ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.987.4+519.21
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-21-33

Поступила в редакцию 09.11.2021
Received 09.11.2021

Э. А. Айрян[1,2,3], М. Гнатич[4,5,6], В. Б. Малютин[7]

*[1]Лаборатория информационных технологий имени М. Г. Мещерякова,
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Российская Федерация
[2]Государственный университет «Дубна», Дубна, Российская Федерация
[3]Национальная научная лаборатория имени А. И. Алиханяна, Ереван, Республика Армения
[4]Лаборатория теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Российская Федерация
[5]Институт экспериментальной физики Словацкой академии наук, Кошице, Словацкая Республика
[6]Факультет естествознания, Университет Павла Йозефа Шафарика, Кошице, Словацкая Республика
[7]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПЕРАТОРНОГО И КОМБИНАТОРНОГО ПОДХОДОВ ДЛЯ ОДНОШАГОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. Для одношаговых случайных марковских процессов проводится сравнение операторного и комбинаторного методов, основанное на использовании функциональных интегралов. При комбинаторном подходе используется переход от стохастического дифференциального уравнения к функциональному интегралу, с помощью которого получено выражение для среднего размера популяции. При операторном подходе переход к функциональному интегралу осуществляется через операторы рождения и уничтожения. Показано, что средние значения, вычисленные с помощью функциональных интегралов, возникающих при комбинаторном и операторном подходах, совпадают.

Ключевые слова: марковские случайные процессы, процессы рождения-гибели, одношаговые процессы, комбинаторный подход, операторный подход, средние значения, функциональные интегралы

Для цитирования. Айрян, Э. А. Об эквивалентности операторного и комбинаторного подходов для одношаговых случайных марковских процессов / Э. А. Айрян, М. Гнатич, В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 21–33. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-21-33

Edik A. Ayryan[1,2,3], Michal Hnatic[4,5,6], Victor B. Malyutin[7]

*[1]Meshcheryakov Laboratory of Information Technologies,
Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation
[2]State University «Dubna», Dubna, Russian Federation
[3]A. I. Alikhanyan National Science Laboratory, Yerevan, Republic of Armenia
[4]Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation
[5]Institute of Experimental Physics, Slovak academy of Sciences, Košice, Slovak Republic
[6]Faculty of Sciences, P. J. Šafárik University in Košice, Košice, Slovak Republic
[7]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

ON THE EQUIVALENCE OF THE OPERATOR AND COMBINATORIAL APPROACHES FOR ONE-STEP RANDOM MARKOV PROCESSES

Abstract. Herein, for one-step random Markov processes the comparison of the operator and combinatorial methods based on the use of functional integrals is performed. With the combinatorial approach, the transition from the stochastic differential equation to the functional integral is used. This allows us to obtain the expression for the mean population size in terms of the functional integral. With the operator approach, the transition to the functional integral is performed via the creation and annihilation operators. It is shown that the mean values calculated using the functional integrals arising in the combinatorial and operator approaches coincide.

Keywords: random Markov processes, birth-death processes, one-step processes, combinatorial approach, operator approach, mean values, functional integrals

For citation. Ayryan E. A., Hnatic M., Malyutin V. B. On the equivalence of the operator and combinatorial approaches for one-step random Markov processes. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 21–33 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-1-21-33

Введение. При моделировании различных физических и технических систем их зачастую можно представлять в форме одношаговых процессов [1–6]. Примерами таких моделей могут служить процессы поглощения или испускания фотонов; процессы перехода электронов в полупроводниках; системы молекул в химических реакциях; модели рождения или гибели индивидуумов; процесс прихода и ухода покупателей и т. д. [2]. Одношаговые процессы – это марковские процессы с непрерывным временем, принимающие значения в области целых чисел, матрица перехода которых допускает только переходы между соседними участками. Системы, в которых временная эволюция происходит в результате взаимодействия ее элементов, удобно описывать с помощью основного кинетического уравнения (управляющее уравнение, которое в англоязычной литературе носит название Master equation). Это уравнение представляет собой разновидность уравнения Колмогорова – Чепмена для марковских процессов и является уравнением баланса для вероятности каждого состояния в некоторый момент времени.

Для изучения стохастических моделей одношаговых процессов используется комбинаторный [1, 2] и операторный [7–11] методы. При комбинаторном подходе основное кинетическое уравнение преобразовывается в уравнение Фоккера – Планка, для которого можно записать эквивалентное ему стохастическое дифференциальное уравнение в форме уравнения Ланжевена. При операторном методе управляющее уравнение представляется в форме уравнения шредингеровского типа с гамильтонианом, зависящим от операторов рождения и уничтожения. В [7] проводится сравнение операторного и комбинаторного методов, но функциональные интегралы не рассматриваются.

В настоящей работе рассматривается сравнение операторного и комбинаторного методов, основанное на использовании функциональных интегралов, которое проводится на примере процесса Юла (процесс чистого рождения) [12] с произвольным начальным условием. Получено представление среднего значения через функциональный интеграл при комбинаторном подходе с помощью перехода от стохастического дифференциального уравнения (СДУ) к функциональным интегралам. Вычислен полученный функциональный интеграл. Выведено представление среднего значения через функциональный интеграл при операторном подходе, для чего, следуя работам [10, 11], применялся переход от представления через операторы рождения и уничтожения к представлению через функциональные интегралы. Также были получены точные ответы для возникающих функциональных интегралов. Показано, что средние значения, вычисленные с помощью функциональных интегралов, возникающих при комбинаторном и операторном подходах, совпадают.

