



Disponível em  
<http://www.desafioonline.ufms.br>  
Desafio Online, Campo Grande, v. 4, n. 1, Abril 2016



**COOPERAR OU NÃO COOPERAR?  
UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DOS JOGOS**

**COOPERATE OR NOT TO COOPERATE?  
ANALYSIS IN THE LIGHT OF THE THEORY OF GAMES**

Michel Constantino. Universidade Católica Dom Bosco.  
Programa de Pós Graduação em Desenvolvimento Local, Campo Grande-MS.  
[michel@ucdb.br](mailto:michel@ucdb.br), (67)3312-3676.

Reginaldo Brito da Costa.

Universidade Católica Dom Bosco. Programa de Pós Graduação em  
Desenvolvimento Local, Campo Grande-MS. [reg.brito.costa@gmail.com](mailto:reg.brito.costa@gmail.com)

Dany Rafael Fonseca Mendes.

Centro Universitário de Brasília – UNICEUB. Departamento de Direito. Brasília-  
DF. [rafael.dany@gmail.com](mailto:rafael.dany@gmail.com).

Eduardo Borges da Silva.

Caixa Econômica Federal – CEF. Departamento de modelagem e risco. Brasília –  
DF. [eduardo-borges.silva@caixa.gov.br](mailto:eduardo-borges.silva@caixa.gov.br).

Mateus Mello Garrute.

Pinheiro & Mello Advogados. Departamento de Direito Marítimo. Vitória-ES.  
[mmgarrute@yahoo.com.br](mailto:mmgarrute@yahoo.com.br).

**Resumo**

Smith (1776) afirmou que as ações individuais promovem o bem comum. Nash (1950) completou a teoria smithiana provando que a cooperação, mesmo entre concorrentes podem levar ao bem comum. Nesse contexto o presente artigo teve como objetivo revisitar a teoria dos jogos e discutir a cooperação e não cooperação entre agentes econômicos e suas estratégias. Os resultados mostram que os modelos de *Cournot* e *Bertrand* são superados pela modelagem de Cartel, onde, prova matematicamente que a cooperação via concorrentes traz maiores retornos (*payoffs*) no caso do duopólio com demanda linear.

**Palavras-chave:** Teoria dos Jogos. Cooperação. Equilíbrio de Nash. Cartel. Duopólio.

**Abstract**

*Smith (1776) stated that individual actions promote the common good. Nash (1950) completed the Smithian theory proving that cooperation, even among competitors can lead to the common good. In this context, this article aims to revisit the game theory and discuss cooperation and non-cooperation between economic agents and their strategies. The results show that models of Cournot and Bertrand are overcome by modeling Cartel, which proves mathematically that cooperation via competitors brings higher returns (payoffs) in the case of duopoly with linear demand.*

**Keywords:** Game Theory. Cooperation. Nash equilibrium. Cartel. Duopoly.

## 1. INTRODUÇÃO

As interações sociais, seus conflitos e comportamentos são fonte de pesquisa empírica em várias áreas de estudo. Os indivíduos buscam seu bem-estar e esse propósito pode levar ao bem-estar comum, ou seja, da sociedade.

A cooperação é estímulo de pesquisa e tema recorrente no meio acadêmico. A teoria dos jogos formaliza a ideia de cooperação ou não-cooperação como uma estratégia utilizada na transação entre indivíduos, firmas, governos e concorrentes. A forma de análise recai sobre o retorno da ação de cooperar ou não-cooperar, permitindo de forma dinâmica ou estática entender o funcionamento da mente humana em situações diversas.

Nesse experimento, o jogo é contextualizado entre duas firmas, o pressuposto de maximização de lucro ( $\pi$ ) é levado em conta nessa pesquisa, pois, a abordagem aqui apresentada vem da escola neoclássica da economia. A definição inicial é que a firma maximiza seu lucro quando a Receita Marginal ( $Rmg$ ) se iguala ao Custo Marginal ( $Cmg$ ), e esse último esteja em crescimento.

A teoria dos jogos (TJ) foi implementada para modelar matematicamente a interação entre agentes econômicos e tornar interativo as decisões de cooperação ou não cooperação. Os ganhos ou pagamentos (*payoffs*) são os resultados esperados ( $\Pi$  ( $\sigma$ )) da interação estática ou dinâmica, levando em consideração as estratégias limitadas que o mercado ou o setor da empresa impõe.

