Jean-Baptiste Joinet*
DOI: http://doi.org/10.32334/oqnfp.2021n49a811

Prouver depuis toujours ? Une approche inférentielle de la compacité en logique propositionnelle

Provar desde sempre? Uma abordagem inferencial para compacidade em lógica proposicional

Proving since ever? An inferential approach to compactness in propositional logic

Resume

Une approche inférentielle de la compacité/finitude en logique propositionnelle.
Mots clés: Logique, compacité, théorie de la preuve.

Resumo

Uma abordagem inferencial para compacidade/finitude em lógica proposicional.
Palavras-chave: Lógica, compacidade, teoria da prova.

Abstract

An inferential approach to compactness/finitude in propositional logic.
Keywords: Logic, compacity, proof-theory.

* Institut de Recherche Philosophique de Lyon (IRPhiL), Université Jean Moulin Lyon 3 (Université de Lyon) & Institut d'Histoire et Philosophie des Sciences et des Techniques (IHPST, UMR 8590 CNRS-Université Panthéon-Sorbonne Paris 1). Action CAPES-Cofecub Sh-873 17, "Philosophie & Informatique : interactions contemporaines". Programme ANR "The Geometry of Algorithms" (GoA). Contato: jbjoinet@me.com

Recebido em: 30/04/2021 Aceito em: 30/05/2021

1. Introduction

Le résultat, standard en logique, connu sous le nom de "théorème de compacité" peut être présenté sous différentes formes. On peut notamment le présenter comme décrivant une propriété de finitude de la relation de conséquence logique (ordinairement notée $\vDash$)[1]. Il s'énonce alors ainsi:

Théorème de finitude:

si $\Gamma\vDash\varphi$, alors il existe un sous-ensemble fini Δ de Γ tel que $\Delta\vDash\varphi$.

Dans le présent article, on propose une approche atypique car syntaxique de ce "théorème de finitude" (on se limitera au cas de la logique propositionnelle). L'approche est atypique avant tout parce qu'on considère généralement que la question elle-même (parvenir à "finitiser" un ensemble de prémisses dont une conclusion s'ensuit) n'a de sens véritable que du point de vue sémantique, autrement dit qu'elle n'a guère de sens du point de vue syntaxique. En effet, dans la mesure où les preuves formelles, par exemple dans l'une des versions standard du "Calcul des séquents" pour la logique classique, sont des arbres *finis* et où une preuve formelle d'un séquent $\Gamma\vdash\varphi$ (i.e. un couple formé d'un ensemble de formules et d'une formule φ et noté ainsi), ne mobilise jamais réellement qu'un nombre fini d'hypothèses (réellement, signifiant ici : *actuellement utilisées*), l'objectif de "finitiser" l'ensemble des hypothèses est pour ainsi dire toujours déjà atteint (ou en tout cas trivialement atteignable). Quand on l'envisage du point de vue syntaxique (celui de l'inférence, de la déductibilité), la question apparaît donc comme trivialement résoluble et donc essentiellement sans intérêt.

Aborder dans une perspective syntaxique la propriété de finitude n'est pourtant pas dénué de sens, puisque c'est poser la question suivante : des discours argumentatifs infinis (non pas "en largeur", au sens de l'ω-logique, où les règles d'inférence elles-mêmes – les ω-règles – sont d'arité infinie, mais au sens d'argumentations "sans commencement", composées d'une infinité d'instances de nos règles ordinaires, d'arité finie) seraient-ils capables de conquérir de nouveaux ensembles de théorèmes?

On voit que, pour aborder cette question de la finitude dans cette perspective syntaxique, il faut commencer par élargir l'horizon habituel de la

1 De façon standard, on dit que l'ensemble Γ de formules propositionnelles a la formule φ pour "conséquence" (notation: $\Gamma\vDash\varphi$) quand toute valuation assignant la valeur vrai (1) simultanément à toutes les formules de , rend également vraie φ.

"syntaxe" en étendant la notion standard d'argumentation formelle de façon à y intégrer cette dimension potentiellement infinitaire (que la sémantique comporte d'emblée: les valuations booléennes sont des applications dont le domaine est infini). Sans un tel élargissement, la question elle-même de la finitude ne peut être convenablement posée (sinon en termes triviaux) et devient essentiellement sans objet. Il faut donc se placer à un point de vue plus large où, en un certain sens, la distinction entre syntaxe et sémantique s'étiole (puisque, notamment, l'infini fait son entrée dans la syntaxe), un point de vue où (pour reprendre la formulation de Jean-Yves Girard) la dualité syntaxe/sémantique se trouve dépassée.

