



## Une axiomatique de la géométrie plane en Coq.

Jean Duprat

► **To cite this version:**

Jean Duprat. Une axiomatique de la géométrie plane en Coq.. JFLA (Journées Francophones des Langages Applicatifs), Jan 2008, Etretat, France. pp.123-136, 2008. <inria-00202836>

**HAL Id: inria-00202836**

**<https://hal.inria.fr/inria-00202836>**

Submitted on 8 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Une axiomatique de la géométrie plane en Coq.

---

J.Duprat<sup>1</sup>

*1: Université de Lyon,  
LIP, ENS de Lyon, CNRS, INRIA, UCBL  
36, Allée d'Italie, 69364 Lyon CEDEX 07, France  
projet GALAPAGOS, ANR 2007  
Jean.Duprat@ens-lyon.fr*

## 1. Introduction.

Dans l'enseignement des mathématiques, la géométrie plane a toujours eu une place importante. Longtemps basée sur les "Elements" d'Euclide [Har02], elle a évolué vers un aspect plus formel avec l'axiomatisation de Hilbert [Hil71]. Toutefois, pour l'apprentissage du raisonnement, la géométrie "à la règle et au compas" conserve le privilège d'offrir le support visuel du tracé de figures.

Avec l'apparition des logiciels d'aide à la preuve, plusieurs travaux ont été réalisés dans le domaine de la géométrie. Proches de nos préoccupations, nous citerons les travaux de Von Plato sur la géométrie plane constructive [vP95], ceux de Dufour et Dehlinger sur la difficulté à implémenter la géométrie de Hilbert en logique intuitionniste [DDS00], ceux de Meikle et Fleuriot sur l'implémentation de l'axiomatique de Hilbert en Isabelle [MF03] et enfin ceux de Guillhot et Bertot sur la formalisation en Coq d'une géométrie de type "lycée" [BGP03]. De l'ensemble de ces travaux se dégagent plusieurs enseignements. Les raisonnements en géométrie plane font un large usage du tiers exclu qui l'éloigne beaucoup de la logique intuitionniste. L'axiomatisation de Hilbert est suffisamment rigoureuse pour être traduite en un système cohérent d'axiomes pour un assistant de preuves, même si cette traduction met en évidence des imprécisions, surtout dans l'oubli de cas particuliers, mais le style très formel est mal adapté à l'étude des figures (c'était d'ailleurs voulu par Hilbert). Enfin construire une géométrie plus proche de celle du "lycée" conduit à adopter des axiomes au fur et à mesure de l'introduction des différentes notions [Gui05].

À notre connaissance, aucun de ces travaux n'a permis l'élaboration d'un outil de démonstration assistée par ordinateur dans le domaine de la géométrie plane utilisé par les professeurs de mathématiques de collège et de lycée. Or, quand on voit le succès du logiciel de constructions de figures géométriques Cabri [Cab06] auprès d'eux, nul doute qu'ils sauraient en faire bon usage. On se propose ici de poser un système d'axiomes dans l'objectif de construire un tel outil.

L'idée première est de séparer ce qui relève du raisonnement de ce qui relève de la construction de figures. Par exemple, le fait pour un point d'être situé entre deux autres points ou pour deux angles d'être congrus relève de la première catégorie. Dans la seconde, nous rangerons le fait de tracer une droite à partir de deux points distincts, de tracer un cercle étant connus son centre et son rayon ou de construire un point par intersection de deux figures. Le logiciel *Coq* [Coq05] distingue la sorte *Prop* de la sorte *Set*, nous l'utiliserons en rangeant les premiers dans *Prop* et les seconds dans *Set*. Bien que basé sur le calcul des constructions, *Coq* autorise l'ajout d'un axiome de tiers exclu dans *Prop* sans introduction d'incohérence. Nous pourrions ainsi avoir des raisonnements analogues à ceux de la géométrie plane usuelle. De plus, le fait de ranger le tracé des figures dans *Set* permettra "l'extraction" de la construction d'une figure correspondant à un théorème de la même façon que l'on extrait un algorithme de calcul d'une preuve. Par exemple, de la preuve du théorème de Bolyai affirmant que trois points non alignés sont cocycliques on pourra extraire la construction du centre du cercle passant par trois points comme intersection de deux médiatrices.

Les constructeurs de figures seront la règle pour les droites, le compas pour les cercles et l'intersection pour les points. Les propriétés se déduiront des axiomes définissant le fait pour trois points d'être orientés dans le sens des aiguilles d'une montre (*Clockwise*), définissant la distance entre deux points et l'angle de droites. La propriété *Clockwise* avait déjà été choisie par Knuth [Knu91] pour l'étude des enveloppes convexes mais son axiomatique était insuffisante pour engendrer exactement la géométrie plane. On montre que le système ainsi posé permet de retrouver toute l'axiomatique de Hilbert, à l'exception bien évidemment de l'axiome de continuité. Cette démonstration a été entièrement rédigée en *Coq* et ajoutée aux contributions (<http://coq.inria.fr/contribs/geometry.html>).

L'article se présente comme suit. L'axiomatique du plan est décrite au chapitre 2 (orientation) et au chapitre 3 (mesures). Les constructions sont explicitées au chapitre 4. Le chapitre 5 s'attache à justifier cette construction avec l'aide de l'assistant de preuves *Coq*. Enfin, le chapitre 6 décrit les travaux qu'il reste à accomplir pour développer cet outil pédagogique : d'une part, l'écriture d'une bibliothèque de tactiques correspondants aux actions et assertions élémentaires dans le développement d'une preuve papier en géométrie au lycée, d'autre part une interface avec l'utilisateur et avec un logiciel de dessin de figures.

## 2. Les propriétés du plan.

### 2.1. Le plan.

Le plan est un ensemble de points, contenant au moins deux points distincts  $O$  et  $U$ .

