risolutive possibili è quindi non solo considerato parte *integrante* di una delle capacità matematiche fondamentali ma anche il suo aspetto più evoluto e sofisticato. In che termini eseguire questo raffronto? Certo, se entrambe le strategie in esame portano alla soluzione del problema, saranno entrambe *percorribili*. Ma sono automaticamente entrambe parimenti acute, o *potenti*?

Per rispondere a questo quesito, proponiamo una seconda tipologia di *debate* metamatematico, quella che chiameremo dell'"analisi comparativa", riassumibile nella seguente forma: date queste due (o più) strategie risolutive del medesimo problema, quale è preferibile? A differenza di quanto scritto nel caso della prima tipologia, qui abbiamo usato esclusivamente il termine problema, e non esercizio: una consegna che metta di fronte a una vera situazione problematica, e non a un esercizio meccanico per il quale gli alunni sappiano già come muoversi, magari ignorando il perché. «Negli esercizi il fatto che sia conosciuta una procedura da applicare per raggiungere l'obiettivo permette di attivare un procedimento puramente esecutivo, mentre nel caso dei problemi è necessario un comportamento strategico [...] è necessario prendere continuamente decisioni, mettendo in gioco eventualmente, e in modo strategico, anche gli automatismi appresi attraverso gli esercizi» (Zan & Di Martino, 2017, p. 13). La continua enfasi sull'aspetto *strategico* nelle attività di risoluzione di problemi matematici non è casuale. Alain H. Schoenfeld, uno dei pionieri in questi studi — suo è il seminale volume *Mathematical Problem Solving* del 1985 — scrive: «When working complex problems, effective problem solvers monitored how well they were making progress, and persevered or changed direction accordingly. Unsuccessful problem solvers tended to choose a solution path quickly and then persevere at it, despite making little or no progress» (Schoenfeld, 2013). «Insomma, Schoenfeld enfatizza come aspetti caratterizzanti il buon solutore di problemi siano la quantità e la qualità delle decisioni prese. Ovvero come sul processo di risoluzione dei problemi giochino un ruolo chiave le competenze di natura metacognitiva» (Rosolini *et al.*, 2018, p. 116). Questo *focus* sugli aspetti qualitativi, decisionali e metacognitivi, evidenzia le potenzialità del *debate* anche nella pratica del *problem solving* in matematica.

Riprendiamo ora il terzo e ultimo dei tre temi didattici da noi scelti all'inizio del presente capitolo, tema che rimanda anche alla prima delle "capacità matematiche fondamentali" evidenziata tra quelle citate in (PISA, 2012): argomentare e dimostrare in matematica.

Secondo Pedemonte «in mathematics education there is no shared definition for argumentation, even if this is one of the most recurrent activities in the class» (Pedemonte, 2007). Di poco migliore è la sorte della definizione di dimostrazione; emblematica — e provocatoria — è quella data da Lolli nel suo *QED. Fenomenologia della dimostrazione*: «una dimostrazione è una bolla di accompagnamento che certifica la sussistenza di $T \quad A$. Non la definiamo in modo più preciso perché non è possibile» (Lolli, 2005). Potrà sembrare strano che non si possa fare di meglio, tant'è che noi stessi abbiamo riportato poc'anzi una definizione di dimostrazione apparentemente più precisa, dovuta ad Aristotele (*cfr. supra*). L'anello debole di tutta questa catena è costituito dalla nozione di conseguenza logica, che è «vaga perché si riferisce a tutte le possibili interpretazioni di un formalismo. Per ogni interpretazione, la decisione se un enunciato è vero o no dipende dal significato delle parole relative a quel dominio di conoscenze. Ma le interpretazioni sono infinite, e neanche ben delimitate» (Lolli, 2005). Fortunatamente le difficoltà di sistematizzazione dei fondamenti epistemologici di una disciplina non sono, solitamente, un freno alla pratica della disciplina stessa né al suo insegnamento. «[L]a dimostrazione è una parte essenziale del fare matematica [...] e, in un certo senso, caratterizza il fare matematica. Dall'altra, l'educazione all'argomentazione è un obiettivo didattico per il quale l'insegnamento della matematica è chiamato a portare il suo specifico contributo fin dal primo ciclo» (Rosolini *et al.*, 2018). All'atto pratico, dunque, dimostrazione e argomentazione trovano il loro posto nella pratica disciplinare e in quella didattica. Anche se non c'è unanimità di vedute a tale proposito, possiamo differenziare la dimostrazione dall'argomentazione in base alle forme di ragionamento che appaiono in tali strutture. «Le tre forme di ragionamento tra cui distinguiamo sono: deduzione, induzione e abduzione [...] Ricordiamo che l'unica inferenza utilizzabile in dimostrazioni (corrette) è la deduzione, mentre nella fase di congettura (argomentazione che porta alla formulazione della congettura, e che eventualmente viene portata avanti per supportarla) inferenze di tipo abduttivo e induttivo sono usate molto frequentemente» (Rosolini *et al.*, 2018). Chiarito quindi che qui riteniamo sufficiente distinguere tra dimostrazione e argomentazione in base alla presenza (o meno) di particolari modi di ragionamento (deduttivo, induttivo, abduttivo), passiamo a porci il problema dello scopo della dimostrazione e dell'argomentazione in matematica.