Un tel dépassement peut être réalisé via des outils et dans des cadres variés. L'un de ces cadres, emblématique, est celui de la méthodologie adoptée par Kurt Schütte dans un article de 1956 (article dans lequel il construit un al-¨ gorithme de décision pour la prouvabilité logique classique propositionnelle, ainsi qu'une preuve de la complétude de la logique – logique propositionnelle et logique du premier ordre)[2].

Le cadre dans lequel Schütte travaille est un calcul des séquents (sans règle de coupure), dans lequel les séquents (ensemblistes) sont bilatéraux et finis (i.e. les séquents sont de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ et Δ sont des ensembles de formules tels que $\Gamma \cup \Delta$ est fini, mais où, contrairement aux séquents envisagés précédemment, Δ n'est pas nécessairement un singleton), mais un calcul des séquents plus large que les calculs standard puisqu'y sont syntaxiquement représentés non seulement des argumentations correctes (les preuves), mais aussi des argumentations incorrectes – calculs qu'on pourrait pertinemment qualifier de "protologiques", même si Schütte n'emploie pas ce mot.

Dans le cas propositionnel, ce système comprend 1/ comme règles 0-aires, des axiomes *quelconques* avec, parmi eux, les axiomes identité "corrects" (il y a ici une première modalité d'extension de la syntaxe argumentative qui réalise, comme on va le voir, l'intégration dans celle-ci d'un composant

2 Kurt Schütte, "Ein System des verknüpfenden Schliessens", *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, vol. 2, p.55-67, 1956. Schütte utilise cette méthode (pré-¨ sentée plus loin) pour démontrer la décidabilité du calcul classique propositionnel et la complétude (de la logique propositionnelle et de la logique du premier-ordre). Formulée dans le cadre du calcul des séquents, la méthode est parfois appelée méthode de *construction de l'arbre de réfutation* des séquents non prouvables. Notons que selon S. Negri et J. von Plato, *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, 2001, p. 86, l'idée d'une telle méthode avait été antérieurement proposée par O.Ketonen, "Predikaattikalkyylin taydellisyydesta" (On the completeness of predicate calculus), *Ajatus*, vol. 10, pp. 77-92, 1941, sans que ce dernier n'ait toutefois développé les détails de la démonstration (merci à Alberto Naibo pour cette indication).

"sémantique"), 2/ comme règles non 0-aires, seulement des règles *réversibles*[3] (et correctes, au sens du théorème de correction). Le système ne comprend pas de règles de contraction. On y représente syntaxiquement à la fois:

1. des argumentations correctes, les preuves (finies et dans lesquelles tous les axiomes mobilisés sont des axiomes identité);
2. des argumentations également finies, mais incorrectes (même si les règles logiques non 0-aires qu'elles mobilisent sont toutes correctes) puisque l'un ou plusieurs de leurs axiomes le sont (ces axiomes décrivent ou plutôt constituent autant de contre-modèles).

Dans le cas de la logique du premier ordre, l'impossibilité de proposer, pour l'introduction des quantificateurs, des règles toutes réversibles, impose l'extension du système par les règles de contraction; les arbres argumentatifs peuvent dès lors être infinis (les branches infinies de ces axiomes constituant également autant de contre-modèles).

Dans la limpide démonstration du théorème de complétude à la Ketonen- Schütte, preuves et interprétations, syntaxe et sémantique donc, sont toutes ramenées à un format homogène : le format inférentiel (qui, pour ce faire, dans le cas de la logique du premier ordre, doit intégrer – et intègre – la dimension infinitaire des modèles).

Le présent article s'inspire globalement de cette méthodologie de Schütte et de sa façon d'intégrer la dimension infinitaire dans la syntaxe argumentative protologique. Quoique similaire, cette méthodologie est cependant mobilisée ci-après dans un cadre différent, en fait plus large, puisque, pour traiter la propriété de compacité/finitude dans ce même format inférentiel généralisé, on doit prendre en considération le cas plus général où les séquents eux-mêmes ne sont pas nécessairement finis[4].

---

3 Dans un système de dérivation de séquents, une règle $\frac{\Gamma_1\vdash\Delta_1 \ \dots \ \Gamma_n\vdash\Delta_n}{\Gamma'\vdash\Delta'}$ est réversible, si pour tout i ∈ {1,...,*n*}, la règle $\frac{\Gamma'\vdash\Delta'}{\Gamma_i\vdash\Delta_i}$ est admissible. Deux propriétés des règles réversibles sont utilisées dans cet article. Tout d'abord, si une règle d'introduction (par exemple à droite) du connecteur (par exemple) binaire est réversible, alors si le séquent est dérivable, alors il existe une dérivation de ce séquent dont la dernière règle introduit comme connecteur principal de l'occurrence spécifiée de $\varphi\star\psi$ dans ce séquent.
D'autre part, si dans une instance donnée d'une règle réversible $\frac{\Gamma_1\vdash\Delta_1 \ \dots \ \Gamma_n\vdash\Delta_n}{\Gamma'\vdash\Delta'}$ l'un des séquents $\Gamma_i\vdash\Delta_i$ est réfutable, alors le séquent conclusion de cette instance l'est également.