**Axiome 1.1**  $\exists O \in Plan,$

**Axiome 1.2**  $\exists U \in Plan,$

**Axiome 1.3**  $O \neq U.$

Une figure du plan est définie par une propriété caractéristique vérifiée par les points de la figure. On dira qu'un point appartient à la figure ou que la figure contient (ou passe) par le point. Deux figures sont dites superposées si elles contiennent les mêmes points.

### 2.2. L'orientation.

On définit une propriété sur les triplets de points appelée *Clockwise* par les axiomes suivants. Lorsqu'un triplet  $(A, B, C)$  vérifie la relation *Clockwise*, on dira que  $C$  est à droite de  $(A, B)$  et on notera  $\circlearrowright ABC$ . On choisit de définir une relation stricte excluant des triplets de points non distincts deux à deux ou des points alignés.

**Axiome 2.1** l'orientation est stable par permutation circulaire des points,

$$\forall A B C, \circlearrowright ABC \Rightarrow \circlearrowright BCA$$

**Axiome 2.2** l'orientation est modifiée par une transposition, les orientations dans le sens direct de  $ABC$  et de  $BAC$  s'excluent ; il est possible de n'avoir ni une orientation, ni l'autre, ce sera le cas lorsque les trois points seront alignés,

$$\forall A B C, \neg \circlearrowright ABC \vee \neg \circlearrowright BAC$$

**Axiome 2.3** tout triplet de points  $(A, B, C)$  satisfait l'un des quatre cas :

1.  $C$  est à droite de  $(A, B)$ ,
2.  $C$  est à droite de  $(B, A)$ ,
3. tout point  $M$  à droite de  $(A, B)$  est à droite de  $(A, C)$ ,
4. tout point  $M$  à droite de  $(B, A)$  est à droite de  $(B, C)$  :

$$\forall A B C, \circ ABC \vee \circ BAC \vee (\forall M, \circ ABM \Rightarrow \circ ACM) \vee (\forall M, \circ BAM \Rightarrow \circ BCM).$$

**Axiome 2.4** pour tout triplet  $(A, B, C)$  vérifiant *Clockwise*, tout point  $M$  est à droite de  $(A, B)$ ,  $(B, C)$  ou  $(C, A)$  :

$$\forall A B C, \circ ABC \Rightarrow (\forall M, \circ ABM \vee \circ BCM \vee \circ CAM).$$

**Axiome 2.5** si tout point  $M$  à droite de  $(A, B)$  est à droite de  $(A, C)$  alors tout point  $M$  à droite de  $(B, A)$  est à droite de  $(C, A)$  :

$$\forall A B C, (\forall M, \circ ABM \Rightarrow \circ ACM) \Rightarrow (\forall M, \circ BAM \Rightarrow \circ CAM).$$

**Axiome 2.6** si tout point  $M$  à droite de  $(A, B)$  est à droite de  $(C, D)$  et si  $A \neq B$  alors tout point  $M$  à droite de  $(D, C)$  est à droite de  $(B, A)$  :

$$\forall A B C D, A \neq B \Rightarrow (\forall M, \circ ABM \Rightarrow \circ CDM) \Rightarrow (\forall M, \circ DCM \Rightarrow \circ BAM).$$

### 2.3. Quelques définitions.

L'orientation permet de définir plusieurs propriétés usuelles des points du plan.

#### 2.3.1. Le demi-plan.

Le demi-plan à droite de  $(A, B)$  est la figure formée par les points  $M$  tels que  $(A, B, M)$  vérifie la relation *Clockwise*. Le demi-plan ainsi défini est ouvert. On remarque que le demi-plan à droite de  $(A, A)$  est vide grâce à l'axiome 2.2.

Le demi-plan à gauche de  $(A, B)$  n'a pas besoin d'être défini car c'est le demi-plan à droite de  $(B, A)$ .

#### 2.3.2. La même orientation.

Le couple  $(A, B)$  a la même orientation que le couple  $(C, D)$  si le demi-plan à droite de  $(A, B)$  est contenu dans le demi-plan à droite de  $(C, D)$ . Dans cette relation, les couples  $(A, B)$  et  $(C, D)$  ont la même direction et le même sens, mais, en plus  $C$  et  $D$  ne sont pas à droite de  $(A, B)$ . Pour tous couples  $(A, B)$  et  $(C, D)$  tels que  $(A, B)$  a la même orientation que  $(C, D)$  si  $A = B$  alors  $C$  et  $D$  sont quelconques mais si  $A \neq B$  alors  $C \neq D$ . La relation n'est pas symétrique.

#### 2.3.3. La même direction.

Les couples  $(A, B)$  et  $(C, D)$  ont même direction si l'un des couples  $(A, B)$  ou  $(B, A)$  a même orientation que l'un des couples  $(C, D)$  ou  $(D, C)$  ou l'inverse.

#### 2.3.4. La demi-droite.

La demi-droite  $]A, B)$  est la figure formée des points  $M$  tels que  $(A, B)$  a même orientation que  $(A, M)$ . Lorsque  $A = B$ , cet ensemble est le plan tout entier.

Les deux derniers cas de l'axiome 2.3 peuvent se lire :

3.  $C$  est sur la demi-droite  $]A, B)$ ,
4.  $C$  est sur la demi-droite  $]B, A)$ .

#### 2.3.5. Colinéarité.

Le point  $C$  est dit colinéaire aux points  $A$  et  $B$  s'il n'est ni à droite, ni à gauche de  $(A, B)$ . Grâce à l'axiome 2.3,  $C$  est colinéaire à  $A$  et  $B$  si  $C$  appartient à la demi-droite  $]A, B)$  ou à la demi-droite  $]B, A)$ .

