REPRESENTASI NILAI EIGEN MATRIKS ATAS ALJABAR MAKS-PLUS TERSIMETRI DENGAN *ELCP*

(*REPRESENTATION OF EIGEN VALUE OF MATRICE OVER THE SYMMETRIZED MAX-PLUS ALGEBRA WITH ELCP*)

Gregoria Ariyanti[1], Ari Suparwanto[2], Budi Surodjo[3]
[1]Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Widya Mandala Surabaya Kampus Madiun, ariyanti_gregoria@yahoo.com
[2]Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta,
ari_suparwanto@ugm.ac.id
[3]Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta, surodjo_b@ugm.ac.id

Abstrak

Aljabar maks-plus tersimetri merupakan perluasan dari aljabar maks-plus. Karena matriks atas aljabar maks-plus tersimetri dapat didefinisikan determinan maka persamaan karakteristiknya dapat diformulasikan sebagai sistem persamaan polinomial multivariabel aljabar maks-plus. Diperlukan suatu langkah menentukan nilai eigen dengan menggunakan alat yang disebut Masalah Linear Komplementer Diperluas (*Extended Linear Complementarity Problem* atau ELCP). Dalam tulisan ini, dipaparkan penggunaan ELCP dalam menentukan nilai eigen matriks atas aljabar maks-plus tersimetri. Penggunaan ELCP dilakukan dengan langkah-langkah yaitu mengubah persamaan karakteristik yang diperoleh dari suatu matriks ke bentuk sistem kesetimbangan linear. Selanjutnya, akar persamaan karakteristik yang diperoleh merupakan penyelesaian dari sistem kesetimbangan linear yang merupakan nilai eigen dari matriks tersebut. Akibatnya, diperoleh representasi nilai eigen matriks atas aljabar maks-plus tersimetri dengan ELCP.

Kata kunci: *aljabar maks-plus tersimetri, nilai eigen, ELCP*

Abstract

The Symmetrized Max-Plus Algebra is an extension of max-plus algebra. Because the matrix over the symmetrized max-plus algebra can be defined as a determinant, characteristic equations can be formulated as a max-plus algebra polynomial equation system. Steps are needed to determine the eigenvalue by using a tool called the Extended Linear Complementarity Problem (ELCP). In this paper, we explain the use of ELCP in determining the matrix eigenvalues over the symmetrized max-plus algebra. The use of ELCP is done by the steps of changing the characteristic equation obtained from the matrix to form a linear balanced system. Next, the root of the characteristic equation obtained is the solution of the linear balanced system which is the eigenvalue of the matrix. As a result, we get a representation of the matrix eigenvalue over the symmetrized max-plus algebra with ELCP.

Keywords: *the symmetrized max-plus algebra, eigenvalue, ELCP*

PENDAHULUAN

Latar Belakang Masalah

Aljabar maks-plus adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan ε := -∞, dilengkapi operasi biner ⊕ dan ⊗ yang didefinisikan sebagai $a \oplus b$:= max (a,b) dan $a \otimes b$:= $a + b$. untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ (De Schutter, 2001 dan Farlow, 2009). Aljabar maks-plus merupakan salah satu contoh struktur aljabar semiring. Lebih lanjut lagi, Farlow (2009) dan Olsder & Woude (2005) menyatakan bahwa setiap elemen di dalam aljabar maks-plus yang bukan ε tidak mempunyai invers terhadap ⊕. Dengan kata lain, jika $a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ maka tidak ada $b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ sehingga $a \oplus b = b \oplus a = \varepsilon$, kecuali jika $a = \varepsilon$.

Hal tersebut merupakan salah satu alasan aljabar maks-plus dikembangkan menjadi himpunan yang lebih luas yang disebut aljabar maks-plus tersimetri (*the symmetrized max-plus algebra*), yang dinotasikan dengan $(\mathbb{S},\oplus,\otimes)$ (Ariyanti et al, 2015, De Schutter, 1996, Singh et al, 2008, dan Poplin, 2000).