4 Notons que, en utilisant les mots propres au point de vue syntaxique, on peut dire que les preuves traditionnelles (sémantiques) du théorème de finitude propositionnel traitent en réalité

Dans ce cadre, même en logique propositionnelle, des argumentations localement partout correctes (à branchements d'arité bornée) mais infinies (au sens où l'arbre lui-même est infini, i.e. comprend des branches infinies) sont à prendre en considération. Démontrer la compacité revient alors à démontrer que de telles argumentations sont en fait nécessairement incorrectes (qu'en fait elles contiennent, i.e. décrivent, des contre-modèles).

Pour clore cette introduction, précisons que, dans ce qui suit, et seulement afin de limiter le nombre de règles du système et écourter la démonstration, on aborde le théorème de finitude non pas dans le cadre d'un calcul des séquents protologique *bilatéral* à la manière de Schütte, mais dans le cadre d'un calcul des séquents protologique *monolatéral*, à la manière de S.S. Wainer et L.A. Wallen[5]. Dans ce contexte, l'énoncé du théorème de finitude devient :

si $\vdash \Gamma$, alors il existe un sous-ensemble fini Δ de Γ tel que $\vdash \Delta$.

L'abandon du cadre bilatéral pour le cadre monolatéral ne change absolument rien au fond de l'approche. Il simplifie en revanche l'exposé de la solution, en faisant drastiquement diminuer le nombre de règles du système.

2. Définitions et rappels

2.1. Formules et dualité

A partir de maintenant, on entendra par *ensemble des formules*, un sous-ensemble de l'ensemble des formules propositionnelles usuelles formées à partir de la conjonction ($\wedge$) et de la disjonction ($\vee$), à savoir le sous-ensemble de

---

simultanément deux sources d'infini (et ce, confusément, sans les distinguer). L'infini provient tout d'abord et tout simplement du fait qu'on s'intéresse à des ensembles de formules infinis (comme c'est aussi le cas dans le présent article) et à leurs réalisations alias leurs modèles. Mais l'infini provient également du fait que, moralement, on doit prendre en compte l'ensemble du langage (et non pas seulement le langage de tel ou tel ensemble de formules visé), ce qui, du point de vue syntaxique, revient à dire qu'on prend en considération des preuves possiblement non analytiques (avec coupures), même quand les ensembles de formules impliqués sont finis (ce qui fait perdre toute borne sur le vocabulaire à prendre en considération). Le fait que l'approche proposée dans le présent article prenne place dans le cadre d'un calcul des séquents *sans coupure* (où toutes les preuves sont donc analytiques) permet de démêler ces deux sources d'infinité (et permet d'évacuer complètement cette seconde source pour dégager le véritable sens syntaxique de la finitude).

5 S. S. Wainer and L. A. Wallen, "Basic Proof Theory", S. S. Wainer and P. Aczel and H. Simmons (eds), *Proof Theory : A Selection of Papers from the Leeds Proof Theory Programme 1990*, Cambridge University Press, 1992, p.3-26.

celles qui sont de *Morganisées* (autrement dit en forme normale relativement aux réécritures fondées sur les "lois de de *Morgan* permettant de limiter la portée des négations aux sous-formules atomiques). En outre, le connecteur unaire de négation est supprimé du langage, au profit d'une relation binaire de dualité *définie*.

Pour définir l'*ensemble des formules* avec précision, on commence par se donner un ensemble dénombrable $\mathrm{Prop}=\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de constantes de proposition, muni d'une involution $(.)^{\perp}$ (une bijection involutive de cet ensemble dans lui même), partout différente de l'identité (i.e. telle que $X_i^{\perp} \neq X_i$ pour tout $i\in\mathbb{N}$). Sur cette base:

- d'une part, on définit inductivement les *formules* de façon standard (mais pour un langage ne comprenant pas de négation et comprenant comme seuls connecteur la conjonction et la disjonction) par:

$$\varphi := X_i \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi$$

- d'autre part, on étend inductivement l'involution $(.)^{\perp}$ en une involution, également notée $(.)^{\perp}$, de l'ensemble des formules dans lui-même, comme suit:

$$(\varphi\wedge\psi)^{\perp} = \varphi^{\perp} \vee \psi^{\perp} \quad \text{et} \quad (\varphi\vee\psi)^{\perp} = \varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp}$$

