Sur les espaces mesures singuliers II - Etude spectrale

Mikael Pichot

SUR LES ESPACES MESURÉS SINGULIERS
II - Étude spectrale[1]

Mikaël Pichot

Novembre 2004

—

Abstract

We are mainly interested here in Kazhdan's property T for measured equivalence relations. Among our main results are characterizations of strong ergodicity and Kazhdan's property in terms of the spectra of diffusion operators, associated to random walks and hilbertian representations of the underlying equivalence relation. The analog spectral characterization of property T for countable groups was proved recently by Gromov [25] (and Ghys [24]). Our proof put together the tools developed in the group case and further crucial technical steps from the study of amenable equivalence relations in [13]. As an application we show how Żuk's "$\lambda_1 > 1/2$" criterion for property T can be adapted to measured equivalence relations.

Table des matières

[1]2000 Mathematics Subject Classification. Primary 47A35 ; Secondary 37A50
The author was partially supported by a JSPS Fellowship for European Researchers.

1. Introduction

Cet article succède à [41] et concerne principalement l'étude de la propriété T de Kazhdan pour les espaces singuliers.

Nous avons divisé cette introduction en trois parties, une présentation des résultats spectraux évoqués dans le titre, suivie de quelques motivations, historiques et techniques, concernant ces résultats et la propriété T de Kazhdan ; nous terminons par exemple d'application.

—

Étant donné un espace borélien standard X, on construit une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables en effectuant une marche aléatoire sur X de la façon suivante. Fixons pour tout $x \in X$ une loi de probabilité ν_x sur X, à support fini ou dénombrable. Fixons un point $x_0 \in X$ et lançons une marche aléatoire sur X débutant en x_0 et de loi ν. Ainsi on effectue un premier pas en x_1 selon la loi ν_{x_0}, un deuxième pas en x_2, selon la loi ν_{x_1}, et on itère. L'ensemble des trajectoires possibles de cette marche détermine une orbite dénombrable $[x_0] \subset X$ (l'ensemble des points atteints à partir de x_0 avec probabilité non nulle), et lorsque le point de départ x_0 varie dans X, la partition en orbites de X ainsi déterminée est une relation d'équivalence R sur X (où l'on suppose que $\nu_x(y) > 0$ si et seulement si $\nu_y(x) > 0$). Cette relation d'équivalence est borélienne si le support $\mathrm{Supp}(\nu) = \{(x, y),\ \nu_x(y) > 0\}$ de ν est une partie borélienne de $X \times X$. On notera $\nu(x \to y) = \nu_x(y)$.

Fixons alors un espace mesuré singulier Q. Rappelons que la structure mesurée sur Q est déterminée par la donnée d'un espace de probabilité (X, μ) et d'une relation d'équivalence mesurée R à classes dénombrables sur X telle que $X/R = Q$. (On dit alors que R est une relation d'équivalence désingularisante relative à Q.) On appelle *marche aléatoire Q-périodique*, et on note $\tilde{\nu}$, la donnée d'une marche aléatoire ν sur un espace de probabilité (X, μ) (au sens ci-dessus), définissant une relation d'equivalence borélienne R pour laquelle μ est une mesure *quasi-invariante*, et telle que $X/R = Q$. La marche aléatoire Q-périodique $\tilde{\nu}$ a lieu sur l'ensemble dénombrable Q-périodique R. (cf. [41] pour la terminologie utilisée)

Soit $\tilde{\nu}$ une marche aléatoire Q-périodique. Certaines propriétés de l'espace singulier Q se reflètent dans le spectre d'opérateurs de diffusion naturellement associés à $\tilde{\nu}$ de la façon suivante. La relation d'équivalence R, partition de X en les orbites de ν, est en particulier un groupoïde mesuré, et admet à ce titre des représentations hilbertiennes. Soit π une telle représentation sur un champ mesurable H d'espaces de Hilbert de base X. On associe à ν et π un *opérateur de diffusion* $D_{\nu,\pi}$ agissant sur l'espace $L^2(X, \mu, H)$ des sections de carré intégrable de H, défini par

$$(D_{\nu,\pi}\xi)_x = \sum_{y \sim x} \nu(x \to y)\pi(x, y)\xi_y$$

où $\xi \in L^2(X, \mu, H)$. Lorsque ν est une marche aléatoire *symétrique* relativement à μ (cf. §7.), cet opérateur est hermitien borné et son spectre est une partie compacte de $[-1, 1]$. On s'intéresse alors à la propriété suivante.

On dit que $D_{\nu,\pi}$ a *un trou spectral* (au voisinage de 1) si sa plus grande valeur spectrale distincte de 1 est strictement inférieure à 1.

Soit $\tilde{\nu}$ une marche aléatoire Q-périodique. On appelle *diffusions hilbertiennes* associées à $\tilde{\nu}$ la famille des opérateurs $D_{\nu,\pi}$, lorsque π parcourt les représentations hilbertiennes de la relation d'équivalence mesurée R associée à $\tilde{\nu}$. On appelle *diffusion simple* associée à $\tilde{\nu}$ la diffusion hilbertienne, agissant sur $L^2(X)$, associée à la représentation triviale de R.

Après avoir mené une analyse détaillée de la propriété T de Kazhdan pour les espaces singuliers, nous obtenons dans cet article les caractérisations spectrales suivantes.

Théorème 1. *Un espace singulier ergodique de type fini Q, s'il est de type* II*, possède un quotient moyennable si et seulement si pour toute marche aléatoire Q-périodique symétrique bornée, la diffusion hilbertienne simple associée n'a pas de trou spectral au voisinage de 1.*

Théorème 2. *Un espace singulier ergodique Q possède la propriété T de Kazhdan si et seulement s'il existe une marche aléatoire Q-périodique symétrique dont les diffusions hilbertiennes présentent un trou spectral au voisinage de 1.*

—

1. L'étude des marches aléatoires en milieu géométrique (algébrique) reçoit une attention considérable depuis une cinquantaine d'années. Le premier résultat obtenu dans ce domaine est probablement le théorème de Pólya (1921) sur la récurrence/transcience des marches aléatoires dans $\mathbf{Z}^n$ (cf. [27]).

Le comportement spectral proprement dit des marches aléatoires, notamment la sensibilité du spectre aux structures géométriques (algébriques) sous-jacentes, a été étudié pour la première fois en 1959 par Kesten. Il démontrait alors le théorème suivant.

Théorème 3 (Kesten [33, 34]). *Soit Γ un groupe de type fini. On fixe une marche aléatoire invariante symétrique $\tilde{\nu}$ sur Γ, dont le support est un système générateur symétrique fini de Γ, et on note $D_{\tilde{\nu}}$ l'opérateur de convolution associé à $\tilde{\nu}$, agissant sur $\ell^2(\Gamma)$. Alors $D_{\tilde{\nu}}$ a un trou spectral si et seulement si Γ est non moyennable.*

Ici l'opérateur $D_{\tilde{\nu}} = D^{\Gamma}_{\tilde{\nu},\lambda}$ est associé à la marche aléatoire $\tilde{\nu}$ et à la représentation régulière gauche λ de Γ sur $\ell^2(\Gamma)$.

Plus récemment, il a été observé par Gromov [25, 24] que l'on dispose d'une caractérisation spectrale, analogue à celle de Kesten, de la propriété T de Kazhdan (il s'agit d'une infime partie du contenu de [25]). Un groupe de type fini Γ muni d'une marche aléatoire invariante symétrique $\tilde{\nu}$ dont le support est un système générateur symétrique fini de Γ, a la propriété T de Kazhdan si et seulement si les diffusions $D^{\Gamma}_{\tilde{\nu},\pi}$ associées aux représentations unitaires π de Γ ont un trou spectral. Cette caractérisation, bien qu'élémentaire, est d'importance fondamentale. Elle permet par exemple de donner une preuve conceptuelle du « critère $\lambda_1 > 1/2$ » pour la propriété T (cf. [24, 38]).

2. Une caractérisation spectrale analogue de la propriété T de Kazhdan pour les relations d'équivalence mesurées (et les espaces singuliers) est plus difficile à obtenir ; nous ferons notamment un usage important de techniques développées par Connes-Feldman-Weiss [13] dans le cadre moyennable (un exposé récent et détaillé des différents concepts de moyennabilité fait l'objet de [3]). De façon générale, nous devons déterminer dans quelle mesure les propriétés spectrales des observables naturelles $D_{\nu,\pi}$ associées à Q sont sensibles au passage d'une notion de quasi-périodicité Q triviale (i.e. d'une notion de périodicité) à une notion de quasi-périodicité non triviale — la réponse pouvant *a priori* dépendre de la notion de quasi-périodicité choisie. Rappelons que, poursuivant le point de vue de [41], nous nous intéressons aux concepts de périodicité (type I) et quasi-périodicité (type II et III) qui sont décrits par les diagrammes suivants.

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& Y = \tilde{Y}/\Gamma \arrow[dl, "p"] \\
Q = \{\star\} &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \Sigma = \tilde{\Sigma}/R \arrow[dl, "p"] \\
Q &
\end{tikzcd}
$$

type I $\qquad\qquad$ type II et III

Sur le diagramme de gauche, $\tilde{Y}$ est un complexe simplicial muni d'une action libre cocompacte d'un groupe dénombrable Γ, et l'espace quotient Y est un complexe simplicial compact. L'application p est triviale et l'espace singulier Q est réduit à un point. Sur le diagramme de droite, $\tilde{\Sigma}$ est un complexe simplicial Q-périodique. L'ensemble des sommets de $\tilde{\Sigma}$ est une relation d'équivalence mesurée R agissant sur $\tilde{\Sigma}$, et l'espace quotient X de $\tilde{\Sigma}$ par R est un espace borélien standard muni d'une structure de lamination par complexes simpliciaux (et d'une classe de mesure déterminée par la mesure invariante sur Q). L'application $p : X \to Q$ est une désingularisation simpliciale de Q. L'espace singulier Q a le cardinal du continu.

3. Décrivons plus précisément la situation. Le support d'une marche aléatoire Q-périodique $\tilde{\nu}$ est un graphe Q-périodique $\tilde{\Sigma}$ et la marche aléatoire ν associée à $\tilde{\nu}$ a lieu sur la désingularisation (discrète) de Q constituée des sommets $X = \Sigma^{(0)} \subset \Sigma$ de la lamination Σ. Dans le cas des groupes, la présence de l'action cocompacte de Γ a un caractère uniformisant et ramène essentiellement les possibilités de fluctuations de données périodiques (invariantes) à l'ensemble fini $X = Y/\Gamma$. Ainsi les données relatives à $\tilde{\nu}$ (notamment les probabilités de transition $\tilde{\nu}(\gamma \to \gamma')$) sont en nombre fini. On peut alors facilement, par exemple, déduire d'informations ponctuelles des contrôles uniformes sur ces données. Dans le cas quasi-périodique ce n'est plus le cas — bien qu'on fasse toujours une hypothèse de type « cocompacité » en requérant que $\tilde{\nu}$ soit symétrique bornée — et il faudra déterminer si l'on peut s'affranchir de ces hypothèses de cofinitude sans entraîner de modifications fondamentales sur les observations spectrales effectuées.

Nous verrons notamment que l'une des difficultés qui se posent provient du fait que, dans le cas quasi-périodique, *des comportements non triviaux peuvent apparaître sur des parties (quasi-périodiques) arbitrairement petites de l'espace* ; les contrôles uniformes ont lieu sur une majorité de l'espace seulement. Or ces « fluctuations infinitésimales » peuvent avoir une influence sur les propriétés spectrales des opérateurs $D_{\nu,\pi}$ (rappelons que les opérateurs $D_{\nu,\pi}$ agissent sur l'espace de Hilbert des *sections de carré intégrable*

$L^2(X, H)$ associées au champ d'espaces de Hilbert H, où la boule unité de $L^2(X, H)$ contient des sections à support arbitrairement petit). La situation est réminiscente de la construction des nombres de Betti L^2 pour les relations d'équivalence [21], où l'auteur introduit des paramètres de cut-off sur les homotopies pour en faire des opérateurs bornés.

4. Considérons d'abord le cas le plus simple de la représentation triviale (théorème 1). Un exemple significatif pour lequel les fluctuations évoquées au paragraphe précédent révèlent effectivement une nature spectrale est donné par l'existence de complexes simpliciaux quasi-périodiques contenant ou non des suites de Følner évanescentes (cf. [41]). Plus précisément, la présence de suites de Følner évanescentes dans le support de ν est détecté par l'absence de trou spectral pour la diffusion associée à ν et à la représentation triviale (que nous avons appelée « diffusion simple »). Cette observation, qui repose essentiellement sur des techniques de Connes-Feldmann-Weiss [13] et Schmidt [45], conduit au théorème 1 (cf. §7.).

5. Passons maintenant à la propriété T de Kazhdan. Rappelons que, par définition, une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ) possède la propriété T si la condition suivante est vérifiée.

(T) Toute représentation hilbertienne possédant une suite ξ^n de champs de vecteurs presque invariante, unitaire au sens où $||\xi_x^n||_x = 1$ pour presque tout $x \in X$, possède un champ de vecteurs invariant à support total.

Nous rappelerons en détail la terminologie utilisée ultérieurement ; nous voulons seulement ici attirer l'attention sur la signification de « champs de vecteurs unitaire » utilisée dans cette définition. Supposons la relation d'équivalence ergodique et fixons-en une représentation hilbertienne π sur un champ H de base X. Si $\xi : X \to H$ est un champ de vecteurs invariant, l'application $x \mapsto ||\xi_x||_x$ est constante. Par suite, si ξ^n est une suite presque invariante de champs de vecteurs, on peut espérer obtenir un contrôle sur la variation en x des applications $x \mapsto ||\xi_x^n||_x$, du moins pour n grand, ce qui permettrait en particulier affaiblir l'hypothèse $||\xi_x^n||_x = 1$ presque sûrement tout en conservant une définition identique de propriété T de Kazhdan.

L'un des résultats techniques importants de cet article montre que si l'on suppose qu'il n'y a pas de perte de masse dans la suite presque invariante ξ^n, alors la représentation π contient une suite presque invariante unitaire au sens ci-dessus. Plus précisément nous démontrons l'équivalence de la définition précédente et de la définition suivante.

(T) Toute représentation hilbertienne possédant une suite ξ^n de champs de vecteurs presque invariante dominée non triviale, au sens où $||\xi^n||_1 = 1$ et $||\xi_x^n|| \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^1(X)$, possède un champ de vecteurs invariant non trivial.

La démonstration de ce résultat fait l'objet du paragraphe 3. (voir aussi le paragraphe 4. pour le cas non ergodique).

Une élaboration des techniques utilisées pour obtenir cette caractérisation conduit alors au théorème suivant, qui relie la notion d'ergodicité forte au phénomène de concentration de la mesure, en termes de fonctions 1-lipschitziennes (cf. §5.). (Nous avions déjà constaté des liens entre ergodicité forte et concentration lors de la première partie de cet article [41, thm. 2].)

Définition. *Soient H un espace de Hilbert et $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilités sur H. On suppose les premiers moments*

$$m_1(\mu_n) = \int_H ||y|| d\mu_n(y) \leqslant C < \infty$$

unifomément bornés par une constante $C > 0$. Nous dirons que la suite d'espaces métriques-mesurés $(H, ||\cdot||, \mu_n)$ forme une famille de Levy *si pour tout $\varepsilon > 0$ on a,*

$$\inf_f \mu_n\{|f - m| \leqslant \varepsilon\} \to_n 1,$$

où l'infimum est pris sur les fonctions 1-lipschitziennes $f : H \to \mathbf{R}$ et $m = \int_H f d\mu_n$ est la valeur moyenne de f.

Théorème 4. *Soit H un espace de Hilbert. Soit R une relation d'équivalence ergodique sur un espace de probabilité (X, μ). Alors R est fortement ergodique si et seulement si pour toute suite presque invariante $\xi^n : X \to H$ pour la représentation triviale de R dans H, dominée par une fonction $g \in L^1$, la famille $(H, ||\cdot||, \mu_n)$ est une famille de Levy, où $\mu_n = \xi^n_* \mu$ est la poussée en avant de μ sur H par le champ ξ^n.*

Nous démontrons ensuite le théorème suivant, dont l'analogue pour les groupes est bien connu, cf. [28]. Sa démonstration repose notamment sur la caractérisation de la propriété T décrite ci-dessus et sur le théorème de concentration précédent (thm. 4).

Théorème 5. *Soit R une relation d'équivalence ergodique ayant la propriété T. Soit π une représentation de R possédant une suite ξ^n presque invariante telle que $||\xi^n_x||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^1(X)$. Il existe quitte à extraire une suite ζ_n de champs invariants dominés par g tels que*

$$||\xi^n_x - \zeta^n_x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$.

