ETUDE DES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU NIVEAU DE L'ECOLE MOYENNE (11-15) DANS LE CAS DE L'ALGEBRE EN FRANCE ET AU LIBAN

Rabih El Mouhayar

COTUTELLE DE THESE ENTRE L'UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2 ET L'UNIVERSITÉ LIBANAISE – FACULTÉ DE PEDAGOGIE

THESE
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2 ET L'UNIVERSITÉ LIBANAISE

SPÉCIALITÉ : SCIENCES DE L'ÉDUCATION (DIDACTIQUES DES MATHÉMATIQUES)

Présentée et soutenue publiquement
par
Rabih EL MOUHAYAR
Le 6 décembre 2007

ETUDE DES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU NIVEAU DE L'ECOLE MOYENNE (11-15) DANS LE CAS DE L'ALGEBRE EN FRANCE ET AU LIBAN

Codirigée par **Andrée TIBERGHIEN et Sylvie COPPE et Hicham BANNOUT**

Composition du jury :

Président	
Ali MNEIMNEH	Professeur des mathématiques, Université Libanaise, Beyrouth
Rapporteurs	
Viviane DURAND-GUERRIER	Maître de conférences, IUFM de l'Académie de Lyon
Naim ROUADI	Professeur associé, Université de Balamand, Tripoli
Examinateurs	
Andrée TIBERGHIEN	Directrice de Recherche, CNRS
Sylvie COPPE	Maîtresse de conférences, IUFM de l'Académie de Lyon
Hicham BANNOUT	Maître de conférence, Université Libanaise, Beyrouth

Thèse préparé au sein de
Laboratoire ICAR (Interactions, Corpus, Apprentissages, Représentations), UMR 5191 et le Laboratoire de l'Université Libanaise – Faculté de Pédagogie

REMERCIMENTS

Je remercie tout d'abord Sylvie Coppé et Andrée Tiberghien pour le travail qu'ils m'ont permis de faire et de mener à bout. Grace à eux, j'ai découvert l'univers de la recherche en didactique. Je leur suis reconnaissant pour leurs conseils et remarques qui m'ont permis d'avancer et d'affirmer mon point de vue.

Je remercie également Hicham Bannout pour sa collaboration et son appui au Liban.

Je remercie Viviane DURAND-GUERRIER et Naim ROUADI qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie Ali MNEIMNEH, qui a accepté d'être le président du jury de soutenance de cette thèse.

Je suis très reconnaissant à Dahmany, Gilbert, Joly et Mouna pour avoir accepté aussi librement de m'ouvrir les portes de leurs classes.

Je remercie tous les thésards du laboratoire ICAR avec qui j'ai passé d'excellents moments, autant pendant nos discussions sérieuses que nos échanges amicaux.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres de ce laboratoire avec qui j'ai pu partager des instants très agréables, au hasard des couloirs, ou des bureaux…

Un clin d'œil à mon amie Marie, qui m'a trouvé une classe pour aller filmer et pour son soutien

Je remercie mes amis, surtout Sassine, pour son support et son aide

Un sourire à mon meilleur ami Gilbert, qui m'a accompagné dans ses prières …

A mes parents et ma sœur qui m'ont permis et donné envie de faire cette thèse et pour leur grande patience et leur soutien constant.

Et Enfin, à Elsy, ma fiancée, pour sa patience et son aide et son soutien.

Table des matières

Chapitre 1
Introduction, problématique et méthodologie

1. Introduction et problématique

1.1. Introduction

Depuis quelques années, les recherches portant sur les pratiques de classes ont pris une importance grandissante en didactique des mathématiques. Plus spécifiquement, des recherches autour de l'enseignant ont commencé à partir des années 90 notamment en lien avec le développement de la formation des maîtres qui en France se passe dans les IUFM. Le développement de cette orientation de recherche s'est également produit dans de nombreux pays.

Notre travail de thèse se situe dans cette orientation ; il porte sur le lien entre des pratiques de classes et les apprentissages des élèves à l'école moyenne appelée collège en France et au Liban[1]. Nous avons choisi de travailler sur les pratiques des professeurs durant les phases de correction en calcul littéral. Nous nous situons dans une perspective de comparaison entre les deux pays : la France et le Liban. Nous visons une meilleure connaissance, basée sur des résultats empiriques, des pratiques d'enseignement de l'algèbre dans chaque pays. Nous visons également l'établissement d'hypothèses sur des liens entre les pratiques d'enseignement et les apprentissages des élèves.