Untuk menentukan nilai eigen suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, tidak sesederhana seperti menentukan nilai eigen aljabar konvensional. Karena untuk matriks atas aljabar maks-plus tersimetri dapat didefinisikan determinan, maka terlebih dahulu dibentuk membentuk persamaan karakteristik dari matriks atas aljabar maks-plus tersimetri. Persamaan karakteristik yang diperoleh, dapat dibawa ke sistem kesetimbangan linear yang selanjutnya dapat diformulasikan sebagai sistem persamaan dan pertidaksamaan polinomial multivariabel aljabar maks.

Untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan dan pertidaksamaan polinomial multivariabel aljabar maks dapat menggunakan operasi-operasi seperti dalam aljabar konvensional melalui alat matematika yang dikenal dengan masalah linear komplementer diperluas (*Extended Linear Complementarity Problem*) atau ELCP (De Schutter & De Moor, 1997).

Nilai Eigen Matriks atas Aljabar Maks-Plus Tersimetri

Sebelum diberikan definisi nilai eigen, berikut ini diberikan definisi elemen dan operasi pada aljabar maks-plus tersimetri berdasarkan Ariyanti et al (2015) dan Singh et al (2008).

Definition 2.1 (Ariyanti et al, 2015) Diberikan himpunan pasangan berurutan $\mathbb{R}_\varepsilon^2 = \mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$ dengan operasi ⊕ dan ⊗ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$(x,y) \oplus (w,z) = (x \oplus w, y \oplus z)$$

$$(x,y) \otimes (w,z) = (x \otimes w \oplus y \otimes z, x \otimes z \oplus y \otimes w) \quad \square$$

Untuk $(x,y),(w,z) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2$, dengan operasi ⊕ dan ⊗ pada ruas kanan bersesuaian dengan maksimum dan penjumlahan yang didefinisikan dalam aljabar maks-plus. Demikian juga ⊕ dan ⊗ pada ruas kiri yaitu operasi yang bersesuaian dengan ⊕ dan ⊗ seperti yang didefinisikan dalam aljabar maks-plus. Elemen (ε,ε) adalah identitas penjumlahan ⊕ dan elemen (e,ε) adalah identitas perkalian ⊗ (Singh et al, 2008).

Lemma 2.2 (Singh et al, 2008) Operasi ⊕ dalam $\mathbb{R}_\varepsilon^2$ bersifat asosiatif, komutatif dan idempoten, dan elemen nolnya adalah (ε, ε). Operasi ⊗ bersifat asosiatif, komutatif dan distributif terhadap ⊕, elemen identitas dari ⊗ adalah (e,ε) dan elemen nolnya adalah (ε,ε) yang juga merupakan elemen penyerap untuk ⊗. Struktur ($\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$, ⊕, ⊗) disebut aljabar pasangan (*the algebra of pairs*). □

Selanjutnya, diberikan relasi lain yang dekat dengan relasi setimbang dan didefinisikan sebagai berikut : untuk u= (x,y), v = (w,z)∈ $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$. maka

$$(x,y)\,\mathcal{B}\,(w,z) \text{ jika } \begin{cases} (x,y)\,\nabla\,(w,z)\; jika\; x \neq y\; dan\; w \neq z \\ (x,y) = (w,z)\; sebaliknya \end{cases}$$

Karena merupakan relasi ekuivalensi, maka dapat dibentuk kelas ekuivalensi yang dibangun oleh $\mathcal{B}$. Sehingga didefinisikan himpunan faktor $\mathbb{S} = \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}/_{\mathcal{B}}$ dan disebut aljabar maks-plus tersimetri (De Schutter, 1997, Ariyanti et al, 2015).