Ce théorème permet par exemple de donner une preuve directe du fait que, si $R = R_\alpha$ est une relation d'équivalence obtenue par action libre ergodique préservant une mesure de probabilité d'un groupe Γ, alors Γ possède la propriété T si et seulement si R la possède (cf. §5. pour des références concernant ce résultat).

6. Nous avons à présent évoqué tous les ingrédients nécessaires pour étudier les aspects spectraux de la propriété T et ainsi démontrer le théorème 2. Nous en donnons la preuve au paragraphe 7., qui contient également la preuve du théorème 1. Les démonstrations utilisent l'ergodicité forte comme outil essentiel et ceci a motivé l'écriture de la première partie [41] de cet article. Nous renvoyons à cette première partie, ainsi qu'à ses références, pour des rappels sur cette notion (notamment l'article de Hjorth-Kechris [29]).

—

Concluons par une application des idées précédentes. Rappelons tout d'abord un critère bien connu, extrait de [49], pour qu'un groupe discret ait la propriété de Kazhdan. On considère un groupe dénombrable de type fini Γ, et on note L le « link » en l'identité de son complexe de Cayley Y, de dimension 2, associé à un système générateur symétrique fini (L est le graphe fini donné par l'intersection de Y avec une sphère de rayon suffisamment petit centrée en l'identité). On suppose L connexe.

Critère $\lambda_1 > 1/2$. *Si $\lambda_1(L) > 1/2$, alors Γ possède la propriété T de Kazhdan.*

L'hypothèse $\lambda_1 > 1/2$ peut être considérée comme une hypothèse de « courbure positive » (cf. [23]), et signifie par définition que la première valeur propre non nulle du laplacien discret sur L est strictement supérieure à 1/2.

Ce critère tire ses origines dans les travaux de Garland [23] sur l'annulation de la cohomologie (en certains degrés) de groupes d'automorphismes d'immeubles de Bruhat-Tits cocompacts. Gromov en a donné une preuve nouvelle dans [25], basée sur l'étude des marches aléatoires sur les groupes discrets. Poursuivant ces idées, nous démontrons le résultat suivant au paragraphe 8..

Théorème 6. *Soit Q un espace singulier de type fini, $\tilde{\Sigma}$ un complexe simplicial Q-périodique de dimension 2 uniformément localement fini. On fixe une mesure quasi-invariante μ sur la lamination X des sommets associée à $\tilde{\Sigma}$ et on considère un nombre réel $\delta_\mu \geqslant 1$ tel que*

$$\delta_\mu^{-1} \leqslant \delta(y,z) \leqslant \delta_\mu$$

pour presque toute arête (y,z) de $\tilde{\Sigma}$, où δ est le cocyle de Radon-Nikodym associé à μ. On suppose que presque tout link L de $\tilde{\Sigma}$ est connexe et vérifie $\lambda_1(L) \geqslant \lambda$, où λ est un nombre réel vérifiant

$$\lambda > \delta_\mu^3/2.$$

Alors Q possède la propriété T de Kazhdan.

L'objet de ma note aux comptes-rendus [40] était d'observer que le théorème ci-dessus est vrai pour les relations d'équivalence de type II_1, i.e. de traiter le cas $\delta_\mu = 1$ avec les notations du théorème.

—

Je remercie Damien Gaboriau pour son aide constante au cours de l'élaboration de ce travail.

Je dois également beaucoup à Étienne Ghys, ainsi qu'aux excellentes conditions de travail dont on bénéficie au sein de l'UMPA.

2. Notations

Les deux parties de cet article (le présent article, et [41]) ont été écrites simultanément. Pour cette raison il ne nous semble pas indispensable de réécrire ici une présentation générale du contexte qui nous concerne ; nous renvoyons à la première partie [41] et aux références pour cela. Contentons nous de rappeler les notations que nous utiliserons dans la suite.

Étant donné un espace borélien standard X muni d'une mesure de probabilité sans atome μ, on dit que le couple (X, μ) est un espace de probabilité. Soit (X, μ) un espace de probabilité. Une relation d'équivalence à classes dénombrables R sur (X, μ) est mesurée si son graphe $R \subset X \times X$ est borélien et si μ est une mesure quasi-invariante, au sens où le saturé d'un borélien négligeable est négligeable. On note $\mathfrak{h}$ la mesure sur R associée à μ et au système de Haar canonique $(\mathfrak{h}^x)_{x\in X}$ de décompte horizontal. Explicitement,

$$\mathfrak{h}(K) = \int_X \mathfrak{h}^x(K) d\mu(x) = \int_X \# K^x d\mu(x)$$

où $K \subset R$ est une partie borélienne et $K^x = \{(x, y) \in K \cap R\}$. Le symbole $\mathfrak{h}_1$ désigne une mesure de probabilité sur R équivalente à $\mathfrak{h}$. Les espaces singuliers sont notés Q (e.g. $Q = X/R$) et supposés munis d'une mesure transverse invariante Λ. Les lettres A, B,... sont des parties boréliennes de X. La lettre K désigne une partie mesurable symétrique de R et est considérée comme une structure simpliciale mesurable sur les classes (d'une sous-relation) de R. La lettre Σ est attachée aux complexes simpliciaux Q-périodiques. La lettre Γ désigne un groupe dénombrable.

On notera H les champs mesurables d'espaces de Hilbert séparables de base X, et π les représentations unitaires de R sur H. Les champs de vecteurs sur X, i.e. les sections de H, sont notés ξ, ζ,... Rappelons qu'une représentation unitaire de R sur H consiste en la donnée d'une famille d'opérateurs unitaires

$$\pi(x,y) : H_y \to H_x,$$

$(x,y) \in R$, satisfaisant aux conditions de composition et de mesurabilité suivantes :
- $\pi(x,x) = \mathrm{Id}$ et $\pi(x,z) = \pi(x,y)\pi(y,z)$ pour tout $x \sim y \sim z$.
- les coefficients

  $$(x,y) \mapsto \langle \pi(x,y)\xi_y | \eta_x \rangle_x$$

  sont mesurables pour tous champs de vecteurs mesurables $\xi, \eta : X \to H$.

Par exemple, la représentation régulière de R sur le champ d'espaces de Hilbert

$$H : x \mapsto \ell^2(R^x, \mathfrak{h}^x)$$

qui à tout point $x \in X$ associe l'espace des fonctions de carré intégrable sur la classe d'équivalence de x (pour la mesure de décompte horizontal $\mathfrak{h}^x$),

$$\pi(x,y) : \ell^2(R^y) \to \ell^2(R^x)$$

est définie par $\pi(x,y)f(x,z) = f(y,z)$.

Nous utiliserons la lettre ν pour les marches aléatoires sur un graphage de relation d'equivalence ($\tilde{\nu}$ pour les marches aléatoires sur le graphe quasi-périodique associé).

Enfin, la lettre D désigne une contraction hilbertienne (e.g. diffusion hilbertienne associée à ν), et E est la fonction énergie associée. On distingue les énergies E_n associées aux diffusions D^n. Les diverses « constantes de diffusion » sont notées κ, λ et c_n.

—

Nous utiliserons le résultat suivant, extrait de [41].

Définition. *On dit que K possède des* suites de Følner évanescentes *relativement à μ s'il existe une suite (A_n) de boréliens non négligeables de X et une suite (ε_n) de nombres réels convergeant vers 0 telles que*

$$\mu(A_n) \to 0 \qquad \text{et} \qquad \mu(\partial_K A_n) \leqslant \varepsilon_n \mu(A_n).$$

Théorème 7. *Soit R une relation d'équivalence ergodique de type fini préservant une mesure de probabilité μ. Alors R possède un quotient moyennable si et seulement si chacun de ses graphages u.l.f. contient des suites de Følner évanescentes.*

3. Un lemme technique

Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ) et π une représentation de R sur un champ mesurable d'espaces hilbertiens H de base X.

Dans ce paragraphe nous étudions le problème de dispersion de masse des champs presque invariants de π.

Définition. *Soient une partie borélienne $K \subset R$ et un nombre réel strictement positif ε. On dit qu'un champ de vecteurs $\xi : X \to H$ (i.e. une section mesurable de H) est* (K, ε)-invariant *si*

$$||\pi(x, y)\xi_y - \xi_x|| \leqslant \varepsilon,$$

pour $\mathfrak{h}$-presque tout $(x, y) \in K$.

Lemme 8. *Soit $\mathfrak{h}_1$ une mesure de probabilité sur R équivalente à $\mathfrak{h}$. Soit $(K_n)_n$ une suite de parties boréliennes de R. Si $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$, il existe une suite extraite $K_{m_1}, K_{m_2}, \ldots$ telle que la suite $(K'_i)_{i \geqslant 1}$ définie par $K'_i = \cap_{m_j \geqslant m_i} K_{m_j}$ soit une approximation croissante de R (au sens où $R = \cup_i K'_i$ à un négligeable près). Si inversement $R = \cup K_n$ est une approximation croissante de R, alors $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$.*

Démonstration. Notons $A_n = R \backslash K_n$. Par hypothèse $\mathfrak{h}_1(A_n) \to 0$ et, quitte à extraire, on peut supposer $\sum \mathfrak{h}_1(A_n) < \infty$. Le lemme de Borel-Cantelli montre que $\mathfrak{h}_1(\overline{\lim}\, A_n) = 0$, où $\overline{\lim}\, A_n = \cap_i \cup_{n \geqslant i} A_n$. Ainsi, en notant $K'_i = \cap_{n \geqslant i} K_n$, on obtient $\mathfrak{h}_1(K'_i) \to 1$, d'où le résultat.

Réciproquement considérons la suite de fonctions indicatrices $\chi_{K_n} \in L^\infty(R)$. Par hypothèse elle converge presque sûrement vers la fonction constante égale à 1 sur R, et la convergence a lieu dans $L^1(R, \mathfrak{h}_1)$ également. ∎

Définition. *On dit qu'une suite $\xi^n : X \to H$ de champs de vecteurs (K_n, ε_n)-invariants est* presque invariante *si ϵ_n converge vers 0 et si $K_n \subset R$ est croissante et exhaustive.*

Le lemme précédent montre qu'une suite de champs (K_n, ε_n)-invariants telle que $\varepsilon_n \to 0$ et $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$ pour une mesure de probabilité $\mathfrak{h}_1$ sur R équivalente à $\mathfrak{h}$, est, quitte à extraire, une suite presque invariante au sens ci-dessus.

Exemple. Il est facile de voir que toute représentation contient des suites presque invariantes $\xi^n : X \to H$ de carré intégrable et de norme $||\xi^n||_2 = 1$ (en choisissant par exemple $\xi^n = \chi_{A_n} \cdot \xi / \sqrt{\mu(A_n)}$ où $\mu(A_n) \to 0$ et ξ est un champ unitaire fixe).

Le résultat qui suit montre que toute représentation contenant des suites presque invariantes *dominées* de norme 1 contient des sections presque invariantes du fibré en sphères unités de H.

Lemme 9. *Soit R une relation d'équivalence mesurée ergodique sur un espace de probabilité (X,μ). On fixe une représentation π de R sur un champ hilbertien H de base X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i. [48] Pour tout groupe dénombrable Γ et toute action α de Γ telle que $R = R_\alpha$, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie K de Γ, il existe $\xi \in L^\infty(X,H)$ tel que $||\xi||_\infty = 1$ et

$$\mu\{|\langle\pi(x,\alpha(\gamma)x)\xi_{\gamma x}|\xi_x\rangle - 1| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \varepsilon$$

pour tout $\gamma \in K$.

ii. [37] Il existe une suite presque invariante $\xi^n : X \to H$ de champs de vecteurs tels que $||\xi^n_x||_x = 1$ pour presque tout $x \in X$.

iii. [L^∞] Il existe une suite presque invariante $\xi^n \in L^\infty(X,H)$ de champs de vecteurs et deux constantes $\eta \geqslant 1$ et $\delta > 0$ telles que pour tout n

$$\mu\{\frac{1}{\eta} \leqslant ||\xi^n_x||_x \leqslant \eta\} \geqslant \delta.$$

iv. [L^p, $1 \leqslant p < \infty$] Il existe une suite presque invariante $\xi^n \in L^p(X,H)$ de champs de vecteurs tels que $||\xi^n||_p = 1$ et une fonction positive $g \in L^p(X)$ telle que $||\xi^n_x||_x \leqslant g(x)$.

La fin du paragraphe est consacrée à la démonstration de ce résultat.

Considérons une relation d'équivalence ergodique R sur un espace de probabilité (X,μ) et π une représentation de R sur un champ hilbertien H de base X.

Preuve de $i \Longrightarrow ii$. Soit Γ un groupe discret et $R = R_\alpha$ la relation d'équivalence associée à une action α de Γ sur (X,μ). Par hypothèse, étant donnée une exhaustion K_n de Γ par parties finies, il existe une suite ξ^n telle que $||\xi^n||_\infty = 1$, et une suite A_n de boréliens telle que $\mu(A_n) \geqslant 1 - 1/n$, vérifiant,

$$|\langle\pi(x,\gamma x)\xi^n_{\gamma x}|\xi^n_x\rangle - 1| \leqslant 1/n$$

presque sûrement sur A_n (pour tout $\gamma \in K_n$). En particulier $||\xi^n_x||^2 \geqslant 1 - 1/n$ sur A_n ($e \in K_n$ pour n suffisamment grand). Soit $F_n = \mathrm{graph}(K_n) \cap A_n \times A_n$. On pose $\tilde{\xi^n_x} = \xi^n_x/||\xi^n_x||$ sur A_n et $\eta_x \in H_x$ quelconque de norme 1 ailleurs (mesurable). Alors $\mathfrak{h}_1(F_n) \to 1$ et, pour $(x,y) \in F_n$, on a

$$\begin{aligned}||\pi(x,y)\tilde{\xi^n_y} - \tilde{\xi^n_x}||^2 &\leqslant 2|1 - \frac{\langle\pi(x,y)\xi^n_y|\xi^n_x\rangle}{||\xi^n_x||||\xi^n_y||}| \\ &\leqslant 2\cdot\frac{1/n + 1/n}{1 - 1/n} \to 0.\end{aligned}$$

Preuve de $ii \Longrightarrow i$. Soit Γ un groupe discret et $R = R_\alpha$ la relation d'équivalence associée à une action α de Γ sur (X,μ). Soit K une partie finie de Γ et $\varepsilon > 0$; comme

$\mathfrak{h}_1(\mathrm{graph}(K)\backslash F_n) \to 0$, l'ensemble

$$A_n = \{x \in X,\ \exists \gamma \in K,\ (x, \gamma x) \notin F_n\} \to_\mu 0.$$

En effet $(pr_h)_*(\mathfrak{h}_{1|\mathrm{graph}(\gamma)})$ et μ sont équivalentes pour tout $\gamma \in \Gamma$, où $pr_h(x,y) = x$ est la projection horizontale. Par hypothèse sur $X\backslash A_n$, $||\pi(x,\gamma x)\xi^n_{\gamma x} - \xi^n_x|| \leqslant \varepsilon_n$ pour tout $\gamma \in K$. Notons $z_n(x,y) = \langle \pi(x,y)\xi^n_y | \xi^n_x\rangle \in \mathbf{C}$, de sorte que

$$\mu\{x \in X,\ 2 - 2\,\mathrm{Re}\, z_n(x,\gamma x) \geqslant \varepsilon_n\} \leqslant \mu(A_n) \to 0,$$

pour tout $\gamma \in K$. Comme $|z_n(x,y)| \leqslant 1$ presque sûrement sur R, on a donc

$$\mu\{x \in X, |1 - z_n(x,\gamma x)| \geqslant \varepsilon/2\} \to 0,$$

d'où le résultat.

Preuve de iii $\Longrightarrow$ ii. Fixons deux constantes $\eta \geqslant 1$ et $\delta > 0$ et supposons qu'il existe une suite $\xi^n \in L^\infty(X,H)$ de champs de vecteurs mesurables presque invariants telle que

$$\mu\{\frac{1}{\eta} \leqslant ||\xi^n_x||_x \leqslant \eta\} \geqslant \delta.$$

Considérons l'espace $\mathcal{E}$ des suites de couples $(\xi^n, \alpha_n)_n$ formés d'un champ de vecteurs et d'un nombre réel positif telles que :

- il existe une suite K_n de R et une suite décroissante ε_n de nombre réels positifs telles que ξ^n soit (K_n, ε_n)-invariante, avec $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$ et $\varepsilon_n \to 0$.
- α_n soit une suite décroissante de nombres réels tendant vers 0.
- $\mu(A_n)$ soit une suite convergente, où

$$A_n = \{\frac{1}{\eta} - \alpha_n \leqslant ||\xi^n_x||_x \leqslant \eta + \alpha_n\}.$$

On considère l'application $\mathcal{E} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\Psi : (\xi^n, \alpha_n)_n \mapsto \lim \mu(A_n),$$

et on note $\overline{\delta} = \sup \Psi(\mathcal{E}) \leqslant 1$. Par hypothèse $\overline{\delta} > 0$. Montrons que $\overline{\delta} = 1$.

