Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores

Construction and use of the concept Linear Combination of Vectors

Marcela Parraguez González[1], Vivian Libeth Uzuriaga López[2]
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile – Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia
marcela.parraguez@ucv.cl
vuzuriaga@utp.edu.co

***Resumen*— La investigación se sitúa en el estudio del concepto combinación lineal de vectores, que concierne al álgebra lineal, bajo dos enfoques: uno, la Teoría APOE para indagar en su construcción, y otro, la Célula Generadora, para evidenciar su uso. Se diseñó una descomposición genética teórica del concepto combinación lineal y una célula generadora, que involucra conceptos que subyacen a su alrededor. En la parte empírica de la investigación se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas, para testear la viabilidad de los diseños, en 12 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), quienes dieron información respecto a las construcciones y usos que realizaron.**

Palabras clave*— *Combinación lineal, teoría APOE, descomposición genética y célula generadora.

***Abstract*— The focus of this research is in the study of linear combination of vectors, the topic is attacked under two approaches: on the one hand by APOS theory, to investigate its construction and on the other hand by the Generator Cell to demonstrate its use. A theoretical Genetic decomposition of the concept linear combination and a generating cell, involving concepts that underlay around it. In the empirical part of the research questionnaire and interviews, to test the feasibility of designs was designed and administered, to 12 students in the program Degree in Mathematics from the Catholic University of Valparaíso (Chile), giving information about the constructions and uses that they made.**

***Key words*— Linear combination, APOS theory, genetic decomposition and generating cell.**

I. INTRODUCCIÓN

El concepto de combinación lineal de vectores está inmerso en el tópico de Espacios Vectoriales del dominio del Álgebra Lineal, que es básico y central para la construcción de otros conceptos no menos fundamentales, vectores linealmente dependientes e independientes, espacio generador, base de un espacio vectorial, transformaciones lineales, entre otros, es decir, la combinación lineal de un conjunto de vectores se concibe como una célula generadora de conceptos y conocimientos, como se define en [10]. Esta concepción le permitirá al alumno avanzar en la construcción y uso de los conceptos básicos del álgebra lineal, relacionando los temas de manera progresiva, entrelazada e integrándolos para hacer de ellos un todo y posibilitándole una aproximación adecuada a problemas que surgen en diferentes campos, como por ejemplo en, Física, Química, Ingeniería, Economía, Ecología, Informática, etc. A pesar de lo que representa el álgebra lineal para el desarrollo científico y tecnológico, su enseñanza es comúnmente percibida como una experiencia de fracaso [3] y su aprendizaje es considerado en la mayoría de los casos como un conjunto de objetos abstractos, sin aplicación alguna a la cotidianidad, ni relación o importancia con un programa académico, particularmente ingeniería, tecnología o química [21].

La investigación se reporta desde dos enfoques: uno, el enfoque Histórico Cultural de Vigostky, a partir de la organización del uso del concepto de célula generadora, utilizado por la Dra. Herminia Hernández en su tesis de doctorado titulada: "*El perfeccionamiento de la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior Cubana _Experiencia en el Álgebra Lineal*", [10], a partir del concepto de combinación lineal. Y dos, un enfoque cognitivo, -Teoría APOE [6, 2]- que pone de relieve la construcción del concepto combinación lineal como objeto.

El proceso de investigación conllevó a diseñar un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir el concepto matemático en cuestión (en este caso el de combinación lineal de vectores), llamado descomposición genética [6]. Para testear la viabilidad de la descomposición genética se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 12 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), que dieron información respecto a las construcciones que ellos

Fecha de Recepción: 03 de Mayo de 2014
Fecha de Aceptación: 03 de Agosto de 2014

realizaron. Algunos hallazgos de la investigación dan información respecto al cero vector y las operaciones de un espacio vectorial.