### 2.3.6. La relation "entre".

Le point  $C$  est situé entre les points  $A$  et  $B$  s'il est distinct de  $A$  et si  $(A, C)$  et  $(C, B)$  ont la même orientation, on note  $A - C - B$ . Cette définition correspond à l'appartenance à l'intervalle ouvert  $]A, B[$ . Paradoxalement, l'appartenance de  $C$  à l'intervalle fermé  $[A, B]$  s'exprime par le fait que  $B$  appartienne à la demi-droite  $]A, C)$  et que  $A$  appartienne à la demi-droite  $]B, C)$ . Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner tous les cas :  $A - C - B$ ,  $A = C \neq B$ ,  $A \neq B = C$ ,  $A = B = C$  lorsque  $C \in [A, B]$ ,  $C - A - B$ ,  $A - B - C$ ,  $A = B \neq C$  lorsque  $C \notin [A, B]$ .

## 3. Les mesures du plan.

### 3.1. La distance.

Il existe un ensemble des longueurs du plan  $\mathbb{L}$  muni d'une loi de composition interne notée  $+$  et d'une relation notée  $<$  et une application des couples de points dans cet ensemble appelée distance et notée  $(A, B) \mapsto AB$  vérifiant les axiomes suivants :

**Axiome 3.1** Toutes les distances d'un point à lui-même sont égales.

$$\forall A B, AA = BB$$

**Axiome 3.2** La distance est symétrique.

$$\forall A B, AB = BA$$

**Axiome 3.3 : relation de Chasles** Pour tout point  $B$  appartenant à l'intervalle fermé  $[A, C]$ , la distance  $AC$  est égale à la somme des distances  $AB$  et  $BC$ .

$$\forall A B C, B \in [A, C] \Rightarrow AC = AB + BC$$

**Axiome 3.4 : réciproque de la relation de Chasles** Pour tous points  $A, B$  et  $C$  tels que la distance  $AC$  est égale à la somme des distances  $AB$  et  $BC$ , le point  $B$  appartient à l'intervalle fermé  $[A, C]$ .

$$\forall A B C, AC = AB + BC \Rightarrow B \in [A, C]$$

**Axiome 3.5** La relation  $<$  est compatible avec la relation *entre*.

$$\forall A B C, B \neq C \wedge (A, B) \text{ même orientation } (B, C) \Rightarrow AB < AC$$

**Axiome 3.6** Réciproquement, la relation *entre* est compatible avec la relation  $<$ .

$$\forall A B C, C \in [AB] \wedge AB < AC \Rightarrow B \neq C \wedge (A, B) \text{ même orientation } (B, C)$$

**Axiome 3.7 : inégalité triangulaire** Si  $A, B$  et  $C$  sont trois points non alignés alors  $AC < AB + BC$ .

$$\forall A B C, \circlearrowleft ABC \Rightarrow AC < AB + BC$$

**Axiome 3.8** La distance est archimédienne. On définit le produit externe d'une distance par un naturel  $n$  comme l'itéré de la somme de cette distance par elle-même  $n$  fois.

$$\forall A B C, A \neq B \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, AC < n.AB$$

### 3.2. Remarques sur la distance.

L'ensemble  $\mathbb{L}$  va être isomorphe à l'extension de  $\mathbb{Q}^+$  par la racine carrée. Toutefois, son caractère numérique n'est pas nécessaire dans une géométrie à la règle et au compas.

Par définition, on note  $O_{\mathbb{L}}$  la distance  $OO$ . D'après l'axiome 3.1, toute distance  $AA$  est égale à  $O_{\mathbb{L}}$ . Son caractère d'élément neutre découle de la relation de Chasles.

La relation de Chasles est la véritable définition de l'addition des longueurs. On pourrait choisir comme axiome que l'aboutement des longueurs est indépendant de la droite choisie comme support et définir l'opération d'addition à partir de l'aboutement.

De même, la relation *entre* induit la relation  $<$ , on pourrait choisir comme axiome que le report de longueurs sur n'importe quel support ordonne toujours les extrémités dans la même relation *entre* et en déduire une définition de  $<$ .

L'énoncé textuel de l'axiome 3.5 illustre l'idée exprimée par cet axiome, mais sa formulation est plus générale. En effet, la relation *entre* est définie (§2.3.6) par : le point  $B$  est situé entre les points  $A$  et  $C$  s'il est distinct de  $A$  et si  $(A, B)$  et  $(B, C)$  ont la même orientation. L'hypothèse de l'axiome 3.5 est : le point  $B$  est distinct de  $C$  et  $(A, B)$  et  $(B, C)$  ont la même orientation. Cette hypothèse ajoute le cas  $A = B$  à celui où  $B$  est entre  $A$  et  $C$ . Ce cas particulier permettra de démontrer que  $O_{\mathbb{L}}$  est la plus petite distance.

La recherche d'hypothèses minimales dans l'axiome 3.6 conduit à choisir  $C \in [AB)$  pour exprimer le fait que les trois points sont alignés et que  $A$  n'est pas entre  $B$  et  $C$ . C'est l'hypothèse  $AB < AC$  qui imposera  $A \neq C$ .

De même, l'hypothèse  $\circ ABC$  suffit dans l'axiome 3.7 à couvrir les cas  $A, B$  et  $C$  non alignés. Si les points  $A, B$  et  $C$  sont orientés dans l'autre sens, alors l'hypothèse  $\circ CBA$  impliquera la même inégalité triangulaire à la symétrie de la distance près.

### 3.3. Les angles.

Un angle est défini par un point, le sommet  $A$  et deux demi-droites issues de  $A$ , les côtés  $]AB)$  et  $]AC)$ , l'angle n'est bien défini que si  $A \neq B$  et  $A \neq C$ . Toutefois, afin d'alléger l'écriture, un angle est défini pour tout triplet et seules les manipulations exigent  $A \neq B$  et  $A \neq C$ .

