

## ESTUDIO SOBRE LA RESISTENCIA Y RIGIDEZ DE EJES HUECOS

### RESUMEN

Los ejes son elementos de transmisión que constantemente están sometidos a la acción de cargas y esfuerzos, pero que a la vez deben ser lo suficientemente ligeros para soportar estos sin sacrificar la resistencia mecánica.

El objeto de este trabajo es identificar la incidencia que tendrá la reducción de peso en la resistencia mecánica de un eje de transmisión, para este fin se han considerado diversas variaciones geométricas y los resultados se han organizado de forma tal que permitan generar un criterio acerca de la conveniencia de utilizar ejes huecos y cuales serían las geometrías recomendadas.

**PALABRAS CLAVES:** *Elementos de transmisión, resistencia mecánica, reducción de peso, ejes huecos.*

### ABSTRACT

*The axes are transmission elements that constantly are subjected to the action of loads and stresses, but that at the same time should be light enough to support these without sacrificing the mechanical resistance. The purpose of this work is to identify the incidence that will have reduction of weight in the mechanical resistance of a transmission axis, for these they have been considered diverse geometric variations and the results have been organized in the program MS - Excel. These have allowed to generate an approach about the convenience of using hollow axes and which would be the best geometries.*

**KEYWORDS:** *Transmission elements, mechanical resistance, reduction of weight, hollow axes.*

### 1. INTRODUCCIÓN

La reducción de peso y uso de material en elementos de maquinas es una preocupación que constantemente atañe a las personas involucradas en el proceso de diseño y manufactura de estos, sin embargo no se ha profundizado suficientemente en tales aspectos, por ejemplo un eje hueco puede lograr tener una resistencia mecánica similar a la de un eje macizo, siempre que la geometría utilizada sea lo suficientemente apropiada.

Una forma acertada de establecer comparaciones entre la resistencia mecánica y rigidez de ejes o árboles macizos y huecos es la utilización de teorías y ecuaciones ampliamente aceptadas y utilizadas en un software que permita comparar mediante tablas o graficas de resultados las hipótesis supuestas.

### 2. DESARROLLO DE LA TEMATICA

Es sabido que la resistencia mecánica volumétrica de un árbol, es decir, la magnitud de las tensiones que surgen en su sección transversal bajo una carga determinada, está definida por el módulo de resistencia a la flexión ( $W_f$ ) y el módulo de resistencia a la torsión ( $W_t$ ). Estos módulos de resistencia dependen de la geometría de la sección transversal del árbol.

### OSCAR ARAQUE DE LOS RIOS

Ingeniero Mecánico, MSc  
Prof. del Depto de Ing. Mecánica  
Universidad de Ibagué (Colombia)  
ojaraque@nevado.cui.edu.co

### JUAN JOSE CABELLO ERAS

Ingeniero Mecánico, Ph.D.  
Prof. del Depto de Ing. Mecánica  
Rector  
Universidad de Cienfuegos (Cuba)  
jcabello@fmec.ucf.edu.cu

Se desarrollara una comparación entre árboles macizos y huecos, tomando como parámetro comparativo el módulo de resistencia a la flexión ( $W_f$ ) [2,6-7]:

$$\begin{aligned} W_{f_{\text{macizo}}} &= \frac{\pi \cdot d^3}{32} \\ W_{f_{\text{hueco}}} &= \frac{\pi \cdot d^3 (1 - c^4)}{32} \end{aligned}$$

donde:  $C_{\text{ideal}} = d_o/d$

para el caso de una sección circular sin entallas de ningún tipo. ( $d$ : diámetro exterior,  $d_o$ : diámetro hueco)

Para este análisis se realizo un programa de computación [8], que partiendo de un árbol macizo de un diámetro determinado, va incrementando progresivamente la relación ( $d_o/d$ ) y calcula para cada una de las relaciones la variación de ( $W_f$ ) y del área de la sección transversal ( $A$ ) con respecto al árbol macizo. Para la tabla de resultados del programa partimos de un árbol de diámetro 50 mm. Estos resultados fueron graficados y se representan en la figura 1:

Variación del módulo de resistencia a la flexión y área de un árbol de sección circular

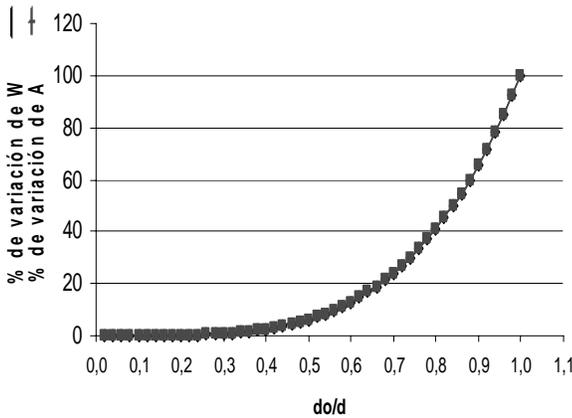


Figura. 1. Gráfico de variación del módulo de Resistencia a la Flexión y el área de un árbol de sección circular.

Del gráfico podemos destacar los siguientes aspectos:

Para relaciones  $C_{ideal}$  menores que 0.22 la variación del módulo de resistencia a la flexión es menor de un 0.25% y la variación del área es menor de un 0.25%.

Para la relación  $C_{ideal}$  igual a 0.31 la variación del módulo de resistencia a la flexión es de aproximadamente el 1% sin embargo el área ha disminuido alrededor de un 0.8%.

Para la relación  $C_{ideal}$  igual a 0.38 la variación del módulo de resistencia a la flexión es de 2.08% y la variación del área alcanza una disminución del 2%.

Para la relación  $C_{ideal}$  igual a 0.45 el módulo de resistencia a la flexión ha disminuido sólo un 6.2% y el área ha disminuido un 6%.

Para la relación  $C_{ideal}$  igual a 0.56 ya el módulo de resistencia a la flexión ha disminuido alrededor de un 10% y la disminución del área es del 9.83%.

Para relaciones  $C_{ideal}$  mayores que 0.57 la disminución del área es superior del 12% y el módulo de resistencia a la flexión disminuye más del 11%.

Analizando los aspectos anteriormente expuestos y tomando como variación máxima el módulo de resistencia a la flexión del 10%, podemos plantear que en pos de disminuir el área (peso) del árbol las relaciones recomendadas están aproximadamente en el rango ( $0.2 < C_{ideal} < 0.57$ ).

En el análisis anterior se considero una sección circular sin ningún tipo de entalla, como se sabe las secciones críticas de los árboles generalmente coinciden con las secciones que soportan elementos de transmisión (ruedas dentadas, poleas, estrellas, etc.), y estos suelen unirse a

los árboles mediante chavetas, estrías, etc como se muestra en la figura 2. La variación de la relación ( $do/d$ ) está limitada por una  $(do/d)_{recomendado}$  debido a la resistencia en la zona del chavetero, es decir, que el árbol hueco debe tener un espesor que permita la colocación del chavetero con la resistencia adecuada, la magnitud de esta relación podemos determinarla como:

$$(do/d)_{recomendado} = 1 / 1.5345 - 0.2109(d/100) + 0.062(d/100)^2 - 0.0071(d/100)^3 \quad [1]$$