Комбинаторный подход. Рассмотрим представление среднего значения через функциональный интеграл при комбинаторном подходе.

Основное кинетическое уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial p_n(t)}{\partial t} = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) + \nu_{n+1} p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \nu_n) p_n(t).$$

Параметры λ_n и ν_n называются инфинитезимальными интенсивностями рождения и гибели соответственно.

Мы рассматриваем основное кинетическое уравнение вида

$$\frac{\partial p_n(t)}{\partial t} = \mu_1(n-1+N) p_{n-1}(t) + \mu_2(n+1) p_{n+1}(t) - \big(\mu_1(n+N) + \mu_2 n\big) p_n(t), \tag{1}$$

т. е. $\lambda_n = \mu_1(n+N)$, $\nu_n = \mu_2 n$, N – количество членов в популяции в нулевой момент. Процесс, соответствующий этому уравнению, называется процессом с линейным ростом [12]. При $\mu_2 = 0$ он превращается в процесс Юла.

От уравнения (1) можно перейти к соответствующему стохастическому дифференциальному уравнению [1]. Для этого вводятся вероятности перехода в единицу времени

$$t^+(x) = \mu_1(x+N), \quad t^-(x) = \mu_2 x.$$

С их помощью записывается вероятность перехода

$$W(x,x')=t^{+}(x')\delta_{x,x'+1}+t^{-}(x')\delta_{x,x'-1}=\mu_1(x'+N)\delta_{x,x'+1}+\mu_2 x'\delta_{x,x'-1}.$$

Далее с помощью функции $W(x,x')$ получаются коэффициенты уравнения Фоккера – Планка $a_1(x)$ и $a_2(x)$:

$$a_1(x)=\sum_{x'}(x'-x)W(x',x)=\sum_{x'}(x'-x)\left[\mu_1(x+N)\delta_{x',x+1}+\mu_2 x\delta_{x',x-1}\right]=\mu_1(x+N)-\mu_2 x,$$

$$a_2(x)=\sum_{x'}(x'-x)^2W(x',x)=\sum_{x'}(x'-x)^2\left[\mu_1(x+N)\delta_{x',x+1}+\mu_2 x\delta_{x',x-1}\right]=\mu_1(x+N)+\mu_2 x.$$

Уравнение Фоккера – Планка имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}a_1(x)P+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}a_2(x)P=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\big((\mu_1-\mu_2)x+\mu_1 N\big)P+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big((\mu_1+\mu_2)x+\mu_1 N\big)P.$$

Этому уравнению соответствует стохастическое дифференциальное уравнение [1, 13]

$$d\xi=\big((\mu_1-\mu_2)\xi+\mu_1 N\big)dt+\sqrt{\big((\mu_1+\mu_2)\xi+\mu_1 N\big)}dw.$$

При $\mu_2=0$ уравнение имеет вид

$$d\xi=\mu_1(\xi+N)dt+\sqrt{\mu_1(\xi+N)}dw,\quad \xi_0=0.$$

Чтобы получить уравнение с коэффициентом диффузии, равным единице, сделаем замену переменных:

$$\xi+N=\frac{\mu_1}{4}y^2,\quad y=2\sqrt{\frac{\xi+N}{\mu_1}}.$$

Используя формулу Ито, получим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dy(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\mu_1(\xi+N)}}\mu_1(\xi+N)dt-\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{\mu_1}\sqrt{(\xi+N)}(\xi+N)}\mu_1(\xi+N)dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\mu_1(\xi+N)}}\sqrt{\mu_1(\xi+N)}dw.$$

Переходя от ξ к y, получим

$$dy=\frac{\mu_1 y}{2}dt-\frac{1}{2y}dt+dw,\quad y_0=2\sqrt{\frac{N}{\mu_1}}.$$

Среднее значение для стохастической переменной $\xi(t)$ представляется через функциональный интеграл [14–16]

$$\mathrm{E}[\xi(t)+N]=\int dy(t)\frac{\mu_1 y^2(t)}{4}\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\dot{y}(\tau)-\frac{\mu_1 y(\tau)}{2}+\frac{1}{2y(\tau)}\right)^2 d\tau\right\}.$$

Для вычисления приведенный интеграл $\int D[y]$ удобнее записать в виде

$$\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\dot{y}^2(\tau)+\frac{{\mu_1}^2y^2(\tau)}{4}+\frac{1}{4y^2(\tau)}-\mu_1y(\tau)\dot{y}(\tau)+\frac{\dot{y}(\tau)}{y(\tau)}-\frac{\mu_1}{2}\right)d\tau\right\}.$$

За счет функционала $\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t\dot{y}^2(\tau)d\tau\right\}$ этот интеграл можно рассматривать как интеграл по траекториям винеровского процесса. Для схемы Ито, когда берется левая точка интервала, верны равенства

$$dy^2=dt+2ydy,$$

$$\int_0^t ydy=\frac{1}{2}y^2\Big|_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t dt, \tag{2}$$

$$d\ln(y)=-\frac{1}{2y^2}dt+\frac{1}{y}dy,$$

$$\int_0^t\frac{1}{y}dy=\ln(y)\big|_0^t+\int_0^t\frac{1}{2y^2}dt.$$

Используя эти равенства, получаем выражение для интеграла по $D[y]$:

$$\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\dot{y}^2(\tau)+\frac{{\mu_1}^2y^2(\tau)}{4}+\frac{1}{4y^2(\tau)}\right)d\tau\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_0^t-\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln(y)\big|_0^t+\int_0^t\frac{1}{2y^2}dt\right)+\frac{\mu_1t}{4}\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{\mu_1}{4}y^2\Big|_0^t-\frac{1}{2}\ln(y)\big|_0^t\right\}\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\dot{y}^2(\tau)+\frac{{\mu_1}^2y^2(\tau)}{4}+\frac{3}{4y^2(\tau)}\right)d\tau\right\}.$$

