

## ESTUDIO SOBRE LAS LEYES DE DESPLAZAMIENTO EN LOS ENGRANAJES NO CIRCULARES

### RESUMEN

En este artículo se realiza un estudio sobre las propiedades requeridas por algunas funciones (curvas de Bézier, B-spline, cicloidal) cuando se utilizan como leyes de desplazamiento de dos ruedas no circulares. Se realiza el estudio de la función requerida para obtener una rueda elíptica. Se considera el caso donde las ruedas conductora y conducida tienen diferentes periodos.

**PALABRAS CLAVES:** Engranajes no circulares, leyes de desplazamiento, continuidad y periodicidad.

### ABSTRACT

*A study of require characteristics of some functions (Bézier curves, B-splines, cycloidal) for their use as displacement law of noncircular gears is presented in this work. Displacement law of elliptical gear is also studied. The case with different periods between driver and driven wheels is considered here.*

**KEYWORDS:** *Noncircular gears, displacement law, continuity and periodicity.*

### HÉCTOR FABIO QUINTERO R

Ingeniero Mecánico, M. Sc.  
Profesor Asistente  
Universidad Tecnológica de Pereira  
Estudiante de Doctorado  
Universitat Politècnica de Catalunya  
hquinte@utp.edu.co

### SALVADOR CARDONA I FOIX

Ingeniero Industrial, Dr.  
Profesor Catedrático  
Universitat Politècnica de Catalunya  
salvador.cardona@upc.es

### LLUÏSA JORDI NEBOT

Licenciada en Ciencias Físicas, Dra.  
Profesora Titular  
Universitat Politècnica de Catalunya  
lluïsa.jordi@upc.es

## 1. INTRODUCCIÓN

En multitud de aplicaciones, es de interés obtener leyes de transmisión variables. Éstas pueden obtenerse mediante diversos mecanismos, entre ellos los engranajes no circulares. Éstos permiten la obtención de cualquier ley de transmisión variable, siempre que se cumplan las condiciones adecuadas de continuidad, de periodicidad y de curvatura exigidas a las curvas primitivas de las ruedas.

La libertad de elegir libremente las dos curvas primitivas, como ocurre en los sistema leva palpador, permite la definición continua de la ley de transmisión, sin que ésta esté restringida por unos pocos puntos de precisión, como ocurre en los mecanismos articulados.

Los engranajes no circulares presentan la ventaja, frente a las levas, de ser directamente mecanismos desmodrómicos y presentar velocidades de deslizamiento limitadas por el tamaño de los dientes.

En el presente trabajo se analizan las condiciones de continuidad y de periodicidad adecuadas para algunas funciones (curvas de Bézier, B-splines, cicloidal) cuando se utilizan como leyes de desplazamiento en los engranajes no circulares. Por su amplia aplicación, se estudian las funciones con las que se obtienen la ley de desplazamiento y la relación de transmisión para los engranajes elípticos. Se presenta un ejemplo de un engranaje con diferente periodicidad entre la rueda conductora y conducida. Se presentan las ruedas dentadas para todas las funciones, aunque la descripción del proceso con el que se obtiene el perfil del diente no es el propósito de este trabajo.

## 2 PROPIEDADES DE LAS LEYES DE DESPLAZAMIENTO

Inicialmente se analizan leyes de desplazamiento que corresponde al caso en que ambas ruedas, conductora y conducida, tienen el mismo periodo. Se definen mediante una función  $\varphi_2 = f(\varphi_1)$  siendo  $\varphi_1$  el ángulo girado por la rueda conductora y  $\varphi_2$  el ángulo girado, en sentido contrario, por la rueda conducida y se toma  $f(0)=0$ . La continuidad de esta función queda garantizada dentro del intervalo de definición si se elige adecuadamente.

Esta función  $f(\varphi_1)$ , debe ser monótona creciente y debe ser una función periódica. Si se utiliza una función en el intervalo  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ , puede convertirse en una función periódica y garantizar su continuidad si se define mediante [1]:

$$\varphi_2 = 2\pi \cdot \text{Division Entera} [\varphi_1, 2\pi] + f(\text{Módulo}[\varphi_1, 2\pi]) \quad (1)$$

La continuidad en todos los tramos adyacentes debe ser por lo menos  $C^2$ , usualmente deseada para cualquier ley de desplazamientos.