Le thème "Calcul littéral"

Pour restreindre notre champ d'étude nous avons choisi le thème du calcul littéral pour trois raisons :

Tout d'abord, la maîtrise et l'utilisation du calcul littéral est l'un des domaines essentiels du cours de mathématiques en collège. En fait, plus de deux semaines, ou l'équivalence de dix séances, sont consacrées à ce thème. Or, d'après notre expérience comme professeur du collège et d'après les recherches en didactique des mathématiques concernant l'algèbre, en général, et le calcul littéral en particulier, nous constatons que les élèves ont beaucoup de difficultés dans ce domaine.

La plupart des recherches réalisées, à la fois en France et à l'étranger, restent centrées soit sur le savoir enseigné soit sur les difficultés et les erreurs des élèves (cf. §1-2). En revanche, peu de chercheurs ont travaillé sur les pratiques de l'enseignant et sur les interactions en classe pendant des séances d'algèbre ; nous citons : Schmidt, 1996, Tirosh et al., 1998 ; Coulange, 2000 ; Lenfant, 2002 ; Robert 2001.

[1] Nous utilisons dans la suite de la thèse le terme collège.

Par ailleurs, quel est le degré d'importance du calcul littéral dans le programme ? En effet, actuellement, les programmes officiels des mathématiques, aussi bien en France qu'au Liban, mettent l'accent sur la résolution de problèmes. Toutefois, souvent on a besoin de modéliser le problème en une mise en équations dont la résolution nécessite la connaissance d'un certain nombre de règles du calcul littéral. Ainsi, la maîtrise des techniques algébriques relatives au calcul littéral est cruciale en mathématiques.

Les phases de correction

Nous définissons les phases de corrections comme une organisation de la classe, mise en place par le professeur (après qu'il a donné un exercice ou un problème aux élèves, soit en classe soit à la maison, et en supposant que les élèves l'ont fait, l'ont commencé, ou l'ont regardé). Le but de cette organisation dépend évidemment du choix de l'enseignant ; en effet, cette phase peut être destinée à indiquer aux élèves si leur réponse est juste ou fausse, la bonne réponse directement, les erreurs commises ou encore si la procédure à suivre pour obtenir la bonne réponse.

Pour notre recherche, nous avons fait le choix des phases de correction pour plusieurs raisons. Tout d'abord, ces phases semblent particulièrement propices à la mise à jour d'éléments de savoir et de connaissances, notamment par la confrontation entre ce que l'élève a fait et ce que le professeur attend. Elles permettent de donner à voir des erreurs et/ou des procédures de validation des élèves ainsi que leur prise en compte et leur traitement par le professeur. Le professeur peut donc interpréter les erreurs voire les anticiper. Cela peut influencer le choix de ses interventions et les aides intermédiaires qu'il peut fournir pendant les démarches de solution, spécifiquement avec des élèves en difficulté. Notons qu'en classe, on peut mettre en évidence un nombre important de phases de correction sur le chapitre "Calcul littéral".

D'ailleurs, les professeurs explicitent que les élèves font beaucoup d'erreurs en calcul littéral (cf. chapitre 7, § 1). De plus, ils ont des difficultés à gérer ces erreurs et leur correction. On sait bien que les phases de correction peuvent être des moments difficiles pour les élèves et pour le professeur. En effet, certains élèves s'ennuient soit parce qu'ils ont compris et ne voient pas l'intérêt de la correction, soit parce qu'au contraire ils n'ont pas compris et que les explications données ne sont pas suffisantes. Le professeur doit donc gérer ces différentes réactions d'élèves et de plus, il doit faire avancer le temps didactique et ne peut pas consacrer tout le temps aux élèves qui n'ont pas compris.

Les élèves peuvent mobiliser des connaissances de divers ordres : connaissances communes relatives au vocabulaire, connaissances sur les règles de calcul numérique et connaissances sur la distributivité, etc.(cf. chapitre 3, § 3). Ainsi, une autre difficulté des professeurs réside dans l'identification des procédures mathématiques mises en œuvre par leurs élèves. Par suite, la question est centrée sur l'analyse pertinente des erreurs. Nous remarquons ainsi que les erreurs peuvent avoir plusieurs formes d'interprétations. Par exemple : un professeur peut estimer que l'erreur provient d'une non-maîtrise du calcul sur les nombres relatifs tandis que c'est une erreur qui revient à des pratiques dans le contexte d'arithmétique ou à d'autres raisons (cf. chapitre 8, § 2).