II. CONTENIDO

A. Antecedentes.

En 1997, Dubinsky declaró que la Didáctica del Álgebra Lineal es un campo de investigación nuevo, y también habló de la insuficiencia de la enseñanza del Álgebra Lineal, “No hay […] un cuerpo de investigación que proporcioné la evidencia que convencería a un escéptico de la carencia del éxito de un curso de Álgebra Lineal” [7]. Hoy en día, realmente la Didáctica del Álgebra Lineal no es así, Dorier y Sierpinska [4, 5] certifican la fortaleza del campo. Particularmente Dorier y Sierpinska propusieron una clasificación de estudio más avanzado: (1) análisis histórico epistemológico [4], (2) análisis de los lenguajes del Álgebra Lineal [4, 11], (3) análisis de las características del pensamiento requerido para la comprensión del Álgebra Lineal [1] [17] y (4) estudios de práctica de enseñanza y experimentos de enseñanza del Álgebra Lineal [9, 16]. Más trabajos se han desarrollado, que afirma bien la síntesis antes dicha: [18, 20, 8, 19, 13].
Específicamente, el concepto de combinación lineal de vectores fue estudiado en el libro Learning Linear Algebra with ISETL [22] por los miembros del RUMEC.

B. Marco Teórico: Teoría APOE.

Teoría de carácter cognitiva recibe su nombre debido a sus componentes Acción, Proceso, Objeto y Esquema. La Teoría APOE reflexiona sobre los conceptos desde la propia matemática considerando distintos procesos en la construcción del conocimiento. Según Dubinsky [7], creador de la Teoría, el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones.
Las construcciones mentales de la teoría APOE, son *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*; donde las *acciones* son construidas por respuestas repetitivas a un estímulo; los *procesos* son construidos ya sea al *interiorizar* acciones o al transformar procesos existentes; los *objetos* son construidos al *encapsular* los *procesos*; y, en la *desencapsulación* de un objeto, los únicos procesos que un individuo puede obtener son los procesos que fueron encapsulados para construir este objeto.
La posición en esta investigación fue abordar la construcción del concepto de combinación lineal de vectores desde su definición matemática formal ¿pero cuál definición? Ya que es muy importante declarar, qué definición se espera que los estudiantes (re)construyan y las proyecciones de la misma en su uso.
Uno de los textos guía de los estudiantes del curso en el cual se realizan las entrevistas y cuestionarios, da la siguiente definición de combinación lineal de vectores:
Sean $u_1, \ldots, u_n$ elementos del espacio vectorial U. Se dice que v en U es combinación lineal de estos vectores si existen escalares $c_1, \ldots, c_n$ en K tales que: $v = c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$ [12].
Una característica que se puede observar en la definición anterior, es considerar la construcción de la combinación lineal como una igualdad de vectores, por un lado v y por otro $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$.
Cabe aclarar que en lo que sigue, las descripciones que se hacen de la construcción de conceptos involucrados son en términos cognitivos. Por ello para dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Qué papel juegan algunas nociones del álgebra lineal específicas para que los estudiantes logren una construcción y uso de la combinación lineal de vectores? se formularon los siguientes objetivos particulares: identificar y analizar las construcciones mentales que muestran los estudiantes al construir el concepto de combinación lineal de vectores, mediante la metodología de investigación planteada por la teoría APOE [2].

C. Descomposición genética del concepto combinación lineal de vectores, como objeto.

La descomposición genética del concepto combinación lineal se basa en la construcción del concepto espacio vectorial, que es construido fundamentalmente por la relación de tres esquemas: **conjunto, operación binaria y axioma**. La coordinación de los procesos relacionados con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por escalar juega un papel importante para que emerja un nuevo objeto, llamado espacio vectorial [14].
Con base en los antecedentes entregados por el grupo RUMEC [19], en la experiencia como profesor y aprendiz de este tema, y resultados de investigaciones previas que están disponibles [15], la figura 2 muestra una descomposición genética del concepto combinación lineal de vectores