La relación de transmisión  $\tau$ , relación entre la velocidad angular de la rueda conducida y la velocidad angular de la rueda conductora, se obtiene a partir de la ley de desplazamiento:

$$\tau(\varphi_1) = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\partial f(\varphi_1)}{\partial \varphi_1} = f'(\varphi_1) \quad (2)$$

Para los casos donde el periodo de rotación de la rueda conductora es un múltiplo entero,  $n$ , del de la rueda conducida, se obtienen ruedas de geometría cerrada si se cumple la siguiente relación:

$$r_2 = 2 \cdot k \text{ cuando } r_1 = 2 \cdot k/n \quad (3)$$

siendo  $k$  un número entero.

Para obtener la ley de desplazamiento,  $f(\varphi_1)$ , con la periodicidad y continuidad adecuadas, se define inicialmente la función,  $f_n(\varphi_1)$ , con la continuidad adecuada en el intervalo  $0 \leq \varphi_1 < 2\pi/n$ , posteriormente se establece la siguiente relación:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1) = 2\pi \cdot \text{División Entera}[\varphi_1, 2\pi/n] + f_n(\text{Módulo}[\varphi_1, 2\pi/n]) \quad (4)$$

### 3. CONCEPTOS BÁSICOS

En esta sección se establecen las ecuaciones que rigen las curvas primitivas de ambas ruedas. La distancia entre los ejes de rotación es constante. En la figura 1, se presenta la nomenclatura utilizada para la generación de las curvas primitivas. Se definen los sistemas de referencia  $(O_1X_1Y_1)$  y  $(O_2X_2Y_2)$  fijo a la rueda 1 y 2 respectivamente.

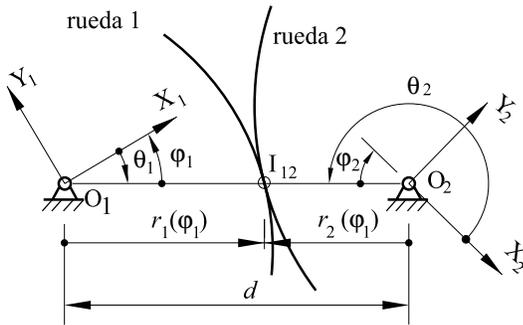


Figura 1. Sistema de referencia de los engranajes.

Si se desea que los periodos de la rueda conducida y conductora sean iguales, se debe cumplir la siguiente relación:

$$f(2\pi) = 2\pi \quad (5)$$

Definiendo  $r_1(\varphi_1)$  y  $r_2(\varphi_1)$  como los radios de las curvas primitivas para las ruedas 1 y 2, respectivamente y  $d$  como la distancia entre centros, se cumple:

$$r_1 + r_2 = d \quad (6)$$

El vector de posición del centro instantáneo de rotación,  $I_{12}$ , definido en cada uno de los sistemas de referencia es: Rueda 1,

$$O_1 I_{12} = \begin{Bmatrix} r_1 \cos(-\varphi_1) \\ r_1 \text{sen}(-\varphi_1) \end{Bmatrix} = r_1 e^{-\varphi_1 j} = r_1 \quad (7)$$

Rueda 2,

$$O_2 I_{12} = \begin{Bmatrix} r_2 \cos(\pi + \varphi_2) \\ r_2 \text{sen}(\pi + \varphi_2) \end{Bmatrix} = r_2 e^{(\pi + \varphi_2) j} = r_2 \quad (8)$$

El perfil de la rueda conductora, expresado en el sistema coordenado  $(O_1X_1Y_1)$ , viene dado por la siguiente expresión:

$$r_1 = r_1(\varphi_1) e^{\theta_1(\varphi_1) j}, \text{ con } \theta_1(\varphi_1) = -\varphi_1 \quad (9)$$

El perfil de la rueda conducida, expresado en el sistema coordenado  $(O_2X_2Y_2)$ , viene dado por:

$$r_2 = r_2(\varphi_1) e^{\theta_2(\varphi_1) j}, \text{ con } \theta_2(\varphi_1) = \pi + f(\varphi_1) \quad (10)$$

La condición de rodadura pura permite obtener una relación entre los radios de las curvas primitivas

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \quad (11)$$

De acuerdo con el resultado de la ecuación se establece:

$$\tau(\varphi_1) = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad (12)$$