Il existe un ensemble des angles  $\mathbb{A}$  et une application qui associe un élément de  $\mathbb{A}$  à tout triplet de points, cette application est notée :  $(A, B, C) \mapsto \widehat{ABC}$ , elle vérifie les axiomes suivants :

**Axiome 4.1** L'angle est un angle de demi-droites, il est indépendant de l'ordre des côtés et du point choisi sur chaque côté.

$$\forall A B C D E, A \neq B \wedge A \neq C \wedge D \in ]AB) \wedge E \in ]AC) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EAD},$$

**Axiome 4.2 : SAS** Deux triangles ayant deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés respectivement égaux ont leurs troisièmes côtés égaux.

$$\forall A B C D E F, A \neq B \wedge A \neq C \wedge AB = DE \wedge AC = DF \wedge \widehat{BAC} = \widehat{EDF} \Rightarrow BC = EF,$$

**Axiome 4.3 : SSS** Deux triangles ayant leurs trois côtés égaux ont leurs angles respectifs égaux.

$$\forall A B C D E F, A \neq B \wedge A \neq C \wedge AB = DE \wedge AC = DF \wedge BC = EF \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EDF},$$

**Axiome 4.4** Dans un triangle, lorsque l'on reporte les deux angles de part et d'autre du troisième sommet, les côtés de ces angles reportés sont opposés.

$$\forall A B C D E, \circ ABC \wedge \circ ACD \wedge \circ ADE \wedge \widehat{BAC} = \widehat{ACD} \wedge \widehat{DAE} = \widehat{ADC} \Rightarrow B - A - E.$$

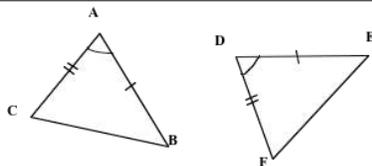


FIG. 1 – Illustration de l'axiome 4.2.

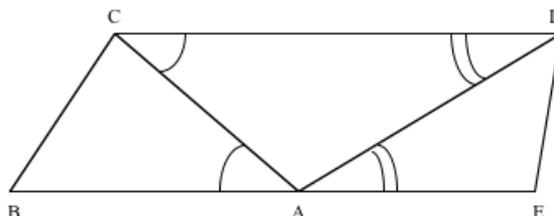


FIG. 2 – Illustration de l'axiome 4.4.

### 3.4. Remarques sur les angles.

L'axiome 4.2 est souvent appelé premier cas d'égalité des triangles. En choisissant des segments de longueur unitaire (longueur  $OU$ ), on pourrait l'utiliser pour définir une mesure des angles par une longueur (deux fois le sinus de l'arc moitié). De même que pour les longueurs, le choix de postuler a priori l'existence de l'ensemble  $\mathbb{A}$  simplifie la formalisation grâce à l'égalité dans  $\mathbb{A}$ .

L'axiome 4.3 est appelé troisième cas d'égalité des triangles. Il permet de transporter un angle à la règle et au compas.

L'axiome 4.4 s'énonce généralement sous la forme : la somme des angles d'un triangle est un angle plat, mais nous avons choisi de ne pas faire apparaître dès les axiomes la somme de deux angles. Cet axiome est nécessaire pour avoir une géométrie euclidienne dans laquelle, par un point, on ne peut faire passer qu'une parallèle à une droite donnée.

## 4. Les constructions du plan.

Le code *Coq* de ces constructions est donné dès maintenant pour expliciter les définitions.

### 4.1. Les droites.

#### 4.1.1. Définition.

La droite est un type dépendant d'une figure, défini inductivement :

```

Inductive Line : Figure -> Type :=
| Ruler : forall A B : Point, A <> B -> Line (Collinear A B)
| SuperimposedLine : forall F1 F2 : Figure,
    Superimposed F1 F2 -> Line F1 -> Line F2.

```

Le cas de base est obtenu par le constructeur *règle* qui, à partir de deux points  $A$  et  $B$  distincts, construit la droite représentant la figure formée des points colinéaires à  $A$  et  $B$ .

Le cas inductif permet de construire la droite associée à une figure superposée à une figure représentée par une droite. Par exemple, définissons la médiatrice de deux points distincts  $A$  et  $B$  comme étant la figure formée par les points équidistants à  $A$  et  $B$ . Construisons les deux triangles équilatéraux  $ABC$  et  $ABD$  de part et d'autre de  $(AB)$ . La preuve que la figure des points colinéaires à  $C$  et  $D$  est superposée à la médiatrice de  $A$  et  $B$  suffit à affirmer que cette médiatrice est une droite que l'on peut construire à partir des points  $C$  et  $D$ .

La coïncidence entre l'ensemble des points colinéaires à  $A$  et  $B$  et la droite tracée avec une règle passant par  $A$  et  $B$  est en effet un postulat de base de la géométrie à la règle et au compas.

#### 4.1.2. Points de construction.

La définition d'une droite, en remontant la chaîne des inductions jusqu'au cas de base, permet de définir les deux points  $A$  et  $B$  qui ont servi à construire cette droite avec la *règle*. Ces points sont appelés points de construction de la droite. On écrira alors la droite :  $(AB)$ . De plus, la définition d'une droite fournit une preuve que les points de construction sont distincts.

#### 4.1.3. Propriétés des droites.

Deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si les couples de points de constructions  $(A, B)$  et  $(C, D)$  ont la même direction. On écrira  $(AB) \parallel (CD)$ .

Deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont sécantes si elles ne sont pas parallèles. On écrira  $(AB) \not\parallel (CD)$ .

### 4.2. Les cercles.

#### 4.2.1. Définition.

Le cercle est un type dépendant d'une figure, défini inductivement :

```
Inductive Circle : Figure -> Type :=
| Compass : forall C A B : Point, A <> B ->
    Circle (fun M : Point => (Distance C M) = (Distance A B))
| SuperimposedCircle : forall F1 F2 : Figure,
    Superimposed F1 F2 -> Circle F1 -> Circle F2.
```

Le cas de base est obtenu par le constructeur *compas* qui, à partir de trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ ,  $A$  et  $B$  étant distincts, construit le cercle représentant la figure formée des points dont la distance à  $C$  est égale à  $AB$ .

Le cas inductif permet de construire le cercle associé à une figure superposée à une figure représentée par un cercle.