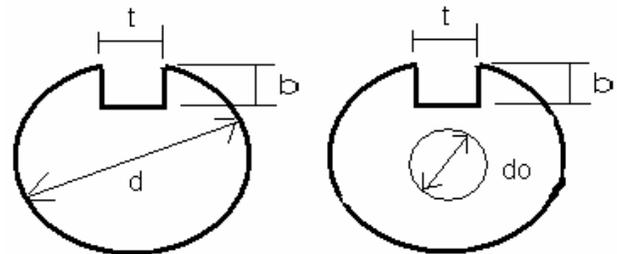


Figura. 2. Sección circular de un eje con chavetero

Para tener en cuenta el chavetero se elaboró un programa con las expresiones de [2],[6-7]:

$$Wf_{macizo} = [\pi \cdot d^3 / 32] - [bt(d-t)^2 / 2d]$$

$$Wf_{hueco} = [\pi \cdot d^3 \cdot (1 - c^4) / 32] - [bt(d-t)^2 / 2d]$$

Donde (b: base de la sección del chavetero, t: altura de la sección del chavetero en el eje), que incrementa la relación ( $do/d$ ) hasta  $(do/d)_{recomendado}$ , para este programa y la tabla de resultados obtenidos por él. El gráfico obtenido es el siguiente:

Variación del módulo de resistencia a la flexión y área de un árbol de sección circular con chavetero

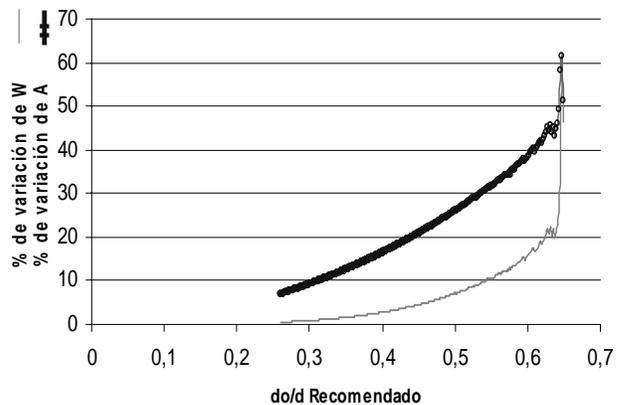


Figura. 3. Gráfico de variación del módulo de resistencia a la flexión y el área de un árbol de sección circular con chavetero.

Analizando estas curvas y los resultados tabulados podemos destacar los siguientes aspectos:

Para relaciones  $c$  menor que 0.25 la variación del módulo de resistencia a la flexión es del 0.48% y el área disminuye en menos del 6.85%.

Para la relación  $c$  igual a 0.31 el módulo de resistencia a la flexión ha disminuido el 1% y el área ha disminuido un 10%.

Para la relación  $c$  igual a 0.38 la disminución del módulo de resistencia a la flexión es del 2.3% y la disminución del área es del 15%.

Para la relación  $c$  igual a 0.45 la disminución del módulo de resistencia a la flexión es del 4.6% y la disminución del área es del 21%.

Para la relación  $c$  igual a 0.49 el módulo de resistencia a la flexión ha disminuido en un 6.6% y el área en un 25%.

Para relaciones  $c$  mayores que 0.54 el área disminuye en más de un 30%, pero el módulo de resistencia a la flexión disminuye más del 10%.

Como se aprecia para las mismas variaciones del área la disminución del módulo de resistencia a la flexión es mayor en el caso de una sección con un chavetero. En este caso, uno de los más comunes en árboles de transmisiones mecánicas, las relaciones indicadas para disminuir el área (peso) del árbol como criterio un 10% de reducción del Modulo de Flexión son ( $0.25 < c < 0.54$ ), y la resistencia del chavetero no está afectada en este rango de relaciones.

De lo analizado anteriormente se concluye que la utilización de árboles huecos en lugar de árboles macizos manteniendo el mismo diámetro exterior en ambos, permite reducir el peso de los mismos con pequeñas disminuciones de la resistencia mecánica.