Terminologie et remarques

- Les formules de la forme X_i sont appelées formules atomiques (une formule notée $X_j^{\perp}$ est donc atomique).
- La notion de sous-formule d'une formule est définie de façon standard. Attention cependant au fait que la formule φ n'est pas sous-formule de sa duale $\varphi^{\perp}$.
- On vérifie (par induction sur φ) que la version étendue de l'application $(.)^{\perp}$ est effectivement une involution (au demeurant partout différente de l'identité). En particulier $\varphi^{\perp\perp} = \varphi$. On dit que φ et $\varphi^{\perp}$ sont deux formules duales l'une de l'autre (ou encore que φ est la duale de $\varphi^{\perp}$ et réciproquement).

Dans la sous-section suivante, parce que la négation est ici abordée comme relation binaire (de dualité) *définie* (et non via un *connecteur* unaire de négation intégré au langage), on est amené, dans la version du calcul des séquents considérée (celle avec séquents monolatéraux), à remplacer les habituelles *contraintes d'identité* propres aux habituelles règles *axiome logique et coupure* (qui supposent une identité entre des occurrences de formules n'étant pas situées du même côté du signe $\vdash$) par des *contraintes de dualité* (entre des occurrences de formules situées du même côté du signe $\vdash$).

Ainsi, l'*axiome identité* habituel, $\overline{\varphi \vdash \varphi}$, dont la correction requiert que les deux occurrences de formule qui y sont spécifiées soient des occurrences d'une *même* formule, devient l'*axiome dualité* $\overline{\vdash \varphi, \varphi^{\vdash}}$ où les deux occurrences de formule spécifiées doivent être des occurrences de formules *duales* (puisque le système que nous allons considérer ne comprend pas la règle de coupure, il n'est pas utile de préciser les contraintes de dualité de la coupure dans ce cadre).

2.2. Séquents, règles, pré-preuves et preuves

Dans ce qui suit, Γ, Δ etc désignent des *ensembles* de formules *non nécessairement finis*. Envisagé du point de vue de la déduction, un ensemble de formules Γ est appelé un séquent (ensembliste, multi-conclusions et monolatéral droit) et est noté $\vdash \Gamma$ (on se permettra donc de dire qu'une formule appartient au séquent $\vdash \Gamma$, là où l'on s'attendrait à lire qu'elle appartient à l'ensemble Γ).

Bien que cet usage du signe dans la notation de séquents *monolatéraux* soit totalement superflu, sa présence a quand même une vertu, disons communicationnelle, celle de connoter, dans nos discours, que nous sommes en train de parler, le cas échéant, d'ensembles de formules *en tant que nœuds dans un arbre argumentatif* (une dérivation), par opposition à des ensembles de formules *envisagés per se*.

On présente maintenant l'*ensemble des règles* du système protologique (au sens où, comme on l'a vu, il permet de représenter aussi bien des preuves correctes que des preuves incorrectes) auquel nous allons nous intéresser.

Règle "axiome"

$$\frac{}{\vdash \Gamma}\,\text{axm}$$

Règles "logiques"

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}\,\wedge \qquad\qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi}\,\vee$$

Dans le cas particulier où, dans la règle 0-aire *axiome*, le séquent Γ comprend une paire de formules duales, on dit qu'il s'agit d'un *axiome dualité* (ou encore d'un *axiome logique*).

"Anxiome dualité"

$$\frac{}{\vdash \Delta, \varphi, \varphi^{\perp}}\ \text{axm dual}$$

Terminologie et remarques:

- On appelle séquent conclusion d'une règle, le séquent situé sous la barre horizontale. Et séquent prémisse, tout séquent situé au-dessus de la barre horizontale, le cas échéant.
- De façon standard, on distingue parmi les occurrences de formules qui interviennent dans une instance de règle non 0-aire : l'occurrence *principale* de la règle est celle (présente dans le séquent conclusion de la règle) dont le connecteur principal est introduit par la règle; les occurrences *actives* de la règle sont celles (présentes dans un séquent prémisse de la règle) qui sont les sous-formules spécifiées de la formule principale de la règle; les occurrences *passives* de la règle sont toutes les occurrences qui ne sont ni les occurrences actives, ni l'occurrence principale.
- Notons en passant que, dans les axiomes dualité, la présence de formules autres que les formules duales peut être vue comme résultant d'un usage implicite de la règle d'affaiblissement (affaiblissements qui, dans une dérivation, auraient cependant toujours une même place assignée : dans la canopée de l'arbre, sous les axiomes).

