

# MÉTODOS ENERGÉTICOS PARA ANALIZAR LA ESTABILIDAD

Energy methods to analyze the stability

José Rodrigo González Granada, Óscar Fernández Sánchez, Carlos Mario Escobar Callejas  
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

jorodryy@utp.edu.co

oscarf@utp.edu.co

ccescobar@utp.edu.co

**Resumen**— En este trabajo se analiza la estabilidad utilizando métodos de energía en forma general y como aplicación se analiza la estabilidad de una barra delgada finita sujeta en los extremos. Se obtendrán las condiciones de estabilidad para una barra finita sujeta en los extremos.

**Palabras clave**— Energía, elasticidad, estabilidad, Lyapunov, principio variacional.

**Abstract**— In this paper discusses the different methods to analyze the stability in general and as an application we analyze the stability using energy methods in finite thin rod fixed at the ends. The stability conditions for a finite fixed rod are obtained.

**Key Word** — Energy, elasticity, stability, Lyapunov, variational principle

## I. INTRODUCCIÓN

El método de energía tiene varias interpretaciones. En este trabajo analizamos el método de energía utilizando el principio de desplazamientos virtuales. El principio de los desplazamientos virtuales es un principio general que permite el estudio de los estados de equilibrio de los sistemas deformables [1]. De acuerdo con este principio el estado de equilibrio del sistema se caracteriza por el hecho de que la suma de todas las fuerzas internas y externas en cualquier desplazamiento es cero.

## II. CONTENIDO

### Planteamiento del problema

Para ilustrar este principio consideremos que la longitud de la barra de longitud es  $L$ , está fija en los extremos y actúa una fuerza fuerza de compresión  $P$ , denotemos  $dA$  el trabajo de las fuerzas internas durante la transición a otra forma de equilibrio, además supongamos que ésta tiene una carga denotada por  $dW$ .

### Solución del problema de estabilidad

Para resolver este problema podemos escribir la ecuación de estabilidad como:

$$\delta A + \delta W = 0. \quad (1)$$

El trabajo de todas las fuerzas internas la representamos por la expresión:

$$\delta A = - \int_0^L M \delta k dx, \quad (2)$$

donde  $\delta k$  es la variación de la curvatura de la línea elástica de la barra,  $M$  indica el momento de de las fuerzas internas.

Es importante considerar que sólo se tienen en cuentas pequeñas desviaciones de la línea elástica de de la barra en la dirección del eje  $Ox$ . Es por esto que la variación de la curvatura la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\delta k = - \frac{d^2 \delta v}{dx^2}. \quad (3)$$

El trabajo de las fuerzas internas en este caso toma la forma

$$\delta A = \int_0^L M \delta \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx = \int_0^L M \frac{d}{dx} \left( \delta \left( \frac{dv}{dx} \right) \right) dx.$$

(4)

Integrando (4) se obtiene

$$\delta A = \left[ M \delta \left( \frac{dv}{dx} \right) \right]_0^L - \int_0^L \frac{dM}{dx} \frac{d(\delta v)}{dx} dx$$

...

$$\delta A = \left[ M \delta \left( \frac{dv}{dx} \right) \right]_0^L - \left[ \frac{dM}{dx} \delta v \right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2 M}{dx^2} \frac{d(\delta v)}{dx} dx.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad M = -EI \frac{d^2 v}{dx^2},$$

(5)

llegamos la siguiente expresión para  $A$ :

$$\delta A = \left[ M \delta \left( \frac{dv}{dx} \right) \right]_0^L - [Q \delta v]_0^L - \int_0^L EI \frac{d^4 v}{dx^4} \delta v dx \quad (6)$$

El trabajo de la carga externa sobre el movimiento viene dado por

$$\delta W = P \delta e, \quad (7)$$

En (7) la expresión para  $\delta e$  denota la proyección del desplazamiento relativo en los extremos de la barra, el cual se produce cuando se dobla la barra en la dirección de la fuerza  $P$ .El valor de  $\delta e$  es considerada positiva cuando nos acercamos a los extremos de la barra. Tenemos que considerar que la carga se considera "inactiva", es decir, en la dirección de la fuerza de compresión no presenta cambios.