Il existe par procédé diagonal un élément de $\mathcal{E}$, disons $(\xi^n, \alpha_n)_n$, tel que $\mu(A_n) \to \overline{\delta}$. Notons $C_n = ((A_n \times X \cup X \times A_n)\backslash A_n \times A_n) \cap R$.

Supposons qu'il existe une suite extraite $(\xi^{n_i}, \alpha_{n_i})$ telle que $\mathfrak{h}_1(C_{n_i}) \geqslant c$ pour un nombre réel $c > 0$. Alors il existe quitte à extraire un nombre $c' > 0$ tel que $\mu(pr_h(C_{n_i} \cap X \times A_{n_i})) \geqslant c'$ ou $\mu(pr_v(C_{n_i} \cap A_{n_i} \times X)) \geqslant c'$. Rappelons que $pr_h : R \to X$ est la projection horizontale définie par $pr_h(x,y) = x$ (et $pr_v(x,y) = y$ la projection verticale).

Notons que (quitte à extraire une seconde fois) la suite $\sigma = (\xi^{n_i}, \alpha_{n_i} + \varepsilon_{n_i})_{n_i}$ appartient à $\mathcal{E}$. Or

$$A_{n_i}^{\sigma} = \{\frac{1}{\eta} - \alpha_{n_i} - \varepsilon_{n_i} \leqslant ||\xi_x^{n_i}||_x \leqslant \eta + \alpha_{n_i} + \varepsilon_{n_i}\}$$

contient $pr_h((C_{n_i} \cap X \times A_{n_i}) \cap K_{n_i})$ et $pr_v((C_{n_i} \cap A_{n_i} \times X) \cap K_{n_i})$. Comme $\mathfrak{h}_1(K_{n_i}) \to 1$, on a $\mathfrak{h}_1(C_{n_i} \backslash K_{n_i}) \to 0$ donc $\mu(pr_h((C_{n_i} \cap X \times A_{n_i}) \cap K_{n_i})) \geqslant c'/2$ ou $\mu(pr_v((C_{n_i} \cap A_{n_i} \times X) \cap K_{n_i})) \geqslant c'/2$ pour n_i grand. Ceci contredit la maximalité de $\overline{\delta}$.

Par suite $\mathfrak{h}_1(C_n) \to 0$.

Soit $\varphi \in [R]$ un isomorphisme de R. Notons que $(pr_h)_*(\mathfrak{h}_{1|\mathrm{graph}(\varphi^{-1})}) \sim \mu$. Donc

$$\mu(\varphi A_n \backslash A_n) = \mu\{x \in \varphi A_n \mid x \notin A_n\} \sim \mathfrak{h}_1(\{(\varphi x, x),\, x \in A_n\} \cap C_n) \leqslant \mathfrak{h}_1(C_n) \to 0.$$

(On dit que (A_n) est asymptotiquement invariante.) Il en résulte que toute limite faible de la suite $\chi_{A_n} \in L^\infty(X)$ est constante (par ergodicité), et on a donc

$$\lim \mu(A_n \cap C) - \mu(A_n)\mu(C) = 0$$

pour tout borélien $C \subset X$ ([14, 31, page 95]). Par suite pour tout n on a

$$\lim_m \mu(A_n \cap A_m) = \mu(A_n)\overline{\delta} > 0.$$

Supposons $\overline{\delta} < 1$ et considérons, étant donné n, un entier $m = m(n) > n$ suffisament grand pour que

$$|\mu(A_n \cap A_m) - \mu(A_n)\overline{\delta}| \leqslant \frac{1}{n}$$

et

$$|\mathfrak{h}_1(K_n \cap K_m) - \mathfrak{h}_1(K_n)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Construisons alors une suite $\sigma \in \mathcal{E}$ de la façon suivante. Pour tout n on pose $\xi_\sigma^n = \xi^n$ sur A_n et $\xi_\sigma^n = \xi^{m(n)}$ sur $A_{m(n)} \backslash A_n$ (et 0 ailleurs). Alors $\sigma = (\xi_\sigma^n, \alpha_n) \in \mathcal{E}$. En effet il suffit de choisir $\varepsilon_n^\sigma = \varepsilon_n$ et $K_n^\sigma = K_n \cap K_{m(n)} \backslash C_n \cup C_{m(n)}$. Par ailleurs $\lim \mu(A_n^\sigma) = 2\overline{\delta} - \overline{\delta}^2 > \overline{\delta}$, d'où une contradiction.

Finalement $\overline{\delta} = 1$. Considérons alors la suite $\tilde{\xi}_n$ définie par $\tilde{\xi}_x^n = \xi_x^n/||\xi_x^n||$ sur A_n et $\tilde{\xi}_x \in H_x$ quelconque de norme 1 ailleurs (mesurable). Notons $\tilde{K}_n = K_n \cap (A_n \times A_n)$. Alors $\mathfrak{h}_1(\tilde{K}_n) \to 1$, et $\tilde{\xi}^n$ est $(\tilde{K}_n, \eta \cdot \varepsilon_n)$-invariant.

Preuve de iv $\Longrightarrow$ *iii*. Soit $p \in [1, \infty[$. Soit $\eta \geqslant 3$ suffisament grand pour que la norme de g^p restreinte à $A = \{g > \eta\}$ soit $\leqslant 1/2$. Alors, en notant $A_n = \{\frac{1}{\eta} \leqslant ||\xi_x^n||_x \leqslant \eta\}$, on a

$$1 = ||\xi^n||_p^p = \int_{A_n} ||\xi^n||^p + \int_{X\backslash A_n} ||\xi^n||^p \leqslant \eta^p \mu(A_n) + 1/2 + \frac{1}{\eta^p}\mu(X\backslash A_n)$$

donc

$$\mu(A_n) \geqslant \frac{\eta^p - 2}{2\eta^{2p} - 2}.$$

Considérons alors une suite c_n de nombres réels $\geqslant \eta$ de sorte que $\mu(C_n) \to 1$ où $C_n = \{||\xi_n|| \leqslant c_n\}$. Soit $\tilde{\xi^n} = \xi^n_{|C_n}$ et $\tilde{K}_n = K_n \cap C_n \times C_n$. Alors $\tilde{\xi}_n \in L^\infty$ est une suite $(\tilde{K}_n, \varepsilon_n)$-invariante satisfaisant aux hypothèses de *iii*.

Enfin *ii* $\Longrightarrow$ *iv* est trivial.

Remarque. Notons que si R n'est pas ergodique, *ii* et *iii* ne sont pas équivalentes, comme le montre l'exemple élémentaire d'une relation d'équivalence obtenue comme réunion disjointe de deux relations ergodiques, dont l'une est munie d'une représentation sans champ presque invariant et l'autre d'une représentation ayant des champs presque invariants unitaires au sens du lemme.

Le lemme suivant réunit quelques faits généraux utilisés au cours de la démonstration ci-dessus.

Lemme 10. *Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ) et $\mathfrak{h}$ la mesure de décompte horizontal sur R associée à μ. Soit Γ un groupe dénombrable et α une action de Γ telle que $R = R_\alpha$.*

- *Si $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}'_1$ sont deux mesures de probabilité sur R équivalentes à $\mathfrak{h}$, alors*

$$\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1 \Longleftrightarrow \mathfrak{h}'_1(K_n) \to 1,$$

  où (K_n) est une suite de parties boréliennes de R.
- *Soit (F_n) une suite croissante de parties de Γ. Soit $K_n = \alpha(F_n) \subset R$ la réunion des graphes des éléments de F_n. Alors (F_n) est une suite exhaustive de Γ si et seulement si $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$.*
- *Soient (A_n), (B_n) deux suites de parties boréliennes de X. Alors*

$$\mu(A_n) \to 1 \text{ et } \mu(B_n) \to 1 \Longleftrightarrow \mathfrak{h}_1(A_n \times B_n \cap R) \to 1.$$

- *Soit $\mathfrak{h}_1$ une mesure de probabilité sur R équivalente à $\mathfrak{h}$. Soit $F \subset R$ une partie borélienne telle que $\mathfrak{h}(F) < \infty$. On considère une suite $F_n \subset R$ de parties boréliennes telle que $\mathfrak{h}_1(F_n) \to 1$. Alors $\mathfrak{h}(F \backslash F_n) \to 0$.*

Démonstration. Rappelons que si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont deux mesures finies telles que $\mathfrak{h} \ll \mathfrak{h}'$ sur un espace borélien standard, alors $\mathfrak{h}'(A_n) \to 0 \Longrightarrow \mathfrak{h}(A_n) \to 0$ pour toute suite de boréliens A_n. Ceci démontre la première affirmation. La seconde est triviale. Pour la troisième, notons que $(p_v)_*(\mathfrak{h}_1)$ et μ sont équivalentes, donc $\mu(A_n) \to 1 \Longleftrightarrow \mathfrak{h}_1(A_n \times X \cap R) \to 1$. Or $\mathfrak{h}_1(A_n \times X \cap X \times B_n \cap R) \to 1 \Longleftrightarrow \mathfrak{h}_1(A_n \times X \cap R) \to 1$ et $\mathfrak{h}_1(X \times B_n \cap R) \to 1$. Pour la dernière affirmation on a $\mathfrak{h}_1(R \backslash F_n) \to 0$, donc $\mathfrak{h}_1(F \backslash F_n) \to 0$. Comme $\mathfrak{h}_{|F} \ll \mathfrak{h}_1$, on a également $\mathfrak{h}(F \backslash F_n) \to 0$. ∎

Terminons enfin par une variation, pour références ultérieures, sur le début de l'implication $iii \Longrightarrow ii$ du lemme 9.

Lemme 11. *Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ). On fixe une représentation π de R sur un champ hilbertien H de base X. Étant donnés un champ mesurable $C = (C_x)_{x \in X}$ de parties mesurables de H et un nombre réel positif α, on note C_α le champ mesurable qui à $x \in X$ associe le α-voisinage $(C_x)_\alpha$ de C_x dans H_x.*

Soient $(\xi^n)_{n \geqslant 0}$ une suite presque invariante de champs de vecteurs et $(C^n)_{n \geqslant 0}$ une suite de champs mesurables et invariants (i.e. stable par π) de parties mesurables de H. Il existe une suite extraite $(\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \ldots)$ de (ξ_n) et une suite décroissante $(\alpha_{m_1}, \alpha_{m_2}, \ldots)$ de nombres réels convergeant vers 0, de sorte que la suite (A_{m_i}) définie par

$$A_{m_i} = \{\xi_x^{m_i} \in (C_x^{m_i})_{\alpha_{m_i}}\}$$

soit asymptotiquement invariante.

Démonstration. Reprenons la demonstration du lemme 9. Considérons l'espace $\mathcal{E}$ des suites de couples $(\xi^m, \alpha_m)_m$ formés d'un champ de vecteurs et d'un nombre réel positif telles que :

- ξ^m est une suite extraite de la suite presque invariante ξ^n,
- α_m est une suite décroissante de nombres réels tendant vers 0,
- $\mu(A_m)$ soit une suite convergente, où

$$A_m = \{\xi_x^m \in (C_x^m)_{\alpha_m}\}.$$

On considère encore l'application $\Psi : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ définie par $(\xi^m, \alpha_m)_m \mapsto \lim \mu(A_m)$, et on note $\overline{\delta} = \sup \Psi(\mathcal{E}) \leqslant 1$. Si $\overline{\delta} = 0$ ou $\overline{\delta} = 1$ le résultat est clair. Sinon il existe par procédé diagonal un élément de $\mathcal{E}$, disons $(\xi^m, \alpha_m)_m$, tel que $\mu(A_m) \to \overline{\delta} \in]0,1[$. Notons $E_n = ((A_n \times X \cup X \times A_n) \backslash A_n \times A_n) \cap R$. On montre de même que dans le lemme 9 en considérant la suite $\sigma = (\xi^m, \alpha_m + \varepsilon_m)_m$ que s'il existe une suite extraite $(\xi^{m_i}, \alpha_{m_i})$ de $(\xi^m, \alpha_m)_m$ telle que $\mathfrak{h}_1(E_{m_i}) \geqslant c$ pour un nombre réel $c > 0$ alors $\overline{\lim}\ \mu(A_{m_i}^\sigma) > \overline{\delta}$ où

$$A_{m_i}^\sigma = \{\xi_x^{m_i} \in (C_x^{m_i})_{\alpha_{m_i} + \varepsilon_{m_i}}\}.$$

Par suite $\mathfrak{h}_1(E_m) \to 0$ et il en résulte que A_m est asymptotiquement invariante. ∎

4. La propriété T de Kazhdan

La propriété T pour les groupes localement compacts a été introduite par Kazhdan [32] en 1967. Nous ne ferons ici que rappeler la définition donnée par Kazhdan, renvoyant à [28, 47, 7] pour des détails. Nous adaptons ensuite cette définition aux espaces mesurés singuliers.

1. Le cas des groupes. Soit Γ un groupe localement compact.

On dit qu'une représentation unitaire π de Γ sur un espace de Hilbert H *possède presque des vecteurs invariants* s'il existe une suite ξ_n de vecteurs de norme 1, une suite exhaustive croissante S_n de parties compactes de Γ, et une suite ε_n de nombres réels tendant vers 0, telles que

$$||\pi(s)\xi_n - \xi_n|| \leqslant \varepsilon_n, \quad \forall s \in S_n.$$

On dit qu'un vecteur ξ est invariant si $\pi(s)\xi = \xi$ pour tout $s \in \Gamma$.

Définition ([32]). *On dit que* Γ a la propriété T de Kazhdan *si toute représentation fortement continue ayant presque des vecteurs invariants a des vecteurs invariants non nuls.*

Exemples de groupes de Kazhdan. Kazhdan [32] a montré que $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ possède la propriété T, de même que les réseaux d'un groupe de Lie simple de rang réel supérieur à 2. Les réseaux de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ ne l'ont pas alors que les réseaux de $\mathrm{Sp}(1,n)$ l'ont [28, 25].

De plus, la propriété T est générique dans « l'adhérence » de groupes hyperboliques, cf. [10], ainsi que pour certains modèles statistiques de groupes aléatoires, cf. [50, 25].

Enfin rappelons qu'il existe un critère géométrique local, portant sur la « courbure p-adique » [23] d'un polyèdre fini, qui permet d'en déduire la propriété T pour son groupe fondamental. Voici quelques références à ce propos : [23, 8, 49, 4, 9, 25, 24, 50] — dont l'article original de Garland et l'énoncé bien connu de Żuk concernant spécifiquement la propriété T (que nous avons rappelé en introduction). Notons que ce critère s'étend aux actions propres cocompactes [46], et s'applique ainsi à $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Q}_p)$ dont le classifiant propre, son immeuble de Bruhat-Tits, est l'exemple canonique de polyèdre satisfaisant à ce critère. (cf. également §8.)

2. Le cas des relations d'équivalence. L'existence de représentations hilbertiennes intéressantes pour les relations d'équivalence mesurées s'accompagne d'une notion de propriété T, qui fut introduite par Moore et Zimmer au début des années 1980 (cf. [48, 37] et §3.). La définition est la suivante.

Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ). On dit qu'une représentation π de R sur un champ hilbertien H *contient presque des champs invariants* s'il existe une suite ξ_n de champs de vecteurs tels que $||\xi_x^n|| = 1$ pour presque tout $x \in X$, une suite exhaustive croissante (K_n) de R, et une suite (ε_n) de nombres réels tendant vers 0, telles que

$$||\pi(x,y)\xi_y^n - \xi_x^n|| \leqslant \varepsilon_n, \quad \forall (x,y) \in K_n.$$

On dit qu'un champ de vecteurs ξ est invariant si $\pi(x,y)\xi_y = \xi_x$ pour presque tout $(x,y) \in R$.

Définition. *On dit que R* possède la propriété T de Kazhdan *si toute représentation unitaire ayant presque des champs invariants possède un champ invariant ξ tel que $||\xi_x|| = 1$ pour presque tout $x \in X$.*

Remarquons que cette propriété ne dépend que de la classe de μ.

Définition. *On dit qu'un espace singulier Q possède la propriété T si toutes ses désingularisations discrètes la possèdent.*

Proposition 12. *La propriété T de Kazhdan est un invariant d'isomorphisme stable de relations d'équivalence mesurées.*

Démonstration. Soit R une relation d'équivalence mesurée sur X et S la relation obtenue par restriction à un borélien Y de X rencontrant presque toutes les orbites de R.