En outre, que l'élève donne une bonne réponse ou une réponse erronée, celui-ci dispose d'un certain moyen de validation qui est propre à lui, auquel le professeur a du mal à accéder. Dans ce sujet, Coppé, 1993, a montré, que contrairement à ce que les professeurs pensent, les élèves mettaient en œuvre des vérifications mais que celles-ci faisaient partie de la composante privée de leur travail et qu'elles n'étaient, en général, pas données à voir au professeur.

On voit donc que la phase de correction dans la classe est important. Ceci dit, nous ne connaissons pas de recherches en didactique des mathématiques qui se sont intéressée à ce sujet.

Les classes de 4ème en France et 5ème au Liban

D'après les analyses des programmes (chapitre 2, § 2) nous avons décidé de limiter notre étude aux classes de 4ème en France et 5ème au Liban. En fait, c'est dans ces classes où il y a un vrai enseignement du calcul littéral où les expressions contiennent des lettres ; les manuels consacrent un chapitre à ce thème. De plus, l'utilité du calcul littéral est présentée également, notamment dans la résolution de problèmes via la mise en équation.

Afin de cerner notre recherche, nous avons décidé d'étudier le développement et/ou la réduction des expressions littérales. Nous avons fait ce choix parce que la tâche (ou les tâches) "développer et/ou réduire" est (sont) travaillée(s) en classes de 4ème en France et de 5ème au Liban. Nous attirons l'attention sur le fait que la plupart des exercices dans le chapitre portant sur le calcul littéral est limitée à ces deux tâches.

Notons que nous n'avons pas trouvé de recherche en didactique concernant notre objet ; d'où la nécessité d'analyser le savoir en question, les tâches éventuelles et les procédures correspondantes. Toutefois, l'analyse des programmes montre que la tâche "factoriser une expression" est demandée en 5ème au Liban, mais elle est absente en 4ème en France. Il y a déjà des travaux en didactique portant sur l'enseignement de la factorisation et les difficultés correspondantes des élèves (Tonnelle, 1980, Abou Raad, 2006).

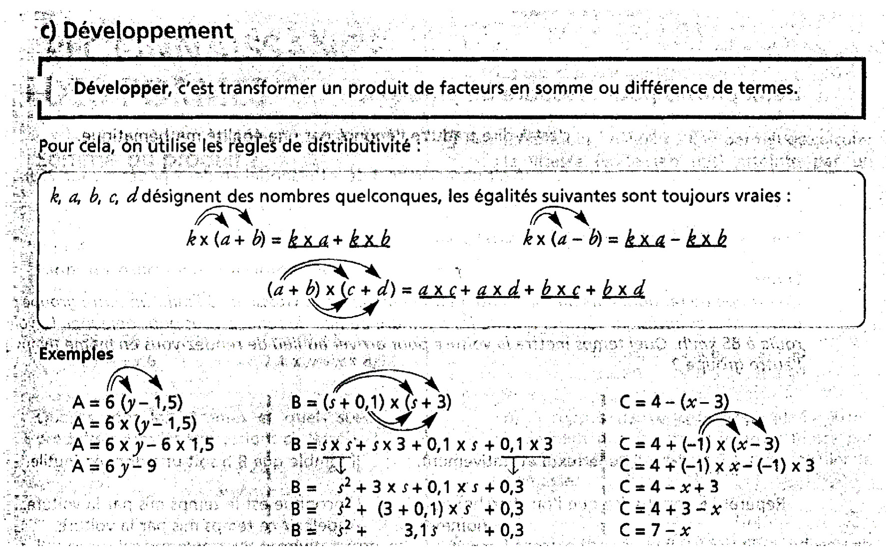
1.2. Les références théoriques

Notre étude embrasse divers pôles : 1) Le savoir préconisé dans les programmes officiels, celui présenté dans les manuels et celui mobilisé par les élèves ; 2) Le savoir faire des élèves et des professeurs ; 3) Les procédures de validation des élèves ; 4) Les interprétations des erreurs par les professeurs. Par suite, nous avons eu recours à divers cadres théoriques pour faire nos analyses.

Pour analyser les manuels et les séances de classes ordinaires, nous utilisons la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1998, 1999). Nous utiliserons particulièrement la notion d'organisation praxéologique mathématique et didactique qui vise à analyser toute action humaine en termes de bloc pratico-technique qui comprend des types de tâches et des techniques pour réaliser ce type de tâches (qui constitue un savoir-faire) et le bloc technologico-théorique qui justifie la technique (ordinairement identifié comme un savoir). Nous détaillerons ces notions au chapitre 2.