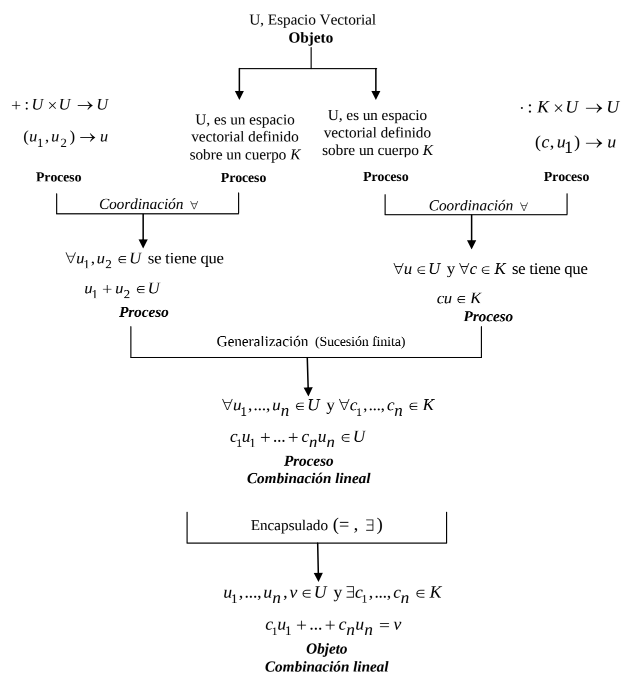

Figura 1. Descomposición genética del concepto de combinación lineal.

En este modelo (Fig. 1) se considera que si un estudiante posee de manera previa una concepción objeto de espacio vectorial, es posible que desencapsule dicho objeto y trabaje con el proceso que lo generó. Así, por un lado, mediante la coordinación entre el proceso de espacio vectorial y de la operación binaria (adición vectorial), por el cuantificador universal $\forall$. Esta coordinación se presenta específicamente cuando un estudiante considera que al sumar dos vectores cualesquiera u_1 y u_2 de *U*, el vector resultante $u_1 + u_2$ está en *U* (por ser *U* espacio vectorial). De la misma manera, por la coordinación entre los procesos de espacio vectorial y multiplicación por escalar, mediante el cuantificador universal $\forall$. Esta coordinación se presenta específicamente cuando un estudiante considera que al multiplicar un vector cualesquiera u de *U*, y un escalar cualesquiera *c* de *K*, el vector resultante cu está en *U* (por ser *U* espacio vectorial). Una vez que un estudiante logra una concepción proceso proveniente de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial *U*, éstos deben generalizarse para una sucesión finita de vectores y para una sucesión finita de escalares, resultando un nuevo proceso de combinación lineal, $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$ que será encapsulado en el objeto combinación lineal a través de la resultante de la suma de: $c_1u_1, \ldots, c_nu_n$ en un vector *v* de *U*. Una vez que el estudiante logra la construcción objeto de la combinación, sólo entonces puede comparar dicho objeto combinación $c_1u_1, + \ldots + c_nu_n$ con el objeto *v*, a través de la igualdad de vectores y de la existencia de los escalares $c_1, \ldots, c_n \in K$ resultando un nuevo objeto llamado combinación lineal de vectores, que se lee: *v* es combinación lineal de los vectores $u_1, \ldots, u_n$.

D. Marco Teórico: Célula generadora

El concepto de combinación lineal de vectores como célula generadora de conocimientos, es el concepto base a partir del cual el estudiante organiza y usa los conceptos matemáticos que subyacen a su alrededor.
La organización de esos conceptos, le permite al aprendiz reestructurar su manera de comprender y de aprender, porque puede establecer articulación entre cada uno de los conceptos y la evolución de los mismos a partir de una definición, facilitándole la apropiación de métodos propios para plantear o solucionar problemas, aplicando sus conocimientos de manera eficaz y natural. La figura 2, ilustra el uso de la combinación lineal para el aprendizaje de la Teoría de espacios vectoriales.

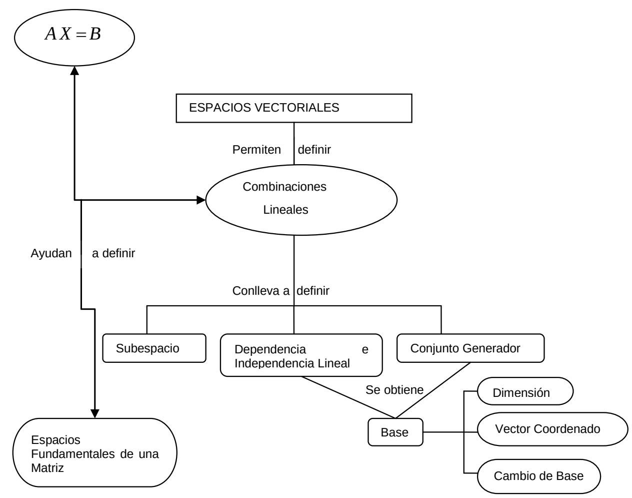

Figura 2. Combinación Lineal como célula generadora.

