EL ESTUDIO DE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS PARA EL PROBLEMA DE DIRICHLET DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

RESUMEN
En contraste con las ecuaciones diferenciales ordinarias, no existe una teoría unificada para el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Algunas ecuaciones en derivadas parciales poseen sus propias teorías, mientras que otras aún no las poseen. La razón para esto es por la complejidad de su geometría. En el caso de una ecuación diferencial ordinaria un campo vectorial local es definido en una variedad. Para una ecuación diferencial parcial un subconjunto de la tangente al un espacio de dimensión mayor que 1 es definido en cada punto de la variedad. Como es sabido, inclusive para un campo bidimensional inmerso en uno tridimensional en general no es integrable. Una teoría consolidada para el estudio de la ecuación de Laplace es la considerada en este artículo, la teoría de las funciones armónicas.
En este artículo se estudiaran algunas propiedades de las funciones armónicas para la solución de la ecuación de Laplace.

PALABRAS CLAVES: Función armónica, Función analítica, energía de Dirichlet, ecuación de Laplace, Solución fundamental, fórmula integral de Poisson.

ABSTRACT
In contrst to ordinary differential equations, there is no unified theory of partial differential equations. Few equations have their own theories for its study. In this paper the analysis of harmonic functions for the solution of Laplace equation is investigated.

KEYWORDS: Harmonic function, Holomorphic function, Dirichlet energy principle, Laplace equation, Fundamental solution, Poisson integral formula.

JOSÉ R. GONZALEZ
Profesor Auxiliar, PhD
Matemático
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

ABEL E. POSSO AGUDELO
Matemático.
PhD. Ciencias Matemáticas
Profesor Titular
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

CARLOS ESCOBAR
Ingeniero Civil.
Mg. En Matemáticas
Profesor Auxiliar
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

El análisis complejo juega un papel fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales y en muchos campos de las ciencias físico-matemáticas. En particular, la teoría de funciones analíticas es una herramienta fundamental en la solución de problemas con condiciones en la frontera para la ecuación de Laplace. Esto es debido a la conexión que poseen las funciones analíticas de variable compleja con las funciones armónicas de la variable real.

2. LA RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS Y LAS FUNCIONES ANALÍTICAS

Sea $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, una función de variable compleja, analítica en un dominio Ω del plano. En este dominio las funciones u y v están relacionadas mediante las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Debido a que en un dominio Ω una función analítica posee derivadas de todos los ordenes, las funciones de variable real $u(x,y)$ y $v(x,y)$ también tienen derivadas parciales de cualquier orden en dicho dominio del plano x,y. Diferenciando la primera condición en (1) con respecto a x, la segunda respecto a y y sumando obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad x,y\in\Omega. \tag{2}$$

De forma similar para v,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \quad x,y\in\Omega. \tag{3}$$

Así, las componentes $u(x,y)$ y $v(x,y)$ de la función f son funciones armónicas ya que satisfacen la ecuación de Laplace (2) y (3) respectivamente. Esta conexión entre las funciones analíticas y armónicas permite utilizar algunas propiedades de las funciones analíticas para el estudio de las funciones armónicas.

3. EL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA LA ECUACIÓN DE LAPLACE

Las funciones armónicas en una sola dimensión espacial son simplemente las funciones lineales y el valor de la función lineal en el punto medio de un intervalo finito es el promedio de sus valores en sus puntos extremos ver ([3]).

Fecha de Recepción: 09 Febrero de 2007
Fecha de Aceptación: 17 Mayo de 2007

Generalizando este resultado a dos dimensiones espaciales tenemos que si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^2$, $g:\partial\Omega \to \mathbb{R}$ es dada, y $u:\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, con $u = g$ sobre $\partial\Omega$, para cada $\xi \in \Omega$ y $B_r(\xi) \subset \Omega$ se cumple que

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(\xi)} u(x,y) ds .$$

Veamos: sea $\xi = (x_0, y_o)$ un punto interior a Ω. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(\xi)} u(x,y) ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(x_o + r\cos\theta, y_o + rsen\theta) r d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_o + r\cos\theta, y_o + rsen\theta) d\theta = \phi(r). \end{aligned}$$

Derivando con respecto a r y teniendo en cuenta que $u(x_0, y_o)$ es constante tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} sen\theta \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} sen\theta \right] r d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(\xi)} \Delta u \bullet \eta ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{B_r(\xi)} \Delta u dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{B_r(\xi)} div(\nabla u) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{B_r(\xi)} \Delta u dx dy = 0 . \end{aligned}$$

Puesto que $r > 0$, entonces $\Delta u = 0$, para cada $\xi \in \Omega$.