De la figura 1 se puede observar que la longitud del elemento está dada por:

$$ds = dx \left[ 1 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

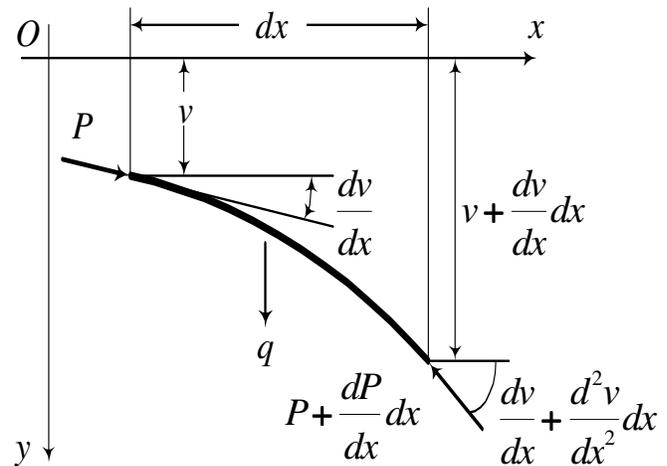


Figura 1. Deformación de la barra

Al expandir en forma de serie y sin pérdida de generalidad para el elemento  $ds$  obtenemos

$$ds = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right].$$

La longitud total de la curva viene dada por

$$L = L_1 + \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx,$$

aquí  $L_1$  es la longitud de la proyección de la curva en la dirección del eje  $Ox$ . La proyección del desplazamiento de los extremos viene dado como

$$e = L - L_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (8)$$

El trabajo  $\delta W$  lo podemos escribir de las siguientes dos formas

$$\delta W = \frac{1}{2} P \int_0^L \frac{dv}{dx} \delta \left( \frac{dv}{dx} \right) dx,$$

$$\delta W = \frac{1}{2} P \int_0^L \delta \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (9)$$

Integrando (9) se tiene

$$\delta W = P \left[ \frac{dv}{dx} \delta v \right] \Big|_0^L - P \int_0^L \frac{d^2 M}{dx^2} \delta v dx$$

Teniendo en cuenta lo antes expuesto, vemos que (1) toma la forma integral:

$$\left[ M \delta \left( \frac{dv}{dx} \right) \right] \Big|_0^L - \left[ \left( Q - P \frac{dv}{dx} \right) \delta v \right] \Big|_0^L - \int_0^L \left( EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \delta v dx = 0.$$

(10)

De esta forma hemos llegado a una ecuación variacional, la cual es similar al principio de variaciones virtuales. Suponiendo que la variación  $\delta v$  es arbitraria y que los dos primeros términos en el lado izquierdo se hacen cero, se obtiene la ecuación diferencial (1) del problema de Euler [2-6]. De otro lado, considerando términos integrales externos podemos formular las condiciones de contorno del problema. Así en el caso de extremos libres cuando

$$\delta v \neq 0 \text{ y } \delta \left( \frac{dv}{dx} \right) \neq 0, \text{ viene dado por:}$$

$$M = 0, \quad Q - P \frac{dv}{dx} = 0.$$

Estos resultados indican que estas dos formulaciones son equivalentes. Sin embargo, la posibilidad de utilizar el método de energía es más amplio ya que permite usar directamente los métodos variacionales para el estudio de la estabilidad. Estos incluyen, en particular, los métodos basados en el principio de Rayleigh, Ritz y métodos de Galerkin.

### El principio de la Rayleigh

El principio desarrollado en la parte 1 lo podemos representar de la siguiente forma

$$\delta(V - PU) = 0. \tag{11}$$

Como hemos visto en la primera parte, el problema variacional posee solución no trivial  $v_1$  para un ciertos valores de la fuerza  $P_1$ . Por otra parte

$$V[v_1] - P_1 U[v_1] = 0. \tag{12}$$

La relación de Rayleigh viene dada en este caso por

$$R[v_1] = \frac{V[v_1]}{U[v_1]}. \tag{13}$$

A partir de (13) se deduce que

$$P_1 = R[v_1],$$

es decir, la carga crítica se puede obtener como una relación mínima de Rayleigh para las funciones admisibles. Este resultado se denomina el principio de Rayleigh.

En la sección anterior hemos demostrado que la solución del problema variacional (1) conlleva a una ecuación diferencial de estabilidad de una barra con condiciones de contorno.

El método se aplica a otros objetos diferentes, pero para su ilustración hemos considerado la barra delgada.