Supposons que S possède la propriété T. Soit π une représentation de R sur H et ξ^n une suite de champs unitaires presque invariants. On note H_Y la restriction de H à Y et π_S la restriction de π à S (agissant sur H_Y). Alors $(\xi_n)_{|Y}$ est une suite de champs unitaires π_S-presque invariant. Comme S a la propriété T, il existe un champ $\xi : Y \to H_Y$ unitaire invariant par π_S. Définissons $\overline{\xi} : X \to H$ par

$$\overline{\xi}_x = \pi(x, y)\xi_y$$

pour $(x, y) \in R$ tel que $x \notin Y$ et $y \in Y$. Comme ξ est π_S-invariant, $\overline{\xi}$ est défini sans ambiguité. Il est π-invariant par définition.

Réciproquement soit π une représentation de S sur un champ H de base Y. Fixons une partition borélienne $Y_1 = Y, Y_2, \ldots$ de X et une famille $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ d'isomorphismes partiels de R surjectifs $\varphi_i : Y \twoheadrightarrow Y_i$. Notons $\varphi_1 : Y \to Y$ l'identité de Y. On définit un champ hilbertien $\overline{H}$ de base X en associant à tout $y \in Y_i$ l'espace de Hilbert $H_{\varphi_i^{-1}y}$ et l'expression

$$\overline{\pi}(x, y) = \pi(\varphi_i^{-1}x, \varphi_j^{-1}y),$$

où $x \in Y_i$ et $y \in Y_j$, définit une représentation de R sur $\overline{H}$. Une section ξ de H s'étend à $\overline{H}$ en posant $\overline{\xi}_y = \xi_{\varphi_i^{-1}y}$, $y \in Y_i$. Soit ξ^n une suite (K_n, ε_n)-invariante de champs unitaires sur Y, où (K_n) est une suite croissante exhaustive de S et $\varepsilon_n \to 0$. On obtient en notant

$$\overline{K}_n = \amalg_{i,j}\varphi_{i,j}(K_n),$$

où $\varphi_{i,j}(x, y) = (\varphi_i x, \varphi_j y)$, une suite croissante exhaustive de R. De plus $\overline{\xi}^n$ est une suite $(\overline{K}_n, \varepsilon_n)$-invariante pour $\overline{\pi}$. Si alors R possède la propriété T, il existe un champ invariant unitaire ξ, et sa restriction à Y est un champ unitaire π-invariant. ∎

Ainsi la propriété T est un exemple de « paramètre de quasi-périodicité », suivant le point de vue de [41].

3. Une caractérisation des espaces de Kazhdan. Les résultats du paragraphe 3. (Lemme 9) montrent qu'il est possible pour les relations ergodiques de caractériser la propriété T en termes de champs presque invariants dominés. Dans ce paragraphe nous énonçons explicitement ce résultat, en l'étendant aux relations d'équivalence non ergodiques. (Voir également la remarque suivant le lemme 9.)

Soit H un champ mesurable d'espace de Hilbert sur un espace de probabilité (X, μ). On dit qu'un champ de vecteurs sur X est *à support total* si son support $\{\xi_x \neq 0\}$ est de mesure 1, et qu'il est *non trivial* si son support est de mesure non nulle.

Théorème 13. *Une relation d'équivalence mesurée possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si chacune de ses représentations hilbertiennes qui possède une suite presque invariante de champs de vecteurs, non triviale au sens du lemme 9, iii ou iv, contient des champs invariants non triviaux.*

Démonstration. Supposons d'abord que la conclusion soit vraie et montrons que R possède la propriété T. Soit π une représentation contenant une suite ξ^n presque invariante, non triviale au sens *ii*. Elle l'est donc au sens *iii* (ou *iv*) et il existe un champ invariant non trivial ξ. Son support, disons Ω, est invariant (et non négligeable). En considérant la représentation coincidant avec π sur $X \backslash \Omega$ et indentiquement nulle sur Ω, on obtient une nouvelle représentation de R contenant presque des champs invariants au sens *iii* (ou *iv*). Il existe donc un champ invariant qui prolonge ξ à un borélien non négligeable de $X \backslash \Omega$; à l'aide du lemme de Zorn, on construit ainsi facilement un champ invariant pour π à support total.

Réciproquement supposons que R ait la propriété T. Reprenons la démonstration *iii* $\Longrightarrow$ *ii* du lemme 9. Avec des notations identiques, on obtient pour $\eta \geqslant 1$ une suite asymptotiquement invariante

$$A_n = \{\frac{1}{\eta} - \alpha_n \leqslant ||\xi^n|| \leqslant \eta + \alpha_n\}$$

associée à une suite ξ^n presque invariante non triviale au sens *iii*, telle que

$$\mu(A_n) \rightarrow_n \overline{\delta} > 0.$$

Soit

$$(R, \mu, \mathfrak{h}) = \int_Z (R_z, \mu_z, \mathfrak{h}^z) d\mu_Z(z)$$

la désintégration de R en composante ergodique [17]. Ainsi pour μ_Z-presque tout $z \in Z$, R_z est une relation d'équivalence μ_z-ergodique sur un espace borélien standard Y, et R est isomorphe à la relation $(z, y) \sim (z', y')$ si et seulement si $z = z'$ et yR_zy' sur $Z \times Y$. Par ergodicité, toute limite faible de la suite $\chi_{A_n} \in L^\infty(X)$ est une fonction ne dépendant que de $z \in Z$. Considérons une telle fonction, disons $\tilde{\delta} : X \rightarrow [0, 1]$, et supposons quitte à extraire que χ_{A_n} converge faiblement vers $\tilde{\delta}$. Notons $\Omega = \{z \in Z,\ \tilde{\delta}_z \neq 0\}$ (non négligeable) et $\tilde{A}_n = A_n \cap \Omega \times Y$ (ainsi $\mu(A_n \backslash \tilde{A}_n) \to 0$). On a, pour tout n fixé,

$$\lim_m \mu(\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m) = \int_{\tilde{A}_n} \tilde{\delta}_z d\mu_Z(z).$$

Supposons qu'il existe un borélien $\Omega' \subset \Omega$ non trivial sur lequel $\tilde{\delta}_z < 1$ et considérons, étant donné n, un entier $m = m(n) > n$ suffisament grand pour que

$$|\mu(\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m) - \int_{\tilde{A}_n} \tilde{\delta}_z d\mu_Z(z)| \leqslant \frac{1}{n}$$

et

$$|\mathfrak{h}_1(K_n \cap K_m) - \mathfrak{h}_1(K_n)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Construisons alors une suite $\sigma \in \mathcal{E}$ de la façon suivante. Étant donné n on pose, pour tout $z \notin \Omega$, $\xi_\sigma^n(z, y) = 0$, pour tout $z \in \Omega \backslash \Omega'$, $\xi_\sigma^n(z) = \xi_z^n$, et pour tout $z \in \Omega'$, $\xi_\sigma^n(z) = \xi_z^n$ sur $\tilde{A}_n^z$ et $\xi_\sigma^n(z) = \xi_z^{m(n)}$ sur $\tilde{A}_{m(n)}^z \backslash \tilde{A}_n^z$ (et 0 sur $Y \backslash \tilde{A}_n^z \cup \tilde{A}_{m(n)}^z$). Alors $\sigma = (\xi_\sigma^n, \alpha_n) \in \mathcal{E}$. En effet il suffit de choisir $\varepsilon_n^\sigma = \varepsilon_n$ et $K_n^\sigma = K_n \cap K_{m(n)} \backslash C_n \cup C_{m(n)}$. Par ailleurs

$$\lim \mu(A_n^\sigma) = 2\overline{\delta} - \int_\Omega \tilde{\delta}_z^2 d\mu_Z(z) > \overline{\delta}$$

d'où une contradiction. Par suite $\tilde{\delta} = 1$ presque surement sur Ω.

Considérons alors la représentation $\tilde{\pi}$ de R coincidant avec π sur $\Omega \times Y$ et égale à la représentation trivial sur le champ constant $\mathbf{C}$ de base $Z \backslash \Omega \times Y \subset X$. Soit $\tilde{\xi}_n$ la suite définie par $\tilde{\xi}_x^i = 1$ si $x \in Z \backslash \Omega \times Y$, $\tilde{\xi}_x^i = \xi_x^i / ||\xi_x^i||$ sur $\tilde{A}_n \subset \Omega \times Y$ et $\eta_x \in H_x$ quelconque de norme 1 ailleurs (mesurable). Notons $\tilde{K}_n = (K_n \cap (\tilde{A}_n \times \tilde{A}_n)) \amalg R_{|X \backslash \Omega}$. Alors $\mathfrak{h}_1(\tilde{K}_n) \to 1$, et $\tilde{\xi}^i$ est un champ $(\tilde{K}_n, \eta \cdot \varepsilon_n)$-invariant au sens *ii* pour $\tilde{\pi}$. Par suite $\tilde{\pi}$ admet un champ invariant à support total, et ce champ restreint à $\Omega \times Y$ est invariant non trivial pour π. ∎

5. Quelques propriétés des espaces de Kazhdan

1. Existence d'une mesure invariante. Les espaces singuliers ayant la propriété T de Kazhdan sont, comme l'a montré Zimmer, de type II. Plus généralement, le premier groupe de cohomologie $H^1(R, \mathbf{R})$ à coefficients réels d'une relation d'équivalence ayant la propriété T est trivial (cf. [37, 48]). (On renvoie ici à [30] et [2].)

Proposition 14 (Zimmer). *Soit R une relation d'équivalence sur un espace de probabilité (X, μ) ayant la propriété T de Kazhdan. Il existe une mesure σ-finie sur X équivalente à μ et invariante par R.*

Corollaire 15. *Un espace singulier ayant la propriété T est de type* II.

2. Approximations. L'un des résultats fondamentaux de l'article de Kazhdan [32] est le fait que tout groupe dénombrable ayant la propriété T est de type fini. (Ainsi les réseaux d'un groupe de Lie de rang supérieur sont de type fini.) Cet énoncé a été adapté par Moore [37] aux relations d'équivalence mesurées (modulo de légères imperfections que nous rectifions ci-dessous).

Proposition 16. *Toute approximation croissante d'une relation d'équivalence R ayant la propriété T est, à isomorphisme stable près, constante à partir d'un certain rang.*

Plus précisément, si $R_n \subset R$ est une suite croissante et exhaustive de sous-relations de R, alors *il existe un entier N et un borélien R_N-invariant non trivial sur lequel R et R_N coïncident.*

Démonstration. Soient R une relation d'équivalence ayant la propriété T et R_n une approximation de R au sens ci-dessus. Considérons pour tout $x \in X$ l'espace de Hilbert H_x^n des fonctions de carré sommable définies sur les R_n-classes de l'orbite $R.x$ (i.e. les fonctions $\xi : R^x \to \mathbf{C}$ telles que $\xi(x,y) = \xi(x,z)$ si $(y,z) \in R_n$ et $\sum_{\overline{(y,z)} \in R^x/R_n^x} |\xi(y,z)|^2 < \infty$) et notons H^n le champ mesurable associé aux espaces H_x^n. L'action régulière de R sur elle-même qui permute les fibres horizontales $(y,x)(x,z) = (y,z)$ induit une représentation π_n de R sur H^n. Le champ $\chi_n : x \mapsto \mathbf{1}_{R_n^x} \in H_n$ est invariant par $\pi_n(R_n)$.

Comme $\mathfrak{h}_1(R_n) \to 1$, la représentation $\pi = \oplus \pi_n$ possède une suite presque invariante de champs de vecteurs unitaires. Soit $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots)$ un champ invariant non trivial. L'une des composantes ξ^N est non nulle et comme π est diagonale, ξ^N est un champ non trivial invariant par $\pi_N(R)$, i.e. ξ^N définit mesurablement une fonction $\xi_{R.x}^N$ par R-orbite. Par construction cette fonction est constante sur les R_n-classes et, étant de carré intégrable, elle atteint son maximum sur un nombre fini de ces classes. De plus, (R_n) étant croissante, il existe un entier $k \geqslant N$ et un borélien R-invariant $\Omega \subset X$ non trivial sur lequel $\xi_{R.x}^N$ atteint son maximum sur exactement une R_k-classe de chaque R-classe de Ω. Alors R et R_k coïncident sur le borélien (non négligeable) constitué par ces R_k-classes. ■

Corollaire 17. *Toute approximation croissante de R par des relations ergodiques est constante à partir d'un certain rang.*

Ce corollaire avait également été obtenu par Sorin Popa [42].

De même qu'un groupe de Kazhdan est de type fini, on a le résultat suivant.

Corollaire 18. *Un espace singulier ergodique ayant la propriété T de Kazhdan est de type fini.*

Démonstration. Soit Q un espace singulier ergodique ayant la propriété T (qui est donc de type II). Soit $p : X \to Q$ une désingularisation discrète de type II_1 de Q et $R = R_p$ la relation associée. Il est bien connu qu'il existe un isomophisme ergodique $\varphi \in [R]$. Numérotons une partition de R en isomorphisme partiel et considérons l'ensemble borélien $K_n \subset R$ constituée de φ et des n premiers isomorphismes partiels de cette partition. Soit R_n la relation engendrée par K_n. Évidemment (R_n) exhauste R. Donc $R_n = R$ à négligeable près. ∎

Observons que tous les exemples connus de relations d'équivalence de type II_1 ayant la propriété T de Kazhdan ont coût 1 — où le coût d'une relation d'équivalence de type II_1 est par définition le « 1-covolume » de cette relation, i.e. l'infimum sur les graphages symétriques K de cette relation du volume $\frac{1}{2}\mathfrak{h}(K)$ des arêtes de ces graphages (cf [20]).

Remarque. Les relations arborables admettent des approximations non triviales, cf. [21, 22]. Par exemple, étant donné un arborage K d'une relation R, toute suite croissante $K_n \subset K$ non essentiellement constante et exhaustant K détermine une approximation non triviale de R. Notons que, la propriété T étant évidemment stable par quotient, une relation d'équivalence de Kazhdan ne possède pas de quotients arborables. (cf. également [1])

3. Ergodicité forte et familles de Levy. Nous avons déjà constaté dans [41] des liens étroits entre l'ergodicité forte et le phénomène de concentration de la mesure. Dans ce paragraphe nous caractérisons les espaces fortement ergodiques à l'aide de familles de Levy qui leurs sont naturellement associées.

Notre référence pour la concentration de la mesure au sens classique est la monographie récente de Ledoux [35].

Considérons d'abord la notion de famille de Levy en termes de fonctions 1-lipschitziennes. Soit (Y, d, μ) un espace métrique-mesuré, i.e. un espace métrique (Y, d) muni d'une mesure borélienne de probabilité μ. Étant donnée une fonction

$$f : Y \to \mathbf{R}$$

à valeurs réelles, on sera plus particulièrement intéressé par les *inégalités de concentration* de f autour d'une valeur $m \in \mathbf{R}$, de la forme

$$\mu\{|f - m| \leqslant \varepsilon\} \geqslant \delta(\varepsilon)$$

(où $\delta(\varepsilon) \to 1$ quand $\varepsilon \to \infty$).

Définition. *Soit* $((Y_n, y_n), d_n, \mu_n)_n$ *une suite d'espaces métriques-mesurés pointés, où* $y_n \in Y_n$ *est le point base de* Y_n. *On suppose que les premiers moments*

$$m_1((Y_n, y_n), d_n, \mu_n) = \int_{Y_n} d_n(y, y_n) d\mu_n(y) \leqslant C < \infty$$

sont unifomément finis ($C > 0$ *fixé). Nous dirons que* $((Y_n, y_n), d_n, \mu_n)$ *forme une* famille de Levy *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a,*

$$\inf_f \mu_n\{|f - m| \leqslant \varepsilon\} \to_n 1,$$

où l'infimum est pris sur les fonctions 1-lipschitziennes $f : Y_n \to \mathbf{R}$ *et* $m = \int_{Y_n} f d\mu_n$ *est la valeur moyenne de* f.

Dans la suite nous étudierons seulement le cas où $(Y_n, d_n) = (H, ||\cdot||)$ est un espace de Hilbert fixe, avec l'origine pour point base. On dira dans ce cas qu'une fonction $f : H \to \mathbf{R}$ *se concentre au voisinage d'une valeur* m lorsque

$$\mu_n\{|f - m| \leqslant \varepsilon\} \to_n 1$$

Théorème 19. *Soit* H *un espace de Hilbert. Soit* R *une relation d'équivalence ergodique sur un espace de probabilité* (X, μ). *Alors* R *est fortement ergodique si et seulement si pour toute suite presque invariante* $\xi^n : X \to H$ *pour la représentation triviale de* R *dans* H, *dominée par une fonction* $g \in L^1$, *la famille* $(H, ||\cdot||, \mu_n)$ *est une famille de Levy, où* $\mu_n = \xi^n_* \mu$ *est la poussée en avant de* μ *sur* H.

