

## PEMODELAN NUMERIK 1-D ADVEKSI-DISPERSI UNTUK MEMPREDIKSI KONSTRENTASI POLUTAN DALAM BADAN SUNGAI

Adhita Prasetya<sup>1\*</sup>, Doddi Yudianto<sup>2</sup>, Yiqing Guan<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Student of Joint Master Double Degree Program Parahyangan Catholic University and Hohai University in Water Resources Engineering,

<sup>2</sup>Civil Engineering Department, Parahyangan Catholic University Bandung, Indonesia

<sup>3</sup>College of hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing, China

\*E-mail: ditprast74@yahoo.com

**Abstrak:** Peran rekayasa Hidrologi dan Hidrolik dalam pengelolaan lingkungan menjadi amat penting dalam mengatasi permasalahan-permasalahan polutan di area perairan. Seperti telah kita ketahui bersama, pengujian kualitas air sungai membutuhkan biaya dan waktu yang cukup lama, selain itu untuk memperoleh informasi areal terpapar polutan tertentu sering kali mengalami kendala. Studi ini mencoba untuk mengatasi beberapa keterbatasan tersebut diatas dengan cara membuat pemodelan numeric 1-D adveksi-dispersi yang bertujuan untuk memprediksi konsentrasi polutan dalam badan sungai. Model numerik yang dikembangkan bertujuan untuk memprediksi transportasi massal kontaminan di badan sungai. Dalam melakukan analisa, metode yang digunakan adalah analisis 1 dimensi dan metode numerik menggunakan skema lax-wendroff. selain itu untuk memudahkan dalam pemodelan, dibuat model sungai rectangular dengan lebar saluran (B) 8 m, tinggi muka air (H) =0,4 m, kemiringan sungai ( $s_o$ ) = 0.00005, dan panjang saluran (L) = 150 km, serta dasar saluran adalah beton. Untuk mensimulasikan konsentrasi menggunakan *finite difference schemes* pada jarak 50 s.d 100 km, software yang digunakan adalah MATLAB serta menggunakan skema Lax-Wendroff (LW) untuk memecahkan Persamaan 1D Adveksi-Dispersi. Dari hasil pemodelan dapat disimpulkan terjadi pelebaran kurva konsentrasi polutan akibat pengaruh dari hidrolika. Pada saat konsentrasi polutan tertinggi berada 50 km dari lokasi pembuangan limbah, area terpapar polutan 40 – 60 km, sedangkan pada jarak 100 km dari lokasi pembuangan limbah, area yang terpapar oleh polutan 80 – 120 km.

Kata kunci: Sumber Daya Air, Adveksi-Dispersi, Pemodelan Numerik

### PENDAHULUAN

Adanya aktifitas manusia menyebabkan perubahan lingkungan yang cepat, situasi lingkungan dapat dengan cepat memburuk sehingga banyak tempat-tempat yang tercemar baik oleh kabut asap, perairan limbah atau sampah. Pengaruh polusi khususnya areal perairan akan berdampak pada kesehatan manusia dan lingkungan. Pengendalian pencemaran air dan perlindungan sistem perairan merupakan salah satu cara mengontrol aktivitas manusia yang menghasilkan limbah. Peran rekayasa Hidrologi dan Hidrolik dalam pengelolaan lingkungan menjadi amat penting dalam mengatasi permasalahan-permasalahan tersebut dimasa yang akan datang.

Seperti telah kita ketahui bersama, pengujian kualitas air sungai membutuhkan biaya dan waktu yang cukup lama, selain itu perubahan aktifitas manusia sesaat menjadi salah satu

faktor ketidak pastian hasil pengujian. Untuk mengatasi beberapa permasalahan di atas, terutama masalah waktu dan biaya, maka Pemodelan menggunakan analisa numerik menjadi salah satu pilihan yang banyak digunakan oleh para peneliti untuk memprediksi kondisi kualitas air dilokasi tertentu. Paper ini bertujuan untuk membuat pemodelan numeric 1-D adveksi untuk memprediksi konsentrasi polutan dalam badan sungai pada jarak 50 km dan 100 km dari titik pembuangan limbah menggunakan software Matlab.