Los radios de las curvas primitivas se calculan a partir de las ecuaciones 3, 6 y 12, a partir de las cuales se obtiene:

$$r_1(\varphi_1) = \frac{f'(\varphi_1)}{1 + f'(\varphi_1)} \cdot d \quad (13)$$

$$r_2(\varphi_1) = \frac{1}{1 + f'(\varphi_1)} \cdot d \quad (14)$$

### 4. CURVAS DE BÉZIER

Se propone diseñar leyes de desplazamiento utilizando curvas de Bézier no paramétricas. Estas curvas están definidas únicamente en un intervalo por lo que es necesario periodizarlas posteriormente y garantizar la continuidad en los extremos de dicho intervalo; en el interior del intervalo la continuidad queda garantizada por tratarse de funciones polinómicas.

Una curva de Bézier de grado  $n$  se obtiene a partir de los *polinomios de Bernstein* que constituyen una base. Sobre un dominio unitario, los polinomios de Bernstein de grado  $n$  son:

$$B_i^n(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i}; i = 0, \dots, n \quad (15)$$

donde

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (16)$$

La curva de Bézier se define como:

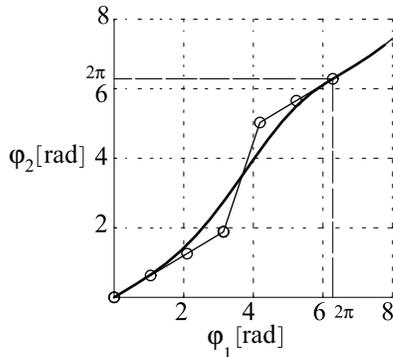
$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u); u \in [0, 1] \quad (17)$$

donde los  $n+1$  coeficientes  $b_i$  se denominan ordenadas de Bézier. Para cada ordenada  $b_i$  se define un punto  $\mathbf{b}_i$  de coordenadas  $(i/n, b_i)$  denominado punto de control y el conjunto de los puntos de control definen el *polígono de control* de la curva [2]. La variable  $u$  se relaciona con el ángulo girado de la rueda conductora mediante:

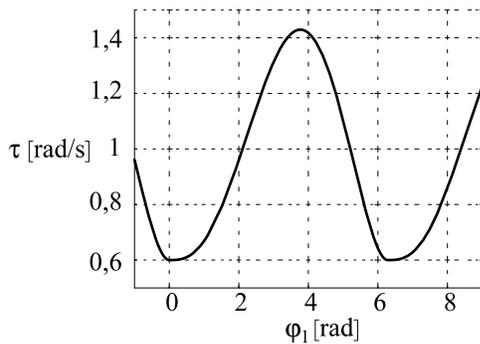
$$u = \frac{\varphi_1}{2\pi} \tag{18}$$

La continuidad de la ley entre tramos adyacentes queda garantizada por la selección de los puntos de control de la curva de Bézier. Si se impone que la continuidad sea  $C^2$  las ordenadas  $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$  de una curva de Bézier de grado  $n$ , deben cumplir [1]:

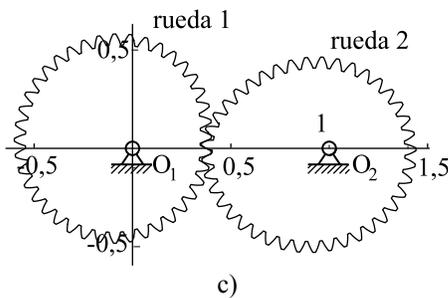
$$\begin{aligned} b_0 &= 0; & b_n &= 2; \\ b_1 - b_0 &= b_n - b_{n-1}; \\ b_2 - b_1 - b_0 &= b_n - b_{n-1} - b_{n-2}; \end{aligned} \tag{19}$$



a)



b)



c)

Figura 2. Función de Bézier: a) ley de desplazamiento, b) relación de transmisión, c) ruedas dentadas

En la figura 2 se muestra la curva de grado 6 obtenida tomando el conjunto de ordenadas  $\{b_i\}=\{0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,8, 0,9, 1,0\} \cdot 2$ . que cumple la condición (4). Así mismo, en la misma figura se muestra la relación de transmisión obtenida y las ruedas dentadas que cumplen estas relaciones cinemáticas. El número de dientes de las ruedas es de 40.

### 5. CURVAS B-SPLINES

Un spline clásico de orden  $m$  es una curva hecha a partir de  $n$  tramos polinomiales, cada una de grado  $m - 1$ , que se unen en sus extremos de tal manera que la curva resultante tiene continuidad  $C^{m-2}$  en estos puntos. Los puntos extremos de los extremos de cada tramo polinomial se denominan nodos.