A continuación se realiza un análisis similar al anterior pero en este caso se sustituye el árbol macizo por uno hueco pero con igual resistencia al anterior, es decir, con igual módulo de resistencia a la flexión que el macizo; para esto se elaboró un programa en donde para cada relación  $(do/d)_{recomendado}$  se determina un nuevo diámetro  $(d)$  de forma tal que los módulos de resistencia del árbol macizo y el hueco sean iguales. Además como en los casos anteriores se determina el porcentaje de disminución del área y la relación entre el diámetro del árbol macizo y el diámetro exterior del árbol hueco, todo esto para cada relación  $(do/d)_{recomendado}$ . Para el programa en cuestión el ploteo de los resultados [8] se encuentra en la figura 4.

Analizando el gráfico y la tabla de resultados se observa que si aumentamos el diámetro exterior del árbol hueco para cada relación  $(do/d)_{recomendado}$  con el fin de igualar la resistencia a la del árbol macizo, se logra una disminución significativa del área con un incremento

insignificante del diámetro, por ejemplo, puede verse como con un árbol hueco de diámetro exterior de 51.7 mm y diámetro del hueco de 29.5 mm, logra la misma resistencia mecánica que la de un árbol macizo de diámetro 50 mm y la disminución del área (peso) es del 28%. A medida que aumenta la relación  $(do/d)_{recomendado}$  aumenta la disminución del área estando limitado este incremento por la resistencia del chavetero.

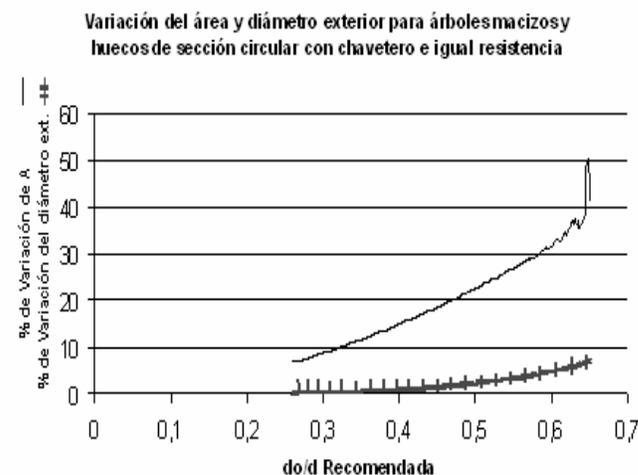


Figura. 4. Gráfico de variación del área y el diámetro exterior para árboles macizos y huecos de igual resistencia

En el caso de árboles sin chaveteros podemos determinar los árboles huecos de igual resistencia que los macizos a partir de la siguiente expresión [1-7]:

$$d = dm \sqrt[3]{1/1 - c^4}$$

donde:

- $d$  : diámetro exterior del árbol hueco
- $dm$  : diámetro del árbol macizo
- $c$  =  $(do/d)_{recomendado}$

En este caso al no existir el límite de incremento producto del chavetero la relación puede aumentarse indiscriminadamente.

### Análisis de la rigidez de los árboles huecos

En este análisis, primero se exponen los criterios y expresiones fundamentales que se utilizan en la comprobación de la rigidez de los árboles. Como se ha expuesto anteriormente los árboles de las transmisiones mecánicas están sometidos a la acción de cargas, para los cuales es muy importante la valorización de la rigidez, pues es necesario que haya una garantía suficiente de esta a la hora de proyectar árboles [1].

El cálculo a la rigidez tiene como fin aclarar las inflexiones y los ángulos de inclinación de la línea flexible del eje de la pieza, en determinadas secciones. Para la valorización de la rigidez es necesario tener en

cuenta las ecuaciones generales de la elástica de una viga, que se dan a continuación ver figura 5:

$$Eixy = EIx\theta_0 + \sum M(z-a)/2 + \sum P(z-b)/2 + \sum q(z-c)/24$$

$$EIy' = EI\theta_0 + \sum M(z-a) + \sum P(z-b)/2 + \sum q(z-c)/16$$

Como se observa en estas ecuaciones aparece un parámetro, el cuál es analizado como una característica geométrica de la rigidez longitudinal, dicho parámetro está definido como: momento de inercia a la flexión (Ix) y momento de inercia a la torsión (Ip), para el caso de rigidez torsional.