Démonstration. Supposons d'abord que R soit fortement ergodique et considérons une suite presque invariante dominée

$$\xi^n : X \to H.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Étant donné un entier n considérons une fonction 1-lipschitzienne $f_n : H \to \mathbf{R}$ telle que

$$\mu_n\{f_n - m_n > \varepsilon\} \geqslant \sup_f \mu_n\{f - \int f d\mu_n > \varepsilon\} - 1/n,$$

où $m_n = \int_H f_n d\mu_n$ (et $\mu_n = \xi^n_* \mu$) et montrons que $\mu_n\{f_n - m_n > \varepsilon\} \to 0$. Supposons qu'il existe une suite extraite de (f_n), encore notée (f_n), telle que

$$\mu_n\{f_n - m_n > \varepsilon\} \to \delta > 0.$$

Notons $C^n = \{f_n - m_n > \varepsilon\} \subset H$ et $A_n = \{\xi^n_x \in C^n\} \subset X$. Les champs constants $x \mapsto C^n$ sont bien sûr invariant pour la représentation triviale. D'après le lemme 11 il existe quitte à extraire une seconde fois une suite $\alpha = (\alpha_n)$ de nombres réels positifs convergeant vers 0, de sorte que

$$A_n^\alpha = \{\xi_x^n \in C_{\alpha_n}^n\}$$

soit asymptotiquement invariante, où $C_{\alpha_n}^n$ est le α_n-voisinage de C^n dans H. Comme R est fortement ergodique, cette suite est triviale, i.e.

$$\mu(A_n^\alpha) \to_n 0 \ \text{ ou } \ 1,$$

et donc

$$\mu(A_n^\alpha) \to_n 1.$$

On a alors

$$\begin{aligned} m_n = \int_H f_n d\mu_n &= \int_{A_n^\alpha} f_n \xi^n d\mu + \int_{X \setminus A_n^\alpha} f_n \xi^n d\mu \\ &> \mu(A_n^\alpha)(m_n + \varepsilon - \alpha_n) - |\int_{X \setminus A_n^\alpha} f_n \xi^n d\mu| \\ &\geqslant \mu(A_n^\alpha)(m_n + \varepsilon - \alpha_n) - \int_{X \setminus A_n^\alpha} g d\mu - \mu(X \setminus A_n^\alpha)|f_n(0)|, \\ &\geqslant \mu(A_n^\alpha)(m_n + \varepsilon - \alpha_n) - \int_{X \setminus A_n^\alpha} g d\mu - \mu(X \setminus A_n^\alpha)(|m_n| + ||g||_1), \end{aligned}$$

où les inégalités utilisent le fait que f_n est 1-lipschitz et la définition de A_n^α. Or $|m_n|$ est par définition borné par $||g||_1$, d'où une contradiction pour n grand. En remplaçant f_n par $-f_n$ on a finalement,

$$\sup_f \mu_n\{|f - \int f d\mu_n| > \varepsilon\} \to 0,$$

d'où le résultat.

Réciproquement supposons que R ne soit pas fortement ergodique et construisons une suite asymptotiquement invariante ξ^n telle que la famille $(H, || \cdot ||, \mu_n)$ associée ne soit pas une famille de Levy. Soit (A_n) une suite asymptotiquement invariante non triviale pour R. Soit (e_n) une suite dense de la sphère unité de H. (Rappelons que par convention H est séparable.) Posons

$$\xi^n = \chi_{A_n} \cdot e_n - \mu(A_n) e_n,$$

où χ_{A_n} est la fonction caractéristique de A_n. On vérifie immédiatement que (ξ^n) est une suite presque invariante et dominée (par la fonction constante 1). Soit $\eta \in H$ un vecteur unité. Considérons la fonction (1-lipschitz)

$$\xi \mapsto |\langle \xi \mid \eta \rangle|.$$

Si $(H, ||\cdot||, \mu_n)$ était une famille de Levy on aurait en particulier pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\{|\langle \xi_x^n \mid \eta\rangle| \leqslant \varepsilon\} \to 1.$$

Considérons une suite extraite de (ξ^n) (toujours notée (ξ^n)) telle que pour la suite (e_n) associée on ait,

$$|\langle e_n \mid \eta\rangle| \to 1.$$

On a

$$|\langle \xi_x^n \mid \eta\rangle| = |\chi_{A_n} - \mu(A_n)| \cdot |\langle e_n \mid \eta\rangle|$$

et donc

$$\int_X |\langle \xi_x^n \mid \eta\rangle| d\mu = 2 \cdot \mu(A_n)(1-\mu(A_n))|\langle e_n \mid \eta\rangle|,$$

d'où une contradiction pour n grand si ε est suffisamment petit ($\varepsilon \leqslant \delta^2/3$ où A_n est δ-non triviale). ∎

4. Proximité des champs invariants et presque invariants. L'un des corollaires importants des résultats techniques du paragraphe 3. est le théorème suivant, dont l'analogue périodique est bien connu, cf. [28]. La démonstration de ce théorème comporte 3 étapes (théorème 20, lemme 21, lemme 28).

Théorème 20. *Soit R une relation d'équivalence ergodique de type* II_1 *ayant la propriété T. Soit π une représentation de R possédant une suite ξ^n presque invariante telle que $||\xi_x^n||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^1(X)$. Il existe quitte à extraire une suite ζ_n de champs invariants dominés par g tels que*

$$||\xi_x^n - \zeta_x^n||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit π une représentation de R sur un champ hilbertien H de base X. Décomposons $H = H^t + \tilde{H}$ en somme orthogonale, où H^t est le champ mesurable et stable par π engendré par les champs invariants. Considérons la famille

$$P_x : H_x \to H_x$$

$x \in X$, de projecteurs orthogonaux sur $\tilde{H}$. Pout tout $(x, y) \in R$ on a

$$P_x \pi(x, y) = \pi(x, y) P_y$$

Soit ξ^n une suite presque invariante de champs de vecteurs tels que $||\xi_x^n||_x \leqslant g(x)$ avec $g \in L^1$, et $\xi^n = \zeta^n + \tilde{\xi}^n$ la décomposition de ξ^n dans $H = H^t + \tilde{H}$. On a

$$||\pi(x, y)\tilde{\xi}_y^n - \tilde{\xi}_x^n|| = ||P_x(\pi(x, y)\xi_y^n - \xi_x^n)|| \leqslant ||\pi(x, y)\xi_y^n - \xi_x^n||,$$

donc $\tilde{\xi}^n$ (et de même ζ^n) est une suite presque invariante. Par construction, $\pi_{|\tilde{H}}$ ne contenant pas de champs presque invariants non triviaux, et puisque $||\tilde{\xi}^n_x||_x \leqslant g(x)$, on a, d'après le théorème 13, $||\tilde{\xi}^n||_1 \to_n 0$, i.e. $||\tilde{\xi}^n_x||_x \to_n 0$ presque sûrement quitte à extraire. Par suite

$$||\xi^n_x - \zeta^n_x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$. Soit T un champ d'isomorphismes entrelaçant la restriction $\pi_{|H^t}$ de π à H^t et la représentation triviale de R, agissant sur un champ constant $X \times H^{\mathbf{1}}$ de base X. Considérons le champ défini par

$$\tilde{\zeta}^n_x = T_x(\zeta^n_x) \in H^{\mathbf{1}}.$$

Alors $\tilde{\zeta}^n : X \to H^{\mathbf{1}}$ est une suite presque invariante dominée. Soit η^n le champ défini par

$$\eta^n_x = \tilde{\zeta}^n_x - \int_X \tilde{\zeta}^n_x d\mu.$$

Le lemme suivant (lemme 21) montre que $\eta^n_x \to 0$ presque sûrement quitte à extraire. Il en résulte que

$$||\xi^n_x - T_x^{-1} \int_X \tilde{\zeta}^n_x d\mu||_x \leqslant ||\xi^n_x - \zeta^n_x||_x + ||\tilde{\zeta}^n_x - \int_X \tilde{\zeta}^n_x d\mu||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$, d'où le résultat. ■

Lemme 21. *Soit R une relation d'équivalence fortement ergodique sur un espace de probabilité (X, μ). On considère une suite $(\xi^n : X \to H)_n$ presque invariante pour la représentation triviale de R sur un espace de Hilbert H, dominée par une fonction $g \in L^1(X)$, et telle que*

$$|| \int_X \xi^n d\mu|| \to_n 0.$$

Si H est de dimension finie, ou si R est de type fini et préserve la mesure μ, alors il existe une suite extraite de (ξ^n) qui converge presque surement vers 0.

Démonstration. Si H est de dimension fini, il s'agit d'un corollaire immédiat du théorème 19 de concentration. En effet choisissons pour fonctions lipschitziennes les fonctions coordonnées de H (considéré comme espace de Hilbert réel), qui se concentrent au voisinage de 0 du fait que leurs valeurs moyennes tend vers 0. Plus précisément on a

$$\inf_\eta \mu\{|\langle \xi^n_x \mid \eta \rangle| \leqslant \varepsilon\} \to_n 1.$$

où η parcourt les vecteurs unités de H. Par suite étant donné $\varepsilon > 0$, on en déduit (si H est de dimension finie) que

$$\mu(O^n_\varepsilon) \to_n 1,$$

où O^n_ε est l'ensemble des x tels que ξ^n_x est dans la boule de centre 0 et de rayon ε de H,

$$\begin{aligned} ||\xi^n|| &= \int_{O^n_\varepsilon} ||\xi^n_x|| d\mu(x) + \int_{X\setminus O^n_\varepsilon} ||\xi^n_x|| d\mu(x) \\ &\leqslant \varepsilon + \int_{X\setminus O^n_\varepsilon} g d\mu \end{aligned}$$

donc $||\xi^n|| \leqslant 2\varepsilon$ pour n grand (il en résulte quitte à extraire que ξ^n converge vers 0 presque sûrement). Suivant la comparaison de M. Gromov [26, page 141], le phénomène concentration concerne *a priori* principalement les « observables » $f : H \to Y$ où Y est un « écran » de basse dimension. Pour étudier le cas où Y est (hilbertien) de dimension infinie, nous utiliserons des arguments spectraux (lemme 28), ce qui permettra de conclure la preuve de ce lemme. ∎

Nous avons donc montré, modulo le lemme 28, le théorème suivant.

Théorème 22. *Soit R une relation d'équivalence ergodique de type* II_1 *sur un espace de probabilité (X, μ). Alors R possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si pour toute représentation π de R sur un champ hilbertien H de base X et toute suite presque invariante ξ^n de H dominé par une fonction $g \in L^1(X)$, il existe quitte à extraire une suite ζ^n de champs invariants dominés par g tels que*

$$||\xi^n_x - \zeta^n_x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$.

5. Groupes discrets et relations d'équivalence. Nous montrons dans ce paragraphe qu'un groupe discret agissant librement en préservant une mesure de probabilité possède la propriété T si et seulement si la relation d'équivalence engendrée la possède. Ce résultat a été obtenu par Zimmer, dans le cas des actions faiblement mélangeantes [48], puis par Popa (par des techniques d'algèbres de von Neumann [42]) et plus récemment par Anantharaman-Delaroche (par des techniques cohomologiques [2]) dans le cas des actions ergodiques.

Théorème 23. *Soit $R = R_\alpha$ une relation obtenue par action d'un groupe discret Γ préservant une mesure de probabilité. Si Γ a la propriété T, alors R l'a également. Réciproquement si R a la propriété T, et si l'action α est essentiellement libre et ergodique, alors Γ l'a également.*

Démonstration. Soit Γ un groupe de Kazhdan, $R = R_\alpha$ une relation obtenue par action de Γ présevant une mesure de probabilité μ, et π une représentation de R possédant presque des champs invariants ; alors la représentation $\overline{\pi}$ de Γ sur $L^2(X, H)$ obtenue en intégrant π possède presque des vecteurs invariants. En effet, soit $F \subset \Gamma$ une partie finie, $\varepsilon > 0$, $K = \{\mathrm{graph}(\gamma^{-1})\}_{\gamma\in F} \subset R$, et une suite $\xi^n \in L^2$ de champs (ε_n, K_n)-invariant (où $\varepsilon_n \to 0$ et K_n est exhaustive croissante) tels que $||\xi^n||_{L^2} = 1$ et $||\xi^n_x|| \leqslant g(x)$ pour une fonction positive $g \in L^2$. Soit un entier N tel que

$$\int_{K\setminus K_N} (g(x) + g(y))^2 d\mathfrak{h}(x, y) \leqslant \varepsilon^2/2$$

et $\varepsilon_N^2 \leqslant \varepsilon^2/2$. On a pour tout $\gamma \in F$

$$\begin{aligned} ||\overline{\pi}(\gamma)\xi^N - \xi^N||_2^2 &= \int_X ||\pi(x, \gamma^{-1}x)\xi^N_{\gamma^{-1}x} - \xi^N_x||^2 d\mu(x) \\ &\leqslant \varepsilon^2/2 + \int_{\mathrm{graph}(\gamma^{-1})\cap K_N} ||\pi(x, y)\xi^N(y) - \xi^N(x)||^2 d\mathfrak{h}(x, y) \\ &\leqslant \varepsilon^2/2 + \varepsilon_N^2 \leqslant \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Il existe donc une fonction non triviale $\xi \in L^2(X, H)$ invariante par Γ (i.e. vérifiant $\pi(x, \gamma^{-1}x)\xi_{\gamma^{-1}x} = \xi_x$ pour presque tout $x \in X$). Comme Γ engendre R, cette fonction est invariante pour π et R a la propriété T.

Réciproquement soit $\pi : \Gamma \to U(H)$ une représentation de Γ dans H ayant presque des vecteurs invariants. Soit $\tilde{\pi}$ la représentation de R sur le champ constant d'espaces $H_x = H$ et de base X, définie par l'expression

$$(x, y) \mapsto (h \in H_y \mapsto \pi(\gamma^{-1})h \in H_x),$$

où γ est l'unique élément de Γ vérifiant l'équation $\alpha(\gamma)(x) = y$ (α étant supposée libre). Tout vecteur (F, ε)-invariant pour π, disons ξ, définit un champ constant (K, ε)-invariant pour $\tilde{\pi}$,

$$x \mapsto \xi$$

où $K = \{\mathrm{graph}(\gamma^{-1})\}_{\gamma\in F}$. Considérons une suite presque invariante pour π et notons $\xi^n : X \to H$ la suite de champs constants associés. R ayant la propriété T, il existe une suite (ζ^n) de champs invariants dominés tels que $\zeta^n_x - \xi^n_x \to 0$ presque sûrement (cf. th. 20). Soit

$$\overline{\zeta}_n = \int_X \zeta^n_x d\mu(x) = \sum_i \int_X \langle \zeta^n_x \mid e_i\rangle d\mu(x) e_i$$

la valeur moyenne de ζ^n, où (e_i) est une base hilbertienne de H. Alors

$$\pi(\gamma)\overline{\zeta}_n = \pi(\gamma) \int_X \zeta^n d\mu = \int_X \pi(\gamma)\zeta^n_x d\mu(x) = \int_X \zeta^n_{\alpha(\gamma)x} d\mu(x) = \overline{\zeta}_n$$

(la deuxième inégalité résulte de la continuité de $\pi(\gamma)$ et la dernière d'un changement de variable, μ étant invariante). Or

$$||\overline{\zeta}_n - \xi^n|| = ||\int_X \zeta^n - \xi^n d\mu|| \leqslant \int_X ||\zeta^n - \xi^n|| d\mu \to 0$$

donc $\overline{\zeta}_n$ est non trivial pour n grand. Ainsi Γ a la propriété T. ■

Le résultat suivant a été démontré par Furman [19]. Il résulte aussi immédiatement du théorème ci-dessus et de l'invariance par isomorphisme stable de la propriété T pour les relations d'équivalence.

Corollaire 24. *La propriété T est un invariant d'équivalence mesurable de groupes discrets.*

Rappelons que deux groupes discrets Γ et Λ sont dit *mesurablement équivalents* s'il existe un espace borélien standard Ω muni d'une mesure σ-finie $\mathfrak{h}$, et des actions de Γ et Λ sur Ω qui soient libres et commutantes, qui préservent la mesure $\mathfrak{h}$, et qui admettent chacune un domaine fondamental de mesure finie (cette définition est dûe à M. Gromov). Par exemple, deux réseaux de covolume fini d'un même groupe de Lie sont mesurablement équivalent (agissant par multiplication à gauche et à droite).