Hemos establecido así la propiedad del valor medio para la función armónica u

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(\xi)} u ds = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(\xi)} u dx dy ,$$

para cada $\xi \in \Omega$ y $B_r(\xi) \subset \Omega$.

De esta forma, para hallar una función u que coincida con una función dada g sobre $\partial\Omega$ es suficiente resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0, \text{ en } \Omega, \quad u = g, \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{4}$$

4. ENERGÍA DE DIRICHLET PARA FUNCIONES ARMÓNICAS

La integral de energía para una función armónica $u:\Omega \to \mathbb{R}$ está dada por la expresión

$$E = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx .$$

Para u fijo y para cualquier $\phi \in C^\infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} E_\phi(t) &= \int_\Omega |\nabla(u + t\phi)|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + t^2 \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx \\ &\quad + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx . \end{aligned}$$

Al derivar esta última integral, denominada la integral de Dirichlet, con respecto a t y evaluarla en $t = 0$, se obtiene

$$\dot{E}_\phi(t)\Big|_{t=0} = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx . \tag{5}$$

Si asumimos a $\phi = 0$ sobre $\partial\Omega$ entonces

$$\int_{\partial\Omega} \phi \nabla u \cdot ds = 0 .$$

Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradski a esta última expresión,

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi) ds = -\int_\Omega [\phi \Delta u] dx .$$

Utilizando (3), tenemos

$$\dot{E}_\phi(t)\Big|_{t=0} = -2\int_\Omega \phi \Delta u dx .$$

Si además suponemos que u es armónica en Ω, entonces

$$\dot{E}_\phi(u)\Big|_{t=0} = 0 \text{, para todo } \phi .$$

Una conclusión importante que se desprende del análisis anterior, es el siguiente resultado.

Si u_1 es una función armónica sobre $\partial\Omega$ y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ entonces las funciones u_1 poseen la energía más pequeña de Dirichlet para sus valores en la frontera

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx \le \int_\Omega |\nabla u_2|^2 dx ,$$

para las funciones u_2 que satisfacen $u_1 = u_2$ sobre $\partial\Omega$.

Como

$$\int_{\partial\Omega} (u_2 - u_1) \nabla(u_2 + u_1) \cdot ds = 0 , \tag{6}$$

aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradski en (6) obtenemos

$$\int_\Omega \nabla(u_2 - u_1) \cdot \nabla(u_2 + u_1) dx = -\int_\Omega (u_2 - u_1) \Delta(u_2 + u_1) dx.$$

De manera similar

$$\int_\Omega \nabla(u_2-u_1)\cdot\nabla(u_2-u_1)dx = -\int_\Omega (u_2-u_1)\Delta(u_2-u_1)dx.$$

Utilizando estos resultados, obtenemos

$$\int_\Omega \left(\left|\nabla u_2\right|^2 - \left|\nabla u_1\right|^2\right)dx = \int_\Omega \nabla(u_2+u_1)\cdot\nabla(u_2-u_1)dx$$

$$= -\int_\Omega (u_2-u_1)\Delta(u_2+u_1)dx = -\int_\Omega (u_2-u_1)\Delta(u_2-u_1)dx$$

$$= \int_\Omega \left|\nabla(u_2-u_1)\right|^2 dx \geq 0\,.$$

Es decir

$$\int_\Omega \left|\nabla u_2\right|^2 dx \geq \int_\Omega \left|\nabla u_1\right|^2 dx\,.$$

4. TEOREMAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Si la función u es armónica en una región Ω, entonces en el interior de Ω esta función no posee ni valores máximos ni mínimos, estos valores máximos y mínimos los adquiere la función u únicamente en la frontera Ω véase ([1-2,4,5]).

Para ver esto, supongamos que la función u toma su valor máximo en un punto x interior a Ω.

Existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que la bola $\sigma = B(x,\varepsilon)$ esta contenida en el interior de Ω y además

$$u(x) > u_H + \varepsilon\,, \qquad (7)$$

donde u_H es el valor máximo de u en la frontera de σ.

Sea $\eta > 0$ tal que para cualquier punto ξ que se encuentre dentro o sobre la frontera de σ se cumpla que

$$\eta\left|x-\xi\right|^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

donde $\left|x-\xi\right|$ es la distancia entre los puntos x y ξ.