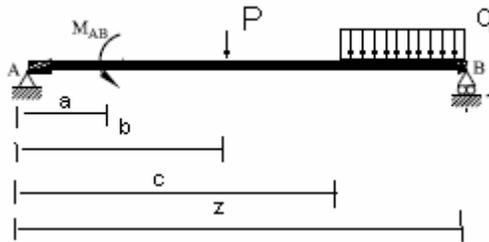


Figura. 5. Gráfico para el caso de viga simplemente apoyada sometida a múltiples cargas

Para desarrollar este análisis se toma la sección circular maciza y la sección circular hueca del árbol con chavetero, al tener en cuenta dicho chavetero, la relación  $(d_0/d)_{recomendado}$  se ve afectada de manera similar a lo sucedido con la resistencia mecánica.

En este análisis se realiza un programa de computación para cada caso (momento de inercia a la flexión y momento de inercia a la torsión) con sus correspondientes expresiones, donde se incrementa la relación  $(d_0/d)_{recomendado}$  hasta un valor máximo.

Primero se expone el análisis del momento de inercia a la flexión. El gráfico obtenido es el siguiente.

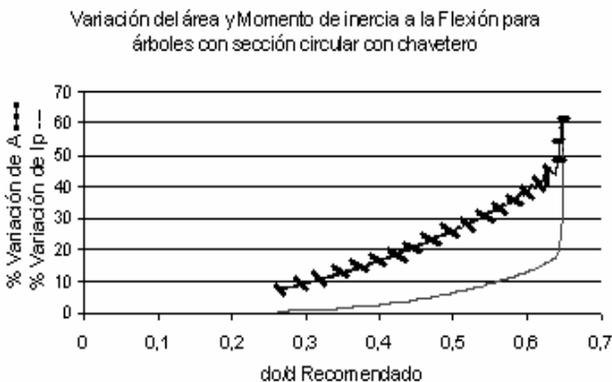


Figura. 6. Gráfico de variación de área y momento de inercia a la flexión para un árbol de sección circular con chavetero.

Analizando estas curvas y los resultados tabulados podemos destacar los siguientes aspectos:

Para relaciones c menores que 0.26, la variación del momento de inercia a la flexión es de 0.45% y el área disminuye en menos del 6.8%.

Para la relación c igual a 0.31, la disminución del momento de inercia a la flexión es de 1% y la del área es de 10%.

Para la relación c igual a 0.38, el momento de inercia a la flexión disminuye en un 2.1% y el área disminuye en un 15%.

Para la relación c igual a 0.44, el momento de inercia a la flexión ha disminuido en un 4% y el área disminuye en un 20%.

Para la relación C igual a 0.49, el momento de inercia a la flexión disminuye en un 6% y el área disminuye en un 25.5%.

Para relaciones c mayores que 0.55, el área disminuye en más de un 32%, mientras que el momento de inercia a la flexión disminuye más del 10%.

Analizando los aspectos anteriormente expuestos y tomando como variación máxima el momento de inercia a la flexión del 10%, podemos plantear que en pos de disminuir el área (peso) del árbol las relaciones recomendadas son aproximadamente  $(0.26 < c < 0.55)$  y la resistencia del chavetero [1-4], dada por este parámetro, no está afectado en este rango de relaciones.