O objetivo do presente artigo é revisar a teoria dos jogos (TJ) e discutir a cooperação e não-cooperação entre agentes econômicos e suas estratégias. Levando em conta também a formação ou não de cartel, pois, procura-se examinar se a cooperação entre concorrentes vale a pena ou não. A abordagem é inteiramente baseada na teoria

matemática e suas conclusões vem do uso dos modelos de *Cournot*<sup>1</sup>, *Bertrand*<sup>2</sup> e do Equilíbrio de *Nash*<sup>3</sup>.

A metodologia de pesquisa se baseia em construção dos modelos de jogos cooperativos exaustivamente utilizados na literatura de teoria dos jogos, contemplando exemplos de modelo de oligopólio-duopólio que verificam teoricamente os resultados alcançados em cada interação dos modelos utilizados.

Para desenvolvimento da pesquisa este estudo foi dividido nessa introdução, na seção 2 que trata da teoria dos jogos, seus precursores e definições teóricas dos modelos. Na seção 3 desenvolve os aspectos metodológicos e a seção 4 traz a análise dos modelos e as considerações finais são discutidas na seção 5.

## 2. TEORIA DOS JOGOS

A modelagem matemática da teoria dos jogos tanto podem ser aplicados a simples jogos de entretenimento como a aspectos significativos da vida em sociedade.

A teoria dos jogos, também chamada da teoria das escolhas, tornou-se um ramo proeminente da matemática ou da economia matemática nos anos 1930, especialmente depois da publicação de *The Theory of Games and Economic Behavior* (1944) de Neumann & Morgenstern.

A teoria dos jogos ficou mais conhecida a partir da premiação do Nobel de Economia de John Nash em 1994. Com sua pesquisa sobre equilíbrio, Nash (1950; 1951) intensificou novos experimentos e incentivou novas publicações após seus artigos, *Equilibrium Points in n-Person Games* em 1950, e *Non-Cooperative Games* em 1951, publicados no famoso *Annals of Mathematics*. Seus estudos abordam as decisões que são tomadas em um ambiente onde vários jogadores interagem, e fazem suas escolhas ótimas quando o custo e benefício de cada opção não é fixo, mas depende, sobretudo, da escolha dos outros indivíduos.

Na área de economia, a teoria dos jogos é fundamental na medida em que procura encontrar estratégias racionais em situações em que o resultado depende não só da estratégia própria de um agente e das condições de mercado, mas também das

---

<sup>1</sup> O modelo de Cournot foi desenvolvido por Antoine Augustin Cournot (1801-1877) ao observar da concorrência em um mercado em duopólio.

<sup>2</sup> Joseph Bertrand (1822-1900), seu modelo descreve as interações entre as empresas, que definem os seus preços, e os compradores, que decidem quanto comprar ao preço dado.

<sup>3</sup> O equilíbrio de Nash representa uma situação em que, em um jogo envolvendo dois ou mais jogadores, nenhum jogador tem a ganhar mudando sua estratégia unilateralmente.

estratégias escolhidas por outros agentes que possivelmente têm estratégias diferentes e objetivos comuns.

Para construção da modelagem da teoria dos jogos, é preciso elencar as definições iniciais. Nesse jogo, foi considerado um duopólio, onde as firmas interagem em função da quantidade e dos preços de mercado, a partir de uma demanda linear.

## 2.1 Definições

**Definição 1.** O Jogo é um modelo<sup>4</sup> de uma situação onde há interação estratégica entre os tomadores de decisão.

**Definição 2.** Interação estratégica: cada tomador de decisão sabe que sua decisão interfere no grupo, assim as ações de cada indivíduo afetam o resultado de interesse comum dos indivíduos.

**Hipótese:** Racionalidade dos Indivíduos

1. Cada indivíduo deve ter objetivos bem definidos.
2. Resultados factíveis.
3. Escolher o melhor resultado (conforme os objetivos).
4. Racionalidade de conhecimento comum (*Common Knowledge*)

**Definição 3.** X é de conhecimento comum se cada indivíduo sabe X cada indivíduo sabe que todo mundo sabe X, racionalidade.

**Definição 4.** Equilíbrio (solução) é um resultado ou estado do jogo tal que uma vez alcançado ninguém tem incentivo a mudar de posição, a menos que um agente externo interfira.

## 2.2 Pressuposto da Maximização do Lucro

A Teoria Neoclássica ou marginalista, têm como pressuposto básico de que as firmas buscam maximização de lucros (Receita - Despesas). A condição de maximização de lucro econômico é quando a variação do custo marginal ( $Cmg$ ) se iguala à variação da receita marginal ( $Rmg$ ).