Deux groupes discrets sont mesurablement équivalents si et seulement s'ils admettent deux actions libres de type II_1 stablement isomorphes ([19, §2] et [21, §6]).

6. Diffusion hilbertienne et inégalités de Poincaré

Soit H un espace de Hilbert.

Étant donné un opérateur hermitien borné D sur H de norme $\leqslant 1$ (contraction), on considère l'opérateur positif

$$\Delta_p = \mathrm{Id} - D^p$$

où Id est l'identité et $p \geqslant 1$. On note

$$E_p(\xi) = E_{D,p}(\xi) = \langle \Delta_p \xi \mid \xi \rangle$$

l'energie (de Dirichlet) de $\xi \in H$ relative à la diffusion $\xi \mapsto D^p \xi$.

Les points fixes de la diffusion D, i.e. les vecteurs ξ vérifiant $D\xi = \xi$, sont les vecteurs dont l'énergie $E = E_1$ est nulle.

Exemple (Marche aléatoire sur la sphère hilbertienne $\boldsymbol{S}^\infty \subset H$). Soit Γ un groupe de type fini. On fixe une marche aléatoire invariante ν sur Γ, de support un système générateur fini *symétrique* S de Γ. Ainsi ν consiste en la donnée de $\#S$ nombres réels strictement positifs

$$\nu(e \to s)$$

de somme 1, qui déterminent par invariance la probabilité $\nu(\gamma \to s\gamma)$ d'aller de γ à $s\gamma$ en 1 pas. On suppose que ν est symétrique, au sens où $\nu(e \to s) = \nu(e \to s^{-1})$. Soit π

une représentation unitaire de Γ sur un espace de Hilbert H. L'opérateur

$$D_{\nu,\pi} = \sum_S \nu(e \to s)\pi(s)$$

de diffusion associé à la marche aléatoire sur la sphère unité de H est alors hermitien de norme $\leqslant 1$, sans point fixe si et seulement si π est sans point fixe (en effet le barycentre $D_{\nu,\pi}(\xi)$ des vecteurs unitaires pondérés $(\pi(s)\xi, \nu(e \to s))$ est de norme 1 si et seulement si $\pi(s)\xi = \xi$ pour tout s). Partant d'un vecteur unitaire ξ de H, on se déplace en $\pi(s)\xi$ avec probabilité $\nu(e \to s)$. On note

$$\nu^2(\gamma \to \gamma') = \nu * \nu(\gamma \to \gamma') = \sum_{\tau \in \Gamma} \nu(\gamma \to \tau)\nu(\tau \to \gamma')$$

la probabilité d'aller de γ à γ' en 2 pas sur Γ, et de même $\nu^n = \nu^{n-1} * \nu$. On a $D_{\nu^n,\pi} = D^n_{\nu,\pi}$ pour les diffusions hilbertiennes associées à ν.

Soit D une contraction de H. Rappelons que $\mathrm{Sp}(D) \subset [-1, 1]$, où $\mathrm{Sp}(D)$ est le spectre de D. On note

$$\kappa = \kappa_D = \sup\{y \in \mathrm{Sp}(D), y \neq 1\}.$$

La présence d'un « trou »

$$\lambda = 1 - \kappa > 0$$

dans $\mathrm{Sp}(D)$ équivaut à la présence d'un trou (de même taille) dans le spectre des énergies, i.e.

$$E(\xi) = E_1(\xi) \geqslant \lambda > 0,$$

pour tout $\xi \in \boldsymbol{S}^\infty$ non fixe.

Inégalité de Dirichlet. *Soit D une contraction. Alors $\kappa < 1$ si et seulement s'il existe une constante $c_\infty < \infty$ telle que*

$$||\xi - \overline{\xi}||^2 \leqslant c_\infty E(\xi)$$

pour tout $\xi \in H$ (où $\overline{\xi}$ est la projection orthogonale de ξ sur les points fixes de D). La valeur optimale de cette constante est $c_\infty = 1/(1-\kappa) = 1/\lambda$.

Définition. *Les constantes c_∞ et λ sont appelés* constantes de relaxation *de la diffusion D.*

Inégalités de Poincaré. *Soit D une contraction. Alors $\kappa < 1$ si et seulement s'il existe $n \geqslant 2$ et une constante $c_n < n$ tels que*

$$E_n(\xi) \leqslant c_n E(\xi)$$

pour tout $\xi \in H$. L'inégalité $c_n < n$ est alors vraie pour tout $n \geqslant 2$. La valeur optimale de la constante c_n est $c_n = 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^{n-1}$.

Démonstration. On peut supposer, quitte à considérer l'orthogonal des points fixes, que D est sans point fixe. L'inégalité revient à dire que l'opérateur ΔT est positif, où

$$\Delta = \Delta_1 = \mathrm{Id} - D \text{ et } T = c_n - (\mathrm{Id} + D + \ldots + D^{n-1}).$$

Or ceci est équivalent à la positivité de T. En effet Δ est positif et injectif donc d'image dense, et en écrivant $\xi = \lim \sqrt{\Delta}\xi_n$, on obtient

$$\langle T\xi \mid \xi\rangle = \lim_n \langle T\sqrt{\Delta}\xi_n \mid \sqrt{\Delta}\xi_n\rangle = \lim_n \langle \Delta T\xi_n \mid \xi_n\rangle \geqslant 0.$$

La réciproque est évidente. On a pour $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$,

$$D \leqslant \kappa \Longleftrightarrow \mathrm{Id} + D + \ldots + D^{n-1} \leqslant 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^{n-1}$$

et $\kappa < 1 \Longleftrightarrow 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^{n-1} < n$. ∎

Définition. *Les constantes c_n appelées* constantes de Poincaré *de la diffusion D.*

Soit Γ un groupe de type fini.

Fixons comme dans l'exemple ci-dessus un système générateur S symétrique fini de Γ et ν une marche aléatoire invariante symétrique de support S. Étant donnée une représentation π de Γ sur un espace de Hilbert H, on note $D_{\nu,\pi}$ la marche aléatoire associée sur $\boldsymbol{S}^\infty \subset H$, et $\kappa(\nu, \pi)$, $c_n(\nu, \pi)$ les constantes correspondantes.

Notons que (par des considérations barycentriques évidentes) Γ a la propriété T si et seulement si pour toute représentation π, on a

$$\kappa(\nu, \pi) < 1.$$

Les inégalités de Poincaré et Dirichlet s'écrivent

$$c_n(\nu, \pi) < n.$$

On voit alors facilement du fait qu'elles sont atteintes que les constantes $\kappa(\nu, \pi)$ et $c_n(\nu, \pi)$ sont alors uniformes en π (considérer une suite π_n de représentations pour lesquelles la constante tend vers la valeur maximale et faire la somme directe de ces représentations). En d'autres termes si l'on note

$$\kappa(\Gamma,\nu) = \sup_\pi \kappa(\nu,\pi) \quad \text{et} \quad c_n(\Gamma,\nu) = \sup_\pi c_n(\nu,\pi),$$

alors Γ *possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si l'une des inégalités équivalentes* $\kappa(\Gamma,\nu) < 1$ *ou* $c_n(\Gamma,\nu) < n$ *est vérifiée* ($n \geqslant 2$).

Nous renvoyons à [25, 24] pour ce qui précède.

7. Le point de vue spectral

Le but de ce paragraphe est la démonstration des théorèmes spectraux énoncés au cours de l'introduction (th. 1 et 2).

1. Marche aléatoire sur une relation d'équivalence. Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X,μ).

Une *marche aléatoire sur (les orbites de)* R est la donnée d'une famille mesurable de mesures de probabilité $(\nu_x)_{x\in X}$ telle que ν_x soit supportée sur l'orbite de x. Plus précisément, $\nu : R \to [0,1]$ est une fonction mesurable définie sur R telle que la somme de chaque fibre horizontale R^x soit 1. On notera $\nu(x \to y) = \nu(x,y)$. (Observons que ν s'étend naturellement par équivariance en une marche aléatoire $\tilde\nu$ sur l'ensemble dénombrable quasi-périodique R, au sens de [41], en posant $\tilde\nu((x,y) \to (x,z)) = \nu(y \to z)$. Nous avons choisi ici de travailler avec ν plutôt que $\tilde\nu$ pour simplifier les notations.)

Définition. *Une marche aléatoire* ν *est dite* symétrique relativement à μ *si*

$$\nu(x\to y)\sqrt{\delta(x,y)} = \nu(y\to x)\sqrt{\delta(y,x)}.$$

où δ *est la fonction modulaire de* μ.

Rappelons que δ vérifie l'équation

$$d\mathfrak{h}(x,y) = \delta(x,y)d\mathfrak{h}^{-1}(x,y),$$

où $(y,x) = (x,y)^{-1}$ est l'inversion (ainsi $\mathfrak{h}^{-1}$ est la mesure de décompte vertical).

Exemple. Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace borélien standard (X,μ). Soit K un graphage symétrique u.l.b. de R. La *marche aléatoire régulière sur* K est définie par

$$\nu_K(x\to y) = \frac{\sqrt{\delta(y,x)}}{\sum_{(x,y)\in K^x}\sqrt{\delta(y,x)}}$$

si $(x, y) \in K$ et 0 sinon. Elle est symétrique relativement à la mesure $\tilde{\mu}$ définie par

$$d\tilde{\mu}(x) = \delta(x) d\mu(x)$$

(équivalente à μ) où $\delta(x) = \sum_{(x,y)\in K^x} \sqrt{\delta(y, x)}$. En effet on a

$$\tilde{\delta}(x, y) = \delta(x, y)\frac{\delta(x)}{\delta(y)}.$$

Définition. *On dit qu'une marche aléatoire ν sur les orbites de R est* symétrique bornée *si ν est symétrique relativement à μ, si son support*

$$K = \mathrm{supp}(\nu) = \{(x, y) \in R \mid \nu(x \to y) > 0\}$$

est un graphage *symétrique de R, et s'il existe un nombre réel $\eta > 0$ vérifiant $\nu(x \to y) \geqslant \eta$ pour presque tout $(x, y) \in K$.*

Pour tout graphage symétrique u.l.b. K de R, la marche aléatoire régulière ν_K associée est symétrique bornée.

Intégration d'une marche aléatoire à coefficients dans une représentation. Fixons une marche aléatoire ν sur les orbites de R symétrique relativement à μ, de support un graphage symétrique K de R. Étant donnée une représentation π de R sur un champ d'espaces de Hilbert H de base X, on construit une famille mesurable de marches aléatoires opérant sur les sections mesurables de H en posant

$$(D_{\nu,\pi}\xi)_x = \sum_{y\sim x} \nu(x \to y)\pi(x, y)\xi_y.$$

Cette famille définit un opérateur hermitien $D_{\nu,\pi}$ sur l'espace $L^2(X, H)$ des sections de carré intégrable sur X ; en effet

$$\langle D_{\nu,\pi}\xi \mid \eta\rangle = \int_K \langle \nu(x \to y)\pi(x, y)\xi_y \mid \eta_x\rangle d\mathfrak{h}(x, y) = \langle \xi \mid D_{\nu,\pi}\eta\rangle.$$

De plus $D_{\nu,\pi}$ est borné de norme $\leqslant 1$ du fait que, pour presque tout x,

$$||(D_{\nu,\pi}\xi)_x||_x^2 \leqslant \sum_{y\sim x} \nu(x \to y)||\xi_y||_y^2.$$

On obtient ainsi une diffusion hilbertienne, dont on note κ_π la plus grande valeur spectrale non triviale (cf §6.).

Définition. *On dira que $D_{\nu,\pi}$ est la* diffusion hilbertienne *associée à ν et π.*

Constantes de Poincaré. Si alors $\xi \in L^2(X, H)$ est un champ de carré intégrable sur X on note

$$E_\pi(\xi) = E_{D_{\nu,\pi}}(\xi) = ||\xi||^2 - \langle D_{\nu,\pi}\xi \mid \xi\rangle$$

et

$$E_{\pi,2}(\xi) = E_{D_{\nu,\pi^2}}(\xi) = ||\xi||^2 - ||D_{\nu,\pi}\xi||^2,$$

et on appelle (seconde) constante de Poincaré de π associée à ν la plus petite constante $c_2(\pi)$ vérifiant

$$E_{\pi,2}(\xi) \leqslant c_2(\pi)E_\pi(\xi).$$

Remarque terminologique. Une *diffusion* sur un espace X est, au sens de [25], une application $x \mapsto \nu_x = \nu(x \to \cdot)$ de X vers les mesures de probabilité sur X, e.g. une marche aléatoire. Une *codiffusion* sur un espace H est une application c des mesures de probabilité sur H vers H, telle que l'image d'une mesure de Dirac δ_ξ soit ξ et telle que $c^{-1}(\xi)$ soit convexe pour tout ξ (cf. [25]). Lorsque H est un espace de Hilbert, la codiffusion naturelle est l'application (affine) de centre de masse

$$c(\nu) = \int_H \xi d\nu(\xi).$$

Étant donnée une représentation de R sur un champ hilbertien H, on obtient un opérateur linéaire qui à un champ de vecteurs ξ associe

$$x \mapsto c_x((\overline{\xi}_x)_*(\nu_x))$$

où $\overline{\xi}$ est l'extension équivariante de ξ à (l'ensemble dénombrable quasi-périodique) R définie par $\overline{\xi}_x(y) = \pi(x,y)\xi_y$ pour $x \sim y$, et c_x est la codiffusion naturelle sur H_x. C'est cet opérateur, restreint aux champs de carré intégrable, que nous avons appelé diffusion.

Gradient d'un champ de vecteurs. Étant donné un champ de vecteurs

$$\xi : X \to H$$

on définit son gradient

$$d\xi : R \to H$$

par l'expression

$$d\xi(x,y) = \pi(x,y)\xi_y - \xi_x.$$

Une marche aléatoire ν sur R définit canoniquement une mesure de probabilité $\mathfrak{h}_\nu$ sur R par l'expression

$$\mathfrak{h}_\nu(K) = \int_X \sum_{y \in K^x} \nu(x \to y) d\mu(x)$$

(où K est une partie borélienne de R). Si $f : R \to H$ est une fonction de carré intégrable pour $\mathfrak{h}_\nu$ on pose

$$||f||_\nu^2 = \int_R ||f(x,y)||^2 d\mathfrak{h}_\nu(x,y) = \int_X \sum_{(x,y)\in R} ||f(x,y)||^2 \nu(x \to y) d\mu(x).$$

Alors pour tout champ $\xi \in L^2(X,H)$ de carré intégrable, $d\xi \in L^2(R,H,\mathfrak{h}_\nu)$ et on a

$$E_\pi(\xi) = \frac{1}{2}||d\xi||_\nu^2 = \frac{1}{2}\int_X \sum_{(x,y)\in R} ||\pi(x,y)\xi_y - \xi_x||^2 \nu(x \to y) d\mu(x)$$

qui coincide donc avec l'énergie locale moyenne

$$E_\pi(\xi) = \int_X E_\pi(\xi,x) d\mu(x)$$

où

$$E_\pi(\xi,x) = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in R} ||\pi(x,y)\xi_y - \xi_x||^2 \nu(x \to y).$$

2. Caractérisations spectrales. Commençons par montrer le lemme suivant.

Lemme 25. *Soit R une relation d'équivalence ergodique. On fixe une marche aléatoire ν symétrique relativement à une mesure de probabilité μ, dont le support K engendre R. Soit π une représentation de R.*

i. π contient des champs invariants non triviaux si et seulement si $D_{\nu,\pi}$ a des points fixes non triviaux.

ii. Si $\kappa_\pi < 1$, alors pour toute suite presque invariante ξ^n telle que $||\xi_x^n||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^2(X)$, il existe (à extraction près) une suite ζ^n de champs invariants tels que

$$||\xi_x^n - \zeta_x^n||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$.

iii. Réciproquement, si ν est bornée, si K ne contient pas de suites de Følner évanescentes (cf. [41]), et si pour toute suite presque invariante ξ^n telle que $||\xi^n||_2 = 1$ et $||\xi_x^n||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^2(X)$, il existe (à extraction près) une suite ζ^n de champs invariants tels que

$$||\xi_x^n - \zeta_x^n||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$, alors $\kappa_\pi < 1$.