De plus, nous utiliserons souvent la notion d'ostensifs développée par (Bosch et al., 1999) qui indique que dans toute activité humaine, il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs. Les écritures, symboles, mots, discours, graphismes et gestes mobilisés dans l'activité mathématique sont des objets ostensifs et ont une caractère matériel et perceptible. D'autre part, les objets non ostensifs sont des notions, concepts, idées, etc.. Par exemple, écrire 2+3=5 peut être vu comme une simple manipulation d'objets ostensifs, mais ne saurait s'effectuer intentionnellement sans l'intervention de certains objets non ostensifs spécifiques, telle la notion d'addition. Or dans le calcul littéral, nous pouvons mettre en évidence certains ostensifs qui seront particulièrement utilisés comme les symboles d'opération, le signe =, les lettres pour désigner les variables, les parenthèses, les graphismes comme les flèches, les traits qui soulignent ou qui entourent, les couleurs ainsi que les gestes qui peuvent être faits par le professeur ou les élèves. Tous ces ostensifs sont mobilisés pour permettrent un travail sur le savoir mathématique ou pour aider à une meilleure compréhension.

Par exemple, on peut voir sur l'extrait suivant, provenant de la partie du manuel mathématique Magnard, 4ème, 2002, comment les auteurs utilisent des ostensifs (flèches, termes souligné) pour indiquer aux élèves ce qu'il faut faire.



c) Développement

Développer, c'est transformer un produit de facteurs en somme ou différence de termes.

Pour cela, on utilise les règles de distributivité :

k, a, b, c, d désignent des nombres quelconques, les égalités suivantes sont toujours vraies :

$k \times (a+b) = \underline{k \times a} + \underline{k \times b}$ $\quad$ $k \times (a-b) = \underline{k \times a} - \underline{k \times b}$

$(a+b) \times (c+d) = \underline{a \times c} + \underline{a \times d} + \underline{b \times c} + \underline{b \times d}$

Exemples

$A = 6\,(y - 1{,}5)$	$B = (s + 0{,}1) \times (s + 3)$	$C = 4 - (x - 3)$
$A = 6 \times (y - 1{,}5)$		
$A = 6 \times y - 6 \times 1{,}5$	$B = s \times s + s \times 3 + 0{,}1 \times s + 0{,}1 \times 3$	$C = 4 + (-1) \times (x - 3)$
$A = 6y - 9$		$C = 4 + (-1) \times x - (-1) \times 3$
	$B = s^2 + 3 \times s + 0{,}1 \times s + 0{,}3$	$C = 4 - x + 3$
	$B = s^2 + (3 + 0{,}1) \times s + 0{,}3$	$C = 4 + 3 - x$
	$B = s^2 + 3{,}1 s + 0{,}3$	$C = 7 - x$

Figure n°1 : Extrait dans la partie « Essentiel », page 209. Magnard, 4ème, 2002.

Nous pouvons voir que la propriété de développer est encadrée et le mot développer est en gras, ce qui a pour but de souligner son importance. il a également une référence forte à la forme de l'expression ("produit", "somme", "différence")

Pour les erreurs spécifiques au calcul littéral, nous prenons en compte les travaux sur l'algèbre. Des études ont porté sur l'analyse de ce savoir mathématique et notamment sur l'articulation (en termes de ruptures et de continuités) entre l'arithmétique et l'algèbre (Vergnaud, 1988, 1989, Chevallard, 1985, 1989, 1990 ou Gascon, 1994). D'autres travaux ont porté sur les statuts des différents objets (lettres, signe égal, signes opératoires, etc.) comme ceux de Kieran, 1990 ou Bednarz et al., 1996, et enfin d'autres sur les erreurs (Behr et al., 1980, Booth, 1988, Drouhard, 1992, Grugeon, 1995 et Kirshner et al., 2004). Nous avons donc fait une synthèse rapide de ces travaux sur lequel notre propre recherche prend appui : il ne s'agit pas de présenter en détail les différentes études mais, plutôt d'en pointer les éléments qui ont pu nous servir directement. Ainsi, nous avons organisé cette synthèse autour des difficultés des élèves liées aux techniques de résolution des tâches de type développer et/ou réduire une expression littérale en soulignant les erreurs classiques relatives à ces tâches.