Используя формулу [16–18]

$$\int D[y]\exp\left\{-\int_0^t\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2(\tau)+\frac{c_3}{y^2(\tau)}+c_2y^2(\tau)\right)d\tau\right\}=$$

$$=\frac{\gamma\sqrt{y_0y_t}}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma t}{2}\right)}\exp\left\{-\frac{\gamma}{4}\left(y_0^2+y_t^2\right)\mathrm{cth}\left(\frac{\gamma t}{2}\right)\right\}I_\mu\left(\frac{\gamma y_0y_t}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma t}{2}\right)}\right), \tag{3}$$

где $\gamma=\sqrt{8c_2}$, $\mu=\frac{1}{2}\sqrt{1+8c_3}$, I_μ – модифицированная функция Бесселя порядка μ, получим

$$\mathrm{E}[\xi(t)+N]=\int dy_t\frac{\mu_1y_t^2}{4}\exp\left\{\frac{\mu_1}{4}\mathrm{y}^2\Big|_0^t\right\}\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{y_t}}\times$$

$$\times\frac{\gamma\sqrt{y_0y_t}}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma}{2}t\right)}\exp\left\{-\frac{\gamma}{4}\left(y_0^2+y_t^2\right)\mathrm{cth}\left(\frac{\gamma}{2}t\right)\right\}I_\mu\left(\frac{\gamma y_0y_t}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma}{2}t\right)}\right),$$

где $\gamma=\mu_1$, $\mu=1$.

Для функции Бесселя порядка μ = 1 используем разложение

$$I_1(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m+1}}{m!(m+1)!2^{2m+1}}.$$

Тогда

$$\mathrm{E}[\xi(t)+N]=\int dy_t\,\frac{\mu_1 y_t^2}{4}\exp\left\{\frac{\mu_1}{4}y_t^2-N\right\}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{N}}{\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)}\exp\left\{-\frac{\mu_1}{4}\left(\frac{4N}{\mu_1}+y_t^2\right)\mathrm{cth}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)\right\}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\mu_1\frac{2\sqrt{N}}{\sqrt{\mu_1}}y_t\right)^{2m+1}}{m!(m+1)!2^{2m+1}\left(2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)\right)^{2m+1}}=$$

$$=\exp\left\{-N\mathrm{cth}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)-N\right\}\frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{N}}{\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)}\int dy_t\,\frac{\mu_1 y_t^2}{4}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\mu_1}{4}y_t^2\frac{\exp\left\{-\frac{\mu_1 t}{2}\right\}}{\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)}\right\}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\mu_1 N}y_t)^{2m+1}}{m!(m+1)!2^{2m+1}\left(\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)\right)^{2m+1}}.$$

Используя формулу

$$\int_0^{\infty}x^{2m+1}e^{-ax^2}dx=\frac{m!}{2a^{m+1}},\qquad a=\frac{\mu_1}{2}\frac{1}{\exp\{\mu_1 t\}-1},$$

получим

$$\mathrm{E}[\xi(t)+N]=\exp\left\{-N\frac{\exp\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)}\right\}\frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{N}}{\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\mu_1 N})^{2m+1}}{m!(m+1)!2^{2m+1}\left(\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)\right)^{2m+1}}\frac{\mu_1}{4}\frac{(m+1)!2^{m+2}(\exp\{\mu_1 t\}-1)^{m+2}}{2\mu_1^{\,m+2}}=$$

$$=\exp\left\{N\frac{2}{\exp(-\mu_1 t)-1}\right\}\frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{N}}{\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\mu_1 N})^{2m+1}\mu_1}{m!\left(\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 t\right\}(\exp\{\mu_1 t\}-1)\right)^{2m+1}}\frac{(\exp\{\mu_1 t\}-1)^{m+2}}{2^{m+2}\mu_1^{\,m+2}}=$$

$$=\exp\left\{N\frac{2}{\exp(-\mu_1 t)-1}\right\}\frac{N}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 t\right\}\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_1 t}{2}\right)}(\exp\{\mu_1 t\}-1)\times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N^m 2^{m-1}}{m!\left(\exp\{-\mu_1 t\}(\exp\{\mu_1 t\}-1)\right)^m}.$$

Выполняя суммирование по m, получаем

$$\mathrm{E}[\xi(t)+N] = \exp\left\{N\frac{2}{\exp(-\mu_1 t)-1}\right\}\frac{N}{\left(1-\exp(-\mu_1 t)\right)}(\exp\{\mu_1 t\}-1)\exp\left\{\frac{2N}{(1-\exp\{-\mu_1 t\})}\right\} =$$

$$= \frac{N}{\left(1-\exp(-\mu_1 t)\right)}(\exp\{\mu_1 t\}-1) = N\exp\{\mu_1 t\}.$$