Entonces de (7), la función

$$v(\xi) = u(\xi) + \eta\left|x-\xi\right|^2$$

en el punto ξ obtendrá un valor mayor que su valor máximo en la frontera de σ. Esto significa que el valor máximo lo obtendrá dentro de σ. Pero en el punto máximo las segundas derivadas tomadas con respecto a las coordenadas del punto ξ no pueden ser mayores que cero. Al igual

$$\Delta_\xi v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^{\,2}} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_3^{\,2}} = \eta\Delta_\xi \left|x-\xi\right|^2 = 6\eta > 0.$$

Absurdo ya que no se cumple (7). De aquí se desprende que la función u en el interior del dominio Ω no puede obtener puntos máximos. De manera similar se puede comprobar que la función u en el interior de Ω no posee valores mínimos. Como u es una función continua en $\overline{\Omega}$, por el teorema de Weierstrass tendrá al menos un máximo y un mínimo en $\overline{\Omega}$ y como en el interior de Ω la función no posee valores máximos ni mínimos entonces estos valores los adquiere en la frontera de Ω.

Otro resultado importante es el siguiente:

Si las funciones u y v son armónicas en la región Ω y si en la frontera de Ω se cumple una de las siguientes condiciones

$$u \leq v \quad \text{o} \quad \left|u\right| \leq v\,,$$

entonces estas condiciones se cumplen también en el interior de Ω.

Utilizando el teorema sobre máximos y mínimos podemos demostrar un resultado muy importante sobre las singularidades de la función armónica u.

Sea el punto $\xi = x$ una singularidad de la función $u(\xi)$ y en todos los demás puntos de la región Ω la función es armónica. Entonces la función $u(\xi)$ cuando $\xi \to x$ no crece más rápido que $1/r$, donde $r = \left|x-\xi\right|$, o la función $u(\xi)$ en el punto donde tiene la singularidad se puede redefinir de tal forma que sea armónica.

Otra propiedad muy usada en las funciones armónicas es la desigualdad de Harnack.

Sea $u \in C^2(\Omega)$ una función armónica y no-negativa. Además si Ω_1 es un dominio acotado tal que $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Entonces existe una constante A tal que

$$\sup_{x\in\Omega_1} u(x) \leq A \inf_{x\in\Omega_1} u(x) \qquad (8).$$

Veamos:

Sean $x \in \Omega$, $r > 0$ de tal forma que $B_{4r}(x)$ se encuentre en Ω, el factor cuatro en el radio de la bola es escogido para asegurar que si tomamos y, z en la bola de radio r y centrada en x y utilizando la propiedad triangular, tenemos que

$$B_r(y) \subset B_{2r}(x) \subset B_{3r}(z)\,.$$

Por la propiedad del promedio esférico para la función u

$$u(y) = \frac{n}{\omega_n(3r)^n}\int_{B_r(x)} u(s)ds$$

$$\leq \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_{2r}(x)} u(s)ds\,. \qquad (9)$$

$$u(z) = \frac{n}{\omega_n(3r)^n}\int_{B_{3r}(z)} u(s)ds$$

$$\geq \frac{n}{\omega_n(3r)^n}\int_{B_{2r}(x)} u(s)ds\,. \qquad (10)$$

Las estimaciones (9) y (10) son válidas para cada y, z en la bola de radio r y centrada en x.

De (9) tenemos que

$$\sup_{B_r(x)} u(x) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_{2r}(z)} u(s)ds = const = A \,.$$

De igual forma de (10) se tiene que

$$\frac{A}{3^n} = \frac{n}{\omega_n (3r)^n} \int_{B_{2r}(z)} u(s)ds \leq \inf_{B_r(x)} u(z) \,.$$

Así,

$$\sup_{B_r(x)} u(y) \leq 3^n \inf_{B_r(x)} u(z) \,. \tag{11}$$

Para generalizar (11) a Ω_1 escogemos dos puntos en la frontera de esta región, donde se alcanza el valor máximo y el valor mínimo de u, y y z respectivamente. Por ser Ω_1 conexo, los puntos y y z los podemos unir por medio de una curva γ, contenida en $\overline{\Omega}_1$. Además si tomamos

$$0 < 4r \leq \min\left\{\left|c_1 - c_2\right|\right\},$$

Con $c_1 \in \overline{\Omega}_1$ y $c_2 \in \mathbb{R}^n - \Omega$, se tiene que todas las bolas con centro en los puntos de la curva γ y de radio $4r$ están contenidas en Ω. De otro lado por la compacidad de la curva γ al unir los puntos y, z se tiene que basta una cantidad finita de tales bolas, digamos n , para cubrir a Ω. De manera análoga, empezando por el punto máximo y aplicando (11) de forma reiterada, obtenemos la desigualdad buscada

$$\sup_{x\in\Omega_1} u(x) \leq A \inf_{x\in\Omega_1} u(x),$$

donde $A = 3^{mn}$.