Ensuite, pour les interprétations par les professeurs des productions des élèves, notamment leurs erreurs nous prenons la typologie de DeBlois, 2006 qui définit des milieux[2] auxquels les professeurs sont sensibles et se réfèrent pour interpréter les erreurs des élèves.

Enfin, pour avoir une typologie pour les types de validation que les élèves peuvent mettre en œuvre nous nous sommes inspiré du travail de Coppé, 1993 qui définit des types de vérifications mises en œuvre par les élèves.

1.3. Les questions de recherche

A partir des aspects de notre problématique et de nos cadres théoriques, nous formulons nos questions de recherche de la façon suivante :

- Comment le professeur organise–t–il les phases de correction à la fois des points de vue du savoir mathématique et des interactions avec les élèves ? Comment gère-t-il les interactions avec l'élève qui fournit la réponse et avec la classe ? Quels sont ses régularités et invariants dans les phases de correction du point de vue des interactions avec les élèves ?
- Quels sont les éléments que les élèves peuvent mettre en œuvre pour montrer la validité d'une réponse? Comment les procédures de validation des élèves sont-elles prises en compte par les professeurs ?
- Quels sont les types d'aide que le professeur fournit quand il interagit avec ses élèves ? Quelle connaissance a-t-il des erreurs des élèves ?
- Y a-t-il des différences entre les classes étudiées au Liban et en France dans la gestion des phases de corrections :
    - sur le plan mathématique
    - sur le plan des interactions.

2. Méthodologie

Nous présenterons une méthodologie détaillée, avant chaque étude, pour mieux comprendre son cadre. Ici, nous aborderons la méthodologie générale pour répondre à nos questions de recherche.

---

[2] Je précise ces milieux dans le chapitre concernant les connaissances des professeurs sur les erreurs des élèves.

Pour faire une analyse du savoir relatif au calcul littéral et comparer des mêmes objets d'enseignement à des niveaux analogues dans des institutions différentes, nous avons étudié d'abord les programmes officiels du collège dans les deux pays, puis le chapitre portant sur le calcul littéral dans les manuels de mathématiques de $4^{ème}$ en France et $5^{ème}$ au Liban. Ensuite, nous avons élaboré puis diffusé deux questionnaires voisins, contenant des parties semblables, un pour les élèves et l'autre pour les professeurs, et qui visent à étudier leurs représentations (utilisation et définition) sur des tâches majoritairement utilisées en calcul littéral. Ces questionnaires, que nous avons proposés aux élèves de $4^{ème}$ et $3^{ème}$ à Lyon et aux élèves de $5^{ème}$ et $4^{ème}$ à Beyrouth ainsi qu'aux professeurs du collège, ont été élaborés en se basant sur les analyses des programmes et des manuels.

Nous avons fait une synthèse des recherches en didactique sur l'algèbre pour avoir une idée des difficultés et des erreurs classiques des élèves en calcul littéral. Cette étude, nous a permis d'élaborer un questionnaire pour les élèves, afin de mieux connaître leurs procédures de validation, et un autre pour les professeurs selon lequel nous avons pu spécifier leurs interprétations des erreurs. Les deux questionnaires contiennent des tâches semblables, qui apparaissent fréquemment en calcul littéral, avec les mêmes erreurs classiques effectuées par des élèves fictifs.

Ensuite, les résultats obtenus d'après ces différentes études nous ont permis de faire des hypothèses de lien entre les pratiques des professeurs et les apprentissages des élèves pour les tester dans les analyses effectives des classes ordinaires. Ainsi, nous avons filmé dans quatre classes toute la séquence portant sur le calcul littéral (2 classes de $4^{ème}$ en France et 2 classes de $5^{ème}$ au Liban) (cf. chapitre 7, § 2). Nous avons mené des entretiens avec les quatre professeurs filmés, avant qu'ils commencent le chapitre "Calcul littéral", pour avoir une idée de leurs connaissances sur les difficultés et les erreurs des élèves ainsi que leurs représentations de développer et/ou réduire une expression littérale. Ensuite, nous avons décrypté et découpé l'ensemble des séances, pour obtenir une vue d'ensemble, qui correspond à la première analyse que fait le chercheur quand il travaille avec les données correspondant à une séance (Tiberghien et al. 2007) Cette vue d'ensemble inclut sept dimensions permettant d'avoir une idée générale sur une séance :

> "an intermediate representation of each lesson that can serve to guide as someone tries to understand a lesson, and that can be coded itself" (projet TIMSS)

D'après ce synopsis nous avons obtenu des résultats généraux sur la séquence d'enseignement. Ils nous ont permis ensuite d'accéder facilement aux phases de correction par le biais du logiciel Transana[3], qui nous a permis également de repérer les régularités observées dans la pratique de chaque professeur. Des analyses plus pointues ont été finalement menées afin de vérifier nos hypothèses.