E. Análisis de una situación desde la construcción cognitiva de la combinación lineal y su uso

Con el fin de mostrar una situación de construcción del concepto combinación lineal como objeto y su uso, se presenta a continuación parte del trabajo realizado por uno de los ocho estudiantes participes de la investigación, a partir de una entrevista, de 9 preguntas.

El estudiante 7 (ES7) trabaja el siguiente problema, sin percatarse de la contradicción que hay en su sistema de ecuaciones lineales. Miremos para ello la argumentación que realizó en la pregunta 5 de la entrevista:

Pregunta 5 de la entrevista

Sea $\mathbb{P}_2[x]$ el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado a lo más dos incluyendo el polinomio nulo, y V un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2[x]$. ¿El vector $-5+7x-x^2 \in V$ es combinación lineal de los vectores $x+2x^2$ y $-1+x+x^2$?

1. Construcción del concepto Combinación Lineal: Teoría APOE.

El ES7 asume que el vector $v=-5+7x-x^2$ es combinación lineal de los vectores $u_1=x+2x^2$ y $u_2=-1+x+x^2$ (ver Figura 3). A partir de lo cual genera un sistema de ecuaciones lineales, que está representada en la figura 4.

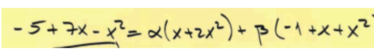

Figura 3. Combinación Lineal

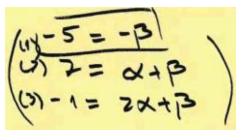

Figura 4. Matriz Asociada

Interpretando su argumento desde el modelo de la Descomposición Genética (Fig. 1) se puede decir que ES7 ha construido el concepto combinación lineal como un proceso, que no ha podido se encapsulado en el Objeto combinación lineal, puesto que ES7 no ha coordinado el proceso de combinación lineal con el proceso solución de un sistema de ecuaciones lineales, como se evidencia en la figura 5.

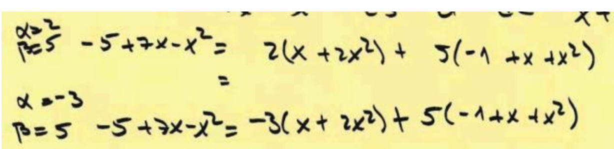

Fig. 5. Respuesta del estudiante 7, a la pregunta 5 de la entrevista.

Así también, otro aspecto relevante es que ES7 no sitúa los vectores de la combinación lineal en un espacio vectorial específico, es decir, no se cuestiona si los vectores $u_1=x+2x^2$ y $u_2=-1+x+x^2$ pertenecen a *V*. En términos de la descomposición genética propuesta, se puede señalar que el ES7 no ha construido el objeto espacio vectorial *V*, por ende no puede desencapsularlo, ni mirar los vectores que están el él; y los trabaja simplemente como polinomios de segundo grado, es decir, como elementos de $\mathbb{P}_2[x]$.

Otro estudiante entrevistado, el estudiante 4, como lo muestra la figura 6, escribe la combinación lineal de los vectores, dando evidencias de una construcción mental proceso del concepto en estudio, sin embargo dicho proceso no es coordinado con el proceso solución de sistema de ecuaciones lineales; lo que dificulta alcanzar el objeto combinación lineal.

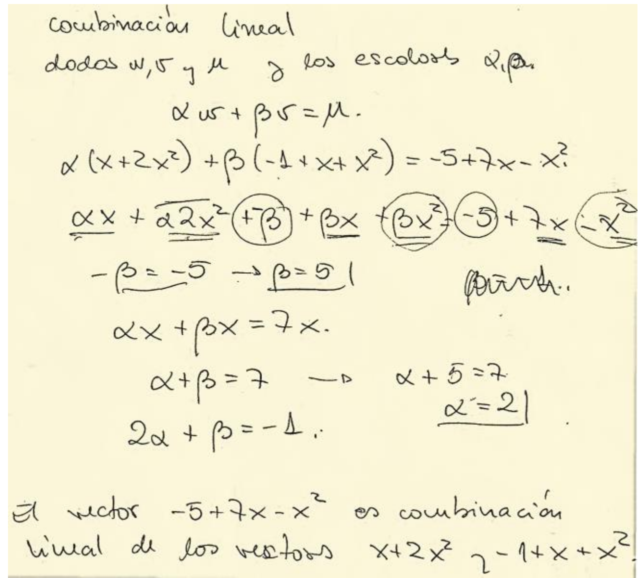

Figura 6. Respuesta del estudiante 4, a la pregunta 5 de la entrevista.