Quanto affermato nell'ultima citazione attribuisce all'argomentazione un ruolo ancillare rispetto alla dimostrazione e questo non stupisce in quanto, come detto, è la presenza di dimostrazioni che caratterizza il fare matematica — non c'è matematica senza teoremi. Ma ciò che potrebbe riservare sorprese non è tanto la funzione dell'argomentazione quanto *le*[4] funzioni della dimostrazione. Si dà spesso per scontato che la funzione principe (e unica) della dimostrazione matematica sia la validazione, ma questa supposizione, limitata e limitante, è sconfessata dalla pratica reale. «Quel che è certo è che da una parte la dimostrazione è un aspetto fondamentale del fare matematica, dall'altra la sua finalità non è solo quella di verificare la correttezza di un'affermazione matematica, stabilendo il legame di conseguenza logica tra fatti matematici (altrimenti non si cercherebbero e offrirebbero più dimostrazioni di uno stesso fatto)» (Rosolini *et al.*, 2018). Non solo la semplice validazione dell'enunciato di un teorema non è considerata necessariamente l'unico fine della dimostrazione, ma per alcuni non è neppure il più importante: «particolarmente interessante è il lavoro pionieristico di Gila Hanna (1989) sulla distinzione tra dimostrazioni che validano e dimostrazioni che spiegano: le dimostrazioni del primo tipo provano che un teorema è vero, quelle del secondo tipo mostrano anche perché il teorema è vero» (Rosolini *et al.*, 2018). Senza voler nulla togliere al carattere pionieristico del lavoro di Hanna, è da notare che già Aristotele (*An. post.* I 13) sosteneva che conoscere *dimostrativamente* il *che* (ὅτι) è diverso dal conoscere il *perché* (διότι) e che altri matematici celebri — uno tra tutti, Bolzano — si sono cimentati nel cercare le differenze tra dimostrazioni che spiegano e dimostrazioni che non spiegano il risultato (Molinini, 2014).

Siamo consapevoli del fatto che la presunta distinzione tra dimostrazioni validative e dimostrazioni esplicative non è accettata universalmente e che, al momento, non esistono modelli descrittivi o normativi di tale differenza (Molinini, 2014). Tuttavia, tale mancanza, per il *debate* metamatematico, è un vantaggio e non un limite in quanto, se esistesse una procedura per stabilire se una dimostrazione

4 Lolli (2005) individua ben *trentanove* possibili funzioni della dimostrazione.

è o non è esplicativa, una siffatta affermazione, relativa ad una determinata dimostrazione, ricadrebbe tra gli enunciati di tipo *fact; quindi, ipso facto* non sarebbe utilizzabile come mozione di *debate*. Proponiamo dunque una terza tipologia di *debate* metamatematico, che chiameremo della "spiegazione migliore", le cui mozioni possono essere schematizzate nella forma seguente: date due dimostrazioni del medesimo enunciato, quale delle due è maggiormente *esplicativa* e perché?

Questa, delle tre tipologie proposte, è sicuramente la più impegnativa ma anche quella più vicina alla matematica come disciplina fine a se stessa. La prima tipologia è intrinsecamente collegata all'errore, quindi ad una situazione eminentemente didattica. La seconda tipologia è collegata al *problem solving* e quindi alla matematica come strumento per altro.[5] Questa terza tipologia, invece, si confronta con l'attività più squisitamente matematica — la dimostrazione — e lo fa toccandone l'aspetto esplicativo, quello più "puro" in quanto fine a se stesso, dal momento che l'aspetto validativo conserva una qualche utilità residua per chi veda la matematica come semplice strumento. Se voglio applicare un risultato mi è utile sapere che è vero tramite una dimostrazione: posso quindi essere interessato alla dimostrazione in quanto tale, ma l'eventuale perspicuità della stessa mi sarebbe assolutamente indifferente.

5. Protocollo del *debate* metamatematico

Le peculiarità dell'interazione dialettica del *debate* sono l'essere costituita da regole e il prescindere dalle opinioni personali. Il *debate* come metodologia didattica disciplinare, diversamente dal *debate* come sport agonistico, si caratterizza sia per trattare questioni strettamente collegate ai contenuti del curricolo sia per adattare il protocollo ai differenti contesti di classe. Desiderando gettare i *fundamenta* per il *debate* come metodologia didattica per la matematica, abbiamo difeso la tesi fondamentale secondo la quale, allorché è applicato all'insegnamento della matematica, il *debate* è *necessariamente* "metamatematico", ossia tale da trattare questioni controverse sul come e sul perché facciamo matematica. Ciò costringe a spostare il *focus* dal prodotto al processo.[6] Dopo aver mostrato il valore didattico di tre tipologie di enunciati metamatematici dibattibili, tematizziamo ora il protocollo, l'altro pilastro del *debate* metamatematico. Quanto segue discende dall'adozione di tre massime "di morale provvisoria".