#### 4.2.2. Points de construction.

La définition d'un cercle, en remontant la chaîne des inductions jusqu'au cas de base, permet de définir le point  $C$  et les deux points  $A$  et  $B$  qui ont servi à construire ce cercle avec le *compas*. Ces points sont appelés points de construction du cercle, le point  $C$  est appelé *centre du cercle* et la distance  $AB$  est appelée *rayon du cercle*.

De plus, la définition d'un cercle fournit une preuve que le rayon est non nul. Le cas dégénéré du cercle de rayon nul n'a pas été retenu car il aurait introduit de nombreux cas particuliers dans les intersections.

### 4.2.3. Propriétés des cercles.

Deux cercles de centre  $C$  et  $C'$  et de rayon  $AB$  et  $A'B'$  sont sécants si les distances  $CC'$ ,  $AB$  et  $A'B'$  respectent la spécification du triangle, c'est-à-dire les trois inégalités triangulaires :

$$(CC' < AB + A'B') \wedge (AB < A'B' + CC') \wedge (A'B' < CC' + AB).$$

Une droite représentant la figure ( $D$ ) est un diamètre du cercle de centre  $C$  si elle passe par  $C$ , c'est-à-dire si  $C \in (D)$ .

### 4.3. Les intersections.

On va donner une définition plus restrictive de l'intersection que la notion ensembliste. On ne définira que les intersections de droites et cercles permettant de construire effectivement des points du plan.

#### 4.3.1. Définitions.

L'intersection est un type dépendant d'une figure, paramétré par deux figures  $F1$  et  $F2$ , défini par cas :

**intersection de deux droites :** si les figures  $F1$  et  $F2$  sont représentées par deux droites sécantes, *l'intersection de deux droites* construit la représentation de la figure formée des points communs aux deux droites,

**intersection de deux cercles :** si les figures  $F1$  et  $F2$  sont représentées par deux cercles sécants, *l'intersection à droite de deux cercles* construit la représentation de la figure formée des points communs aux deux cercles situés à droite de la droite des centres, *l'intersection à gauche de deux cercles* construit la représentation de la figure formée des points communs aux deux cercles situés à gauche de la droite des centres,

**intersection d'un cercle et d'un diamètre :** si la figure  $F1$  est représentée par un cercle et la figure  $F2$  est représentée par une droite et si cette droite est un diamètre du cercle, *l'intersection positive du cercle et de son diamètre* construit la représentation de la figure formée des points communs au cercle et à la droite situés dans la direction des points de constructions de la droite par rapport au centre du cercle, *l'intersection négative du cercle et de son diamètre* construit la représentation de la figure formée des points communs au cercle et à la droite situés dans la direction opposée aux points de constructions de la droite par rapport au centre du cercle.

#### 4.3.2. Code Coq de cette définition.

```
Inductive Intersection (F1 F2 : Figure) : Figure -> Type :=
```

```
| InterLines : forall (D1 : Line F1) (D2 : Line F2),
  SecantLines F1 F2 D1 D2 ->
  Intersection F1 F2 (fun M : Point => F1 M /\ F2 M)
```

```
| InterCirclesClock : forall (G1 : Circle F1) (G2 : Circle F2),
  SecantCircles F1 F2 G1 G2 ->
  Intersection F1 F2 (fun M : Point => F1 M /\ F2 M /\
    Clockwise (Center F1 G1) (Center F2 G2) M)
```

```
| InterCirclesAntiClock : forall (G1 : Circle F1) (G2 : Circle F2),
  SecantCircles F1 F2 G1 G2 ->
  Intersection F1 F2 (fun M : Point => F1 M /\ F2 M /\
```

```

Clockwise (Center F2 G2) (Center F1 G1) M)

| InterDiameterCirclePos : forall (D : Line F1) (G : Circle F2),
  SecantDiameterCircle F1 F2 D G ->
  Intersection F1 F2 (fun M : Point => F1 M /\ F2 M /\
    EquiOriented (LineA F1 D) (LineB F1 D) (Center F2 G) M)

| InterDiameterCircleNeg : forall (D : Line F1) (G : Circle F2),
  SecantDiameterCircle F1 F2 D G ->
  Intersection F1 F2 (fun M : Point => F1 M /\ F2 M /\
    EquiOriented (LineB F1 D) (LineA F1 D) (Center F2 G) M).

```

### 4.3.3. Points d'intersection.

L'axiome de construction des points à la règle et au compas affirme que chacune des intersections définies ci-dessus construit un point unique du plan.

**Axiome 5.1** il existe une application associant un unique point à chaque intersection.

$$\forall F1 F2 F, \text{Intersection } F1 F2 F \Rightarrow \exists! M \in F.$$

Cet axiome s'écrit en *Coq*, (*Unicity M F* est le prédicat "tout point de *F* est égal au point *M*") :

```

Axiom PointDef : forall F1 F2 F : Figure,
  Intersection F1 F2 F -> {M : Point | F M /\ Unicity M F}.

```

### 4.3.4. Remarques

Cet axiome permet de construire les points à la règle et au compas satisfaisant la propriété de la figure *F*. De plus, il permet de démontrer l'égalité entre deux points en montrant qu'ils satisfont chacun une même propriété caractéristique d'intersection.

L'intersection d'une corde et d'un cercle n'a pas été définie car elle peut se ramener à l'intersection d'un cercle et de son symétrique par rapport à cette corde.

## 5. Implémentation en *Coq*.

L'assistant de preuves *Coq*, basé sur le calcul des constructions, fait la distinction entre la sorte *Prop* des propositions logiques dans laquelle la logique classique est acceptable et la sorte *Set* des objets construits.

### 5.1. Le point de départ.

L'idée initiale consistait à définir la géométrie par trois types mutuellement inductifs dans *Set* :

- les points, soit *O*, soit *U* soit le résultat d'une intersection,
- les droites par construction à la règle à partir de deux points,
- les cercles par construction au compas à partir de trois points.