2. Uso del concepto Combinación Lineal: Célula generadora.

Una vez construido el concepto de combinación lineal, se espera que el estudiante esté en capacidad de usarlo en situaciones, por ejemplo para dar solución a un problema de transformaciones lineales.

Pregunta 9 de la entrevista

Si $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, $\beta_1=\{(1,0,1),\ (0,2,0),\ (0,1,1)\}$, $\beta_2=\{(2,0,0),\ (1,1,1),\ (0,2,0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, y $[T]_{\beta_1\beta_2}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$. Determine: $T(x,\ y,\ z)$.

De acuerdo, al argumento que mostró, el estudiante 6, en respuesta a esta pregunta, podemos señalar que él usa el concepto combinación lineal para escribir la imagen de cada uno de los vectores de la base β_1 como combinación de los vectores de la base β_2, como se muestra en la figura 7.

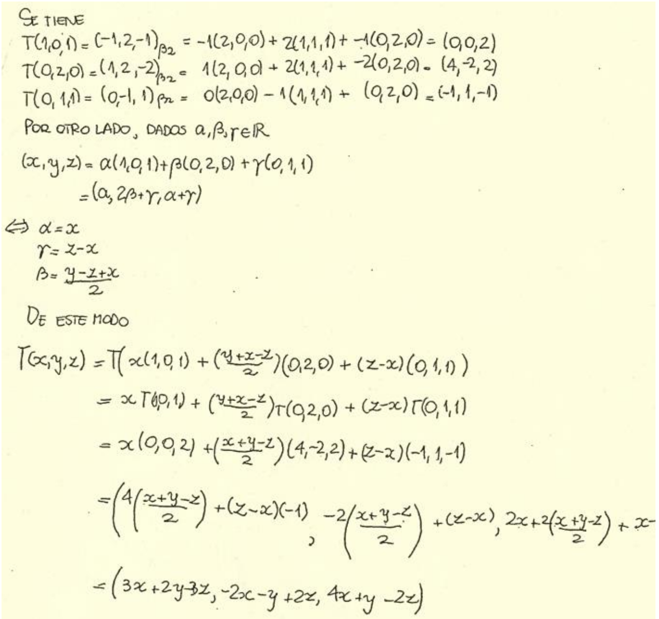

Figura. 7. Respuesta del estudiante 6, a la pregunta 9 de la entrevista.

En esta parte el estudiante 6, muestra claramente el uso de la *combinación lineal* para construir de manera natural e integrada, concepto como: cambio de base, imagen de un vector y vector de coordenadas.
De esta manera se señala que ES6, muestra una coordinación entre el proceso combinación lineal de vectores y el proceso solución de un sistema de ecuaciones lineales, para obtener el uso de la combinación lineal en las transformaciones lineales. Lo que muestra que las transformaciones lineales no son un concepto aislado, sino que por el contrario esta articulado de manera coherente con el concepto que lo ha generado.

III. CONCLUSIONES

De las entrevistas que se realizaron, los análisis muestran que la mayoría de los estudiantes no construyen el concepto combinación lineal como objeto, porque no coordinan el proceso combinación lineal, con el proceso solución de sistemas de ecuaciones lineales, por tanto no muestran una encapsulación del proceso combinación lineal en su objeto.
Por el contrario, estudiantes como ES6, que mostraron coordinar los procesos anteriores, lograron el uso de la combinación lineal, generando conceptos como la transformación lineal, articulada con cambio de base, imagen de un vector y vector de coordenadas.

RECOMENDACIONES

Esta investigación forma parte inicial del proyecto FONDECYT Nº1140801. Además los autores manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición a todos los participantes en la investigación.

En esta sección se agregan agradecimientos a personas que colaboraron en el proyecto pero que no figuran como autores del paper.