De hecho, el principio de Rayleigh es válido para todos los sistemas en los cuales se aplican métodos de energía. La relación (11) se calcula para funciones arbitrarias admisibles, la cota superior se describe por

$$R[v] \geq P_1.$$

Se puede demostrar que, en general, este límite superior es una buena aproximación de  $P_1$ , si encontramos una función  $v$ , que no se diferencie mucho de la función  $v_1$ .

Para una barra elástica, la función

$$v(x) = cx(x - L), \tag{14}$$

es admisible y puede ser considerada como una aproximación a la función propia, aquí  $c$  es una constante. Las funciones correspondientes  $V$  y  $U$  tiene la forma

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx = 2EI c^2 L,$$

$$U = \frac{c^2}{2} \int_0^L (2x - L)^2 dx = \frac{1}{6} c^2 L^2$$

Por lo tanto,

$$R = \frac{V}{U} = 12 \frac{EI}{L},$$

es una cota superior para  $P$ . Una comparación con el valor exacto de  $P_{cr}$  muestra que el error es del 11%.

### Criterio energético de estabilidad

El criterio de energía de estabilidad se basa en el siguiente teorema:

**Teorema 1.** Si la energía total es una función continua, entonces el equilibrio de un sistema conservador, que se soporta en relaciones holonómicas fijas e ideales estable, se obtiene cuando la energía potencial es positiva definida. El recíproco en general no se cumple.

Este es un principio general, que conduce directamente a la solución de una amplia clase de sistemas, independientemente de si las ecuaciones diferenciales son lineales o no. Para otros tipos de resultados es más conveniente linealizar las ecuaciones de movimiento. Aunque esta linealización no siempre es posible, ésta puede servir como un buen punto de partida para la investigación de un carácter más riguroso. Se puede demostrar que, con respecto a la inestabilidad estática, para valores suficientemente grandes de los desplazamientos, el sistema dado y su modelo linealizado pueden comportarse de manera diferente. Como se muestra en la figura 2, la inestabilidad estática puede ser menos peligrosa lo que se desprende del análisis lineal. Existen aplicaciones que muestran que lo contrario también es cierto. En la literatura AM Lyapunov, NG Chetaev y otros han demostrado muchos teoremas sobre la estabilidad de los sistemas no lineales, lo cual, a pesar de que no tienen principio de Lagrange en común, permite transferir la mayor parte de los resultados obtenidos para los sistemas lineales a los sistemas no lineales.

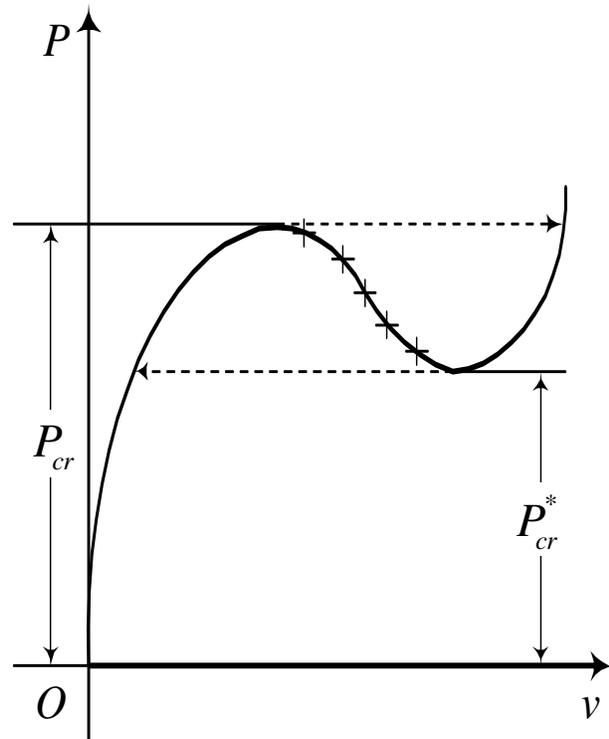


Figura 2. Caso  $P > P_{cr}$

Por lo anterior, en cualquier estudio sobre la estabilidad del sistema [7-11], y en particular en este trabajo es razonable empezar con el sistema lineal para luego analizar el sistema no-lineal. Por supuesto, esto significa que nos limitamos a los sistemas que se puede linealizar. Por otra parte, hay que tener en cuenta que con respecto a la inestabilidad estática, la generalización suele ser muy complicada.