Таким образом, при комбинаторном подходе, используя представление среднего значения через функциональный интеграл, получаем следующее выражение для среднего значения:

$$\mathrm{E}\,[\xi(t)] = N(e^{\mu_1 t}-1). \tag{4}$$

Операторный подход. Исследуем представление среднего значения через функциональный интеграл при операторном подходе. Мы рассматриваем основное кинетическое уравнение вида (1), которое можно представить в форме уравнения шредингеровского типа [9–11]. Для этого состоянию с номером n ставится в соответствие вектор $|n\rangle$ гильбертова пространства. Для распределения вероятностей

$$p_n(t), \quad p_n(t) \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1$$

определяется вектор состояния

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)|n\rangle.$$

Также вводятся операторы рождения (π) и уничтожения (a) по правилам

$$\pi|n\rangle = |n+1\rangle, \quad a|n\rangle = n|n-1\rangle.$$

Тогда для уравнения (1) получим

$$\frac{\partial|\varphi(t)\rangle}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial p_n(t)}{\partial t}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mu_1(n-1+N)p_{n-1}(t)+\mu_2(n+1)p_{n+1}(t)-\left(\mu_1(n+N)+\mu_2 n\right)p_n(t)\right]|n\rangle.$$

Используя равенства

$$\mu_1(n-1+N)p_{n-1}(t)|n\rangle = \mu_1 p_{n-1}(t)\left(\pi a\pi+(N-1)\pi\right)|n-1\rangle,$$

$$-\mu_1(n+N)p_n(t)|n\rangle = -\mu_1 p_n(t)(a\pi+N-1)|n\rangle,$$

$$-\mu_2 n p_n(t)|n\rangle = -\mu_2 p_n(t)\pi a|n\rangle,$$

$$\mu_2(n+1)p_{n+1}(t)|n\rangle = \mu_2 p_{n+1}(t)a|n+1\rangle,$$

получаем

$$\frac{\partial|\varphi(t)\rangle}{\partial t} = \mu_1\left(\pi a\pi+(N-1)\pi\right)\sum_{n=0}^{\infty}p_{n-1}(t)|n-1\rangle + \mu_2 a\sum_{n=0}^{\infty}p_{n+1}(t)|n+1\rangle -$$

$$-\mu_1(a\pi+N-1)\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)|n\rangle - \mu_2\pi a\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)|n\rangle =$$

$$= \left(\mu_1\left(\pi a\pi+(N-1)\pi\right)+\mu_2 a-\mu_1(a\pi+N-1)-\mu_2\pi a\right)|\varphi(t)\rangle = L|\varphi(t)\rangle.$$

Пользуясь равенством $a\pi - \pi a = 1$, в выражении для L расставим операторы π слева от операторов a и заменим π на $i\psi$, a на ψ [11]. Получим

$$L\left(i\psi'(\tau),\psi(\tau)\right) = \mu_1\left((i\psi')^2\psi + Ni\psi'\right) + \mu_2\psi - \mu_1(i\psi'\psi + N) - \mu_2 i\psi'\psi. \tag{5}$$

С помощью L можно записать ядро $U_t(z,\xi)$ оператора $\exp\{tL\}$ через функциональный интеграл [11]:

$$U_t(z,\xi) = \int \exp\left\{-\int_0^t \left[i\psi'(\tau)\dot\psi(\tau) - L\left(i\psi'(\tau),\psi(\tau)\right)\right]d\tau + z\psi(t)\right\} D\psi D\psi' =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n-1}\frac{d\psi_j d\psi'_j}{2\pi}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\left[i\psi'_k(\psi_k - \psi_{k-1}) - \frac{t}{n}L(i\psi'_k,\psi_{k-1}) + z\psi_n\right]\right\}, \tag{6}$$

где

$$\psi'_k = \psi'\left(\frac{kt}{n}\right), \quad \psi_k = \psi\left(\frac{kt}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n, \quad \xi = \psi_0, \quad z = i\psi'_n.$$

Отметим, что в формуле (6) показатель экспоненты зависит от $\psi_0,\ldots,\psi_{n-1}$ и $\psi'_1,\ldots,\psi'_n$. Поэтому после интегрирования по $\prod_{j=1}^{n-1} d\psi_j d\psi'_j$ останется зависимость от $\xi = \psi_0$ и $z = i\psi'_n$.

Рассмотрим производящую функцию

$$\Phi_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n.$$

Через эту функцию записывается среднее значение $\mathrm{E}[n(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) n$, а именно:

$$\mathrm{E}[n(t)] = \left.\frac{\partial\Phi_t(z)}{\partial z}\right|_{z=1}.$$

Функции $\Phi_t(z)$ и $U_t(z,\xi)$ связаны равенством [11]

$$\Phi_t(z) = \int\frac{d\xi d\xi'}{2\pi}\exp\{-i\xi\xi'\} U_t(z,\xi)\Phi_0(i\xi').$$

То есть, зная функцию $U_t(z,\xi)$, можно найти среднее значение $\mathrm{E}[n(t)]$. Чтобы вычислить функцию $U_t(z,\xi)$, рассмотрим функцию

$$\hat U_t(\psi_n,\psi_0) = \int\frac{d\psi'_n}{2\pi} U_t(z,\psi_0)\exp\{-z\psi_n\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n-1}\frac{d\psi_j d\psi'_j}{2\pi}\frac{d\psi'_n}{2\pi}\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\left[i\psi'_k(\psi_k - \psi_{k-1}) - \frac{t}{n}L(i\psi'_k,\psi_{k-1})\right]\right\}. \tag{7}$$