Cependant cette construction demandait l'insertion de préconditions de type *Prop*,  $A \neq B$  pour la droite (*AB*) ou pour le cercle de centre *C* et de rayon *AB*, (*D*) et (*D'*) sécantes pour l'intersection de droites (en utilisant l'orientation), (*C*) et (*C'*) sécants pour l'intersection de cercles (en utilisant les longueurs) et enfin (*D*) diamètre de (*C*) pour l'intersection d'une droite et d'un cercle (en utilisant la colinéarité). Il fallait donc

dans une même structure avoir des définitions dans *Set* et d'autres dans *Prop* qui s'appelaient récursivement et mutuellement.

Une telle insertion n'est pas possible dans *Coq*.

## 5.2. Définitions, axiomes et constructions.

On pose l'existence des trois ensembles, l'ensemble des points du plan *Plan*, l'ensemble des distances  $\mathbb{L}$  et l'ensemble des angles  $\mathbb{A}$ , des deux points *O* et *U*, de la propriété d'orientation *Clockwise* et des fonctions *Distance* et *Angle*. Les axiomes d'orientation et de métrique sont énoncés comme des propriétés (dans la sorte *Prop*).

Les droites, les cercles et les intersections sont des constructions, ce sont des types dépendants de figures de la sorte *Set*. Leurs définitions inductives font appel respectivement aux constructeurs *regle*, *compas* et *intersection* de droites sécantes, de cercles sécants et de cercle et diamètre. Leur code *Coq* a été donné aux paragraphes 4.1.1, 4.2.1. et 4.3.2. Enfin la fonction associant un point unique à chaque intersection est posée comme un axiome (cf §4.3.3.).

## 5.3. Correction de cette construction.

La présence d'axiomes dans une construction *Coq* lui fait perdre la garantie de cohérence.

Ce ne sont pas tant les axiomes sur les propriétés qui risquent d'introduire une incohérence, elles sont vraies dans la géométrie de Hilbert. On pourrait écrire la construction de Hilbert de la géométrie jusqu'à la preuve de l'existence de deux orientations possibles, puis démontrer tous les axiomes sur les propriétés de notre système, cette preuve en *Coq* de correction serait entièrement dans la sorte *Prop*.

Par contre, l'axiome associant un point construit unique à chaque intersection est beaucoup plus délicat dans la mesure où c'est lui qui permet de contourner la difficulté énoncé au paragraphe 5.1.1. Il ferme en quelque sorte la boucle de la construction mutuellement inductive des points, droites et cercles envisagée initialement. Il affirme l'existence constructive du point d'intersection, rappelons que l'ensemble des points est de type *Set*, dès lors que l'on peut prouver une propriété d'intersection de type *Prop* entre deux figures. La question de la cohérence se focalise donc sur cet axiome, et elle est pour l'instant ouverte.

## 5.4. Complétude de la construction.

Pour vérifier que cet ensemble d'axiomes définit bien la géométrie euclidienne du plan à la règle et au compas, on démontre qu'il implique l'axiomatique de Hilbert, à l'exception, évidemment, de l'axiome de continuité de Cantor (ou celui de Dedekind). On obtient ainsi une garantie de complétude, la géométrie ainsi construite est celle des points constructibles du plan.

La preuve de l'implication des axiomes de Hilbert (à l'exception de celui de continuité) a entièrement été rédigée en utilisant l'assistant de preuves *Coq*. La plupart des axiomes de Hilbert s'obtiennent aisément, soit directement à partir des axiomes de propriétés, soit à partir de constructions très simples.

### 5.4.1. Les axiomes de Hilbert.

Ils sont classiquement divisés en cinq rubriques.

- Les axiomes d'incidence précisent les relations entre points et droites. Par exemple, l'existence de trois points non alignés se démontre en construisant le triangle équilatéral de base  $[OU]$ .
- Les axiomes d'ordre sont relatifs à la relation *entre* sur trois points. Par exemple, étant donnés deux points distincts *A* et *B*, il existe un troisième point *C* tel que *B* est entre *A* et *C*. L'intersection du cercle de centre *B* et de rayon *AB* avec la droite  $(AB)$  construit un tel point. Autre exemple, la propriété de Pasch, elle est développée ci-dessous.

- Les axiomes de congruence définissent les rapports d'égalité entre les longueurs de segments ou mesures d'angles. Ces axiomes sont très proches de ceux énoncés au chapitre 3.
- Les axiomes de continuité sont au nombre de deux, le premier exprimant que la droite est archimédienne, le second que toute suite de segments emboîtés de longueurs tendant vers zéro converge sur un point (énoncé de Cantor). Seul le premier est démontré en utilisant l'axiome 3.8.
- Le postulat d'Euclide s'énonce : par un point donné, il ne passe qu'une parallèle à une droite donnée. Sa démonstration est développée ci-dessous.

#### 5.4.2. La propriété de Pasch.

Elle s'énonce ainsi : étant donnés trois points non colinéaires  $A, B, C$  et une droite  $(D)$  ne passant par aucun de ces points, si  $(D)$  coupe le segment  $[AB]$ , elle coupe l'un des deux autres segments  $[BC]$  ou  $[CA]$ .

La preuve s'établit par cas (en utilisant l'axiome 2.4) selon l'orientation des points de constructions de la droite  $(D)$  et des points  $A, B, C$ . Pour chaque cas, on utilise le fait qu'une droite ayant deux de ses points orientés différemment par rapport aux points de construction d'une seconde droite coupe celle-ci.

#### 5.4.3. Le postulat d'Euclide.

La construction de la parallèle à une droite passant par un point donné, lorsque celui-ci est extérieur à la droite se fait en construisant au compas le quatrième sommet du parallélogramme ayant pour sommets ce point et les points de construction de la droite.

La preuve que cette droite ne coupe pas l'autre n'est pas très longue, elle se fait par l'absurde en utilisant le fait que le centre du parallélogramme est centre de symétrie échangeant une droite en l'autre.