Définition 1: L'ensemble des *pré-preuves* de notre protologique est le plus petit ensemble d'arbres (dont les branches ne sont pas nécessairement finies) à nœuds parmi les séquents:

1. possédant une "racine": le "séquent conclusion" de la pré-preuve;
2. et clos par les contraintes suivantes : si un séquent $\vdash\Delta$ y est présent :
   (a) $\vdash\Delta$ est séquent conclusion d'un axiome dans cet arbre si et seulement si Δ comprend une paire de formules duales ou, à défaut, Δ est formé uniquement de formules atomiques;
   (b) et dans tous les autres cas (i.e. si Δ ne comprend pas de paires de formules duales et comprend au moins une formule non atomique),

$\vdash\Delta$ est séquent conclusion, dans cet arbre, de l'une des deux règles logiques (non 0-aires).

Exemples de pré-preuves

Exemple 1

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \varphi, \varphi^{\perp}, \psi^{\perp}, \varphi^{\perp}\wedge \psi}\,axm \qquad \dfrac{}{\vdash \varphi, \psi, \psi^{\perp}, \varphi^{\perp} \wedge \psi}\,axm}{\vdash \varphi, \psi^{\perp}, \varphi^{\perp} \wedge \psi}\,\wedge$$

Exemple 2

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash X_0, X_0^{\perp}, X_1^{\perp}}\,axm \qquad \dfrac{}{\vdash X_0, X_1^{\perp}, X_3}\,axm}{\vdash X_0, X_1^{\perp}, X_0^{\perp}, X_3}$$

Exemple 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash X_0\ ,\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ ,\ \ldots\ ,\ X_{2i}\ ,\ X_{2i+1}\ ,\ X_{2(i+1)} \vee X_{2(i+1)+1}\ ,\ \ldots}\,\vee}{\vdots}}{\vdash X_0\ ,\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ ,\ \ldots\ ,\ X_{2i} \vee X_{2i+1}\ ,\ X_{2(i+1)} \vee X_{2(i+1)+1}\ ,\ \ldots}\,\vee}{\vdash X_0\ ,\ X_1\ ,\ X_2 \vee X_3\ ,\ \ldots\ ,\ X_{2i} \vee X_{2i+1}\ ,\ X_{2(i+1)} \vee X_{2(i+1)+1}\ ,\ \ldots}\,\vee}{\vdash X_0 \vee X_1\ ,\ X_2 \vee X_3\ ,\ \ldots\ ,\ X_{2i} \vee X_{2i+1}\ ,\ X_{2(i+1)} \vee X_{2(i+1)+1}\ ,\ \ldots}\,\vee$$

Définition 2: La complexité $C(\varphi)$ d'une formule φ est définie comme à l'accoutumée par induction sur φ. Si φ est atomique, $C(\varphi)=0$. Si $\varphi := \psi \star \chi$ (où $\star$ est un connecteur binaire), alors $C(\varphi) = \min(C(\psi), C(\chi))+1$.
Si Γ est un ensemble fini de formules et σ est le séquent ensembliste $\vdash\Gamma$, la complexité $C(\sigma)$ de ce séquent est définie par: $C(\sigma)=\sum_{\varphi_i\in\Gamma} C(\varphi_i)$

Remarque 3: Si Γ est fini, une pré-preuve ayant $\vdash\Gamma$ pour séquent conclusion est un arbre fini.

Démonstration: Au fur et à mesure qu'on remonte une branche dans l'arbre d'une pré-preuve (dont les embranchements sont d'arité au plus 2) en partant du séquent conclusion $\vdash\Gamma$, la complexité des séquents rencontrés diminue.

3. Le théorème de finitude

Dans cette section, on va s'intéresser à des séquents ensemblistes $\vdash\Delta$ (où généralement Δ est infini) "équipés" d'une énumération des formules de Δ (pour faire court, on parlera parfois de séquents *énumérés*). Si σ est un séquent énuméré, F_i^σ désignera (si elle existe) la i-ème formule dans σ (ième au sens de l'énumération équipant ce séquent). Quand on représente un séquent énuméré, les formules représentées seront listées de la gauche vers la droite selon l'ordre conforme à l'ordre de cette énumération.

Définition 4: Soit σ un séquent énuméré. Si F_n^σ n'est pas atomique et pour tout $1 \leq i < n$, la formule F_i^σ est atomique, on dit que F_n^σ *est la formule sous le focus dans* σ (*pour l'énumération dont il est équipé*).