Prima massima: elasticità. Sebbene se ne sia constatata l'agibilità, l'assenza di continuità e comunità di pratica sul *debate* metamatematico fa sì che non si sia sedimentata una sufficiente esperienza per fissare precetti a ragion veduta. Le indicazioni seguenti sono da adattare saggiamente alla situazione.

Seconda: cautela. La fatidica imperizia dei pionieri ha da essere controbilanciata con conveniente circospezione, calibrando prudentemente le attività in base alle reali abilità della classe, progredendo gradualmente e non azzardando imprese potenzialmente controproducenti.

Terza: innestare. Poiché il *debate lato sensu* è da tempo ben funzionante, sarebbe sconsiderato creare *ex nihilo* nuove regole laddove ci si può limitare ad adattare quelle già esistenti.

5 Questa è l'unica tipologia per la quale non viene esplicitato un criterio valutativo di decisione. È da considerare, diversamente dalle altre, un tipo di mozione di *policy* e non di *value*.

6 Durante i molti mesi di didattica digitale integrata, tale cambio di prospettiva era *necessitate cogente*.

Definiamo protocollo di *debate* «l'insieme di obiettivi, norme e attività che struttura, regola e caratterizza il *debate* stesso permettendone uno svolgimento lineare e completo» (De Conti, 2014). L'insegnante che vuole applicare la metodologia deve padroneggiare sia la struttura e la dinamica del *debate* sia gli elementi del protocollo, perché la loro variazione influenza le ricadute educative della pratica.

Gli elementi del protocollo sono schematizzabili come caratterizzanti il pre, il durante e il post *debate*.

Pre-dibattito: avendo *profluenter* analizzato le tipologie di mozioni, accenniamo solo al tempo di preparazione. Benché l'*impromptu* possa essere contemplato come saggio per studenti avvezzi, per la didattica disciplinare giudichiamo opportuna, nonché inderogabile per i principianti, la raccomandazione di concedere almeno una settimana per la preparazione di un *debate* metamatematico, perché, diversamente dagli scopi di una competizione agonistica, che legittimamente può mirare a premiare la prontezza di ingegni acuti e callidi, l'attività didattica ha da valorizzare tanto lo zelo dei singoli nell'applicazione quanto un processo omogeneo di assimilazione.

Durante: benché il *debate* metamatematico si presti a offrire più di una diade di posizioni da difendere — poiché è possibile comparare più di due procedimenti errati, strategie risolutive, dimostrazioni — è opportuno iniziare discutendo la questione su due lati e solo gradualmente complicare l'analisi aggiungendo ulteriori opzioni. L'aderenza al principio di elasticità alla situazione della classe potrebbe indurre l'insegnante a dosare congiuntamente la determinazione del numero dei lati e dei *debaters* per lato, sebbene per quest'ultimo parametro sia ragionevole attestarsi tra 3 e 5.

Occorre poi considerare il numero, le tipologie, le tempistiche, pause incluse, tra gli interventi e il tipo di interrogazione della controparte.

Ogni *debate* è strutturato in tre fasi: apertura, sviluppo, chiusura.

Analogamente alla fase definitoria del *debate lato sensu* in cui occorre che i lati si accordino su punti fissi per dare vita al disaccordo, l'apertura in un *debate* metamatematico ha la funzione di presentare la questione di dibattito, esponendo con un certo grado di dettaglio, anche attraverso supporto grafico, la procedura oggetto di discussione. Inoltre, durante l'apertura occorre esplicitare i criteri ai quali farà appello la strategia argomentativa della squadra che il giudice recepisce per giungere ad una decisione. Diversamente dai protocolli più diffusi, riteniamo consigliabile separare l'apertura in un intervento a sé stante: i primi *speaker* delle squadre aprirebbero soltanto, esponendo la procedura matematica che difendono ed esplicitando la propria strategia argomentativa. Anche le tempistiche dei primi interventi sono da gestire separatamente: l'insegnante deve concedere per l'esposizione dettagliata della procedura matematica un tempo congruo, che può variare, a seconda della sua complessità, tra i 4 e i 12 minuti. L'intervento di apertura poi non è soggetto all'interrogazione della controparte ed eventuali inesattezze devono essere evidenziate immediatamente dai secondi *speaker*; come tra tutti gli interventi, anche in quelli di apertura è opportuno prevedere una pausa, circa 30 secondi, che permetta tanto ai *debater* quanto ai giudici di riordinare per sommi capi gli argomenti esposti.