Untuk memudahkan dalam pemodelan, beberapa kondisi, jenis skema metode numerik dan data di tetapkan terlebih dahulu, seperti kecepatan air dianggap tetap (steady state), saluran sungai dianggap lurus, penampang melintang dibuat segi empat (B=8 m), tinggi muka air dianggap tetap (h=0,4), kemiringan sungai (slope) di anggap konstan ( $S_o=0,00005$ ), dan jenis kekasaran manning dianggap setara

dengan beton ( $n= 0,016$ ) dan skema metode numeric yang digunakan adalah skema lex-wendroff.

## STUDI LITERATUR

Untuk lebih memahami proses pemodelan ini, maka akan dijelaskan mengenai teori-teori dasar yang akan digunakan dalam membuat model numeric 1 dimensi adveksi.

### Persamaan umum Adveksi-Dispersi 1 D

Persamaan umum untuk Adveksi 1 Dimensi adalah:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{U}{h_x} \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

dimana:  $C$  = Konsentrasi,  $t$  = waktu,  $h_x$  = ketinggian muka air, dan  $x$  = jarak

Seperti telah dibahas dalam beberapa teori, bahwa konsentrasi limbah di pengaruhi oleh kecepatan aliran dalam sungai atau saluran. Oleh sebab itu dalam studi ini kecepatan rata-rata dan kecepatan sesaat di jadikan salah satu parameter yang di gunakan untuk membuat model 1 D adveksi-dispersi.

### Kecepatan rata-rata ( $U_x$ )

Pada dasarnya sangat sulit untuk menghitung dengan pasti kecepatan air sungai, hal ini disebabkan oleh beberapa kendala seperti kekasaran permukaan, perbedaan tekanan antara permukaan air akibat dari berat jenis air itu sendiri (Yudianto dan Xie, 2008) dan lainnya. Biasanya untuk memperkirakan kecepatan rata-rata aliran air menggunakan dua cara, yaitu (1) menggunakan persamaan empiris hidraulika dan (2) pelepasan pewarna fluoresen pada sungai. Dalam pemodelan ini digunakan asumsi-asumsi : (1) aliran seragam, (2) 1 dimensi dan (3) aliran tunak (steady flow), untuk lebih memudahkan dalam melakukan pemodelan. Selanjutnya dalam Penentuan kecepatan rata-rata air sungai menggunakan persamaan yang di temukan oleh Robert Manning (1889), seorang ahli hidraulika asal irlandia, yang mengemukakan suatu persamaan untuk menghitung kecepatan rata-rata aliran seragam yaitu:

$$u_x = \frac{1}{n} \left( \frac{A}{P} \right)^{2/3} S^{1/2} \quad (2)$$

dengan :

$u_x$  = kecepatan rata-rata,  $n$  = kekasaran permukaan (manning coefficient),

$A$  = luas penampang basah;

$P$  = keliling basah, dan

$S$  =kemiringan dasar sungai.

### Hubungan antara kecepatan, karakteristik penampang saluran

Dalam melakukan pemodelan 1D Adveksi, kecepatan rata-rata yang telah dijelaskan di atas, di pengaruhi oleh penampang saluran (*crosssection*), seperti : segi empat, trapesium,segi tiga atau lingkaran, yang menghasilkan karakteristik penampang saluran yaitu radius saluran ( $R$ ) dan keliling basah ( $P$ ), yang dihitung berdasarkan lebar saluran ( $B$ ) dan ketinggian air di saluran, memberikan efek yg cukup signifikan terhadap kecepatan rata-rata, seperti ditunjukkan dalam persamaan berikut ini:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{Bh}{B + 2h} \quad (3)$$

dengan :

$R$  = Radius Hidraulik,

$A$  = Luas Penampang basah,

$B$  = Lebar Permukaan Air,

$h$  = kedalaman air, dan

$P$ = keliling basah.