Définition 5: On dit d'une pré-preuve π qu'elle "traite obstinément les formules sous le focus", si elle respecte les deux conditions suivantes:

1. tous les séquents de π sont équipés d'une énumération;
2. dans chaque règle logique *r* de π, la "formule sous le focus" dans le séquent conclusion σ de *r* (pour l'énumération considérée de σ) est la formule principale de *r.*

On décrit à présent une méthode décrivant, pour chaque séquent $\vdash\Gamma$ énuméré, une pré-preuve π particulière, traitant obstinément les formules sous le focus (signalons en passant que, dans cette description, on écrit $\vdash_\sigma \Delta$ pour rappeler que le séquent $\vdash\Delta$ sur lequel on attire l'attention est celui qu'on a appelé le séquent σ).

Définition 6: Soit $\vdash\Gamma$ un séquent énuméré. On note $\pi(\Gamma)$ l'unique pré-preuve de conclusion $\vdash\Gamma$ close par les contraintes définitionnelles énoncées ci-dessous (desquelles il résulte que $\pi(\Gamma)$ existe, qu'elle est unique et qu'elle *traite obstinément les formules sous le focus*), qui définissent univoquement, pour chaque règle *r* logique présente dans $\pi(\Gamma)$, l'énumération équipant les séquents prémisses de *r* en fonction de celle du séquent conclusion de *r* :

1. Si *r* est une $\wedge$-intro: si σ est le séquent conclusion de *r* et $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ est la formule principale de *r*, on demande que cette formule soit la "formule sous le focus" dans σ. Par ailleurs, l'énumération équipant les séquents

prémisses de *r* en fonction de celle du séquent conclusion de *r* est univoquement définie ci-dessous. Localement, la pré-preuve $\pi(\Gamma)$ est globalement de la forme décrite ci-dessous.

$$
r\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdash_{\sigma_1}\ \dots\varphi_1\dots\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \vdash_{\sigma_2}\ \dots\varphi_2\dots\end{array}}{\vdash_{\sigma}\ \dots,\underbrace{\varphi_1\wedge\varphi_2}_{F_n^{\sigma}},\dots}\ \wedge
$$

On définit l'énumération du séquent prémisse σ_i de *r* (avec $i \in \{1,2\}$) par cas, comme suit:

(a) si φ_i appartient au séquent σ, alors pour tout $i < n$, $F_i^{\sigma_i} = F_i^{\sigma}$, mais pour tout $i \geq n$, $F_i^{\sigma_i} = F_{i+1}^{\sigma}$. En termes plus digestes : le début de l'énumération du séquent σ_i reste identique à celui de celle associée à σ, mais, à partir du rang *n*, l'énumération associée à σ est "décalée de -1" (puisque la formule $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ "disparaît" de la liste au rang *n* tandis que la sous-formule "fusionne"dans σ_i avec celle déjà présente, qu'elle soit classée "avant" le rang *n* ou "après" le rang *n*.

(b) si φ_i n'appartient pas au séquent σ, pour tout $i \neq n$, $F_i^{\sigma_i} = F_i^{\sigma}$ et $F_n^{\sigma_i} = \varphi_i$. En termes plus digestes : l'énumération du séquent σ_i est identique à celle associée à σ, sauf au rang *n* où $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ a été remplacée par φ_1.

2. Si *r* est une $\vee$-intro: si σ est le séquent conclusion de *r* et $\varphi_1 \vee \varphi_2$ est la formule principale de *r*, on demande ici encore que cette formule soit la "formule sous le focus" dans σ. Par ailleurs, l'énumération équipant le séquent prémisse de *r* en fonction de celle du séquent conclusion de *r* est univoquement définie ci-dessous. Localement, la pré-preuve $\pi(\Gamma)$ est globalement de l'une des deux formes décrites ci-dessous.

$$
r\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdash_{\sigma'}\ \dots,\varphi_1,\dots,\varphi_2,\dots\end{array}}{\vdash_{\sigma}\ \dots,\underbrace{\varphi_1\vee\varphi_2}_{F_n^{\sigma}},\dots}\ \vee
\qquad\qquad
r\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdash_{\sigma'}\ \dots,\varphi_1,\dots,\varphi_2,\dots\end{array}}{\vdash_{\sigma}\ \dots,\underbrace{\varphi_1\vee\varphi_2}_{F_n^{\sigma}},\dots}\ \vee
$$

On définit l'énumération du séquent prémisse σ' de *r* par cas, comme suit:

(a) φ_1 et φ_2 appartiennent toutes deux au séquent σ, alors pour tout $i < n$, $F_i^{\sigma'} = F_i^{\sigma}$ mais pour tout $i \geq n$, $F_i^{\sigma'} = F_{i+1}^{\sigma}$. En termes plus digestes: les formules actives φ_1 et φ_2 "fusionnent" avec celles déjà présentes, en sorte que le début de l'énumération du séquent σ' reste identique à celui de celle associée à σ (et ce, du reste, qu'on ait $\varphi_1 = \varphi_2$ ou non), mais au rang *n*, la formule $\varphi_1 \vee \varphi_2$ "disparaît" de la liste dans σ' en sorte qu'à partir de ce rang *n*, l'énumération est "décalée de −1";
(b) si seule φ_1 (resp. φ_2) appartient au séquent σ, alors pour tout $i \neq n$, $F_i^{\sigma_i} = F_i^{\sigma}$ et $F_n^{\sigma_i} = \varphi_2$ (resp.φ_1). En termes plus digestes: l'énumération du séquent σ_i est identique à celle associée à σ, sauf au rang *n* où $\varphi_1 \vee \varphi_2$ a été remplacée par φ_2 (resp.φ_1), raison pour laquelle la suite de l'énumération est inchangée.
(c) si aucune des formules φ_1 et φ_2 n'appartient au séquent σ, alors pour tout $i < n$, $F_i^{\sigma'} = F_i^{\sigma}$ mais $F_n^{\sigma_i} = \varphi_1$ et $F_{i+1}^{\sigma} = \varphi_2$. En termes plus digestes : le début de l'énumération du séquent σ' reste identique à celui de celle associée à σ, et au rang *n*, la formule active φ_1 vient remplacer $\varphi_1 \vee \varphi_2$, puis on intercale la formule active φ_2 ce qui, à partir de ce rang (*n*+1) décale de 1 tout le reste de l'énumération.

Proposition 7: (*Résultat principal*) Si Γ est infini et que π(Γ) est un arbre infini (ce qui, en vertu de la remarque 3, suppose que son séquent conclusion soit infini), alors Γ est réfutable (i.e. admet un contre-modèle).

Démonstration: Si la pré-preuve π(Γ) (qui est un arbre à branchements d'arité bornée – branchements 0, 1 et 2-aires) est un arbre infini, il existe dans π(Γ) une branche infinie b. La branche *b* peut être décrite comme une suite infinie de séquents $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots$ où le sequent σ_0 est $\vdash \Gamma$, le séquent conclusion de π(Γ), et où chaque σ_{i+1} est séquent prémisse d'une règle non 0-aire dont σ_i est le séquent conclusion.

Considérons la fonction v définie par: $v(X_i)=0$, si la constante propositionnelle X_i est présente dans un séquent de *b*; $v(X_i) = 1$, si $X_i^{\perp}$ est présente dans un séquent de *b*.

Observons d'abord que v est bien définie (il s'agit bien d'une fonction). En effet, supposons que l'atome X_i soit présent dans un séquent de *b* et que $X_i^{\perp}$ soit également présent dans un séquent de *b* , alors il existe une séquent de *b* dans lequel ces deux formules atomiques sont présentes (puisque tout atome figurant parmi les formules du séquent conclusion d'une règle, figure "encore" dans n'importe quel séquent prémisse de cette règle). Ceci est toutefois impossible, car alors, par définition de la notion de pré-preuve, σ_i serait séquent conclusion d'un axiome – et b serait donc finie.

Observons maintenant que v est un contre-modèle de toute formule présente dans un séquent de *b*. En effet, les contraintes par lesquelles $\pi(\Gamma)$ est close (par définition de la notion des- pré-preuve), sont telles que toute formule présente dans un séquent "finira" par être "formule focus" d'un séquent situé plus haut dans *b*. Plus précisément, si une formule σ non atomique est présente dans σ_i , il existe un entier $j > i$ tel que $\varphi \in \sigma_j$ et φ est principale dans la règle dont σ_j est le séquent conclusion. Dans $\pi(\Gamma)$, toute formule finira par donc par être pour ainsi dire décomposée (jusqu'à ses atomes). Comme tous les formules atomiques présentes à la fois dans la formule φ et dans *b* sont réfutées par *v* et que la fausseté d'une prémisse entraîne la fausseté du séquent conclusion (sachant que toutes les règles sont réversibles), la formule φ concernée est elle-même réfutée. Tous les séquents de *b* sont donc réfutés par v. En particulier, $\vdash \Gamma$ l'est.

Remarque 8 (*K. Schütte; S.S.Wainer et L.A.Wallen*) Une pré-preuve qui comporte un axiome qui n'est pas un axiome dualité est réfutable.