Lo sviluppo del *debate* prevede tre momenti: costruzione, decostruzione, ricostruzione. Per semplificare i ruoli, nel caso di *speaker* novizi si può assegnare ad ogni intervento una funzione: ai secondi interventi il compito di presentare argomenti a sostegno della propria tesi; ai terzi, confutare gli argomenti della controparte; ai quarti, rispondere alle critiche della controparte per ristabilire la validità dei propri argomenti. Riguardo le tempistiche degli interventi, è consigliabile avere limiti flessibili, indicando un comporto (ad es., 2-4 o 3-5 minuti) e attribuendo al docente discrezionalità di interrompere l'oratore in caso di flagrante violazione. Riguardo le modalità di interrogazione — le cui finalità sono chiedere chiarimenti, evidenziare fallacie, spingere la controparte a contraddirsi — riteniamo che, al fine di spronare l'interazione dialettica, con *debater* novizi sia preferibile optare per brevi momenti (1-2 minuti) di *cross-examination* (lo *speaker* successivo pone domande al *debater* che ha tenuto il discorso) e di *cross-fire* (entrambe le squadre possono porre domande e rispondere), riservando la modalità *point of information* (interazione durante il discorso) a *debater* esperti.

Il divieto di introdurre nuovi argomenti e di interrogare la controparte contraddistingue la fase di chiusura, i cui interventi generalmente durano metà del tempo e seguono un ordine inverso rispetto a quelli della fase di svolgimento. Gli *speaker* che concludono il *debate* hanno il compito di offrire una panoramica di ciò che è stato il dibattito evidenziando, dal proprio punto di vista, le ragioni per le quali la propria squadra ha prevalso in relazione ai principali punti di disaccordo.

Nonostante la natura pionieristica della proposta didattica renda insensato descrivere puntigliose rubriche valutative (che nondimeno dovrebbero richiedere attenta riflessione in futuro per cesellare il progetto), ci accostiamo al *post-debate* distinguendo il momento della valutazione dal *debriefing*. La valutazione riguarda sia i singoli *speaker* (analitica), sia l'intero dibattito (olistica). La valutazione degli *speaker* si basa su tre criteri, dal meno al più incidente: l'aderenza al protocollo, lo stile, il contenuto. Laddove con "stile" si coglie la perspicuità e la concinnità; con "contenuto" si osserva la rilevanza e la pertinenza degli argomenti sollevati, la solidità logica delle argomentazioni e la capacità di mostrare la loro incidenza nell'economia della discussione. La valutazione dell'intero dibattito va a considerare, rispetto ai diversi punti di disaccordo, quali sono gli argomenti che hanno meglio resistito ai tentativi di confutazione.

Il momento del *debriefing*, che può avere diversi livelli di profondità e svolgersi anche non seduta stante, è, dal punto di vista educativo, quello *metacognitivamente* più significativo, perché, guidato dall'insegnante, il gruppo classe analizza riflessivamente il processo svolto, inclusa la preparazione, per portare a consapevolezza ciò che ha funzionato bene e ciò che deve essere rivisto.

Prima di dedicarci a osservazioni conclusive sul valore didattico del *debate* metamatematico, ne proponiamo alcuni esempi.

6. Esempi di *debate* metamatematico

Nel quarto capitolo abbiamo proposto tre tipologie di mozione per il *debate* metamatematico denominate, rispettivamente, dell'*errore peggiore*, dell'*analisi comparativa* e della *spiegazione migliore*. Pur ricordando il carattere discrezionale di tale scelta e, quindi, l'impossibilità di intendere questo elenco come una tripartizione di tutte le tipologie possibili, è opportuno notare come questi tre tipi di mozione rispecchino le tre tipologie di "consegne" tradizionalmente proposte in classe: esercizio, problema e dimostrazione. Ciò potrà facilitare il docente nell'introdurre ed utilizzare il *debate* come strumento metacognitivo in funzione delle attività *stricto sensu* matematiche che ha proposto. Per esempio, dopo aver assegnato e corretto un'esercitazione su equazioni e disequazioni di secondo grado, l'insegnante potrebbe proporre la seguente mozione di *debate* metamatematico, ovviamente basata sulla prima tipologia, visto che si sta parlando — o meglio, che si vorrebbe far parlare — di *esercizi*.

Mozione: dati questi due svolgimenti dell'esercizio "risolvi l'equazione ", si difenda la tesi che lo svolgimento peggiore — e quindi lo svolgimento meritevole di valutazione inferiore — sia:

Svolgimento A	Svolgimento B
$x^2 - 9 = 0$ $x^2 = 9$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ $\lvert x \rvert = \pm 3$ $x = \pm 3$	$x^2 - 9 = 0$ $x^2 = 9$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ $x = 3$

Le due squadre di studenti potrebbero svolgere il *debate* secondo il seguente canovaccio.