Jika dihubungkan dengan $\mathbb{R}_{\varepsilon}$, maka akan diperoleh himpunan sebagai berikut:

$\mathbb{S}^{\oplus} = \mathbb{R}_{\varepsilon}^{\oplus}$= himpunan elemen positif maks plus;

$\mathbb{S}^{\ominus} = \mathbb{R}_{\varepsilon}^{\ominus}$ = himpunan elemen negatif maks plus = $\{\ominus t \mid t \in \mathbb{S}^{\oplus}\}$; dan

$\mathbb{S}^{\bullet} = \mathbb{R}_{\varepsilon}^{\bullet}$= himpunan elemen setimbang = $\{t^{\bullet} \mid t \in \mathbb{S}^{\oplus}\}$.

Lemma 2.3 (Singh et al, 2008)

1. $\mathbb{S}^{\oplus}$ memenuhi sifat semifield
2. $\mathbb{S}^{\ominus}$ tidak tertutup terhadap operasi ⊗ sehingga bukan merupakan semifield
3. $\mathbb{S}^{\bullet}$ isomorfik terhadap $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ □

De Shutter (1996) mendefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaan pada $\mathbb{S}$ sebagai berikut:

$$\overline{(a,b)} \oplus \overline{(c,d)} = \overline{(a \oplus c, b \oplus d)}$$
$$\overline{(a,b)} \otimes \overline{(c,d)} = \overline{(a \otimes c \oplus b \otimes d, a \otimes d \oplus b \otimes c)}$$

untuk $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{S}$.

Berikut ini diberikan definisi nilai eigen suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri yang diturunkan dari definisi nilai eigen matriks atas aljabar maks-plus.

Definisi 2.4 Diberikan $A \in M_n(\mathbb{S})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{S}$ disebut nilai eigen dari A jika terdapat $v \in M_{nx1}(\mathbb{S})$, v tak setimbang dengan $\varepsilon_{n\times 1}$ sehingga $A \otimes v \nabla \lambda \otimes v$. Vektor v disebut vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ. □

Oleh karena dapat didefinisikan determinan suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, maka dapat dibentuk persamaan karakteristik dari matriks tersebut. Selanjutnya, persamaan karakteristik suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.5 Diberikan matriks $A \in M_n(\mathbb{S})$. Persamaan karakteristik dari A didefinisikan sebagai $\det(A \ominus \lambda \otimes E_n) \nabla \varepsilon$. □

Berikut ini merupakan syarat perlu dan cukup nilai eigen matriks atas aljabar maks-plus tersimetri.

Teorema 2.6 Diberikan $A \in M_n(\mathbb{S})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{S}$ merupakan nilai eigen dari A jika dan hanya jika λ memenuhi persamaan karakteristik det($A \ominus \lambda \otimes E_n)\nabla\varepsilon$. □

Di dalam definisi berikut, diberikan hubungan antara nilai eigen dan persamaan karakteristik atas aljabar maks-plus tersimetri.

Definisi 2.7 (De Schutter, 1996) Diberikan matriks $A \in M_n(\mathbb{S})$. Untuk $det(\lambda \otimes E_n \ominus A)\nabla\varepsilon$ berlaku

$$\lambda^{\otimes^n} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} a_k \otimes \lambda^{\otimes^{n-k}} \nabla \varepsilon$$

dengan $a_k = (\ominus 0)^{\otimes^k} \otimes \bigoplus_{\varphi \in C_n^k} det A_{\varphi\varphi}$ untuk k = 1, 2, ..., n. □

Masalah Linear Komplementer Diperluas (*Extended Linear Complementarity Problem*) atau ELCP