Démonstration: En effet, si l'un au moins des axiomes présents n'est pas un axiome dualité, on montre alors facilement (comme le font S.S. Wainer et L.A. Wallen à la manière de K. Schütte) que cet axiome est réfutable par le contre-modèle qu'il décrit (défini par: $v(X_i)=0$, si la constante propositionnelle Xi est présente dans le séquent conclusion de cet axiome; $v(X_i)=1$, sinon) et que cette valuation est un contre-modèle de chaque séquent de la branche qu'il couronne (puisque toutes les règles sont réversibles). En particulier, cette valuation décrit un contre-modèle du séquent conclusion de la pré-preuve $\pi(\Gamma)$.

Proposition 9: Une pré-preuve est réfutable si et seulement si elle comporte un axiome qui n'est pas un axiome dualité ou elle est un arbre infini.

Démonstration: Le sens "si" résulte des propositions 7 et 8. La réciproque résulte du théorème de correction (les axiomes dualités sont toujours satisfaits et les règles préservent la vérité des prémisses).

Définition 10: On appelle preuves en LK, celles (parmi les pré-preuves *traitant obstinément les formules sous le focus*) qui ne sont pas réfutables. Donc celles:
1. dont les règles 0-aires sont toutes des *axiomes dualité*.
2. qui ont un nombre fini d'embranchements (arbre fini)

Proposition 11: (*K.Schütte; S.S.Wainer et L.A.Wallen*) L'ensemble des preuves de LK qui *traitent obstinément les formules sous le focus* est complet, autrement dit, si Γ est fini:

- soit tous les axiomes de $\pi(\Gamma)$ sont des axiomes dualité (auquel cas cette pré-preuve est une preuve en LK),
- soit l'un au moins des axiomes présent n'est pas un axiome dualité et on montre alors que chacun de ces axiomes décrit un contre-modèle de chaque séquent de la branche qu'il couronne (puisque toutes les règles sont réversibles), donc décrit en particulier un contre-modèle du séquent conclusion de la pré-preuve $\pi(\Gamma)$.

Dans le cas propositionnel, cette preuve constitue en fait un algorithme de décision pour ce calcul des séquents pour la logique propositionnelle classique – dont la complétude s'ensuit. Au demeurant, le système étant complet, mais sans règle de coupure, on déduit même de la complétude (et de la correction) du système, l'admissibilité de la règle de coupure ou si l'on préfère sa redondance.

Revenons au cas qui nous intéresse, celui plus général où l'ensemble Γ est infini.

Proposition 13: *(Compacité/Finitude)* Si Γ est infini et $\vdash \Gamma$ est prouvable dans LK, alors il existe un sous-ensemble Δ fini de Γ, tel que $\vdash \Delta$ est prouvable dans LK.

Démonstration: $\vdash \Gamma$ Soit prouvable dans LK. Considérons une énumération quelconque de Γ. En vertu de la proposition 9, la pré-preuve $\pi(\Gamma)$ induite est un arbre *fini*. On conclut alors comme dans le cas standard (fini): on a alors nécessairement un sous-ensemble Δ infini et co-fini (i.e. dont le complémentaire est fini) de Γ formé de formules présentes dans tous les axiomes formant la canopée de l'arbre et qui sont passives dans toutes les règles non 0-aires de $\pi(\Gamma)$, raison pour laquelle on les retrouve dans le séquent conclusion. Clairement, on peut élaguer ces formules dans tout l'arbre, sans préjudice pour la correction des règles de cette pré-preuve (puisque ces formules y sont toujours passives). Ce faisant, on forme donc une preuve ayant pour conclusion le séquent fini $\vdash \Gamma - \Delta$, comme recherché.

***

Pour conclure, tentons de dégager le sens de cette approche syntaxique du théorème de finitude. Tant que le caractère fini des preuves est *postulé*, le sens syntaxique de ce théorème semble essentiellement trivial (c'est un corollaire quasi immédiat de la finitude des preuves elles-mêmes) et donc de peu d'intérêt.

Cette trivialité est cependant illusoire : elle s'évanouit dès lors que seule la correction locale des argumentations est retenue comme définissante (i.e. sans que soit en sus dogmatiquement *postulée* leur finitude). A contrario, dans ce dernier cas (celui où seule la correction locale est postulée), la démonstration proposée plus haut du théorème de finitude donne un sens non trivial au théorème, puisqu'elle *justifie* le choix de la finitude des preuves (propriété cette fois déduite et non plus postulée). Un Entendement qui, localement, raisonnerait correctement, mais ce, depuis toujours, pourrait certes inférer davantage qu'un entendement dont les argumentations s'inscriraient dans un temps fini (i.e. avec une fin, mais aussi un commencement) – mais dans ce cas, les conclusions du Premier seraient réfutables.