En nuestro caso la variación de la energía potencial de las fuerzas internas se obtiene de la siguiente manera:

$$\delta U = -\delta A = \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx,$$

$$\delta U = \frac{1}{2} \delta \int_0^L EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (15)$$

De estas ecuaciones obtenemos la energía potencial  $U$ , la cual la escribimos como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (16)$$

Igualmente se obtiene la energía potencial de la carga externa  $W$ ,

$$W = -\frac{1}{2}P \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx.$$

La suma de la energía potencial de deflexión y la energía potencial de las fuerzas externas da como resultado la energía potencial total del sistema elástico

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2}EI \int_0^L \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2}P \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx.$$

(17)

Cuando ocurra una pequeña desviación del estado de equilibrio de la barra, la primera variación de la energía total debe ser igual a cero.

La estabilidad puede ser determinada por el signo la segunda variación de la energía total. Si la posición inicial es estable, entonces el signo de la segunda variación es positivo y si la segunda variación es negativa entonces se considera inestable. El equilibrio neutral corresponde cuando la la segunda variación se hace cero.

En nuestro caso cuando la barra delgada está sujeta en los extremos se tiene que

$$\mathcal{O} = \frac{\pi^4}{4} EI \frac{A^2}{L^3} - \frac{\pi^2}{4} P \frac{A^2}{L},$$

$$\mathcal{O}^* = \frac{2L^3}{EIh^2\pi^4} \mathcal{O}, \quad \xi = \frac{A}{h}.$$

(18)

Siendo  $h$  la altura de la barra. La energía potencial de la barra doblada toma el aspecto:

$$\mathcal{O}^* = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{P}{P_{cr}} \right) \xi^2.$$

(19)

Las expresiones (17)-(18) permiten caracterizar las condiciones de estabilidad para el problema planteado.

### III. CONCLUSIONES

Las condiciones de estabilidad para una barra de longitud  $L$ , sujeta en sus extremos, están dadas así: cuando  $P < P_{cr}$  la barra es estable, para  $P > P_{cr}$  es inestable y cuando  $P = P_{cr}$  es equilibrio indiferente.

### REFERENCIAS

- [1] Kadashevich Yu.I. Novozhilov V.V. Chernyakov Yu.A. La teoría de plasticidad del fluido que tiene en cuenta la microdeformación // PMM. 1986. Tom.50, №6.
- [2] Lure A.I. Teoría de elasticidad no-lineal. M.: Nauka, 1980.
- [3] Novozhilov V.V, Kadashevich Yu.I., Chernyakov Yu.A. La teoría de plasticidad teniendo en cuenta la microdeformación // Doblada Ademia de ciencias USSR. 1985. T.4. P.821-823.
- [4] Sedov L.I. Introducción a la mecánica del medio. M.: Fizmatgiz, 1962.
- [5] Kadashevich Yu.I., Chernyakov Yu.A. Theory of plasticity taking into account micro stresses // Adv. Mech. 1992. V. 15, № 3-4. P. 3-39.
- [6] Kauffmann W. Plastisches knicken dunnwandiger hohlzylinder infolge axialer belastung//Ingenieur arch. 1935.-6, H.5.-S.334-337.
- [7] Gonzalez J. R., Chernyakov Yu. A. Description of cycling loading taking into account the microdeformation theory // Int. J. Mech. Sci. 2003 V. 25 Pp. 652-657.
- [8] Gonzalez J.R. Some aspects of the theory of microdeformation // Adv. Mech and Mathematics 2003 – 6 pp. 334-336.
- [9] Gonzalez J. R. The bifurcation and postbifurcation behavior of elasticplastic plates under complex loading // GAMM – Jahrestagung – 2002 – Augsburg (Germany) Pp. 52-53.
- [10] Gonzalez J. R. La influencia y la historia de la carga límite de una envoltura cilíndrica // Problemas de la mecánica teórica – Dnieprozerzinsk – 2001- p. 10.
- [11] Gonzalez J. R. Stability and postbifurcation behavior of shells under combined loading // GAMM – 2001 –Zurich (Germany) Pp. 44-45.
- [12] J. F. Fuller, E. F. Fuchs, and K. J. Roesler, "Influence of harmonics on power distribution system protection," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 3, pp. 549-557, Apr. 1988.