Bentuk permasalahan ELCP berikut (De Schutter & De Moor, 1997) :
Diberikan matriks $A \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ dan $B \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$ serta vektor kolom $\bar{c} \in M_{p\times 1}(\mathbb{R})$ dan $\bar{d} \in M_{q\times 1}(\mathbb{R})$. Diberikan juga himpunan $\varphi_j \subset \{1, 2, \dots, p\}$ dengan j=1,2,...,m. Akan ditentukan vektor $\bar{x} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ sehingga memenuhi

$$\sum_{j=1}^{m} \prod_{i \in \varphi_j} (A\bar{x} - \bar{c})_i = 0 \quad (1)$$

$$\text{dengan } A\bar{x} \geq \bar{c} \quad (2)$$
$$B\bar{x} = \bar{d}$$

Persamaan (1) disebut kondisi komplementer. Himpunan vektor $\bar{x}$ yang memenuhi (2) akan menjadi penyelesaian dari masalah tersebut. Bentuk ELCP dengan kendala (2) dapat diselesaikan dengan mengubah bentuk ELCP (1) dan (2) menjadi bentuk ELCP homogen. Bentuk umum dari ELCP homogen sebagai berikut.

Diberikan matriks $P \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ dan $Q \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$ serta himpunan $\varphi_j \subset \{1, 2, \dots, p\}$ dengan *j* = 1, 2, ..., *m*. Akan ditentukan vektor nontrivial $\bar{u} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ sehingga memenuhi

$$\sum_{j=1}^{m} \prod_{i \in \varphi_j} (P\bar{u})_i = 0 \quad (3)$$

$$\text{dengan } P\bar{u} \geq 0 \quad (4)$$
$$Q\bar{x} = 0$$

Bentuk ELCP pada (1) dan (2) dapat dibawa ke bentuk ELCP homogen (3) dan (4) dengan mengambil

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \alpha \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} A & -\bar{c} \\ 0_{1\times n} & 1 \end{pmatrix}, dan\ Q = \begin{pmatrix} B & -\bar{d} \end{pmatrix}$$

dengan $\alpha \geq 0$. Semua vektor $\bar{u}$ yang memenuhi (4) akan membentuk himpunan penyelesaian dari permasalahan di atas.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bentuk umum sistem persamaan dan pertidaksamaan polinomial multivariabel dalam aljabar maks-plus sebagai berikut (De Schutter & De Moor, 1997):

Diberikan $p_1 + p_2$, dengan$p_1 + p_2 \in \mathbb{N}$, bilangan bulat $m_1, m_2, \dots, m_{p_1+p_2} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $a_{ki}, b_k, c_{kij} \in \mathbb{R}$, untuk $k = 1, 2, \dots, p_1 + p_2, i = 1, 2, \dots, m_k, dan\ j = 1, 2, \dots, n$ serta akan dicari vektor $\bar{x} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ sehingga memenuhi :

$$\bigoplus_{i=1}^{m_k} a_{ki} \otimes \bigotimes_{j=1}^{n} x_j^{\otimes^{c_{kij}}} = b_k, untuk\ k = 1, 2, \dots, p_1 \quad (5)$$

$$\bigoplus_{i=1}^{m_k} a_{ki} \otimes \bigotimes_{j=1}^{n} x_j^{\otimes^{c_{kij}}} \leq b_k, \text{untuk } k = p_1 + 1, p_1 + 2, \dots, p_1 + p_2 \quad (6)$$

Hubungan Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Polinomial Multivariabel dalam Maks-Plus dengan ELCP dinyatakan De Schutter & De Moor (1997) seperti dalam teorema berikut.

Teorema b.1 (De Schutter & De Moor, 1997) Sistem persamaan dan pertidaksamaan polinomial multivariabel dalam aljabar maks-plus ekuivalen dengan masalah linier komplementer yang diperluas (ELCP). ■

Dari (5) dan (6) dapat dibentuk matriks

$$A = \begin{pmatrix} -C_1 \\ -C_2 \\ \vdots \\ -C_{p_1+p_2} \end{pmatrix} \text{dan } c = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ \vdots \\ -d_{p_1+p_2} \end{pmatrix}$$

dengan $(C_k)_{ij} = (c_{kij})$ dan $(d_k)_i = (d_{ki})$ untuk $k = 1, 2, \dots, p_1 + p_2, i = 1, 2, \dots, m_k$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

Didefinisikan sebanyak p_1 himpunan $\varphi_1, \varphi_2, \dots., \varphi_{p_1}$ sehingga

$$\varphi_j = \{s_j + 1, s_j + 2, \dots, s_j + m_j\}$$

dengan $s_1 = 0, j = 1, 2, \dots, p_1$ dan $s_{j+1} = s_j + m_j$ dengan $j = 1, 2, \dots, p_1 - 1$.