Подставим в (7) выражение (5) для $L\left(i\psi'(\tau),\psi(\tau)\right)$. Получим

$$\hat U_t(\psi_n,\psi_0) = \lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n-1} d\psi_j\prod_{j=1}^{n}\frac{d\psi'_j}{2\pi}\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\left[i\psi'_k(\psi_k - \psi_{k-1}) + \frac{t}{n}\mu_1(\psi'_k)^2\psi_{k-1} + \frac{t}{n}i\psi'_k(\mu_1\psi_{k-1} + \mu_2\psi_{k-1} - \mu_1 N) + \frac{t}{n}(\mu_1 N - \mu_2\psi_{k-1})\right]\right\}.$$

Используя формулу

$$\int d\psi'_k \exp\left\{-\frac{t}{n}\mu_1(\psi'_k)^2\psi_{k-1} - i\psi'_k(\psi_k - \psi_{k-1}) - \frac{t}{n}i\psi'_k(\mu_1\psi_{k-1} + \mu_2\psi_{k-1} - \mu_1 N)\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\frac{t}{n}\mu_1\psi_{k-1}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left((\psi_k - \psi_{k-1}) + \frac{t}{n}(\mu_1\psi_{k-1} + \mu_2\psi_{k-1} - \mu_1 N)\right)^2}{2\frac{t}{n}\mu_1\psi_{k-1}}\right\},$$

вычислим интегралы по $\prod_{j=1}^{n} d\psi'_j$. Получим, что функция $\hat{U}_t(\psi_n, \psi_0)$ имеет вид

$$\hat{U}_t(\psi_n, \psi_0) = \exp\{-\mu_1 tN\}\lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n-1} d\psi_j \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\frac{t}{n}\mu_1\psi_{k-1}}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left((\psi_k - \psi_{k-1}) + \frac{t}{n}(\mu_1\psi_{k-1} + \mu_2\psi_{k-1} - \mu_1 N)\right)^2 - 4\left(\frac{t}{n}\right)^2\mu_1\mu_2\psi_{k-1}^2}{2\frac{t}{n}\mu_1\psi_{k-1}}\right\}.$$

При $\mu_2 = 0$ функция $\hat{U}_t(\psi_n, \psi_0)$ имеет вид

$$\hat{U}_t(\psi_n, \psi_0) = \exp\{-\mu_1 tN\}\lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n-1} d\psi_j \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\frac{t}{n}\mu_1\psi_{k-1}}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left((\psi_k - \psi_{k-1}) + \frac{t}{n}(\mu_1\psi_{k-1} - \mu_1 N)\right)^2}{2\frac{t}{n}\mu_1\psi_{k-1}}\right\}.$$

Эту функцию $\hat{U}_t(\psi_n, \psi_0)$ можно рассматривать как функцию плотности вероятности перехода (ФПВП) для решения стохастического дифференциального уравнения [14–16]

$$d\psi = (\mu_1 N - \mu_1\psi)dt + \sqrt{2\mu_1\psi}\,dw.$$

После замены переменных

$$\psi = \frac{\mu_1}{2}y^2$$

функцию $\hat{U}_t\left(\frac{\mu_1}{2}y_n^2, \frac{\mu_1}{2}y_0^2\right)$ можно рассматривать как ФПВП для решения СДУ

$$dy = \left(\frac{1}{y}\left(N - \frac{1}{2}\right) - \frac{\mu_1 y}{2}\right)dt + dw.$$

Функция $\hat{U}_t\left(\frac{\mu_1}{2}y_n^2, \frac{\mu_1}{2}y_0^2\right)$ выражается через функциональный интеграл [14–16]

$$\hat{U}_t\left(\frac{\mu_1}{2}y_n^2, \frac{\mu_1}{2}y_0^2\right) = \exp\{-\mu_1 tN\}\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\dot{y}(\tau) - \frac{N - \frac{1}{2}}{y(\tau)} + \frac{\mu_1 y(\tau)}{2}\right)^2 d\tau\right\} =$$

$$= \exp\{-\mu_1 tN\} \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n-1} dy_j \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{t}{n}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\frac{t}{n}} \sum_{k=1}^{n} \left((y_k - y_{k-1}) - \frac{t}{n}\left(\frac{N-\frac{1}{2}}{y_{k-1}} - \frac{\mu_1 y_{k-1}}{2} \right) \right)^2 \right\}.$$

Для вычисления приведенный интеграл удобнее записать в виде

$$\hat{U}_t\left(\frac{\mu_1}{2} y_n^2, \frac{\mu_1}{2} y_0^2\right) = \exp\{-\mu_1 tN\} \int D[y] \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\dot{y}(\tau)^2 + \frac{\left(N-\frac{1}{2}\right)^2}{y^2(\tau)} + \frac{\mu_1^2 y^2(\tau)}{4} - \left(N-\frac{1}{2}\right)\mu_1 \right) d\tau \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\dot{y}(\tau)}{y(\tau)}(2N-1) - \mu_1 \dot{y}(\tau) y(\tau) \right) d\tau \right\}.$$