APERTURA
• Illustrazione dello svolgimento;
• puntualizzazione degli errori: $\sqrt{9} \neq \pm 3$
un modulo non può essere negativo
in generale $x \neq x$;
• il risultato è corretto ma il procedimento è errato.

COSTRUZIONE
Lo svolgimento presentato è peggiore dell'altro in quanto:
• contiene più errori di natura diversa, il che implica che chi lo ha svolto ha lacune importanti su più argomenti, tra l'altro di base.

DECOSTRUZIONE
• Perché dovrebbe essere grave l'errore $\sqrt{x^2} = x$? Perché mostrerebbe che chi lo ha commesso non conosce bene la teoria né dei radicali né dei valori assoluti? Ma anche chi scrive $\sqrt{9} = \pm 3$ e $\lvert x \rvert = x$ mostra di avere lacune sui medesimi argomenti, la

APERTURA
• Illustrazione dello svolgimento;
• puntualizzazione degli errori: in generale $\sqrt{x^2} \neq x$;
• il risultato è errato ed è stato ottenuto attraverso un procedimento errato.

COSTRUZIONE
Lo svolgimento presentato è peggiore dell'altro in quanto:
• contiene un solo errore, ma molto grave, ossia $\sqrt{x} = x$;
• fornisce, a differenza del primo svolgimento, un risultato errato.

DECOSTRUZIONE
• Lo svolgimento A, *stricto sensu*, contiene un unico errore: il simbolo ± premesso al 3 nel penultimo passaggio. Se non ci fosse stato quest'unico errore, peraltro ascrivibile a mera distrazione, l'esercizio sarebbe stato svolto in maniera corretta. Sbagliano, quindi,

squadra avversaria non può, quindi, accampare la scusa della maggiore gravità.

• L'avere ottenuto un risultato errato non è da considerarsi uno svantaggio rispetto all'avere ottenuto, per sbaglio, risultati corretti. Innanzi tutto, perché ciò che qui conta è *in primis* la comprensione e non solo l'esattezza. Poi, perché se lo studente avesse voluto verificare il risultato ottenuto utilizzando un altro metodo (scomposizione, formula risolutiva generale) trovando che il risultato è giusto non si sarebbe posto il problema della correttezza del procedimento.

i nostri avversari ad affermare che l'esercizio contenga più errori e sbagliano anche a presupporre una vastità di lacune per un singolo simbolo errato che, ripetiamo, potrebbe benissimo essere frutto di semplice distrazione. Di nuovo, se fosse mancato anche solo quel segno meno, l'esercizio sarebbe risultato completamente corretto.

RICOSTRUZIONE

• Non è nostro compito fare il processo alle intenzioni né, anche volendo, potremmo farlo, avendo a disposizione unicamente il testo dello svolgimento e non le presunte intenzioni dell'autore. Esaminando il testo emerge chiaramente che chi ha svolto l'esercizio mostra di non sapere a quanto è uguale la $\sqrt{9}$, mostra di non sapere che un modulo non può essere negativo e che, in generale $|x|$ non coincide con x. Si tratta di lacune importanti e diverse, sicuramente non di minore importanza rispetto all'unico errore presente nell'altro svolgimento, errore che potrà anche riguardare una nozione più avanzata ma, proprio per questo, è più scusabile.

RICOSTRUZIONE

• L'errore $\sqrt{x^2} = x$ è, a nostro avviso, un errore molto grave in quanto è foriero di equivoci importanti anche in altri ambiti. Si pensi solo per un attimo a quello che succederebbe se si volesse risolvere la disequazione $x^2 > 9$ con il procedimento — errato — $\sqrt{x^2} > 9 \implies x > 3$. Inoltre, se è vero quel che i nostri avversari sostengono, ossia che avere ottenuto risultati errati non sia uno svantaggio, dovremmo concludere che l'autore dello svolgimento B ha avuto più occasioni e sollecitazioni per rendersi conto dell'erroneità dei suoi risultati e, se non l'ha fatto, è plausibile imputare questa dimenticanza ad una maggiore mancanza di conoscenze rispetto all'autore dello svolgimento A.

L'esposizione di cui sopra non è stata pensata come realizzazione ottimale — ammesso che abbia senso parlare di realizzazione ottimale in un *debate* — ma come possibile, realistica, riproduzione di uno scambio tra squadre di studenti. Esaminiamola ora dal punto di vista del valutatore.

L'apertura è una fase preparatoria nella quale è impossibile fare mosse vincenti, benché sia possibile compromettere l'esito del confronto con imprecisioni od omissioni. Qui i contendenti assolvono egregiamente il loro compito.