Las curvas B-spline se obtienen cuando se utiliza la base B-spline  $N_i^m$ ; cada base es de orden  $m$  y grado  $m - 1$ :

$$p(u) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{b}_i N_i^m(u); u_{\min} \cdot u \cdot u_{\max}, 2 \cdot m \cdot n+1 \tag{20}$$

Donde  $\mathbf{b}_i$  son los vectores de la posición de los  $n+1$  vértices del polígono de control

Las bases  $N_i^m$  se determinan por una formulación recurrente:

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases};$$

$$N_i^k(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} N_i^{k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(u) \tag{21}$$

$k = 0, 1, \dots, m$

En esta formulación se adopta el convenio  $0/0=0$ . Los elementos  $u_i$  son elementos de un vector de nodos que satisfacen  $u_i \cdot u_{i+1}$ . Un nodo puede estar repetido  $r$  veces y por lo tanto se denomina de multiplicidad  $r$ . El número total de nodos ha de ser  $(n+1)+m$  [3].

Una curva B-spline es una función spline polinomial de orden  $m$  y grado  $m - 1$  que satisface las siguientes condiciones:

- Es una función de grado  $m - 1$  en cada intervalo polinomial  $u_i \cdot u \cdot u_{i+1}$
- Es una función que tiene como mínimo continuidad, en toda la curva,  $C^{m-2}$

Fundamentalmente se utilizan tres tipos de vector de nodos: uniforme, abierto uniforme o no uniforme.

- En un vector de nodos uniforme estos están equiespaciados
- En un vector de nodos abierto uniforme los nodos extremos tienen multiplicidad  $m$  y los internos están uniformemente espaciados. (Si al menos el número de puntos de control es igual al orden de la base B-spline se reduce a base de Bernstein)

Si se utiliza un vector de nodos abierto la curva cumple dos propiedades muy interesantes:

- Pasa por el primer y por el último punto de control
- En estos puntos es tangente al polígono de control

Para que se cumplan las condiciones adecuadas al definir leyes de desplazamiento  $f(\cdot)$  no paramétricas los puntos de control se han de situar en abscisas según las *abscisas de Greville*  $\xi_i$  definidas mediante [4]:

$$\xi_i = \frac{1}{m-1}(u_{i+1} + \dots + u_{i+m-2}) \quad (22)$$

La ley de desplazamiento definida así es al menos  $C^{m-r}$  en los nodos de multiplicad  $r$ . Si  $r = m - 1$  los nodos coinciden con la abscisa de un punto de control y la curva pasa por aquel punto.

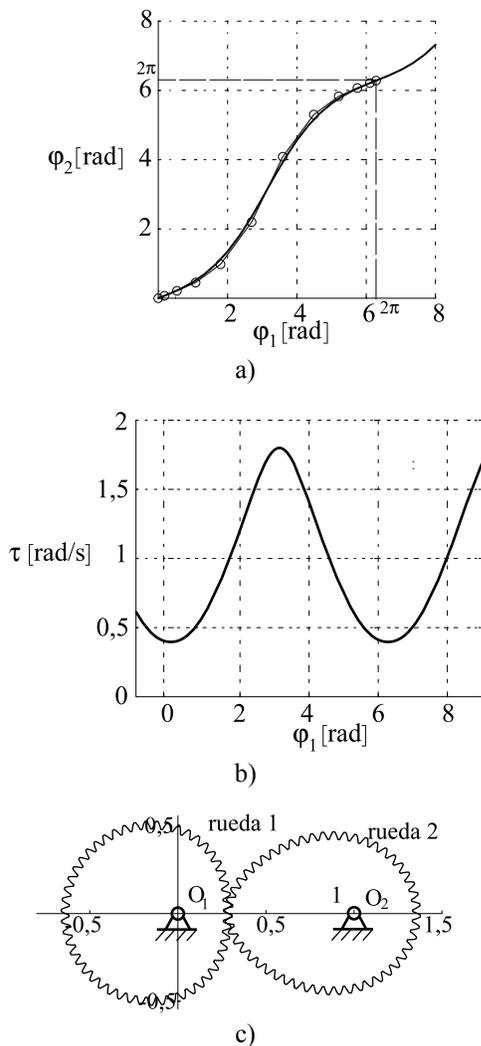


Figura 3. Curva B-spline: a) ley de desplazamiento, b) relación de transmisión, c) ruedas dentadas