O custo marginal e a receita marginal têm a mesma variação ( $\Delta\%$ ), sempre uma unidade. Ao se igualar, revela que o aumento da produção (Y) em uma unidade, aumenta proporcionalmente o custo e a receita, sem aumentar ou diminuir o lucro.

---

<sup>4</sup> Modelo: é uma abstração de situações reais, e o modelo matemático permite mostrar essa abstração e criar fundamentos para interpretações em pesquisas científicas.

Utilizando a teoria microeconômica, a receita de uma firma é formada pelo preço (P) de venda do produto e a quantidade produzida (Y), conforme fórmula:

$$\text{Receita Total (RT)} = \text{Preço (P)} \times \text{Quantidade de Produção (Y)}$$

O custo é calculado da mesma forma, preço (P) pago pelos insumos multiplicado pela quantidade comprada desses insumos (Y).

$$\text{Custo Total (CT)} = \text{Preço (P)} \times \text{Quantidade de Insumos (Y)}$$

E o lucro é definido pela diferença entre a receita (RT) e o custo (CT).

$$\text{Lucro Total (LT)} = \text{RT} - \text{CT}$$

Para análise da maximização do lucro, a teoria marginalista define que, a Receita Marginal (*Rmg*): é o acréscimo na receita total ( $\Delta RT$ ) em virtude do acréscimo de produção ( $\Delta Y$ ), logo,  $Rmg = \frac{\Delta RT}{\Delta Y}$ . O Custo Marginal (*Cmg*): é o acréscimo no custo total ( $\Delta CT$ ) em virtude do acréscimo de produção ( $\Delta Y$ ), então  $Cmg = \frac{\Delta CT}{\Delta Y}$ .

O teorema de maximização do lucro pela sua definição, apresenta que a  $Rmg = Cmg$ , e o custo marginal é crescente.

### 2.3.1 Prova do teorema de maximização do lucro

$$LT = RT - CT$$

$$\frac{\partial LT}{\partial Y} = \frac{\partial RT}{\partial Y} - \frac{\partial CT}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial LT}{\partial Y} = 0 \text{ (condição de máximo)}$$

Logo,

$$\frac{\partial RT}{\partial Y} = \frac{\partial CT}{\partial Y}$$

Ou seja,

$$Rmg = Cmg$$

Algumas decisões estratégicas para o pressuposto de maximização do lucro, ou seja, quando há variação  $\Delta$  de uma unidade a mais na produção (Y), quais as decisões tomar na análise marginalista:

Se  $Rmg > Cmg$  toma a decisão de aumentar a produção, pois o aumento na produção, provoca aumento marginal maior na receita que nos custos;

Se  $Rmg < Cmg$  toma a decisão de diminuir a produção, pois o aumento na produção, provoca aumento marginal maior nos custos que nas receitas;

Se  $Rmg = Cmg$  Mantém a produção.

Esses pressupostos iniciais da teoria dos jogos, são importantes para demonstrar que em todas as situações o indivíduo ou a firma está sendo racional e procurando o melhor resultado.

### 3. METODOLOGIA

A teoria dos jogos (TJ) é a metodologia utilizada para examinar o comportamento dos agentes econômicos (firmas), e especificamente a teoria do oligopólio-duopólio é a base teórico-metodológica para analisar nos modelos de duopólio de *Cournot* e *Bertrand*.

A metodologia a partir da TJ formaliza que, os jogos cooperativos com dois jogadores tenham comportamento de barganha. Os dois jogadores  $J_1$  (Firma 1) e  $J_2$  (Firma 2), disponham de seu conjunto finito de estratégias  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  respectivamente, e que tem uma função de *payoffs* dada por:

$$\Pi: \Sigma_1 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Na forma cooperativa os jogadores decidem por uma distribuição de probabilidade ( $\sigma$ ), no conjunto  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ . O lucro (*payoffs*) esperado para os jogadores é:

$$\Pi(\sigma) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\pi_1(ij), \pi_2(ij))$$

O conjunto  $\Pi_{coop}$  de todos os *payoffs* esperados possíveis, é a envoltória convexa dos pares:  $\{(\Pi_1(ij), \Pi_2(ij)): i \in \Sigma_1 \text{ e } j \in \Sigma_2\}$ , caracterizado como conjunto de região de pagamentos (*payoffs*) ou lucros cooperativos.