Nella fase di costruzione entrambe le squadre chiariscono perché sia lo svolgimento loro assegnato ad essere il peggiore. La squadra A lo fa puntando sulla *numerosità* delle lacune desumibili, la squadra B sottolinea la *qualità* delle lacune e l'erroneità del risultato — ancora una valutazione qualitativa. Anche qui, non c'è molto altro da segnalare.

Passando alla decostruzione, il primo punto della squadra A è molto forte in quanto attacca e rovescia (*turnaround argument*) l'assunzione base della squadra avversaria (lo svolgimento B contiene un errore più grave); il secondo punto è più debole, in quanto presuppone che ciò che conti sia principalmente la comprensione e non l'esattezza, cosa non esplicitata nella mozione: è comunque un tentativo sensato di risposta ad un altro dei punti chiave degli avversari. La squadra B prova a contraddire la tesi avversaria ma lo fa supponendo che sia possibile ascrivere a distrazione l'errore presente nello svolgimento A. In definitiva, entrambe le squadre attaccano tutte le tesi avanzate dagli avversari ma la squadra A lo fa con un punto forte (in quanto non dipendente da assunzioni aggiuntive) in più, che rimane non confutato.

Nella ricostruzione, infine, la squadra A ribadisce le proprie tesi e prova ad evidenziare la debolezza del contrattacco avversario. Anche la squadra B ribadisce la propria tesi principale, portando ulteriori esempi, ma si mostra debole nella risposta alla tesi avversaria sull'importanza dell'ottenere (o non ottenere) risultati corretti appellandosi nuovamente ad una sorta di processo alle intenzioni dell'autore dello svolgimento e — soprattutto — rinunciando ad attaccare la tesi avversaria che la comprensione conti più dell'esattezza, concedendo quindi un punto che non solo consente agli avversari di non doversi preoccupare di difendere un secondo fronte, ma dà modo di ribaltare a loro favore la questione del peso dell'erroneità del risultato.

Prima facie il cammino della squadra A sarebbe potuto apparire in salita: lo svolgimento da "attaccare" mostra comunque il risultato corretto e contiene un singolo passaggio formalmente errato. Di fatto, la squadra A si mostra più brava a individuare e sfruttare le debolezze argomentative della squadra B, mentre quest'ultima gioca troppo sulla difensiva e rinuncia a colpire dove avrebbe potuto ottenere più successo. Questo punto è importante in quanto non solo evidenzia un aspetto chiave del *debate*, ossia la squadra che vince non è quella alla quale capita la mozione più "plausibile" ma quella che argomenta meglio, ma va a colpire un assunto che talvolta inficia — magari non consapevolmente — la pratica docimologica: la tentazione di giudicare le (presunte) intenzioni e non il prodotto. Perciò, concludendo, si può assegnare una vittoria di misura alla squadra A.

Oltre alle considerazioni emerse in questo abbozzo di valutazione/*debriefing*, desideriamo sottolineare come organizzare anche sporadicamente simili attività di *debate* in classe, darà ricadute positive aggiuntive all'insegnamento-apprendimento della disciplina. Innanzitutto, qualora il docente avesse fatto propria la riflessione sulla scarsa rilevanza di un risultato corretto, se ottenuto con un procedimento dubbio o poco chiaro — e strutturasse di conseguenza le proprie verifiche — il dibattito mostrerebbe come l'attenzione alla chiarezza dei passaggi intermedi e il controllo dei risultati con metodi alternativi, lungi dall'essere finezze riservate ai "primi della classe", si rivelerebbero utili strumenti nell'affrontare prove in cui viene scoraggiato l'approccio meccanico. Inoltre, parlando dei contenuti, è difficile che uno studente che abbia dovuto preparare un intervento nel *debate* esempio di cui sopra, possa poi con *nonchalance* scrivere o non riflettere su quando usare o non usare il simbolo ±, a differenza di chi si sia limitato a scorrere distrattamente le correzioni appuntate dal docente sul foglio del compito.

E, in tema di apprendimento di contenuti, ancora più utili potrebbero rivelarsi le altre due tipologie di *debate* da noi proposte, in quanto permettono di inserire nuovi contenuti direttamente nella mozione. Per esempio:

Mozione: dovendo calcolare la probabilità di ottenere quattro teste consecutive lanciando una moneta, è preferibile usare la regola del prodotto per eventi indipendenti invece che un diagramma ad albero.

Oppure:

Mozione: volendo dimostrare la formula di Gauss per la somma dei primi *n* interi positivi, è più esplicativo usare le proprietà di simmetria delle diverse rappresentazioni di una medesima somma invece che sfruttare le proprietà dei diagrammi che rappresentano numeri triangolari.

Da notare che in quest'ultima mozione si è volutamente escluso un paragone — in termini di potere esplicativo — con la classica dimostrazione per induzione (Rosolini *et al*., 2018, 128) e, in entrambi gli approcci proposti, si impone un'ulteriore considerazione metamatematica: può un diagramma o un disegno costituire una dimostrazione? (Lolli, 2014).