За счет функционала $\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \dot{y}^2(\tau) d\tau\right\}$ этот интеграл можно рассматривать как интеграл по траекториям винеровского процесса. Для схемы Ито, когда берется левая точка интервала, верны равенства (2), используя которые, получаем

$$\int_0^t \left(\frac{\dot{y}(\tau)}{y(\tau)}(2N-1) - \mu_1 \dot{y}(\tau) y(\tau) \right) d\tau = (2N-1)\ln(y)\Big|_0^t + (2N-1)\int_0^t \frac{1}{2y^2} dt - \mu_1 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_0^t - \frac{t}{2} \right).$$

Таким образом,

$$\hat{U}_t\left(\frac{\mu_1}{2} y_n^2, \frac{\mu_1}{2} y_0^2\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 tN\right\} \exp\left\{ \left(N-\frac{1}{2}\right)\ln(y)\Big|_0^t - \mu_1 \frac{1}{4} y^2 \Big|_0^t \right\} \times$$

$$\times \int D[y] \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\dot{y}(\tau)^2 - \frac{\left(N-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-N\right)}{y^2(\tau)} + \frac{\mu_1^2 y^2(\tau)}{4} \right) d\tau \right\}. \qquad (8)$$

Из равенства

$$\hat{U}_t(\psi_n, \psi_0) = \int \frac{d\psi'_n}{2\pi} U_t(z, \psi_0) \exp\{-z\psi_n\} = \int \frac{d\psi'_n}{2\pi} U_t(i\psi'_n, \psi_0) \exp\{-i\psi'_n \psi_n\}$$

можно выразить $U_t(z, \psi_0)$ через $\hat{U}_t(\psi_n, \psi_0)$, а именно:

$$U_t(z, \psi_0) = U_t(i\psi'_n, \psi_0) = \int d\psi_n \hat{U}_t(\psi_n, \psi_0) \exp\{i\psi'_n \psi_n\}. \qquad (9)$$

Из формулы, связывающей производящую функцию $\Phi_t(z)$ и функцию $U_t(z,\xi)$, [11]

$$\Phi_t(z) = \int \frac{d\xi d\xi'}{2\pi} \exp\{-i\xi\xi'\} U_t(z, \xi) \Phi_0(i\xi')$$

и формулы (9) получим

$$\Phi_t(z) = \int \frac{d\xi d\xi' d\psi_n}{2\pi} \exp\{-i\xi\xi'\} \hat{U}_t(\psi_n, \xi) \exp\{i\psi'_n \psi_n\} \Phi_0(i\xi').$$

Так как $\Phi_0(z) = 1$, то

$$\Phi_t(z) = \int d\xi d\psi_n \delta(\xi - 0)\hat{U}_t(\psi_n, \xi)\exp\{z\psi_n\} = \int d\psi_n \hat{U}_t(\psi_n, 0)\exp\{z\psi_n\}.$$

Отсюда

$$\mathrm{E}[n(t)] = \left.\frac{\partial \Phi_t(z)}{\partial z}\right|_{z=1} = \int d\psi_n \hat{U}_t(\psi_n, 0)\psi_n \exp\{\psi_n\} =$$
$$= \int \hat{U}_t\left(\frac{\mu_1}{2}y_n^2, 0\right)\frac{\mu_1}{2}y_n^2 \exp\left\{\frac{\mu_1}{2}y_n^2\right\}dy_n.$$

Используя формулу (8), получаем, что при операторном подходе представление среднего значения через функциональный интеграл имеет вид

$$\mathrm{E}[n(t)] = \int \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 tN\right\}\exp\left\{\left(N - \frac{1}{2}\right)\ln(y)\Big|_0^t - \mu_1\frac{1}{4}y^2\Big|_0^t\right\}\frac{\mu_1}{2}y_n^2\exp\left\{\frac{\mu_1}{2}y_n^2\right\}\times$$
$$\times\int D[y]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\dot{y}(\tau)^2 - \frac{\left(N - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - N\right)}{y^2(\tau)} + \frac{\mu_1{}^2 y^2(\tau)}{4}\right)d\tau\right\}dy_n.$$

Используя формулу (3), получаем

$$\mathrm{E}[n(t)] = \int \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 tN\right\}\exp\left\{\left(N - \frac{1}{2}\right)\ln(y)\Big|_0^t - \mu_1\frac{1}{4}y^2\Big|_0^t\right\}\frac{\mu_1}{2}y_n^2\exp\left\{\frac{\mu_1}{2}y_n^2\right\}\times$$
$$\times\frac{\gamma\sqrt{y_0 y_t}}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}t\right)}\exp\left\{-\frac{\gamma}{4}\left(y_0^2 + y_t^2\right)\operatorname{cth}\left(\frac{\gamma}{2}t\right)\right\}I_\mu\left(\frac{\gamma y_0 y_t}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}t\right)}\right)dy_n,$$

где $\gamma = \sqrt{8c_2} = \mu_1$, $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8c_3} = N - 1$, I_μ – модифицированная функция Бесселя порядка $\mu = N - 1$.