#### 3.1 Oligopólio-duopólio

As características gerais dos oligopólios é que existem apenas algumas empresas no mercado e estas são responsáveis por grande parte do *market share*. Nesse caso, cada empresa deve considerar a reação das concorrentes, e no caso limite do oligopólio, a análise recai sobre a interação de duas empresas, os chamados "Duopólios".

Nesses modelos a firma deve escolher entre controlar o preço (*Bertrand*) ou a quantidade (*Cournot*) de mercado, e depende da reação do concorrente direto.

### 3.1 Modelo de *Cournot*

No modelo de duopólio, se as duas empresas decidirem controlar simultaneamente a quantidade a ser produzida para o mercado ( $Y$ ), cada uma precisará prever a quantidade da outra. No modelo de *Cournot*, a empresa 1 ( $y_1$ ), espera que a empresa 2 produza  $y_2^e$ . Ao produzir  $y_1$ , ela espera que o total produzido no mercado seja

$$Y = y_1 + y_2^e$$

e que o preço de mercado no duopólio seja igual a demanda, ou seja preço ( $p$ ) dependente da quantidade ( $Y$ ).

$$p(Y) = p(y_1 + y_2^e)$$

e sua maximização de lucro seja

$$p(y_1 + y_2^e)y_1 - c(y_1)$$

Logo, para cada expectativa  $y_2^e$ , haverá uma escolha ótima de  $y_1$ . A função de reação é a relação entre a produção esperada  $y_2^e$  e a escolha ótima de  $y_1$ :

$$y_1 = f_1 y_2^e$$

Analogamente, a função de reação da empresa 2 é

$$y_2 = f_2 y_1^e$$

Se as expectativas das empresas se confirmarem em equilíbrio, o equilíbrio de *Cournot* será dado por:

$$y_1^* = f_1 y_2^*$$

$$y_2^* = f_2 y_1^*$$

A quantidade ótima produzida da firma 1, está em função da quantidade ótima produzida pela firma 2. E a quantidade ótima da firma 2, está em função da quantidade ótima da firma 1.

### 3.2 Modelo de *Bertrand*

Diferente do modelo de *Cournot*, o modelo de *Bertrand* é baseado na escolha ótima dos preços. Neste caso, o equilíbrio de duopólio vira o equilíbrio competitivo se as empresas entrarem em competição.

No duopólio as empresas devem fazer Preço ( $P$ ) > Custo Marginal ( $Cmg$ ), controlando os preços sempre maiores que o custo marginal. Porém, se supostamente a empresa 1 escolher um preço acima do custo marginal, e a empresa 2 fica com o preço igual ao custo marginal ( $P=Cmg$ ), as decisões começam a se assemelhar com a Concorrência Perfeita ou equilíbrio competitivo, onde a competição pelo preço diminui a rentabilidade do duopólio.

Um dos comportamentos iniciais é que as empresas até o momento não formam cartel e o preço tende a ser igual na concorrência perfeita.

A pergunta de pesquisa é: **É melhor cooperar com o concorrente duopolista ou concorrer diretamente no mercado de concorrência perfeita?** Ou seja, é melhor fazer:

$$P > Cmg \text{ ou } P = Cmg?$$

## 4. ANÁLISE DO DUOPÓLIO

Nesta análise de duopólio foi utilizado para facilitar a modelagem, a curva de demanda linear, e a avaliação recai nos modelos de *Cournot*, *Bertrand* e *Cartel*. Essa metodologia pretende responder ao questionamento se vale a pena cooperar com concorrente ou entrar na competição perfeita.

### Condições Iniciais:

- Duas firmas idênticas
- Custos Marginais iguais
- Possibilidade de divisão igualitária do mercado
- Curva de demanda de mercado:  $P = 30 - Y$ , onde  $Y = y_1 + y_2$
- Ambas empresas fazem Custo Marginal  $Cmg = 0$

### 4.1 Análise de *Cournot*



O lucro da firma 1 ( $\pi_1$ ):

$$\begin{aligned}\pi_1 &= P(y_1 + y_2) \cdot y_1 - c \\ \pi_1 &= (30 - y_1 - y_2) \cdot y_1 - c \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} &= 30 - 2y_1 - y_2 - c' = 0 \\ y_1 &= 15 - \frac{1}{2}y_2\end{aligned}$$

Essa equação é a função de reação da firma 1. Analogamente podemos calcular a função de reação da firma 2:

$$y_2 = 15 - \frac{1}{2}y_1$$

Logo,  $y_1 = y_2 = 10$ , então  $Y = 20$ , com esses resultados é possível calcular o lucro total do mercado  $\Pi_{coop} = 200$ , esse é o resultado de *Cournot*.