Los vértices del polígono de control se obtienen mediante la definición de los puntos de coordenadas  $(\xi_i, b_i)$  donde  $b_i$  son elementos del vector de ordenadas del polígono de

control. A manera de ejemplo, se propone utilizar una función B-spline de orden 5 y grado  $m = 6$ , cuyos nodos son  $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \cdot 2$ ., el vector de ordenadas es  $\{0, 0,011333, 0,0346, 0,0728, 0,156, 0,35, 0,65, 0,844, 0,9272, 0,9654, 0,988666, 1\} \cdot 2$ .. En la figura 3 se presenta las relaciones cinemáticas obtenidas y las ruedas dentadas.

6. CURVAS CICLOIDALES

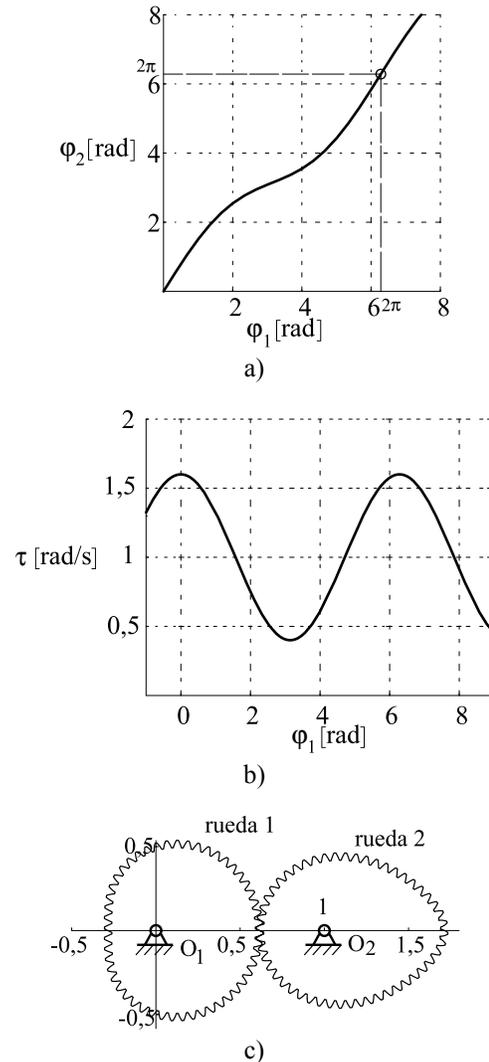


Figura 4. Curvas cinemáticas para la curva cicloidal: a) ley de desplazamiento, b) relación de transmisión, c) ruedas dentadas

La ley de desplazamiento,  $f(\cdot)$ , debe ser una función monótona y creciente y debe cumplir  $f(2.n) = 2.n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Esta propiedad se cumple si se define como la suma de  $\cdot$  y de una función periódica, por ejemplo:

$$f(\varphi_1) = \varphi_1 + \text{sen}(\varphi_1) \quad (23)$$

Con esta definición, la ley de desplazamiento es continua e infinitamente derivable por lo que presenta todo tipo de ventajas desde el punto de vista dinámico. En la figura 4

se presentan la ley de desplazamiento y la relación de transmisión obtenidas a partir de la curva cicloidal.

### 6. RUEDAS ELÍPTICAS

Se pueden obtener dos engranajes idénticos si se utiliza una elipse para obtener las curvas primitivas de ambas ruedas y se localizan los centros de rotación en sus puntos focales. La elipse, mostrada en la figura 5, tiene una distancia focal  $2c$  y el eje mayor mide  $2a$ . Los radios  $r_1$  y  $r_2$  son la distancia desde los focos hasta un punto P ubicado sobre la elipse.