Для функции Бесселя порядка $N - 1$ верно разложение

$$I_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m+N-1}}{m!\Gamma(m+N)2^{2m+N-1}}.$$

Так как $y_0 = 0$, то из слагаемых y_0^{2m} оставляем только слагаемое с $m = 0$. Тогда

$$\mathrm{E}[n(t)] = \int \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 tN\right\}\frac{y_n^{N-\frac{1}{2}}}{y_0^{N-\frac{1}{2}}}\frac{\mu_1}{2}y_n^2\exp\left\{\frac{\mu_1}{4}y_n^2\right\}\times$$
$$\times\frac{\mu_1\sqrt{y_0 y_t}}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_1}{2}t\right)}\exp\left\{-\frac{\mu_1}{4}y_t^2\operatorname{cth}\left(\frac{\mu_1}{2}t\right)\right\}\frac{1}{\Gamma(N)}\left(\frac{\mu_1 y_0 y_t}{4\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_1}{2}t\right)}\right)^{N-1}dy_n =$$

$$=\int \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 tN\right\}\frac{y_n^{2N+1}\mu_1^{N+1}}{\Gamma(N)4^N\left(\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_1}{2}t\right)\right)^N}\exp\left\{-\frac{\mu_1}{4}y_n^2\frac{\exp\left(-\frac{\mu_1}{2}t\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_1}{2}t\right)}\right\}dy_n.$$

После замены переменных $\frac{\mu_1}{2}y_n^2\frac{1}{\exp(\mu_1 t)-1}=z$ получим

$$\mathrm{E}[n(t)]=\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 tN\right\}\frac{\left(\exp(\mu_1 t)-1\right)^{N+1}}{\Gamma(N)2^N\left(\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_1}{2}t\right)\right)^N}\int_0^\infty z^N\exp\{-z\}dz=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 tN\right\}\frac{\exp\left(\frac{\mu_1}{2}tN\right)\left(\exp(\mu_1 t)-1\right)}{\Gamma(N)}\Gamma(N+1)=\left(\exp(\mu_1 t)-1\right)N.$$

Таким образом, при операторном подходе, используя представление среднего значения через функциональный интеграл, получаем следующее выражение для среднего значения:

$$\mathrm{E}\,[n(t)]=N(e^{\mu_1 t}-1). \tag{10}$$

Заключение. Таким образом, с помощью функциональных интегралов на примере процесса Юла рассмотрено сравнение операторного и комбинаторного методов. Из формул (4) и (10) следует, что средние значения, вычисленные с помощью функциональных интегралов, которые возникают при комбинаторном и операторном подходах, совпадают, что свидетельствует об эквивалентности комбинаторного и операторного подходов. Процессы с линейным ростом ($\mu_2 \neq 0$) планируется рассмотреть в последующих работах.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № Ф20МС-005.

Acknowledgements. The research was carried out under the financial support of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research within the framework of Project no. Ф20МС-005.

Список использованных источников

1. Гардинер, К. В. Стохастические методы в естественных науках / К. В. Гардинер. – М.: Мир, 1986. – 538 с.
2. Ван-Кампен, Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии / Н. Г. Ван-Кампен. – М.: Высш. шк., 1990. – 376 с.
3. The method of stochastization of one-step processes / A. V. Demidova [et al.] // Mathematical Modeling and Computational Physics. – Dubna: JINR, 2013. – P. 67.
4. The method of constructing models of peer to peer protocols / A. V. Demidova [et al.] // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). – IEEE Computer Society, 2015. – P. 557–562. https://doi.org/10.1109/ICUMT.2014.7002162
5. Velieva, T. R. Designing installations for verification of the model of active queue management discipline RED in the GNS3 / T. R. Velieva, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). – IEEE Computer Society, 2015. – P. 570–577. https://doi.org/10.1109/ICUMT.2014.7002164
6. A new stage in mathematical teletraffic theory / G. P. Basharin [et al.] // Autom. Remote Control. – 2009. – Vol. 70, № 12. – P. 1954–1964. https://doi.org/10.1134/s0005117909120030
7. Operator Approach to the Master Equation for the One-Step Process / M. Hnatič [et al.] // EPJ Web of Conferences. – 2016. – Vol. 108. – P. 02027. https://doi.org/10.1051/epjconf/201610802027
8. Stochastization of one-step processes in the occupations number representation / A. V. Korolkova [et al.] // Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2016. – 2016. – P. 698–704.
9. Hnatic, M. Field theoretic technique for irreversible reaction processes / M. Hnatic, J. Honkonen, T. Lucivjansky // Phys. Part. Nucl. – 2013. – Vol. 44, № 2. – P. 316–348. https://doi.org/10.1134/s1063779613020160
10. Hnatic, M. Study of anomalous kinetics of the annihilation reaction A+A→O / M. Hnatic, J. Honkonen, T. Lucivjansky // Theor. Math. Phys. – 2011. – Vol. 169, № 1. – P. 1481–1488. https://doi.org/10.1007/s11232-011-0124-9

11. Dickman, R. Path integrals and perturbation theory for stochastic processes / R. Dickman, R. Vidigal // Brazilian J. Phys. – 2003. – Vol. 33, № 1. – P. 73–93. https://doi.org/10.1590/s0103-97332003000100005

12. Карлин, С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин. – М.: Мир, 1971. – 536 с.

13. Risken, H. The Fokker-Plank Equation: Methods of Solution and Applications / Risken H. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1984. https://doi.org/10.1007/978-3-642-96807-5

14. Langouche, F. Functional Integration and Semiclassical Expansions / F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui. – Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1982. – 315 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1634-5

15. Wio, H. S. Path Integration to Stochastic Process: an Introduction / H. S. Wio. – World Scientific Publ. Company, 2012. – 176 p. https://doi.org/10.1142/8695

16. Bennati, E. A path integral approach to derivative security pricing I: formalism and analytical results / E. Bennati, M. Rosa-Clot, S. Taddei // Int. J. Theor. Appl. Finan. – 1999. – Vol. 2, № 4. – P. 381–407. https://doi.org/10.1142/s0219024999000200

17. Schulmann, L. S. Techniques and Applications of Path Integration / L. S. Schulmann. – New York: John Wiley and Sons, 1981. – 359 p.