A continuación se analiza lo referente al momento de inercia a la torsión. El gráfico obtenido [8] se encuentra en la figura 7

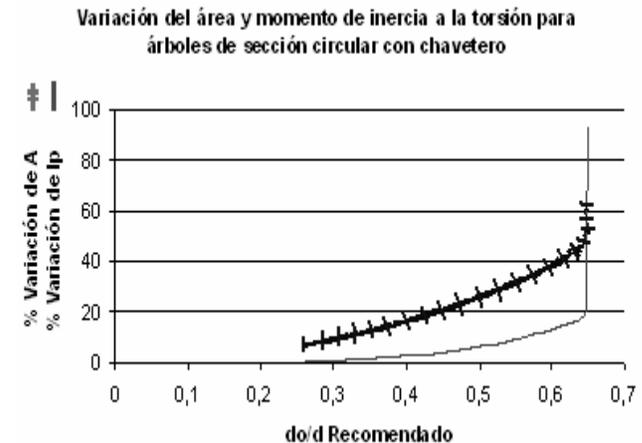


Figura 7. Gráfico de variación área y momento de inercia a la torsión para un árbol de sección circular con chavetero.

Al analizar las curvas y los resultados tabulados. Podemos destacar los siguientes aspectos:

Para relaciones  $c$  menor que 0.26, la variación del momento de inercia a la torsión es del 0.45% y el área disminuye en menos del 7%.

Para la relación  $c$  igual a 0.31, el momento de inercia a la torsión disminuye en un 0.93% y el área disminuye en un 9.7%.

Para la relación  $c$  igual a 0.38, el momento de inercia a la torsión disminuye en un 2.2% y el área disminuye en un 15%.

Para la relación  $c$  igual a 0.44, la disminución del momento de inercia a la torsión es de 4% y la disminución del área es de 20.5%.

Para la relación  $c$  igual a 0.52, la disminución del momento de inercia a la torsión es del 7.5% y el área disminuye en un 28.7%.

Para relaciones  $c$  mayores que 0.56, el área disminuye en más de un 33%, mientras que la disminución del momento de inercia es mayor del 10%.

Teniendo en cuenta los aspectos anteriormente expuestos y tomando como variación máxima el momento de inercia a la torsión el 10%, se plantea que las relaciones indicadas para disminuir el área (peso) del árbol son:  $(0.26 < c < 0.56)$ , y el chavetero no afecta en este rango de relaciones.

A continuación se hace un análisis, similar al que se realizó en la valoración de la resistencia mecánica, al sustituir un árbol macizo por un árbol hueco pero con igual resistencia al anterior, es decir, en este caso de rigidez con igual momento de inercia a la flexión y a la torsión que el del árbol macizo. De igual forma que en el análisis de la resistencia mecánica se elaboró un programa de computación [8], los gráficos obtenidos se encuentran en las figuras 8 y 9 respectivamente.

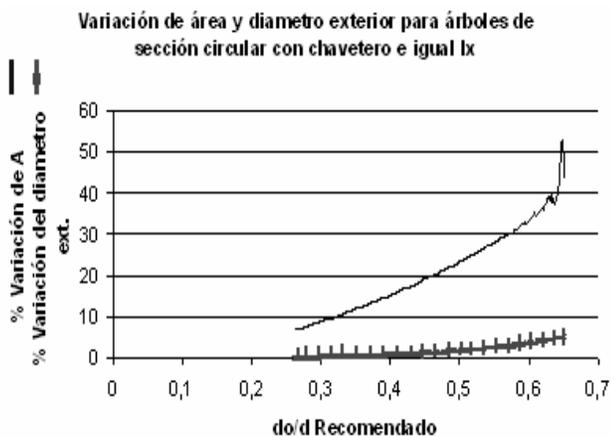


Figura 8. Gráfico de variación de área y diámetro exterior para árboles macizos y huecos de igual Momento de inercia a la flexión.