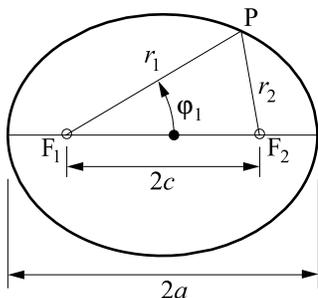


Figura 5. Relaciones geométricas en las ruedas elípticas

Basado en la geometría presentada y en las propiedades de una elipse se obtienen las siguientes relaciones:

$$r_2^2 = r_1^2 + (2c)^2 - 2 \cdot (2c) \cdot r_1 \cos \varphi_1 \quad (24)$$

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (25)$$

Al reemplazar en la ecuación 24, la variable  $r_1$  despejada de la ecuación 25 y después de simplificar se obtiene:

$$r_2 = \frac{8ac \cdot \cos \varphi_1 - 4(a^2 + c^2)}{4c \cdot \cos \varphi_1 - 4a} \quad (26)$$

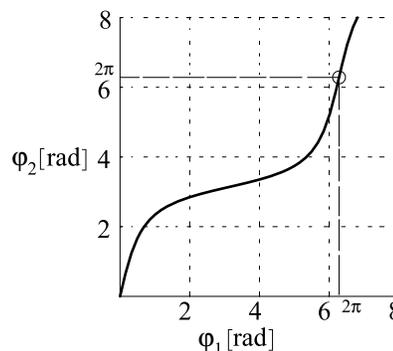
La relación de transmisión puede definirse a partir de la relación entre los radios:

$$\tau(\varphi) = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2a}{r_2} - 1 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \varphi_1} \quad (27)$$

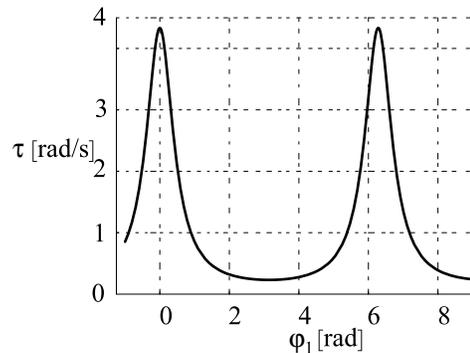
La ley de desplazamiento se obtiene mediante la integración de la relación de transmisión con respecto a  $\varphi_1$ :

$$f(\varphi_1) = \begin{cases} 2 \arctan\left(\frac{a+c}{a-c} \tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\right) & \varphi_1 \leq \pi \\ 2 \arctan\left(\frac{a+c}{a-c} \tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\right) + 2\pi & \varphi_1 \geq \pi \end{cases} \quad (28)$$

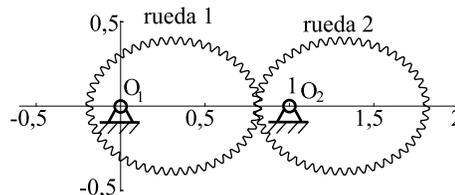
En la figura 6 se representan la ley de desplazamiento y la relación de transmisión de dos curvas elípticas idénticas con un semieje mayor  $a = 0,8$  y con una semi distancia focal  $c = 0,5$ .



a)



b)



c)

Figura 6. Ruedas elípticas: a) ley de desplazamiento, b) relación de transmisión, c) ruedas dentadas

### 8. RUEDAS CON PERIODO DE ROTACIÓN DIFERENTE

Se pueden obtener unas ruedas dentadas con relación de periodos de rotación entera si se cumple con la periodicidad y continuidad adecuada. Se pretende obtener unas ruedas dentadas con relación de periodos 2:1 a partir de una curva de Bézier de grado 7 con continuidad  $C^3$ . Las ordenadas de los puntos de control son  $\{0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,7, 0,8, 0,9, 1\} \cdot 2$ , definidas para el rango  $0 \dots 2\pi$ .

En la figura 7 se presentan la ley de desplazamiento, la relación de transmisión obtenida y las ruedas dentadas; se puede observar el cumplimiento de la condición 5 para garantizar la adecuada periodicidad. Particularmente en el periodo  $2\pi \dots 4\pi$ , la ley de desplazamiento se define como:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1) = \begin{cases} b(\varphi_1 + \pi) - 2\pi & \varphi_1 \leq 0 \\ b(\varphi_1) & 0 \leq \varphi_1 \leq \pi \\ b(\varphi_1 - \pi) + 2\pi & \pi \leq \varphi_1 \leq 2\pi \\ b(\varphi_1 - 2\pi) + 4\pi & \varphi_1 \geq 2\pi \end{cases} \quad (29)$$