Sed de hoc satis.

7. Osservazioni conclusive

Abbiamo elaborato la proposta del *debate* metamatematico come metodologia didattica innovativa presupponendo quattro *endoxa* della recente ricerca in *Mathematics Education* (Rosolini *et al*., 2018, cap. 3).

Nell'apprendimento e nell'insegnamento entrano in gioco insieme a fattori cognitivi, anche fattori di natura «metacognitiva, linguistica e affettiva».

Oggi il modello didattico che caratterizza l'insegnamento della matematica deriva dal comportamentismo e propone esercizi riproduttivi, rituali, da iterare. Tale modello, orientato al prodotto e non al processo, è efficace per il *training* all'applicazione di procedure algoritmiche, ma è «assolutamente inadeguato» (Erlwanger, 1973) per insegnare competenze matematiche di natura produttiva, esplorativa e inventiva come il *problem solving*.[7] Dawkins e Roh (2016), in un lavoro sul «Promoting Metalinguistic and Metamathematical Reasoning in Proof-Oriented Mathematics Courses», evidenziano l'importanza, per la comprensione dei problemi da parte degli studenti, di affiancare all'ordinario apprendistato *proof-oriented* specifici interventi per portare a consapevolezza le questioni di interpretazioni, «often preconscious for students and taken for granted by instructors».

Poiché le aspettative sociali nelle relazioni tra insegnante e studente (il "compromesso" delle risposte corrette e rapide) premiano, paradossalmente, comportamenti che tuttavia non sono in grado di garantire l'avvenuta comprensione, occorre "rinegoziare" il «contratto didattico» — il sistema di abitudini e diritti-do-

7 Per l'individuo un'attività è un problema e non un esercizio quando non si sa in partenza come raggiungere la meta.

veri impliciti che normano le interazioni in aula — attribuendo maggiore importanza a situazioni (vissute come) «*a-didattiche*» e con problemi aperti, in cui l'allievo apprende non sforzandosi di incontrare le aspettative dell'insegnante ma adattandosi ad un *milieu* contraddittorio, che «ricorda quello di un dibattito accademico», e in cui l'errare (*getting lost*) è la via più breve.

L'importanza dell'argomentazione, della comunicazione, dell'interazione sociale e dell'"interpretazione" per la costruzione e l'interiorizzazione dell'apprendimento matematico. Se il fallimento in matematica significa rimanere esclusi da una piena partecipazione al «discorso» matematico, la causa dell'insuccesso dovrebbe essere imputata anche al processo sociale. Nella scuola italiana l'urgenza di rinegoziare la *praxis* dell'educazione matematica è stata sollecitata sin dai risultati PISA2003 sulla competenza dell'«argomentare»: di contro ad una media OCSE del 25%, l'Italia ha registrato uno dei più alti tassi di omissioni alle domande aperte (35%) in cui si chiede di spiegare o di giustificare la soluzione.

Riteniamo che la nostra proposta di «*debate* metamatematico» riesca, anche meglio di altre strategie, ad applicare i moniti provenienti dalla ricerca didattica internazionale. In conclusione, presentiamo alcune osservazioni al fine di apprezzare il valore del metodo.

Innanzi tutto, per concettualizzare il tipo di attività proposta è più appropriato utilizzare l'espressione «*debate* metamatematico» rispetto alla più vaga «discussione matematica». Non per l'esigenza di brandizzare attività laboratoriali già esistenti, né per forzare inani neologismi nel gergo educativo, ma perché il *debate* non è propriamente una discussione e perché, trattando di come e perché facciamo matematica, il contenuto non è propriamente matematico.

In secondo luogo, il *debate* metamatematico applica in maniera integrata l'approccio social-costruttivista all'apprendimento, sul fronte emotivo, metacognitivo, linguistico e sociale.

Il fatto che la questione oggetto di *debate* non solo sia un problema aperto, e non un esercizio chiuso, ma sia tanto più tale quanto più contempli molteplici risposte parimenti giustificabili, dissolvendo di fatto la possibilità dell'errore, da un lato assolve lo studente dalla paura di sbagliare e dalla frustrazione dell'insuccesso e, dall'altro, lo obbliga ad argomentare interpretazioni convincenti sul *senso* dell'operare matematico. Inoltre, non solo il *debate* metamatematico soddisfa pienamente le condizioni per esperire situazioni a-didattiche, ma il carattere controverso e interpretativo del suo oggetto scoraggia le frequenti interferenze correttive e valutative da parte dell'insegnante.

Il *debate* metamatematico impatta positivamente sia sulle competenze di argomentazione sia sul *problem solving*, in virtù del confronto e del contrasto dialettico con modalità alternative. L'analisi comparativa di strategie alternative, congiunta alla spinta a *dis*credere e *ri*credere, o ricreder*si*, permette di raffinare la competenza metacognitiva intesa come la disposizione a (auto)controllare i processi (Cornoldi, 1990), commisurare le risorse disponibili al problema da risolvere ed essere in grado di prendere buone decisioni durante il processo.