18. Grosche, C. Classification of solvable Feynman path integrals [Electronic Resource] / C. Grosche, F. Steiner. – Mode of access: https://arxiv.org/abs/hep-th/9302053

References

1. Gardiner C. W. *A Handbook of Stochastic Methods*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1983. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02377-8

2. Van Kampen N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North Holland, 1981.

3. Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. The method of stochastization of one-step processes. *Mathematical Modeling and Computational Physics*. Dubna, JINR, 2013, pp. 67.

4. Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. The method of constructing models of peer to peer protocols. *6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*. IEEE Computer Society, 2015, pp. 557–562. https://doi.org/10.1109/ICUMT.2014.7002162

5. Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S. Designing installations for verification of the model of active queue management discipline RED in the GNS3. *6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*. IEEE Computer Society, 2015, pp. 570–577. https://doi.org/10.1109/ICUMT.2014.7002164

6. Basharin G. P., Samouylov K. E., Yarkina N. V., Gudkova I. A. A new stage in mathematical teletraffic theory. *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 12, pp. 1954–1964. https://doi.org/10.1134/s0005117909120030

7. Hnatič M., Eferina E. G., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. Operator Approach to the Master Equation for the One-Step Process. *EPJ Web of Conferences*, 2016, vol. 108, pp. 02027. https://doi.org/10.1051/epjconf/201610802027

8. Korolkova A. V., Eferina E. G., Laneev E. B. et al. Stochastization of one-step processes in the occupations number representation. *Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2016*. 2016, pp. 698–704.

9. Hnatic M., Honkonen J., Lucivjansky T. Field theoretic technique for irreversible reaction processes. *Physics of Particles and Nuclei*, 2013, vol. 44, no. 2, pp. 316–348. https://doi.org/10.1134/s1063779613020160

10. Hnatic M., Honkonen J., Lucivjansky T. Study of anomalous kinetics of the annihilation reaction A+A→O. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2011, vol. 169, no. 1, pp. 1481–1488. https://doi.org/10.1007/s11232-011-0124-9

11. Dickman R., Vidigal R. Path integrals and perturbation theory for stochastic processes. *Brazilian Journal of Physics*, 2003, vol. 33, no. 1, pp. 73–93. https://doi.org/10.1590/s0103-97332003000100005

12. Carlin S. *A First Course in Stochastic Processes.* Academic Press, 1968. https://doi.org/10.1016/c2013-0-12346-x

13. Risken H. *The Fokker-Plank Equation: Methods of Solution and Applications*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1984. https://doi.org/10.1007/978-3-642-96807-5

14. Langouche F., Roekaerts D., Tirapegui E. *Functional Integration and Semiclassical Expansions*. Dordrecht, D. Reidel Pub. Co., 1982. 315 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1634-5

15. Wio H. S. *Path Integration to Stochastic Process: an Introduction*. World Scientific Publ. Company, 2012. 176 p. https://doi.org/10.1142/8695

16. Bennati E., Rosa-Clot M., Taddei S. A path integral approach to derivative security pricing I: formalism and analytical results. *International Journal of Theoretical and Applied Finance,* 1999, vol. 2, no. 4, pp. 381–407. https://doi.org/10.1142/s0219024999000200

17. Schulmann L. S. *Techniques and Applications of Path Integration*. New York, John Wiley and Sons, 1981. 359 p.

18. Grosche C., Steiner F. *Classification of solvable Feynman path integrals*. Available at: https://arxiv.org/abs/hep-th/9302053

Информация об авторах

Айрян Эдик Арташевич – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором, Лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований (ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, Дубна, Российская Федерация); Государственный университет «Дубна» (ул. Университетская, 19, 141980, Дубна, Российская Федерация); Национальная научная

Information about the authors

Edik A. Ayryan – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of Sector, Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Russian Federation); State University «Dubna» (19, Universitetskaja Str., 141980, Dubna, Russian Federation); A. I. Alikhanyan National Science Laboratory (Yerevan, Republic of Armenia). E-mail: ayrjan@jinr.ru лаборатория имени А. И. Алиханяна (Ереван, Республика Армения). E-mail: ayrjan@jinr.ru

Гнатич Михал – доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора, Лаборатория теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований (ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, Дубна, Российская Федерация); Институт экспериментальной физики Словацкой академии наук (ул. Ватсонова, 47, 04001, Кошице, Словацкая Республика); Факультет естествознания, Университет Павла Йозефа Шафарика (Парк Ангелинум, 9, 04001, Кошице, Словацкая Республика). E-mail: hnatic@saske.sk

Малютин Виктор Борисович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Michal Hnatic – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Deputy Director, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., Dubna, Russian Federation); Institute of Experimental Physics Slovak Academy of Sciences (IEP SAS) (47, Watsonova Str., Košice, Slovak Republic); Faculty of Science P. J. Safarik University (9, Park Angelinum, Košice, Slovak Republic). E-mail: hnatic@saske.sk

Victor B. Malyutin – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Principal Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: malyutin@im.bas-net.by