La réciproque est beaucoup plus longue (fig.3). On montre qu'une droite  $(D)$  distincte de la parallèle  $(CE)$  à la droite  $(AB)$  construite grâce au parallélogramme  $BACE$  coupe la droite  $(AB)$ . On montre tout d'abord l'existence d'un point  $I$  de  $(D)$  du même côté que  $B$  par rapport à  $(CE)$ , puis on construit le point  $J$  de  $(BC)$  tel que  $(IJ)$  est parallèle à  $(CE)$ . La distance étant archimédienne, il existe un entier  $n \neq 0$  tel que l'extrémité  $K$  du segment  $CK = n.CJ$  soit de l'autre côté de  $(AB)$  que  $C$  (au-delà de  $B$ ). On construit le point  $L$  de  $(D)$  tel que  $CL = n.CI$ . Il reste à montrer que  $(KL)$  est parallèle à  $(IJ)$ , cette démonstration utilisant des égalités d'angles et l'axiome 4.4, pour conclure que la droite  $(D)$  ayant deux points, un de chaque côté de  $(AB)$  est sécante à  $(AB)$ .

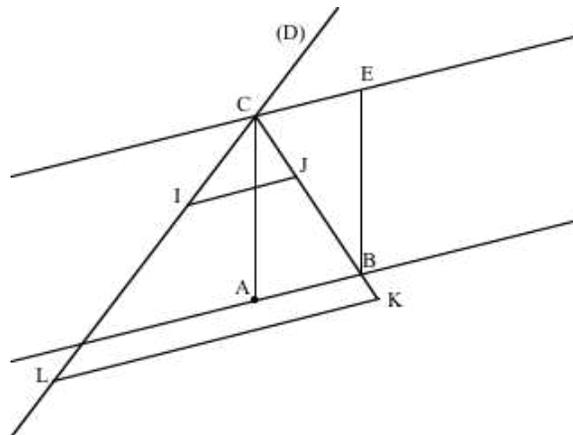


FIG. 3 – Unicité de la parallèle à la droite  $(AB)$  menée par le point  $C$ .

## 5.5. A propos de l'axiome de continuité.

L'axiome de continuité permet de parler de droite réelle (c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre les points d'une droite et l'ensemble des nombres réels). L'existence de ces points de coordonnées irrationnelles transcendantales ou racines de polynômes de degré supérieur à 2 sont utiles en analyse (étude de courbes) ou en mécanique (roulement sans frottement). A ma connaissance, l'étude de la géométrie plane se concentre sur les points constructibles.

Dans notre construction, l'ensemble des points est posé au départ. Rien n'interdit d'imaginer qu'il contient tous les points de coordonnées réelles, puisque tous les axiomes sont vrais dans le plan réel. Toutefois, les seuls points sur lesquels on travaille, sont, à part les points  $O$  et  $U$  donnés au départ, les points que l'on peut construire par intersection de droites et de cercles. Cela est conforme à notre volonté de formaliser la géométrie plane euclidienne à la règle et au compas. Puisque d'une preuve, on veut extraire la construction d'une figure à la règle et au compas, il n'est pas question de démontrer l'existence d'un polygone régulier de  $n$  côtés pour tout  $n$ .

## 6. Perspectives et développements.

### 6.1. Améliorations et simplifications.

Le système décrit ci-dessus est exactement celui utilisé dans la preuve de l'implication des axiomes de Hilbert. Sans modifier les principes qui ont guidé son élaboration, un certain nombre de simplifications et d'améliorations peuvent y être apportées. Il ne sera pas nécessaire de réécrire toute la preuve, il suffira de montrer que le système amélioré entraîne le système décrit ci-dessus.

Par exemple, il est clair qu'il n'est pas nécessaire de générer les deux intersections de deux cercles, l'intersection à droite de la droite des centres suffit. Pour obtenir l'intersection à gauche, il suffira de changer l'ordre des cercles dans le constructeur d'intersection de cercles. Il en va de même pour l'intersection d'un cercle et d'un diamètre.

Un autre exemple consiste à séparer l'axiome 4.1 (sur l'indépendance de l'angle par rapport aux points définissant les côtés) en deux axiomes, l'un exprimant la symétrie :

$$\forall A B C, \widehat{BAC} = \widehat{CAB}$$

et l'autre l'indépendance par rapport à un des points définissant un côté :

$$\forall A B C D, A \neq B \wedge D \in ]AB) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DAC}.$$

Cette solution diminuera le nombre de preuves du style  $A \neq B$  dans les démonstrations.

### 6.2. Écriture d'un jeu de tactiques.

*Cog* offre la possibilité aux utilisateurs de définir des tactiques spécialisées sur des tâches spécifiques au domaine étudié. Nous allons utiliser cette facilité pour simplifier l'écriture des preuves de deux façons.

La première est l'automatisation de la preuve des petites hypothèses présentes dans nombre de théorèmes et dont la preuve est généralement omise car triviale dans une démonstration à la main. Ce sont des preuves portant sur la distinction entre deux points, sur l'alignement ou le non alignement de trois points, sur l'ordre de trois points alignés, sur des manipulations triviales d'égalité de longueurs ou d'angles. Ces tactiques ne devront pas être bloquantes, et laisser à l'utilisateur le soin de la preuve lorsque celle-ci ne pourra être directement déduite de l'environnement.

La seconde consiste à réunir en une seule tâche une construction (de point, de droite ou de cercle). Ces constructions se déduisent de théorèmes ayant une conclusion de type spécification d'un de ces objets. Par

exemple, sous les hypothèses  $D1$  est une droite,  $D2$  est une droite et  $D1$  et  $D2$  sont sécantes on sait construire un point  $M$  vérifiant les propriétés  $M \in D1$ ,  $M \in D2$  et  $\forall N, N \in D1 \wedge N \in D2 \Rightarrow N = M$ . La tactique cherchera à vérifier automatiquement les hypothèses, en cas d'échec, demandera à l'utilisateur de le faire, puis rajoutera dans l'environnement l'objet construit sous un nom donné en paramètre de la tactique et les propriétés vérifiées par cet objet.