### Hubungan antara kecepatan dengan koefisien dispersi

Selanjutnya, kecepatan dan karakteristik penampang dapat mempengaruhi proses adveksi-dispersi limbah di sungai, seperti ditunjukkan dalam rumus berikut ini:

$$k_x = 5.93hu_* \quad (4)$$

dengan :  $k_x$  = koefisien disperse,  $h$  = kedalaman air,  $u_*$  = kecepatan rata-rata.

Selanjutnya, kecepatan rata-rata menggunakan rumus yang umum digunakan yaitu:

$$u_* = \sqrt{ghs_o} \quad (5)$$

dengan :

$u_*$  = kecepatan rata-rata,

$g$  = gaya grafitasi,

$h$  = kedalaman air,

$s_o$  =Kemiringan dasar sungai,

## Metode Numerik

Skema Lax-Wendroff (LW) untuk memecahkan persamaan 1D Advection Dispersion menggunakan rumus dibawah ini:

$$\frac{c_i^{n+1}}{\Delta t} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{\Delta x} = k \frac{c_{i+1}^n - 2c_{i+1}^n + c_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (6)$$

dengan :

$c_i$ =konsentrasi limbah ke- $i$ ,

$\Delta t$ = perbedaan waktu,

$\Delta x$ = perbedaan jarak,

$u$ =kecepatan aliran,

$k$ =koeffesien disperse.

## Kondisi batas

Dalam pemodelan menggunakan metode numerik, syarat batas suatu persamaan diferensial parsial (PDE) harus ditetapkan. Ada banyak metode yang biasa digunakan untuk menentukan syarat batas, salah satunya adalah metode Alternating Direction Implicit (ADI). Metode beda hingga ini digunakan untuk memecahkan persamaan diferensial parsial parabola, hiperbolik dan eliptik multi dimensi PDE (Peacemen, 1955, Gao and Wang, 1996).), terutama digunakan untuk memecahkan permasalahan konduksi panas atau memecahkan persamaan difusi dalam dua atau lebih dimensi. Contohnya dari metode ini adalah metode pemisahan operator (*operator spiting method*) (Press et. al, 2007).

Metode tradisional untuk memecahkan persamaan adveksi-dispersi secara numerik adalah metode Crank-Nicolson. Metode ini menghasilkan serangkaian persamaan yang sangat rumit dalam beberapa dimensi, yang sulit untuk dipecahkan. Dengan adanya metode ADI, persamaan yang harus dipecahkan pada setiap langkah memiliki struktur yang lebih sederhana dan dapat diselesaikan secara efisien dengan algoritma matriks tridiagonal.

Meskipun metode ini telah dikenal dalam waktu yang lama dan baik, realisasi praktis kadang-kadang tidak akurat (yang, 2005). Ketidaktepatan muncul setiap kali ketika seseorang mengabaikan beberapa hal yang benar dari apa yang disebut kondisi batas antara. Pengabaian ini dapat menjadi penyebab ketidakstabilan bahkan ketika digunakan metode ADI. Selanjutnya akan dijelaskan perubahan metode Crack-Nicolson menjadi metode ADI.

Pertimbangkan persamaan difusi linier dalam dua dimensi berikut ini,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = (u_{xx} + u_{yy}) = \Delta u \quad (7)$$

Metode Crank-Nicolson yang implisit menghasilkan persamaan beda hingga berikut ini:

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2 * \Delta^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) (u_{ij}^{n+1} + u_{ij}^n) \quad (8)$$

dengan,

$$\Delta = \Delta t = \Delta x.$$

Dalam metode numerik, kesetabilan, konsistensi, akurasi dan konvergensi merupakan beberapa hal yang harus diperhatikan dalam pemilihan skema diskretisasi dan penentuan  $\Delta x$  dan  $\Delta t$ . Salah satu hal yang harus diperhatikan adalah kestabilan. Dalam metode Crank-Nicolson,  $\delta_p$  adalah operator perbedaan utama untuk koordinat-p. Setelah melakukan analisis stabilitas, dapat ditunjukkan bahwa metode ini akan stabil untuk setiap  $\Delta t$ .