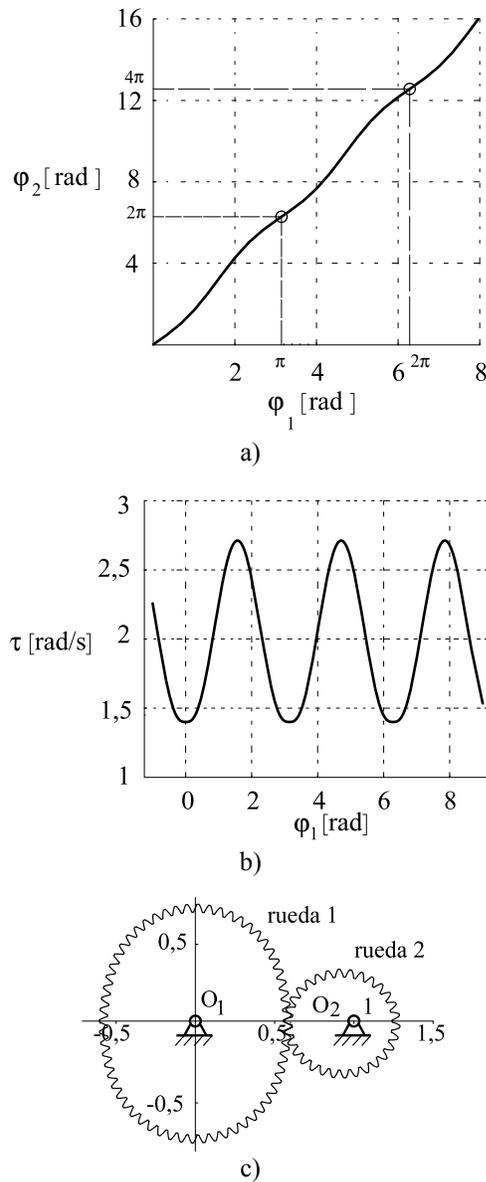


Figura 7. Curvas cinemáticas para unas ruedas con relación de periodos 2:1: a) ley de desplazamiento, b) relación de transmisión, c) ruedas dentadas

### 9. PERFIL DEL DIENTE

Aunque la descripción del cálculo del perfil de los dientes no es objeto de este trabajo, se presenta brevemente el procedimiento empleado. Se utiliza la coordenada angular de la rueda conductora como coordenada independiente para elaborar un procedimiento analítico que genera las curvas primitivas y los perfiles de los dientes. Los dientes se generan a partir de dos cremalleras de dientes rectos simétricas conjugadas en las cuales el hueco de una coincide con el diente de la otra. Conceptualmente se mantiene la tangencia entre las 4 líneas primitivas.

Para obtener los perfiles de los dientes, se utilizó el programa Mathematica. que integra el tratamiento

simbólico y el cálculo numérico. Es posible definir las ruedas mediante una serie de puntos para su posterior mecanizado. La figura 8 muestra la fotografía de las ruedas obtenidas con las curvas de Bézier, las cuales se obtuvieron por fresado en una máquina CNC. El número de dientes es 40 y el ángulo de presión de las cremalleras del modelo es de  $25^\circ$ .



Figura 8. Ruedas mecanizadas por CNC. [1]

### 10. CONCLUSIONES

En este trabajo se pone de manifiesto que es posible y eficiente diseñar una relación de transmisión entre ejes utilizando, ya sea, curvas propias del diseño geométrico, en este caso se han utilizado curvas de Bézier, curvas B-spline y cicloidales, o bien definiendo la ley de desplazamiento para obtener engranajes con una geometría particular como las ruedas elípticas.

Los mecanismos de eslabones articulados sólo disponen de un número limitado de parámetros ajustables para definir la ley de desplazamiento, por ello sólo pueden definirse un número finito de puntos de precisión de esta ley. La posibilidad de definir de manera continua la curva primitiva en los engranajes no circulares permite una mayor libertad en la selección de la ley de desplazamiento. De esta forma, se pueden diseñar mecanismos con dicha ley totalmente adecuada a la tarea requerida.

### 11. BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Cardona, L. Jordi: Aportación al estudio de engranajes no circulares, VI Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Coimbra, Portugal: 2003, 1291-1296.
- [2] S. Cardona, D. Clos: Teoría de Máquinas. Ediciones UPC, Barcelona, 2001
- [3] D.F. Rogers, J.A. Adams: Mathematical elements for computer graphics, Editorial Mc Graw Hill, New York, 1990.
- [4] G. Reyes: Técnicas de diseño geométrico asistido por ordenador para mecanismos leva-palpador, Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, 2000.