#### 4.2 Análise de *Bertrand* e mercado competitivo

Conforme a teoria de duopólio em *Bertrand* as empresas devem fazer Preço (P) > Custo Marginal (Cmg). Nesse caso a empresa pode flexibilizar seu preço e baixa-lo para ter maior participação no mercado que o concorrente, que se resume em igualar o preço ao custo marginal (P=Cmg), essa decisão se assemelha com a Concorrência Perfeita ou equilíbrio competitivo.

A condição de maximização dos lucros no caso competitivo se dá quando:

$$P = Cmg$$

Usando os mesmos dados das condições iniciais e substituindo temos,

$$30 - Y = 0$$

$$Y = 30$$

$$y_1 = y_2 = 15$$

O lucro ( $\Pi$ ) no mercado competitivo é igual a zero (0), esse é o resulta de mercado competitivo, a partir da modelagem de *Bertrand* com comportamento de ajustes e concorrência em preços.

### 4.3 Análise de *Cartel*

Nessa análise as empresas concorrentes se unem para manipular a quantidade ofertada no mercado e com isso obter maiores lucros. Para esse fim, elas devem combinar as quantidades oferecidas por cada uma, sendo as condições iniciais dadas, a avaliação final recai sobre o nível de ( $Y$ ) e o lucro ( $\pi$ ).

O lucro total é maximizado quando a receita e o custo marginal se igualam  $Rmg = Cmg$ . Para encontrar a receita marginal é preciso desenvolver o processo de derivação da receita total (RT).

Encontrando a receita marginal:

$$RT = P \cdot Y$$

$$RT = (30 - Y) \cdot Y$$

$$RT = 30 \cdot Y - Y^2$$

Logo,

$$Rmg = 30 - 2 \cdot Y$$

Igualando receita marginal com custo marginal, que nesse caso é zero, pelas condições iniciais.

$$30 - 2Y = 0$$

Então,  $Y = 15$ , e  $y_1 = y_2 = 7,5$

Assim os níveis de quantidades no caso de *Cartel* que cada empresa produzirá, tem a tendência de ser menor que a quantidade produzida em *Cournot*.

O lucro total ( $\Pi_{coop}$ ) no caso do Cartel aumenta em relação ao modelo de *Cournot*, passando de 200 (*Cournot*) para  $\Pi_{coop} = 225$  em conluio.

Nesse ponto ou região de lucro gerado pela decisão entre as empresas se encontra o equilíbrio de Nash, onde, as duas empresas encontram o ponto ótimo de oferta de cada uma em função da oferta da concorrente, que traga lucro total de mercado no ponto de máximo.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os agentes econômicos se comportam de forma aleatória, porém, uma indiscutível procura é pelo retorno econômico (lucro) e a racionalidade nas decisões. A teoria dos

jogos formaliza as interações estratégicas e comportamentais nessas decisões quando a cooperação e ou não cooperação.

Utilizando a teoria dos jogos foi possível avaliar os *payoffs* (retornos) que a competição entre duas firmas (duopólio) forma e decide em competir por quantidades (Cournot), preços (Bertrand) ou não competir e cooperarem entre si (Cartel).

O resultado mostra que em uma demanda linear aleatória, com empresas idênticas, custos marginais iguais e divisão de mercado de 50% para cada empresa, o resultado de Cartel é o mais interessante, controlando a quantidade e uma oferta menor que o mercado exige. Nesse ponto encontrado em Cartel, as firmas têm maior lucro que os resultados de *Cournot* e de *Bertrand*, chegando ao Equilíbrio de Nash, pois apresentam o ponto de máximo que garante a melhor escolha na cooperação entre concorrentes.

## **6. REFERÊNCIAS**

NASH, J. F. Equilibrium Points in n-Person Games. **Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.** 36, 48-49, 1950.

NASH, J. F. Non-Cooperative Games. **Annals of Mathematics.** 54, 286-295, 1951.

NEUMANN & MORGENSTERN, **The Theory of Games and Economic Behavior**, Princeton University Press. 674p. 1944.

SMITH, A. **Uma Investigação sobre a Natureza e as Causas da Riqueza das Nações**. Londres: Casa editorial de William Strahan e Thomas Caldwell, 1776.