Démonstration. *i.* Soit ξ un champ fixe par $D_{\nu,\pi}$. Alors $E_\pi(\xi)=0$, donc $\pi(x,y)\xi_y=\xi_x$ pour presque tout (x,y) dans $K=\mathrm{supp}(\nu)$. Comme K engendre R, ξ est un champ invariant.

ii. Montrons que si la conclusion est fausse, alors $\kappa_\pi=1$. Notons $V\subset L^2(X,H)$ l'orthogonal dans $L^2(X,H)$ du sous-espace engendré par les vecteurs invariants. Par hypothèse il existe, quitte à extraire, une suite $\xi_n\in V$ de champs de vecteurs (ε_n,F_n)-invariants (où $\varepsilon_n\to 0$ et $\mathfrak{h}_1(F_n)\to 0$) qui soit uniformément bornée par une fonction $g\in L^2$ et telle que $||\xi_n||_2=1$. Alors $\mathfrak{h}_\nu(F_n)\to 1$ et

$$E_\pi(\xi_n)\leqslant \varepsilon_n\int_{F_n}\nu(x\to y)d\mathfrak{h}(x,y)+\int_{K\backslash F_n}(g(x)+g(y))^2d\mathfrak{h}_\nu(x,y).$$

Donc $E_\pi(\xi_n)\to 0$. Ceci entraîne que $\kappa_\pi=1$.

iii. Réciproquement supposons par l'absurde que $\kappa_\pi=1$ et obtenons une contradiction. Considérons donc une suite $\xi^n\in V$ de champs de vecteurs $X\to H$, de norme $||\xi^n||_2=1$, et dont l'énergie tend vers 0. Quitte à extraire on peut supposer cette suite presque invariante. En effet pour tout k l'énergie de ξ^n relativement à la marche aléatoire en k pas (de support K^k) converge vers 0 avec n, et cette marche étant bornée pour tout k, on conclut par extraction diagonale.

Fixons $\eta\geqslant 1$. D'après le lemme 11, il existe quitte à extraire une suite (η_n) de nombres réels convergant vers η (en décroissant), telle que la suite (A_n) définie par

$$A_n=\{\frac{1}{\eta_n}\leqslant ||\xi^n||\leqslant \eta_n\}.$$

soit asymptotiquement invariante, et de mesure convergeant vers $\delta\in[0,1]$. Comme K ne contient pas de suites de Følner évanescentes, R est fortement ergodique, donc cette suite est triviale, i.e. $\delta=0$ ou 1.

Si $\delta=1$ on peut modifier la valeur de ξ^n sur le complémentaire de A_n par un champ unitaire $\eta^n_x\in H_x$ quelconque, et obtenir ainsi une suite $\tilde{\xi}^n$ presque invariante et dominée (par la fonction constante $\eta+1$), dont la norme ne tend pas vers 0, et est à distance uniformément <1 (pour la norme L^2) de $\xi^n\in V$, où $||\xi^n||=1$. Ceci contredisant les hypothèses, on a $\delta=0$.

En particulier pour tout $\eta\geqslant 1$ on obtient $\mu(A^\eta_n)\to 0$, où

$$A^\eta_n=\{\frac{1}{\eta}\leqslant ||\xi^n||\leqslant \eta\}$$

(quitte à extraire). Par procédé diagonal, on peut donc trouver une suite extraite de (ξ^n), encore notée (ξ^n), de sorte que $\mu(A_n)\to 0$, où

$$A_n=\{\frac{1}{n}\leqslant ||\xi^n||\leqslant n\}.$$

Considérons la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = 0 \text{ si } ||\xi_x^n|| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } f_n(x) = ||\xi_x^n||^2 \text{ sinon.}$$

Ainsi $f_n \in L^1(X)$ et $||f_n||_1 \to 1$. (Nous nous ramenons ici à un argument de Connes-Feldman-Weiss [13, page 441]). Notons que

$$L^1E(f_n) = \int_X \sum_{(x,y)\in R} |f_n(y) - f_n(x)|\nu(x \to y)d\mu(x) \to 0.$$

En effet

$$\begin{aligned} L^1E(f_n) &\leqslant \frac{2}{n} + \int_R (||\pi(x,y)\xi_y^n - \xi_x^n||)(||\xi_y^n|| + ||\xi_x^n||)d\mathfrak{h}_\nu(x,y) \\ &\leqslant \frac{2}{n} + 2 \cdot \sqrt{E(\xi^n)}||\xi^n||_2 \to 0 \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Déduisons en l'existence de suites de Følner évanescentes dans K. Soit $\mathbf{1}_a$ la fonction caractéristique de $[a, \infty[\subset \mathbf{R}$. Pour $t, t' \geqslant 0$ on a

$$t = \int_0^\infty \mathbf{1}_a(t)da \quad \text{et} \quad |t - t'| = \int_0^\infty |\mathbf{1}_a(t) - \mathbf{1}_a(t')|da.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et n suffisament grand pour que

$$L^1E(f_n) < \eta\varepsilon||f_n||_1$$

et $\mu\{f_n = 0\} \geqslant 1 - \varepsilon$, où $\eta > 0$ est une constante telle que $\nu(x \to y) \geqslant \eta$ sur K. Posons $f = f_n$. D'après le théorème de Fubini on a, en notant $f_a = \mathbf{1}_a \cdot f$,

$$\int_0^\infty \int_R |f_a(y) - f_a(x)|\nu(x \to y)d\mathfrak{h}(x,y)da < \eta\varepsilon \iint f_a d\mathfrak{h}_\nu da.$$

Considérons donc $a > 0$ tel que

$$\int_R |f_a(y) - f_a(x)|\nu(x \to y)d\mathfrak{h}(x,y) < \eta\varepsilon \int_R f_a d\mathfrak{h}_\nu$$

et notons $\Omega = \{f_a = 1\}$. On a

$$\begin{aligned} \int_R |f_a(y) - f_a(x)|d\mathfrak{h}_\nu(x,y) &\geqslant \int_\Omega \sum_{y\sim x} |f_a(y) - f_a(x)|\nu(x \to y)d\mu(x) \\ &= \int_X \left(\sum_{x\sim y} \chi_\Omega(x)\nu(y \to x)\right) |f_a(y) - 1|d\mu(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{x\sim y} \chi_\Omega(x)\nu(y \to x)\right) |f_a(y) - 1|d\mu(y) \\ &\geqslant \eta \int_{\partial\Omega} |f_a(y) - 1|d\mu(y) \\ &= \eta\mu(\partial_K\Omega) \end{aligned}$$

Ainsi
$$\mu(\partial_K\Omega) < \varepsilon\mu(\Omega) \quad \text{et} \quad 0 < \mu(\Omega) \leqslant \varepsilon.$$
Donc K contient des suites de Følner évanescentes, ce qui contredit les hypothèses. ∎

Définition. *Soit Q un espace singulier. On appelle* marche aléatoire Q-périodique *(symétrique, bornée) la donnée d'une désingularisation discrète $p : X \to Q$ de Q et d'une marche aléatoire (symétrique, bornée) ν sur les orbites de la relation R_p.*

Plus précisément, la marche aléatoire Q-périodique associée à cette donnée est par définition la marche aléatoire $\tilde{\nu}$ sur l'ensemble dénombrable Q-périodique R_p définie par
$$\nu((x,y) \to (x,z)) = \nu(y \to z)$$
(i.e. $\tilde{\nu}$ est l'extension équivariante de ν à R_p).

Remarque. De même que dans [41], ν et $\tilde{\nu}$ correspondent aux deux points de vue transverse et longitudinal pour un même objet.

Passons à la démonstration des théorèmes spectraux.

Définition. *Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X,μ), et ν une marche aléatoire sur cette relation. La* diffusion simple *associée ν est l'opérateur de diffusion $D_\nu = D_{\nu,\mathbf{1}}$, agissant sur $L^2(X)$, associé à la représentation triviale de R.*

Théorème 26. *Soit Q un espace singulier ergodique de type fini. Si Q est de type* II*, il possède un quotient moyennable si et seulement si les diffusions simples associées aux marches aléatoires Q-périodiques symétriques bornées n'ont pas de trou spectral.*

Ce théorème résulte immédiatement des résultats de [41] (cf. th. 14) et du théorème suivant, qui est à rapprocher des résultats obtenus par K. Schmidt dans [45] pour des actions II_1 de groupes dénombrables (cf. prop. 2.3). Nous renvoyons également ici à [29].

Théorème 27. *Soit K un graphage symétrique borné d'une relation d'équivalence ergodique sur un espace de probabilité (X,μ). On note $\nu = \nu_K$ la marche aléatoire associée à K. Alors K contient des suites de Følner évanescentes (cf. [41]) si et seulement si $\kappa_\nu = 1$.*

Démonstration. Montrons d'abord que si K contient des suites de Følner évanescentes, alors $\kappa_\nu = 1$. Soit A_n une suite de Følner dans K et $\overline{A}_n = A_n \amalg \partial_K A_n$. Considérons l'espace H des fonctions orthogonales aux constantes. Alors $f_n = \chi_{\overline{A}_n} - \mu(\overline{A}_n)$ de $\chi_{\overline{A}_n}$ sur H est une suite non triviale de points presque fixes pour D_ν, cf [45, 43, 29] (cette observation est dûe à K. Schmidt). Explicitement,

$$\langle D_K f_n \mid f_n \rangle = \int_X \sum_y \chi_{\overline{A}_n}(x)\chi_{\overline{A}_n}(y)\nu(x \to y)d\mu(x) - \mu(\overline{A}_n)^2 \geqslant \mu(A_n) - \mu(\overline{A}_n)^2$$

et $||f_n||^2 = \mu(\overline{A}_n) - \mu(\overline{A}_n)^2$.

Réciproquement supposons que K ne contienne pas de suites de Følner évanescentes, et montrons que la marche aléatoire ν associée à K vérifie $\kappa_\nu < 1$. Vérifions les hypothèses du lemme 25 (*iii.*). Soit ξ_n une suite presque invariante dominée et ζ^n le champ défini par

$$\zeta_x^n = \xi_x^n - \int_X \xi_x^n d\mu.$$

Alors $\zeta^n \to 0$ presque sûrement quitte à extraire (cf. lemme 21), et le théorème en résulte. ∎

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme 21.

Lemme 28. *Soit R une relation d'équivalence fortement ergodique de type fini sur un espace de probabilité (X, μ). On suppose que μ est une mesure de probabilité invariante et on considère une suite $(\xi^n : X \to H)_n$ presque invariante pour la représentation triviale de R sur un espace de Hilbert H, dominée par une fonction $g \in L^1(X)$, et telle que*

$$|| \int_X \xi^n d\mu|| \to_n 0.$$

Il existe une suite extraite de (ξ^n) qui converge presque surement vers 0.

Démonstration. Soit ξ^n une suite presque invariante dominée. R étant une relation d'équivalence de type II_1 fortement ergodique de type fini, elle possède un graphage K symétrique borné ne contenant pas de suites de Følner évanescentes (cf. [41]). La marche aléatoire $\nu = \nu_K$ associée à K définit une diffusion $D = D_\nu$ agissant sur $L^2(X)$ et possédant un trou spectral. Soit H un espace de Hilbert et $D^H = D_\nu^H$ la diffusion associée à la marche aléatoire ν et la représentation triviale de R sur $X \times H$. Alors D possède un trou spectral si et seulement si D^H en possède un (comme on le voit par exemple à l'aide des inégalités de Poincaré). Ainsi le lemme 25 *ii.* montre qu'il existe (quitte à extraire) une suite ζ^n de champs invariants tels que

$$||\xi_x^n - \zeta_x^n||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$. Les champs invariants sont essentiellement constants, notons $\zeta_n \in H$ la valeur essentielle de ζ^n. Alors l'hypothèse

$$|| \int_X \xi^n d\mu|| \to_n 0$$

entraîne que $||\zeta_n||_H \to 0$ et le lemme en résulte. ■

Concluons ce paragraphe par la preuve du théorème 2. Rappelons que les diffusions hilbertiennes associées à une marche aléatoire ν sur les orbites d'une relation d'équivalence mesurée sont les opérateurs $D_{\nu,\pi}$ définis au paragraphe précédent (associés à chaque représentation hilbertienne π de cette relation d'équivalence).

Théorème 29. *Soit Q un espace singulier ergodique. Alors Q possède la propriété T de Kazhdan si et seulement s'il existe une marche aléatoire Q-périodique symétrique dont les diffusions hilbertiennes possèdent un trou spectral.*

Démonstration. Soit Q un espace singulier ergodique possédant la propriété T. Alors Q est de type fini et posséde une désingularisation de type II_1 sur un espace de probabilité (X, μ). Cette désingularisation ayant elle-même la propriété T, elle possède un graphage K symétrique u.l.b. ne contenant pas de suites de Følner évanescentes. Soit $\nu = \nu_K$ la marche aléatoire régulière associée à K, qui est symétrique bornée relativement à μ. Soit π une représentation de R. Le théorème 20 montre que pour toute suite presque invariante ξ^n telle que $||\xi^n_x||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^2(X)$, il existe (à extraction près) une suite ζ_n de champs invariants tels que

$$||\xi^n_x - \zeta^n_x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$, et d'après le lemme 25 *iii.*, on a $\kappa_\pi < 1$.

Réciproquement supposons qu'il existe une marche aléatoire symétrique sur une désingularisation $p : X \to Q$ de Q dont les diffusions hilbertiennes possèdent un trou spectral. Soit π une représentation de R_p contenant une suite ξ^n presque invariante dominée telle que $||\xi^n||_2 = 1$. Le lemme 25 *ii.* entraîne qu'il existe une suite ζ_n de champs invariants tels que

$$||\xi^n - \zeta^n||_2 \to 0.$$

Comme $||\xi^n||_2 = 1$, on obtient $||\zeta^n||_2 \neq 0$ pour n grand, donc π contient des champs invariants non triviaux. Donc R a la propriété T (et Q également). ■

Remarques. 1 - Observons que si Q possède la propriété T, on peut choisir une marche aléatoire Q-périodique satisfaisant à la conclusion du théorème qui soit symétrique bornée.

2 - Soient R une relation d'équivalence mesurée et ν une marche aléatoire sur ses orbites. On définit

$$\kappa(R,\nu) = \sup_{\pi} \kappa_{\nu,\pi},$$

et de même $c_n(R,\nu)$. Il résulte ainsi du théorème ci-dessus que s'il existe une marche aléatoire ν symétrique bornée (relativement à une mesure de probabilité μ) telle que $c_2(R,\nu) < 2$, alors R a la propriété T de Kazhdan (l'hypothèse d'ergodicité n'ayant pas été utilisée pour cette implication). Ce résultat sera utilisé sous cette forme au §8. qui suit. Notons également que, de même que dans le cas des groupes, les constantes $\kappa_{\nu,\pi}$ et $c_n(R,\pi)$ sont uniformes en π lorsque R posséde la propriété T.

8. Le critère $\lambda_1 > 1/2$

Soit Q un espace singulier. Dans ce paragraphe nous donnons un critère, portant sur la structure locale des complexes simpliciaux Q-périodiques de dimension 2, qui entraîne s'il est satisfait que l'espace singulier Q est un espace de Kazhdan. L'origine de ce critère se situe dans les travaux de Garland sur la cohomologie de groupes d'automorphismes d'immeubles de Bruhat-Tits cocompacts [23, 8]. Nous reprenons ici la démonstration de ce résultat donnée par Gromov [25].

Suivant Garland, cette démonstration s'effectue en deux étapes,

1) l'étude spectrale de la géométrie locale (des « links ») du complexe simplicial.

2) « l'intégration » des données spectrales locales en une inégalité de Poincaré globale entraînant la propriété T (étape dite de « géométrie intégrale » dans [25]).

Le concept d'énergie introduit par Gromov [25] dans ce contexte est essentiel pour l'étape 2 : il est linéaire relativement à l'opération d'addition (moyennisation) des diffusions (i.e. des marches aléatoires) et, par suite, les inégalités de Poincaré s'intègrent. La première étape est classique. Une source importante de polyèdre satisfaisant au critère local est donnée par certains immeubles de Bruhat-Tits (de rang 2). Les propriétés spectrales de leurs links (des immeubles sphériques) ont été étudiées par Feit-Higman [18].

Passons maintenant à la démonstration du théorème annoncé (dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous). La procédure décrite ci-dessus nécessite d'étudier le comportement de la marche aléatoire, sur le complexe simplicial, et sur ses links ; nous commençons par les links.

1. La condition $\lambda_1 > 1/2$. Soit L un graphe fini non orienté. On note $\tau(y)$ la valence d'un sommet y dans L. La marche aléatoire uniforme sur L est donnée par

$$\nu(y \to z) = 1/\tau(y)$$

si $(y, z) \in L^{(1)}$ est une arête de L et $\nu(y \to z) = 0$ sinon. Elle est symétrique relativement à la mesure stationnaire $\mu(y) = \tau(y)/2\tau$, où τ est le nombre d'arêtes de L. En d'autres termes on a

$$\mu(y)\nu(y \to z) = \mu(z)\nu(z \to y)$$

pour tout $y, z \in X$.