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \{s_1 + 1, s_1 + 2, \dots, s_1 + m_1\} = \{1, 2, \dots, m_1\} \\
\varphi_2 &= \{s_2 + 1, s_2 + 2, \dots, s_2 + m_2\} \\
&= \{s_1 + m_1 + 1, s_1 + m_1 + 2, \dots, s_1 + m_1 + m_2\} \\
&= \{m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_1 + m_2\} \\
&\vdots \\
\varphi_{p_1} &= \{s_{p_1} + 1, s_{p_1} + 2, \dots, s_{p_1} + m_{p_1}\} \\
&= \{m_1 + m_2 + \dots + m_{p_1-1} + 1, m_1 + m_2 + \dots + m_{p_1-1} + 2, \dots, m_1 + \\
&\quad m_2 + \dots + m_{p_1-1} + m_{p_1}\}
\end{aligned}$$

Masalah dalam bentuk (5) dan (6) ekuivalen dengan ELCP berikut :

Diberikan $A, \bar{c}, dan\ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{p_1}$. Akan ditentukan $\bar{x} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ sehingga memenuhi

$$\sum_{j=1}^{m} \prod_{i \in \varphi_j} (A\bar{x} - \bar{c})_i = 0$$

dengan $A\bar{x} \geq \bar{c}$.

Jika m_k dalam persamaan (5) sama dengan 1, maka diperoleh :

$$a_{kl} + \sum_{j=1}^{n} c_{klj}x_j = b_k, untuk\ \ k = 1, 2, \dots, p_1$$

Jika kedua ruas ditambah dengan $-a_{kl}$ dan didefinisikan $d_{lk} = b_k - a_{kl}$, maka diperoleh $\sum_{j=1}^{n} c_{klj}x_j = d_{lk}$. Sehingga diperoleh matriks

$$B = \begin{pmatrix} c_{111} & c_{112} & \cdots & c_{11n} \\ c_{211} & c_{212} & \cdots & c_{21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p_1 11} & c_{p_1 12} & \cdots & c_{p_1 1n} \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{dan } \bar{d} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{p_1 1} \end{pmatrix}.$$

Dengan kata lain, diperoleh persamaan dalam bentuk matriks $B\bar{x} = \bar{d}$.

Representasi nilai eigen matriks atas aljabar maks-plus tersimetri dengan ELCP diberikan dalam contoh berikut.

Contoh b.2

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} \ominus 2 & 1 & \varepsilon \\ 1 & \ominus 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Dalam **Definisi 2.7** diberikan representasi persamaan karakteristik dari suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri.

Dari matriks A, menggunakan **Definisi 2.7** diperoleh persamaan karakteristik yaitu

$$\lambda^{\otimes^3} \oplus a_1 \otimes \lambda^{\otimes^2} \oplus a_2 \otimes \lambda^{\otimes^1} \oplus a_3 \nabla \varepsilon$$

atau

$$\lambda^{\otimes^3} \oplus 2^{\bullet} \otimes \lambda^{\otimes 2} \quad \oplus \ominus 4 \otimes \lambda \oplus 4^{\bullet} \nabla \varepsilon.$$

Selanjutnya,

$$\lambda^{\otimes^3} \oplus 2 \otimes \lambda^{\otimes^2} \oplus 4 \nabla 2 \otimes \lambda^{\otimes^2} \oplus 4 \otimes \lambda \oplus 4.$$