Salah satu kekurangan metode Crank-Nicolson adalah bahwa matriks pada persamaan di atas diberi  $\Delta t$  yang umumnya cukup besar. Hal ini membuat solusi langsung dari sistem persamaan linier cukup besar (walaupun perkiraan solusi yang efisien ada, misalnya penggunaan metode gradien konjugasi yang dikondisikan dengan faktorisasi Cholesky yang tidak lengkap).

Gagasan di balik metode ADI adalah membagi persamaan perbedaan hingga menjadi dua, satu dengan derivatif x diambil secara implisit dan berikutnya dengan derivative-nya diambil secara implisit,

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t/2} = \frac{(\delta_x^2 u_{ij}^{n+1/2} + \delta_y^2 u_{ij}^n)}{\Delta} \quad (9)$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{(\delta_x^2 u_{ij}^{n+1/2} + \delta_y^2 u_{ij}^{n+1})}{\Delta} \quad (10)$$

Dapat ditunjukkan bahwa metode ini stabil tanpa syarat dan urutan kedua dalam ruang dan

waktu (douglas, 1995) Ada beberapa yang dipergunakan untuk memperbaiki metode ADI seperti metode Douglas (douglas, 1995), atau metode f-faktor (Chang *et. al*, 1991) sehingga dapat digunakan untuk membuat pemodelan tiga dimensi atau lebih.

### Matlab

Matlab adalah suatu pemrograman untuk analisis dan komputasi numerik serta merupakan suatau bahas pemograman matematik lanjutan yang dibentuk dengan dasar pemikiran menggunakan sifat dan bentuk matrik (Laksono dan Afrianita, 2016, kiusalaas, 2005, karris, 2004).

### METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam studi ini adalah dengan mempelajari teori-teori dasar yang mendukung dalam pemodelan ini, (1) persamaan umum 1-D adveksi-dispersi (2) persamaan kecepatan rata-rata manning, (3) Persamaan Koefisien dispersi, (4) metode numerik, (5) skema yang digunakan skema lex-wendroff (lw), (6) bilangan courant (7) kondisi batas (boundary condition) yang digunakan

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### Code Matlab

Skema Lax-Wendroff (LW) menggunakan code Matlab Code adalah :

##### a. Define variable

```

b = 8; % width channel (m)
h = 0.4; % hight water (m)
l = 150000; % long channel (m)
So = 0.00005; % Slope channel
n = 0.016; % manning coeffesien
g = 9.81; % gravity (m/s^2)
A = b*h; % Area channel (m^2)
P = b + (2*h); % Radius Hydraulic (m)
R = A/P; % Hydraulic radius (m)
uev=(1/n)*(R^(2/3))*(So^0.5); % velocity averange (m/s)
u = sqrt (R*So*g); % velocity (m/s)
kx = 5.93*h*u; % Dispersion coeffecient
dx = 1000; % cell size (dx=1000 for 50 km and dx =2000 for 100km)
dt = 2; % time step
alfa = u*dt/dx; % courant number
beta = (kx*dt)/(dx^2);
time = 10000; % number of time step
nodes = 8000; % number of cells

```

##### b. nodes

```

for i = 1: nodes;
    c(i)=0;

```

dalam pemodelan ini ditetapkan;  $C(x,0) = 10$  untuk  $5\Delta x < x < 15\Delta x$  dan  $C(x,0) = 10 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{20\Delta x} \right)$  untuk  $40\Delta x < x < 60\Delta x$  dan (8) kondisi awal (initial condition) dan (9) bahasa pemograman yang digunakan dalam soft ware MATLAB.