REFERENCIAS

[1]. M. Alves Dias and M. Artigue, *Articulation problems between different systems of symbolic representations in Linear Algebra*. Proceedings of PME 19. Recife, Brazil, 1995, 2, 34–41.

[2]. I. Arnon , J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Okta , S. Roa, M. Trigueros and K. Weller, *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer. 2014

[3]. D. Carlson, *Teaching linear algebra: must the fog always roll in?* College Mathematics Journal, 24(1), 1993, p.29–40.

[4]. J-L Dorier, *On the teaching of linear algebra*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 2000.

[5]. J-L. Dorier and A. Sierpinska, *Research into the teaching and learning of linear algebra. In: D. Holton (Ed.), The teaching and learning in mathematics at university level—an ICMI study*. The Netherlands: Kluwer Academic Publisher. 2001 p. 255–273.

[6]. E. Dubinsky, *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer. 1991, p.95-123.

[7]. E. Dubinsky, *Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level, resources for teaching Linear Algebra*. MAA Notes, 42, 1997, p. 85–106.

[8]. G. Gueudet, "Róle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire". Recherches en didactiques des mathématiques, 24(1), 2004, p. 81–114.

[9]. G. Harel,Three principles of learning and teaching mathematics. In: J-L. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 2000, p. 177-189.

[10]. H. Hernández Fernández. *El perfeccionamiento de la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior Cubana. Experiencia en el Álgebra Lineal*. Tesis doctoral, 1989.

[11]. J. Hillel, *Modes of description and the problem of representation in linear algebra.* In: J-L. Dorier (Ed.),

On the teaching of linear algebra. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 2000, p. 191-207.

[12]. B. Kolman and D. Hill, *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Pearson educación de México S. A. 2006.

[13]. M. Maracci, *Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40(2), 2008, p. 265-276.

[14]. M. Parraguez, and A. Oktaç, *Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2010, p. 2112- 2124.

[15]. S. Roa, and A. Oktaç, *Construcción de una descomposición genética. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13(1), 2010, p. 89-112.

[16]. M. Rogalski, *The teaching experimented in Lille*. In: J-L. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra (pp. 133–149). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 2000, p. 133 – 149.

[17]. A. Sierpinska, *On some aspects of students' thinking in linear algebra*. In: J-L. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra (pp. 209–246). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 2000, p. 209 – 246.

[18]. A. Sierpinska, and A. Nnadozie, *Methodological problems inanalyzing data from a small scale study on theoretical thinking in high achieving linear algebra students.* In Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Utrecht, The Netherlands, 4, 2001, p. 177–184.

[19]. M. Trigueros, and A. Oktaç, *La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10, 2005, p. 157-176.

[20]. F. Uhlig, *The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra*. Educational Studies in Mathematics, 50(3), 2002, p. 335–346.

[21]. V. L. Uzuriaga, *Una propuesta del álgebra lineal para los estudiantes de ingeniería de la Universidad Tecnológica de Pereira*, Tesis doctoral. IPLAC_ Cuba. 2006, p. 85 - 87.

[22]. K. Weller, A. Montgomery, J. Clark, J. Cottrill, M. Trigueros, I. Arnon, and E. Dubinsky, *Learning Linear Algebra with ISETL*. Versión. 2002. Disponible en http://pc75666.math.cwu.edu/montgomery/scholar/2002/0731-b-IIawi.pdf

BIBLIOGRAFÍA

[1]. M. Asiala, A. Brown, D.J. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews and K. Thomas, *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds) Research in collegiate mathematics education. Providence: American Mathematical Society. Vol. 2. 1996, p. 1-32.

[2]. J-L. Dorier, A. Robert, J. Robinet, and M. Rogalski, *The meta lever*. In: J-L. Dorier (Ed.), On the teaching of linear algebra. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 2000, p. 151- 176.

[3]. D. Kú, M. Trigueros, and A. Oktaç, *Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE*. Revista Educación Matemática, 20(2). 2008, p. 65-89.

[4]. A. Oktaç, M. Trigueros, and X. N. Vargas, *Understanding of vector spaces: a viewpoint from APOS theory*. In D. Hughes-Hallett, I. Vakalis y H. Arikan (Eds) CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics, Estambul, Turquía: John Wiley & Sons Inc. 2006.