Dengan menyatakan $\lambda = \lambda^{\oplus} \ominus \lambda^{\ominus}$ maka diperoleh

$$\left[(\lambda^{\oplus})^{\otimes^3} \ominus (\lambda^{\ominus})^{\otimes^3}\right] \oplus 2 \otimes \left[(\lambda^{\oplus})^{\otimes^2} \oplus (\lambda^{\ominus})^{\otimes^2}\right] \oplus 4 \nabla 2 \otimes \left[(\lambda^{\oplus})^{\otimes^2} \oplus (\lambda^{\ominus})^{\otimes^2}\right] \oplus 4 \otimes [\lambda^{\oplus} \ominus \lambda^{\ominus}] \oplus 4$$

Didapat persamaan

$$(\lambda^{\oplus})^{\otimes^3} \oplus 2 \otimes (\lambda^{\oplus})^{\otimes^2} \oplus 2 \otimes (\lambda^{\ominus})^{\otimes^2} \oplus 4 \otimes \lambda^{\ominus} \oplus 4 = p \qquad (7)$$

dan

$$(\lambda^{\ominus})^{\otimes^3} \oplus 2 \otimes (\lambda^{\oplus})^{\otimes^2} \oplus 2 \otimes (\lambda^{\ominus})^{\otimes^2} \oplus 4 \otimes \lambda^{\oplus} \oplus 4 = p \qquad (8)$$

Kemudian dengan mengalikan $p^{\otimes^{-1}}$ pada persamaan (7) dan persamaan (8) diperoleh

$$(\lambda^{\oplus})^{\otimes^3} \otimes p^{\otimes^{-1}} \oplus 2 \otimes (\lambda^{\oplus})^{\otimes^2} \otimes p^{\otimes^{-1}} \oplus 2 \otimes (\lambda^{\ominus})^{\otimes^2} \otimes p^{\otimes^{-1}} \oplus 4 \otimes \lambda^{\ominus} \otimes p^{\otimes^{-1}} \oplus 4 \otimes p^{\otimes^{-1}} = 0$$

dan

$$(\lambda^{\ominus})^{\otimes^3} \otimes p^{\otimes^{-1}} \oplus 2 \otimes (\lambda^{\oplus})^{\otimes^2} \otimes p^{\otimes^{-1}} \oplus 2 \otimes (\lambda^{\ominus})^{\otimes^2} \otimes p^{\otimes^{-1}} \oplus 4 \otimes \lambda^{\oplus} \otimes p^{\otimes^{-1}} \oplus 4 \otimes p^{\otimes^{-1}} = 0$$

Kedua persamaan di atas dapat dipandang sebagai Sistem Persamaan Polinomial Multivariabel dalam Maks Plus. Dengan kata lain memenuhi bentuk (5).
Akibatnya diperoleh :

$$-C_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; -C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; -d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; -d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya dibentuk matriks

$$A = \begin{pmatrix} -C_1 \\ -C_2 \end{pmatrix} \text{ dan } C = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \end{pmatrix}.$$

Diperhatikan vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ dengan $\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda^{\oplus} \\ \lambda^{\ominus} \\ p^{\otimes^{-1}} \end{pmatrix}$. Selanjutnya didefinisikan

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \{s_1 + 1, s_1 + 2, s_1 + 3, s_1 + 4, s_1 + 5\ \} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ \varphi_2 &= \{s_2 + 1, s_2 + 2, s_2 + 3, s_2 + 4, s_2 + 5\} \\ &= \{s_1 + m_1 + 1, s_1 + m_1 + 2, s_1 + m_1 + 3, s_1 + m_1 + 4, s_1 + m_1 + 5\} \\ &= \{6, 7, 8, 9, 10\}. \end{aligned}$$

Dibentuk ELCP homogen dengan :

$$P = \begin{pmatrix} A & -C \\ 0_{1\times n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{\oplus} \\ \lambda^{\ominus} \\ p^{\otimes^{-1}} \\ \alpha \end{pmatrix} \text{dengan}$$

$$(Pu)_1(Pu)_2(Pu)_3(Pu)_4(Pu)_5 + (Pu)_6(Pu)_7(Pu)_8(Pu)_9(Pu)_{10} = 0, (Pu) \geq 0.$$

Selanjutnya, proses menentukan nilai eigen dari ELCP yang diperoleh mengacu pada algoritma yang dinyatakan oleh De Schutter & De Moor (1997) dan Program *MATLAB* yang telah dikembangkan peneliti menyesuaikan matriks yang diberikan.