Selanjutnya, membuat perencanaan suatu saluran air, dimana data-data yang digunakan berdasarkan kondisi dan teori yang dipelajari dari ilmu hidraulik, seperti kecepatan rata-rata air, penampang melintang suatu saluran, kemiringan saluran dasar saluran, dan kekasaran dasar saluran (digunakan untuk menentukan koefisien manning).

Setelah data-data diperoleh, maka selanjutnya dibuat algoritma numerik menggunakan software MATLAB, dimana semua rumus-rumus yang akan digunakan ditulis dalam bahasa Pemograman Matlab. Dan akhirnya melakukan analisa dan menyimpulkan hasil pemodelan konsentrasi limbah di saluran air.

```

    x(i)=i*dx;
end
for i=5:15;
    c(i)=10;
end
for i=40:60;
    c(i)=10*(sin((pi*i)/20)).^2;
end

```

c. plotting (x,c)

```

plot(x,c,xlabel('distance (m)'), ylabel('concentration(mg/l)');
axis ([0 150000 -1 12])
grid on
hold on

```

d. time

```

for j=1:time;
for i=2:nodes-1
    c(i)=c(i)-0.5*alfa*(c(i+1)-c(i-1))+(0.5*(alfa^2)*(c(i+1)-2*c(i)+c(i-1)))+beta*(c(i+1)-
    2*c(i)+c(i-1));
end
end

```

e. plotting

```

plot(x,c,'g'), xlabel('distance(m)'), ylabel('concentration (mg/L)');
axis ([0 150000 -3 14])
grid on
hold on

```

a. plotting

```

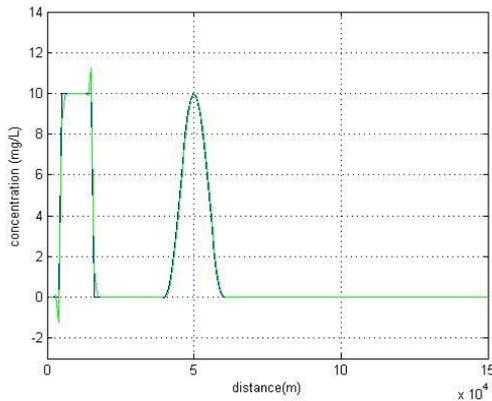
plot(x,c,'g'), xlabel('distance(m)'), ylabel('concentration (mg/L)');
axis ([0 150000 -3 14])
grid on
hold on

```

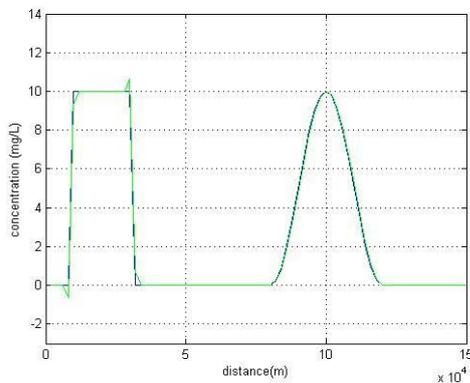
### Pembahasan :

Dari hasil pemodelan terjadi perubahan konsentrasi limbah, karena pengaruh kecepatan aliran, semakin panjang jarak yang akan di prediksi dari lokasi pembuangan limbah, maka semakin besar area yang terkena dampak limbah, pada jarak 50 km dari lokasi pembuangan limbah, daerah yang terpengaruh mulai titik 40 km hingga 60 kilometer, areal yang terdampak tergantung pada kecepatan aliran yang berdasarkan rumus yang dikemukakan oleh robert manning (1889), dimana kecepatan aliran tergantung pada karakteristik penampang saluran (R), kemiringan saluran (S) dan kekasaran manning (n).