On note $D_L : \ell^2(L^{(0)}, \mu) \to \ell^2(L^{(0)}, \mu)$ la diffusion associée, agissant sur les fonctions complexes définies sur les sommets de L, selon la formule

$$D_L f(y) = \frac{1}{\tau(y)} \sum_{z \sim y} f(z).$$

Le produit scalaire sur $\ell^2(L^{(0)}, \mu)$ est donné par

$$\langle f \mid g \rangle = \sum_{y \in L} f(y)\overline{g(y)}\mu(y).$$

D_L est un opérateur hermitien et le laplacien associé $\Delta_L = \mathrm{Id} - D_L$ est positif, de noyau les fonctions constantes (on suppose L connexe).

Le *spectre de* L est par définition l'ensemble des valeurs propres Δ_L. Le *trou spectral* de L est la plus petite valeur propre non nulle et se note $\lambda_1(L)$.

Soit H un espace de Hilbert. On étend D_L en un opérateur borné encore noté D_L agissant sur $\ell^2(L^{(0)}, H, \mu)$. Il est hermitien pour la norme hilbertienne et sans point fixe sur l'orthogonal des constantes ; sa plus grande valeur propre est encore $\kappa = 1 - \lambda_1(L)$.

Soit $\nu_\infty(y \to z) = \mu(z)$ la marche aléatoire stationnaire associée à ν. L'inégalité de Dirichlet-Poincaré correspondante s'écrit

$$E_\infty(\xi) \leqslant c_\infty E(\xi)$$

où

$$c_\infty = 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots = \frac{1}{\lambda_1(L)}.$$

En d'autres termes on a,

$$\frac{1}{2\tau} \sum_{y,z \in L^{(0)}} ||\xi_z - \xi_y||^2 \tau(y)\tau(z) \leqslant \frac{1}{\lambda_1} \sum_{(y,z) \in L^{(1)}} ||\xi_z - \xi_y||^2,$$

pour toute fonction $\xi \in \ell^2(L^{(0)}, H, \mu)$.

2. Géométrie locale et intégrale. Soit Q un espace singulier de type fini. On considére un complexe simplicial Q-périodique u.l.f. $\tilde{\Sigma}$ de dimension 2 et on note $\Sigma \to Q$ la désingularisation simpliciale associée à $\tilde{\Sigma}$. L'ensemble X des sommets de Σ est un espace borélien standard muni d'une relation d'équivalence R à classes dénombrables, qui détermine une désingularisation discrète de Q ; étant donnée une mesure de probabilité quasi-invariante μ sur X, on note δ le cocycle de Radon-Nikodym associé à μ.

Définition. *Le* link *en un sommet s de Σ est le graphe fini dont les sommets sont les arêtes de Σ issues de s et les arêtes les triangles de Σ issues de s.*

Théorème 30. *Soit Q un espace singulier de type fini, $\tilde{\Sigma}$ un complexe simplicial Q-périodique u.l.f. de dimension 2, et Σ la désingularisation simpliciale associée. On fixe une mesure quasi-invariante μ sur la transversale des sommets $X = \Sigma^{(0)} \subset \Sigma$ et on considère un nombre réel $\delta_\mu \geqslant 1$ tel que*

$$\delta_\mu^{-1} \leqslant \delta(y,z) \leqslant \delta_\mu$$

pour presque toute arête (y,z) de $\Sigma^{(1)}$. On suppose que presque tout link L de Σ est connexe et vérifie $\lambda_1(L) \geqslant \lambda$, où λ est un nombre réel vérifiant

$$\lambda > \delta_\mu^3/2.$$

Alors Q possède la propriété T de Kazhdan.

Démonstration. On note $K \subset R$ le graphage de R associé au 1-squelette $\Sigma^{(1)}$ de Σ. Si $x \in X$ est un sommet de Σ, on note L_x son link dans Σ, et $\lambda_1(x)$ la plus petite valeur propre non nulle de L_x. Enfin, on note $\tau(y,z)$ le nombre de triangles de Σ contenant l'arête $(y,z) \in \Sigma^{(1)}$, et $\tau(x)$ le nombre de triangles attachés au sommet $x \in X$ dans Σ.

Supposons $\lambda_1(x) \geqslant \lambda$ et considérons une représentation π de R. Soit $\xi : X \to H$ un champ de carré intégrable. Par hypothèse on a, en notant $\overline{\xi}$ l'extension équivariante de ξ à R (définie par $\overline{\xi}_x(y) = \pi(x,y)\xi_y$ pour $x \sim_R y$),

$$E_{\underline{\nu}_x}(\overline{\xi}_x) \leqslant \frac{1}{\lambda} E_{\nu_x}(\overline{\xi}_x)$$

où $\nu_x(y \to z) = 1/\tau(x,y)$ est la marche aléatoire uniforme sur le graphe fini L_x, symétrique relativement à la mesure stationnaire $\mu_x(y) = \tau(x,y)/2\tau(x)$, et $\underline{\nu}_x(y \to z) = \tau(x,z)/2\tau(x)$ est la marche aléatoire stationnaire correspondante. Explicitement, cette inégalité s'écrit

$$\frac{1}{2\tau(x)} \sum_{y,z \in L_x^{(0)}} ||d\xi(y,z)||^2 \tau(x,y)\tau(x,z) \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_{(y,z) \in L_x^{(1)}} ||d\xi(y,z)||^2.$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}\int_X \sum_{(y,z)\in L_x^{(1)}} ||d\xi(y,z)||^2 d\mu(x) &= \int_X \sum_{(y,z)\in K} \sum_{(x,y,z)\in\Sigma} ||d\xi(y,z)||^2 \delta(x,y) d\mu(y) \\ &= \int_X \sum_{(y,z)\in K} ||d\xi(y,z)||^2 \tau_\delta(y,z) d\mu(y)\end{aligned}$$

où

$$\tau_\delta(y,z) = \sum_{(x,y,z)\in\Sigma} \delta(x,y)$$

(la somme porte sur les triangles contenant (y,z)), et

$$\begin{aligned}&\int_X \frac{1}{2\tau(x)} \sum_{y,z\in L_x^{(0)}} ||d\xi(y,z)||^2 \tau(x,y)\tau(x,z) d\mu(x) \\ &\qquad = \int_X \sum_{z\sim y} ||d\xi(y,z)||^2 \sum_{L_x^{(0)}\ni y,z} \frac{1}{2\tau(x)} \tau(x,y)\tau(x,z)\delta(x,y) d\mu(y) \\ &\qquad = \int_X \sum_{z\sim y} ||d\xi(y,z)||^2 \underline{\tau}_\delta(y,z) d\mu(y)\end{aligned}$$

où $\underline{\tau}_\delta(y,z) = \sum_{L_x^{(0)}\ni y,z} \frac{1}{2\tau(x)} \tau(x,y)\tau(x,z)\delta(x,y)$. Posons

$$\tau_\delta(y) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in K} \delta(x,y)\tau(x,y).$$

On a

$$\sum_{z\sim y} \tau_\delta(y,z) = \sum_{z\sim y} \underline{\tau}_\delta(y,z) = 2\tau_\delta(y),$$

de sorte que, en définissant

$$\nu(y\to z) = \frac{\tau_\delta(y,z)}{2\tau_\delta(y)}$$

et

$$\underline{\nu}(y\to z) = \frac{\underline{\tau}_\delta(y,z)}{2\tau_\delta(y)}$$

on obtient une inégalité de Poincaré,

$$\int_X \sum_{(y,z)\in R} ||d\xi(y,z)||^2 \underline{\nu}(y\to z) d\tilde{\mu}(y) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_X \sum_{(y,z)\in R} ||d\xi(y,z)||^2 \nu(y\to z) d\tilde{\mu}(y)$$

où $d\tilde{\mu}(y) = 2\tau_\delta(y) d\mu(y)$. Remarquons que $\tilde{\mu}$ est symétrique relativement à ν et $\underline{\nu}$.

Il est facile de voir que si μ est invariante, alors $\underline{\nu} = \nu^2$ est la marche aléatoire en deux pas associée à ν (ainsi R possède la propriété T si $\lambda > 1/2$, comparer à [49, 40]). Sinon on a

$$\nu^2(y \to z) = \sum_{L_x^{(0)} \ni y,z} \frac{\tau_\delta(y,x)}{2\tau_\delta(y)} \frac{\tau_\delta(x,z)}{2\tau_\delta(x)}.$$

Par hypothèse $\tau_\delta(x,y) \leqslant \delta_\mu \tau(x,y)$, $\tau_\delta(x,z) \leqslant \delta_\mu \tau(x,z)$ et $\tau_\delta(x) \geqslant \tau(x)/\delta_\mu$; donc

$$\nu^2(y \to z) \leqslant \delta_\mu^3 \underline{\nu}(y \to z)$$

et on obtient l'inégalité de Poincaré

$$E_{\nu^2}(\xi) \leqslant \frac{\delta_\mu^3}{\lambda} E_\nu(\xi).$$

Donc R (ainsi que Q) a la propriété T si $\lambda > \delta_\mu^3/2$. ∎

Corollaire 31. *Le 1-squelette d'un complexe simplicial Q-périodique satisfaisant aux hypothèses du théorème ne contient pas de suites de Følner évanescentes.*

En effet la diffusion simple associée à la marche aléatoire sur le 1-squelette de ce complexe possède un trou spectral.

3. L'espace des immeubles $\tilde{A}_2$. Il existe une infinité non dénombrable d'immeubles $\tilde{A}_2$ d'épaisseur fixée. Au cours d'une discussion avec Étienne Ghys, nous avons constaté qu'il était possible de construire une lamination compacte dont l'espace des feuilles coincide avec l'ensemble de ces immeubles. L'existence de cette lamination fut l'une des motivations de cet article. Le link d'un immeuble de type $\tilde{A}_2$ vérifie le critère $\lambda_1 > 1/2$, mais l'existence de mesures invariantes sur cette lamination n'est pas claire *a priori*. Étant donné que nous entreprenons une étude détaillée de cet espace dans [5, 6], en collaboration avec Sylvain Barré, il est inutile que nous en disions davantage ici.

Références

[1] Adams S., Spatzier R., « Kazhdan groups, cocycles, and trees », Amer. J. Math., 112 (2), 271-287, *1990*.

[2] Anantharaman-Delaroche C., « Cohomology of property T groupoids and applications », prépublication, *2003*.

[3] Anantharaman-Delaroche C., Renault J., « Amenable groupoids », Groupoids in analysis, geometry, and physics (Boulder, CO, 1999), 35–46, Contemp. Math., 282, Amer. Math. Soc., Providence, RI, *2001.*

[4] Ballmann W., Świątkowski J., « On L^2-cohomology and property T for automorphism groups of polyhedral cell complexes », Geom. Funct. Anal., 7 (4), 615-645, *1997.*

[5] Barré S., Pichot M., « Trivialité du groupe d'automorphismes d'un immeuble triangulaire générique », en préparation.

[6] Barré S., Pichot M., en préparation.

[7] Bekka B., de la Harpe P., Valette A., « Kazhdan's Property (T) », en préparation.

[8] Borel A., « Cohomologie de certains groupes discretes et laplacien p-adique (d'après H. Garland) », Séminaire Bourbaki, 26e année, Exp. No. 437, pp. 12–35, *1973/1974.* Lecture Notes in Math., Vol. 431, Springer, Berlin, *1975.*

[9] Cartwright D. I., Młotkowski W., Steger T., « Property (T) and $\tilde{A}_2$ groups », Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44 , no. 1, 213–248, *1994.*

[10] Champetier C., « L'espace des groupes de type fini », Topology 39, no. 4, 657–680, *2000.*

[11] Connes A., « Sur la théorie non commutative de l'intégration », Algèbres d'opérateurs, Lecture Notes in Math., 725, 19-143, *1979.*

[12] Connes A., « Non commutative geometry », Academic Press, Inc., San Diego, CA, *1994.*

[13] Connes A., Feldman J., Weiss B., « An amenable equivalence relation is generated by a single transformation », Ergod. Th. & Dynam. Sys., 1, 431-450, *1981.*

[14] Connes A., Krieger W., « Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and approximate finiteness », J. Functional Analysis, 24, 336-352, *1977.*

[15] Connes A., Weiss B., « Property T and asymptotically invariant sequences », Israel J. Math. 37, no. 3, 209–210, *1980.*

[16] Dixmier J., « Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann) », Gauthier-Villars Éditeurs, Paris, *1969.* Deuxième édition, revue et augmentée, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXV.

[17] Feldman J., Moore C., « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I », Trans. Amer. Math. Soc., 234(2), 289-324, *1977.*

[18] Feit W., Higman G., « The nonexistence of certain generalized polygons », J. of Algebra, 1, 114-131, *1964.*

[19] Furman A., « Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices », Ann. of Math. (2) 150, no. 3, 1059–1081, *1999.*

[20] Gaboriau D., « Coût des relations d'équivalence et des groupes », Invent. Math. 139, no. 1, 41–98, *2000.*

[21] Gaboriau D., « Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes », Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 95, 93–150, *2002*.

[22] Gaboriau D., Popa S., « An uncountable family of non orbit equivalent actions of F_n », prépublication, *2004*.

[23] Garland H., « p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups », Ann. of Math. (2), 97, 375-423, *1973*.

[24] Ghys É., « Groupes aléatoires [d'après Misha Gromov,...] », Séminaire Bourbaki, Exp. No. 916, *2003*.

[25] Gromov M., « Random walk in random groups », Geom. Funct. Anal. 13, no. 1, 73–146, *2003*.

[26] Gromov M., « Spaces and questions », Geom. Funct. Anal., Special Volume (Tel Aviv, 1999), Part I, 118-161, *2000*.

[27] de la Harpe P., « Topics in geometric group theory », Chicago Lectures in Math. Series, *2000*.

[28] de la Harpe P., Valette A., « La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts », Astérisque 175, Société Mathématique de France, *1989*.

[29] Hjorth G., Kechris A.S., « Rigidity theorems for actions of product groups and countable Borel equivalence relations », prépublication, *2002*.

[30] Jolissaint P., « Borel cocycles, approximation properties and relative property T », Erg. Th. and Dynam. Syst., 20, 483–499, *2000*.

[31] Jones V.F.R., Schmidt K., « Asymptotically invariant sequences and approximate finiteness », Amer. J. Math., 109, 91-114, *1987*.

[32] Kazhdan D., « Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups », Func. Anal. and its Appl. 1, *1967*.

[33] Kesten H., « Symmetric random walk on groups », Trans. Amer. Math. Soc., 92, 336-354, *1959*.

[34] Kesten H., « Full banach mean values on countable groups », Math. Scand., 7, 146-156, *1959*.

[35] Ledoux M., « The concentration of measure phenomenon », Mathematical Surveys and Monographs, 89. American Mathematical Society, Providence, RI, *2001*.

[36] Matsushima Y., « On the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds », Osaka Math. J., 14, 1-20, *1962*.

[37] Moore C.C., « Ergodic theory and von Neumann algebras », In Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980), 179-226, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., *1982*.

[38] Ollivier Y., « Spectral interpretations of property (T) », manuscrit.

[39] Pansu P., « Formule de Matsushima, de Garland, et propriété T pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles », Bull. Soc. Math. France, 126 (1), 107-139, *1998*.

[40] Pichot M., « Conditions simpliciales de rigidité pour les relations d'équivalence de type II_1 », C.R. Acad. Sci., Paris Ser I, 337, *2003*.

[41] Pichot M., « Sur les espaces mesurés singuliers I », en préparation.

[42] Popa S., « Correspondences », prépublication, *1986*.

[43] Rosenblatt J., « Uniqueness of invariant means for measure preserving transformations », Trans. Amer. Math. Soc., 265, 623-636, *1981*.

[44] Schmidt K., « Asymptotically invariant sequences and an action of $SL(2,\mathbf{Z})$ on the 2-sphere », Israel J. Math., 37, 193-208, *1980*

[45] Schmidt K., « Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group action », Erg. Th. and Dyn Systems, 1, 233-236, *1981*.

[46] Skandalis G., Communication personnelle, *2003*.

[47] Valette A., « Nouvelles approches de la propriété T de Kazhdan », Séminaire Bourbaki, Exp. No. 913, *2002/2003*.

[48] Zimmer R., « Ergodic theory and semi-simple groups », Birkhäuser Verlag, Basel,*1984*.

[49] Żuk A., « La propriété T de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres », C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., 323 (5), 453-458, *1996*.

[50] Żuk A., « Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups », Geom. Funct. Anal. 13 , no. 3, 643–670, *2003*.

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées,
Unité Mixte de Recherche CNRS 5669
46, allée d'Italie,
69364 Lyon Cedex 07, France.
mpichot@umpa.ens-lyon.fr, pichot@ms.u-tokyo.ac.jp.