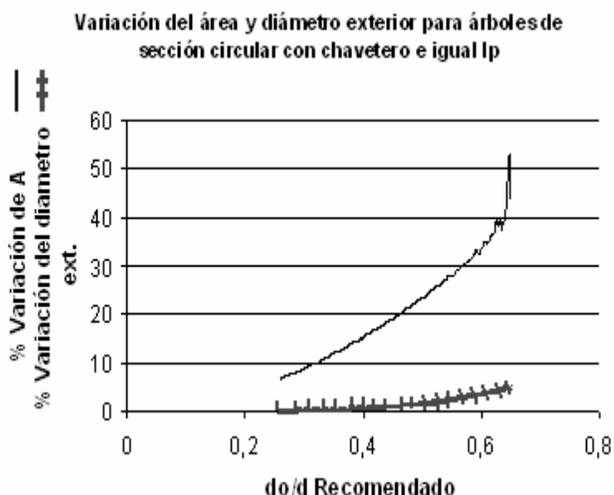


Figura 9. Gráfico de variación del área y del diámetro exterior para árboles macizos y huecos de igual Momento de inercia a la torsión

Analizando estos gráficos y las tablas de resultados correspondientes podemos observar que si aumentamos el diámetro exterior del árbol hueco para cada relación  $(do/d)$  con el fin de igualar los momentos de inercia del mismo a los del árbol macizo, se logra una disminución significativa del área con un incremento insignificante del diámetro, por ejemplo puede verse como un árbol hueco con  $d = 51.31$  mm y  $do = 28.78$  mm tiene la misma rigidez que un árbol macizo de  $D = 50$  mm y la disminución del área es del 29.2%. A medida que aumenta la relación  $(do/d)$  aumenta la disminución del área estando limitado este incremento por la rigidez del chavetero.

En el caso de árboles sin chaveteros las relaciones  $(do/d)$  recomendados indicadas para que la variación de la rigidez no sea mayor del 10% son:  $0.26 \leq c \leq 0.56$ . En el caso de árboles de igual resistencia la relación  $(do/d)$  recomendados puede incrementarse aún más obteniendo disminuciones del área superiores.

### 3. CONCLUSIONES

La elaboración de este documento requirió la utilización de un software para lograr parámetros de comparación entre cada una de las geometrías y casos propuestos entre ejes macizos y huecos.

De lo analizado anteriormente se concluye que es posible la utilización de árboles huecos en lugar de árboles macizos, para diversas configuraciones geométricas; e incluso manteniendo el mismo diámetro exterior en ambos, permite reducir el peso de los mismos con pequeñas disminuciones de la rigidez.

También es evidente que la mayor variación recurrente en las geometrías de los ejes en cuestión suceden debido a variaciones en la resistencia mecánica y en menor proporción por la rigidez cuando son ejes cortos.

#### 4. BIBLIOGRAFÍA

- [1] ORLOV, P. Ingeniería de Diseño. 2 ed. Moscu. Editorial Mir, 1975. P.297
  
- [2] FEODOSIEV, V.I, Resistencia de Materiales Editorial Pueblo y Educación. 1974, Tomo I, 305 pág. Tomo II, 375 pág.
  
- [3] ANURIEV, V. Manual del Constructor de Maquinaria, Editorial MIR, Moscu 1985.
  
- [4] DOBROVOLSKI V, ZABLONSKI K, RADCHIK A, ERLIJ L. Elementos de Maquinas. 584 paginas, Editorial MIR, , Moscu, 1991.
  
- [5] OBERGS, E. Manual Universal de la Técnica Mecánica. Editorial Labor. Edic 21, 1984
  
- [6] BEER, Ferdinand P. Mecánica de Materiales. Editorial Mc Graw Hill, Edición 2, 1992.
  
- [7] SHIGLEY, Joseph E. Diseño en Ingeniería Mecánica. Editorial Mc Graw Hill, Edición 5, 1992
  
- [8] MS EXCEL Standard Version , Microsoft inc, 2000.
  
- [9] AVALLONE E, BAUMEISTER T. Marks Manual del Ingeniero Mecánico. Editorial Mc Graw Hill, Edición 9, 1998
  
- [10] NORTON, Robert. Diseño de Maquinas. Editorial Prentice Hall, Edición 1, 1999