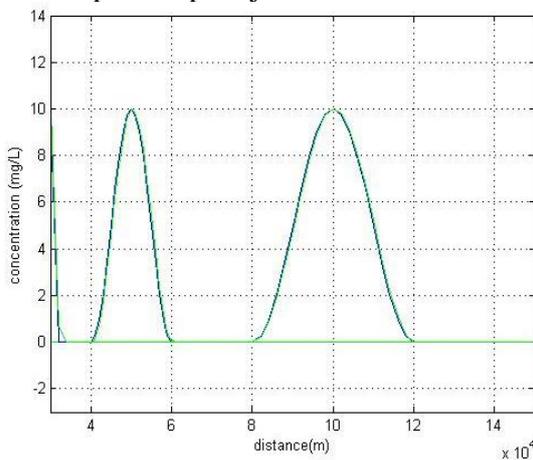
Selanjutnya, hasil simulasi model, Koefesien dispersi tidak terlalu berpengaruh pada konsentrasi limbah dibandingkan dengan kecepatan aliran (lihat gambar 1), karena kedalaman sungai atau saluran model tidak dalam (dangkal). Begitu pula, jika kita analisa, hasil simulasi konsentrasi limbah pada lokasi 100 km dari titik pembuangan limbah, maka areal yang terkontaminasi antara 80 km hingga 100 km, dari titik pembuangan limbah, dimana pada km ke 80 lebih sedikit mendekati km ke 120 konsentrasi limbahnya pada titik minimum atau mendekati nol (lihat gambar 2 dan 3). Area yang terdampak semakin meluas akibat dari kecepatan yang konstan/tetap (steady) dan pengaruh limbahnya 2x lebih besar dari pemodelan pada jarak 50 km.



Gambar 1. Grafik hasil pemodelan konsentrasi polutan pada jarak 100 km



Gambar 2. Grafik hasil pemodelan konsentrasi polutan pada jarak 100 km



Gambar 3. Grafik hasil pemodelan konsentrasi polutan pada jarak 50 dan 100 km

Tabel 1. Jarak Terdampak Limbah Hasil Pemodelan

Area yang terdampak limbah		
C-minimum-1	C-maksimum	C minimum-2
40	50	60
80	100	120

## KESIMPULAN

Dari hasil pemodelan dapat disimpulkan terjadi pelebaran kurva konsentrasi polutan akibat pengaruh dari hidrolika. Pada saat konsentrasi polutan tertinggi berada 50 km dari lokasi pembuangan limbah, area terdampak polutan 40 – 60 km, sedangkan pada jarak 100 km dari lokasi pembuangan limbah, area yang terpengaruh oleh polutan 80 – 120 km .

## DAFTAR PUSTAKA

- Ch. Gao, and Wang (1996). " Peaceman general formulation and Rachford ADI method for N-dim heat diffusion equations. " *Command Heat Mass Transfer, Aviation*". 23, no 6, pp. 845 – 854.
- Chang, M. J.; Chow, L. C.; Chang, W. S. (1991), "Improved alternating-direction implicit method for solving transient three-dimensional heat diffusion problems", *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, **19** (1): 69–84.
- Douglas, Jr., J. (1955), "On the numerical integration of  $u_{xx} + u_{yy} = u_i$  by implicit methods", *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*, **3**: 42–65.
- Douglas Jr., Jim (1962), "Alternating direction methods for three space variables", *Numerische Mathematik*, **4** (1): 41–63.
- Kiusalaas, J. (2005). " *Numerical Method in Engineering with MATLAB*". Cambridge University Press, New York.
- Karris, S.T. (2004). " *Numerical Analysis Using MATLAB and Spreadsheets*". Orchard Publications, USA.
- Peaceman, D. W.; Rachford Jr., H. H. (1955), "The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **3** (1): 28–41.
- Press, WH; Teukolsky, SA; Vetterling, WT; Flannery, BP (2007). "Section 20.3.3. Operator Splitting Methods Generally". *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). New York: Cambridge University Press.
- W.Y. Yang, and J. Morris (2005). " *Applied numerical method using Matlab*". Wiley-Interscience.

Yudianto D, Xie Y. (2008). “the developments of simple dissolved oxygen sag curve in lowland non-tidal river by using matlab”.

*Journal of Applied Sciences in Environmental Sanitation, ASCE, Vol.3 (3), pp. 137-155.*