Este resultado sobre las funciones armónicas es uno de los más importantes. Por ejemplo si la función u es positiva o cero y armónica en la bola con centro en el origen y de radio r y si $\inf_{x\in B_r(0)} u(x) = 0$, entonces u es idénticamente cero sobre $B_r(0)$. Este resultado se puede obtener procediendo como en la demostración de la desigualdad de Harnack.

5. SOLUCIONES FUNDAMENTALES

Busquemos soluciones a la ecuación de Laplace en un dominio de $\mathbb{R}^n$ que posean algún tipo de simetría esférica ver ([5]). En el caso particular si suponemos un punto fijo ξ de $\mathbb{R}^n$, hallemos una función $u \in C^2\left(\mathbb{R}^n - \{\xi\}\right)$ de la forma

$$u(x) = \phi\left(\left|x-\xi\right|\right),$$

Con $\phi \in C^2\left(0,+\infty\right)$, con u una función armónica en $\mathbb{R}^n - \{\xi\}$.

En el caso de soluciones radiales, independientes de las variables angulares, $u(x) = \phi(r)$ con $r = |x|$.

Al considerar que

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,,\; u_{x_i} = \frac{\phi'(r)x_i}{r},$$

$$u_{x_i x_i} = \phi''(r)\left(\frac{x_i^2}{r^2}\right) + \phi'(r)\left(\frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2}\right),$$

para $i = 1, 2, \ldots n$. Considerando a n como la dimensión espacial tenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria, para calcular el Laplaciano de la función u

$$\Delta u = \phi''(r) + \frac{(n-1)}{r}\phi'(r) \,. \tag{12}$$

Para resolver (12) consideremos dos casos:

a) $n = 2$

$$\phi(r) = C_1 \ln r + C_2 \,. \tag{13}$$

b) $n \geq 3$

$$\phi(r) = -\frac{C_1}{(n-2)r^{n-2}} + C_2 \,, \tag{14}$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

En consecuencia, toda función de la forma $u(x) = \phi\left(\left|x-\xi\right|\right)$, con $\phi(r)$ dada en (13) y $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo, es una función de clase $C^\infty\left(\mathbb{R}^n - \{\xi\}\right)$ que es solución de $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n - \{\xi\}$.

Si introducimos la solución fundamental de la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^n$ a la función $K(x,\xi)$ con $x \neq \xi$, se tiene que

$$K(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}}, & n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln r, & n = 2, \end{cases} \tag{15}$$

con ω_n la medida de la esfera

$$S^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\right\}.$$

5. CONCLUSIÓN

Introduciendo una función $w(x)$ armónica en Ω y utilizando (15) podemos definir las funciones de Green como

$$G(x,\xi) = K(x,\xi) + w(x) \text{.} \qquad (16)$$

Si suponemos que para cada $\xi \in \Omega$ podemos encontrar una función $w_\xi(x)$ armónica en Ω que satisface la condición

$$w_\xi(x) = -K(x,\xi) \text{ ,}$$

para $x \in \partial\Omega$. Entonces la función

$$G(x,\xi) = K(x,\xi) + w_\xi(x)$$

es una función armónica en Ω y además es una solución fundamental del operador de Laplace , con la propiedad

$$G(x,\xi) = 0 \text{ para todo } x \in \partial\Omega.$$

En general, la construcción de tales funciones es complicada ya que requiere la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta w_\xi = 0, & \text{en } \Omega \\ w_\xi = -K, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\xi \in \Omega$.

Haciendo uso de (15) de las fórmulas de Green (16) y de la fórmula de representación de Green, el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace tiene como solución

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu_x} g(x) dS_x \text{ ,}$$

expresión que es conocida como la fórmula integral de Poisson. La expresión $H(x,\xi) = \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu_x}$, es el llamado núcleo de Poisson.

Es decir, el problema de Dirichlet posee solución para $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, luego podemos calcular u de la fórmula integral de Poisson siempre y cuando conozcamos las respectivas funciones de Green.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] V.P. Mijaylov. Ecuaciones en derivadas parciales, Nauka, Moscú 1976.

[2] L. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[3] J.R.González, A.E. Posso, Método del promedio esférico en la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico. Scientia et Technica Ano XII, No 32, Diciembre de 2006. UTP.

[4] John Fritz. Partial Differential Equations 4th ed., Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] Robert C. McOwen Robert. Partial Differential Equations: methods and applications, Prentice Hall, 1996.