### 6.3. Interface utilisateur.

Cette interface aura pour but de réaliser avec *Coq* en arrière plan, des démonstrations de géométrie plane dans un cadre aussi proche que possible de celui des démonstrations papier sans avoir besoin de connaître le langage et le fonctionnement de *Coq*. L'étude de cette interface s'effectue sur les quatre points suivants.

#### 6.3.1. La fenêtre des figures.

Des logiciels de tracés interactifs de figures géométriques existent déjà tel que Geoview ou GeoGebra. Il faudrait en choisir un qui s'interconnecte avec l'environnement de la preuve en *Coq*. La séparation entre constructions (points, droites, cercles) et propriétés facilitera le travail de traduction des informations. Il faudra également choisir la meilleure option lorsque le logiciel de dessin ne parviendra pas à tracer une figure satisfaisant toutes les hypothèses.

#### 6.3.2. La fenêtre des hypothèses et celle des conclusions.

Il faudra également traduire la liste des prémisses formant l'environnement et la liste des buts à démontrer en des phrases en langue française formant les hypothèses et les conclusions du problème en cours. Ce traducteur devra être facilement incrémenté pour prendre en compte de nouvelles définitions.

#### 6.3.3. La fenêtre de la démonstration.

Dans l'autre sens, l'utilisateur devra pouvoir écrire sa démonstration en une suite de phrases en français qui seront automatiquement traduites en tactiques et commandes *Coq*. Pour simplifier le travail, on envisage de contraindre l'utilisateur à n'employer que des phrases types. Par exemple, la phrase : *Soit I l'intersection des droites (AB) et (D)*, serait interprétée pour tenter d'appliquer la tactique d'intersection de deux droites. Une boîte de messages d'erreur permettra d'afficher les raisons des échecs. Un succès générera une nouvelle liste de buts avec des listes de prémisses pour chacun d'entre eux.

Dans une version plus élaborée, il pourrait être intéressant d'ajouter une fenêtre des lemmes utilisables sur le but courant. Cette fenêtre présenterait une traduction française de ces instances de lemmes.

#### 6.3.4. L'enrichissement en définitions.

Enfin, dernière exigence à fixer au cahier des charges : le logiciel devra pouvoir accepter de nouvelles définitions, par exemple la bissectrice d'un angle. Si la définition est donnée en *Coq*, il n'y a pas de difficulté, par exemple, la bissectrice sera définie par sa construction à la règle et au compas. Par contre, si l'on veut que la définition soit faite en français, il faudra donner des phrases types permettant de faire des définitions tant de nouvelles propriétés (par exemple être un triangle rectangle) que de nouvelles constructions (comme la bissectrice) voire de nouvelles mesures (comme l'aire).

En effet ce logiciel ne se conçoit que comme un outil susceptible d'accueillir les contributions des utilisateurs dans tous les domaines : nouveaux théorèmes et leurs démonstrations, meilleures démonstrations de théorèmes déjà en place, nouvelles notions.

## 7. Conclusion.

Nous avons présenté une axiomatique de la géométrie euclidienne plane, dans laquelle une orientation et une métrique sont définies par des axiomes, puis les constructions des droites à la règle, des cercles au compas et des points par intersection de ces figures sont définies. Il est démontré à l'aide de l'assistant de preuves *Coq* que de ce système se déduisent tous les axiomes de Hilbert à l'exception de celui de continuité.

Ce système devrait être une bonne base pour la réalisation d'un outil d'aide à la démonstration en géométrie plane destiné aux professeurs et aux élèves des lycées. En effet, il permet de développer les raisonnements en s'appuyant sur la construction de figures.

## Références

- [BGP03] Y. BERTOT, F. GUILHOT AND L. POTTIER. *Visualizing Geometrical Statements with GeoView*. In User Interfaces for THEorem Provers (UITP'2003), vol. 103 of Electr. Notes Theor. Comput. Sci. pp. 49-65, 2003.
- [Cab06] CABRILLOG. *Cabri 3D : logiciel de géométrie interactive 3D*. <http://www.cabri.com>, 2006.
- [Coq05] COQ DEVELOPMENT TEAM, INRIA AND LRI. *The Coq Proof Assistant Reference Manual, 2005*. <http://coq.inria.fr/doc/main.html>.
- [DDS00] C. DEHLINGER, J.-F. DUFOURD AND P. SCHRECK. *Higher-Order Intuitionistic Formalization and Proofs in Hilbert's Elementary Geometry*. In Automated Deduction in Geometry 2000, vol. 2061 of LNCS, pp. 306-324, Springer-Verlag, 2000.
- [Gui05] F. GUILHOT. *Formalisation en Coq et visualisation d'un cours de géométrie pour le lycée*. Revue des Sciences et Technologies de l'Information, TSI, vol. 24, Langages applicatifs, pp. 1113-1138, Lavoisier, 2005.
- [Har02] R. HARTSHORNE. *Geometry : Euclid and beyond*. Ed. Springer, 2002.
- [Hil71] D. HILBERT. *Les fondements de la géométrie*. Éd. P. Rossier, Dunod, 1971.
- [Knu91] D. KNUTH. *Axioms and Hulls*. Number 606 in LNCS. Springer-Verlag, 1991.
- [MF03] L. I. MEIKLE AND J. D. FLEURIOT. *Formalizing Hilbert's Grundlagen in Isabelle/Isar*. In TPHOLS'2003, vol. 2758 of LNCS, pp. 319-334, Springer-Verlag, 2003.
- [Qua92] A. QUAIFFE. *Automated Development of Fundamental Mathematical Theories*. Éd. Kluwer, 1992.
- [vP95] J. VON PLATO. *The axioms of constructive geometry*. Annals of Pure and Applied Logic, 76, pp. 169-200, 1995.