Dari eksekusi Program *MATLAB* yang sudah peneliti kembangkan, diperoleh himpunan pembangun ekstrim, yaitu

$$\mathrm{E} = \{x_1^e, x_2^e, x_3^e, x_4^e, x_5^e, x_6^e\ \} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

dan penyelesaian umum yang diperoleh tersebut adalah

$$\bar{u} = \kappa_1 x_1^e + \kappa_2 x_2^e + \kappa_3 x_3^e + \kappa_4 x_4^e + \kappa_5 x_5^e + \kappa_6 x_6^e$$

dengan $\kappa_i \geq 0$ dan $\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{\oplus} \\ \lambda^{\ominus} \\ p^{\otimes^{-1}} \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Salah satu nilai eigen diperoleh dengan mengambil

$$\mathrm{K}_1 = 0, \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_3 = \mathrm{K}_4 = 1, \mathrm{K}_5 = \mathrm{K}_6 = 0$$

berakibat $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, sehingga nilai eigen yang diperoleh adalah

$$\lambda = \lambda^{\oplus} \ominus \lambda^{\ominus} = 2 \ominus 1 = 2.$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, digunakan Masalah Linear Komplementer Diperluas (*Extended Linear Complementarity Problem* disingkat ELCP). Persamaan karakteristik yang diperoleh dari suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri dapat dibawa ke sistem kesetimbangan linear melalui ELCP. Akar persamaan karakteristik yang diperoleh akan merupakan penyelesaian dari sistem kesetimbangan linear, yang selanjutnya merupakan nilai eigen dari matriks tersebut. Nilai eigen yang diperoleh cukup banyak tidak bergantung pada ukuran atau ordo matriks.

Di dalam penelitian ini, tidak semua nilai eigen dari matriks atas aljabar maks-plus tersimetri dapat ditinjau mengingat banyaknya nilai eigen yang diperoleh dari matriks yang diberikan. Hal tersebut tampak pada hasil yang ditunjukkan dalam Contoh b.2 dalam bahasan utama. Karena cukup banyaknya nilai eigen yang diperoleh dari suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, sehingga untuk penelitian berikutnya perlu ditinjau melalui pendekatan lain.

DAFTAR RUJUKAN

Ariyanti, G. (2015). Necessary and Sufficient Conditions for The Solution of The Linear Balanced Systems in The Symmetrized Max Plus Algebra. *Far East J. Math. Sci (FJMS) Vol. 97 No. 2*, 253-266.

De Schutter, B. (1996). *Max-Algebraic System Theory for Discret Event Systems.* Leuven: PhD Thesis, Department of Electrical Engineering Katholieke Universiteit Leuven.

De Schutter, B., & De Moor, B. (1997). The Extended Linear Complementarity Problem and Its Application in The Max-Plus Algebra. In M. Ferris, J. Pang, & eds., *Complementarity and Variational Problems: State of the Art (M.C. Ferris and J.S. Pang, eds.)* (pp. 22-39). Philadelphia, Pennysylvania: SIAM, ISBN 0-89871-391-9.

Farlow, K. (2009). *Max-PLus Algebra.* Virginia: Master Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.

Olsder, G., & Woude, J. (2005). *Max Plus at Work.* Princeton: Princeton University Press.

Poplin, P. (2000). *The Semiring of Multisets.* Raleigh: Thesis, Faculty of North Caroline State University.

Singh, D., Ibrahim, M., & Singh, J. (2008). A Note on Symmetrized Max-Plus Algebra. *Journal of Mathematical Sciences and Mathematics Education Vol. 5 No. 1*, 1-10.