Diversamente poi da altre strategie didattiche per il *problem solving* e la metacognizione, come i problemi *open middle*, il *debate* metamatematico si contraddistingue sia per il verbalizzare i ragionamenti interiori in argomentazioni che si vogliono ben strutturate e terse sia per il fatto che l'intero processo dialettico, inclusa la preparazione, avviene in una dimensione sociale, che è naturale esperire come ludica, e mediante la comunicazione, interna alla squadra prima, tra le squadre durante, con l'insegnante poi.

Infine, il *debate* metamatematico ha un potissimo vantaggio organizzativo rispetto ad altre innovazioni metodologiche: si basa su un protocollo, nelle sue linee generali, trasversale a diverse discipline e verticale a diversi gradi. L'impiego del *debate lato sensu* come metodologia didattica è sempre più diffuso sin dai primi gradi di istruzione. In quanto tale si configura come un'infrastruttura collaudata e familiare per sviluppare riflessioni sul come e perché fare matematica.

Riferimenti bibliografici

Akerman, R., & Neale I. (2011). *Debating the evidence: an international review of current situation and perceptions*. Reading, UK: CFBT Education Trust.

Aristotele (2003). *Organon* (a cura di Giorgio Colli). Milano: Adelphi.

Atanasova-Pacemska, Tatjana, *et al*. (2017). Increasing Motivation for Learning Mathematics Through Debate. In Proceedings of papers / VIII International Conference on Information Technology and Development of Education ITRO 2017. University of Novi Sad, Technical Faculty „Mihajlo Pupin", Zrenjanin, Republic of Serbia, Zrenjanin, pp. 143-147.

Boyer, C. B. (1954). *Analysis: notes on the evolution of a subject and a name*. The Mathematics Teacher, 47, 7, 450-462.

Cornoldi, C. (1990). Autocontrollo, metacognizione e psicopatologia dello sviluppo. *Orientamenti Pedagogici*, 3, 492-511.

Dawkins, P. C., & Roh, K. H. (2016). Promoting Metalinguistic and Metamathematical Reasoning in Proof-Oriented Mathematics Courses: a Method and a Framework. International *Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 2, 197-222.

De Conti, M. (2014). Tailoring the Debate Format to Specific Educational Goals. *National Journal of Speech & Debate*, 2, 2, 7-19.

De Conti, M., & Giangrande, M. (2018). *Debate. Teoria, pratica e pedagogia*. Milano: Pearson.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI Mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behaviour,* 1, 2, 88-107.

Freeley, A. J. e Steinberg, D. L (2009). *Argumentation and Debate. Critical thinking for reasoned decision making*. 12th edition, United States: Wadsworth Cengage Learning.

Hanna, G. (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. In Vergnaud G., Rogalski J., Artigue M. (eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II. Paris: PME.

Kaplinsky, R. (2019). *Open Middle Math: Problems That Unlock Student Thinking*. Portsmouth: Stenhouse Publishers.

Lolli, G. (2005). *QED. Fenomenologia della dimostrazione*. Torino: Bollati Boringhieri.

Lolli, G. (2014). *Se viceversa. Trenta pezzi facili e meno facili di matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.

Lolli, G. (2016). *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*. Milano: Raffaello Cortina.

Luzniak, Chris, (2020). Mathematics is Personal. Mathematics is Debatable. *National Council of teachers of Mathematics*, 113, 4.

Molinini, D. (2014). *Che cos'è una spiegazione matematica*. Roma: Carocci.

OECD (2012). *The Pisa 2012 assessment and analytical framework*. Disponibile in: https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf.

Pedemonte, B. (2007). *How can the relationship between argumentation and proof be analysed?* Educational Studies in Mathematics, 66 (1), 23-41.

Piro, F. (2015). *Manuale di educazione al pensiero critico. Comprendere e argomentare*. Napoli: Editoriale Scientifica.

Rosolini, G. *et al*. (2018). *Didattica della matematica*. Milano: Mondadori.

Shapiro, S. (2005). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Scheerens, J., van der Werf, G., de Boer, H. (2020). *Soft Skills in Education. Putting the evidence in perspective*, Cham: Springer.
Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
Searle, J. (1976). *Atti linguistici. Un saggio di filosofia del linguaggio*. Torino: Boringhieri.
Wagemans, J.H.M. (2019). *Argument Type Identification Procedure (ATIP)*, Web publication/site.
Walton, D. (1989). *Informal Logic. A Pragmatic Approach*. Cambridge University Press.
Zan, R., & Di Martino, P. (2017). *Insegnare e apprendere matematica con le indicazioni nazionali*. Milano: Giunti Scuola.