3. Plan de la thèse

Ce document s'articule en trois parties.

[3] Transana est un outil de transcription et d'analyse qualitative des données audio/vidéo développée par le Centre de Recherche en Education de Wisconsin (WCER).

Dans la première partie, nous examinons le savoir relatif au calcul littéral à partir des programmes officiels du collège et des manuels mathématiques et des questionnaires pour les professeurs et les élèves. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons, aux procédures de validations des élèves, à leurs taux d'échec ainsi qu'aux interprétations des professeurs sur les erreurs classiques des élèves. La dernière partie nous amènera à analyser de près les pratiques de classes ordinaires pendant les phases de correction : des analyses statistiques nous permettront de déceler les régularités dans les conduites des professeurs et nous conclurons par des études de cas plus pointus.

3.1. Partie I

Cette partie comprend deux chapitres. Pour démarrer notre travail, nous avons donc fait une étude du savoir en jeu. Le premier chapitre porte ainsi sur les analyses des programmes officiels et des manuels du collège en France et au Liban.

Dans le deuxième chapitre nous étudions les définitions de "développer /réduire /simplifier une expression littérale" qu'ont les élèves et les professeurs pour voir comment ces consignes fonctionnelles sont utilisées avec certaines expressions littérales.

3.2. Partie II

Cette partie comprend trois chapitres. Le premier présente une synthèse des difficultés des élèves en calcul littéral. Pour comprendre leurs difficultés et erreurs notre champ d'analyse est assez large, bien que non exhaustif. Cela nous permet d'identifier les erreurs classiques des élèves en calcul littéral et d'élaborer des questionnaires pour les élèves et les professeurs.

Dans le deuxième chapitre nous étudions les procédures de validation des élèves et leurs erreurs, alors que le troisième sera consacrée aux connaissances des professeurs sur les difficultés et erreurs des élèves.

3.3. Partie III

Dans cette dernière partie nous nous centrons notamment sur des pratiques de classes ordinaires dans les phases de correction. Le premier chapitre présente les entretiens avec les professeurs, la méthode de prise de données et d'analyse vidéo ainsi que les profils des professeurs et les résultats généraux sur la séquence d'enseignement dans chaque classe. Dans le deuxième chapitre, nos études de cas portent d'une part, sur le profil de professeur et d'autre part sur des corrections des erreurs classiques dans lesquels de forts taux d'échec sont enregistrés. Finalement, notre étude nous conduit à formuler des hypothèses sur les pratiques de classiques utiles dans la perspective d'ultérieures études comparatives entre la France et le Liban.

PARTIE I

Chapitre 2
Etude du savoir relatif au calcul littéral

L'objet principal de ce chapitre est d'effectuer une analyse du savoir relatif au calcul littéral. Nous allons étudier les programmes officiels du collège et les manuels dans les classes de 4ème en France et 5ème au Liban portant sur le calcul littéral. Nous avons choisi de commencer par cela pour pouvoir cerner notre étude.

Dans notre recherche, nous abandonnons l'étude de la résolution des équations en tant que telle ; nous nous centrons sur le calcul littéral qui permet de résoudre des équations mais qui peut être aussi un objet d'enseignement. Nous entendons par "calcul littéral", le calcul sur des expressions algébriques contenant des lettres. En fait, il s'agit d'un jeu formel portant sur des écritures symboliques. (Chevallard & al., 1984)

> "L'algèbre constitue pour les élèves une rupture épistémologique importante d'avec l'arithmétique. Cette rupture mérite une analyse détaillée, car beaucoup d'élèves n'entrent pas facilement dans le jeu des manipulations symboliques." Vergnaud, 1988

> "Par "introduction à l'algèbre", on peut entendre plusieurs choses distinctes :
> - mise en équation de problèmes arithmétiques simples et résolution par l'algèbre ;
> - règles élémentaires de traitement et de transformation des équations ;
> - première explicitation des concepts de fonction et de variable ;
> - mise en évidence de certaines propriétés structurales des ensembles de nombres, notamment l'ensemble des relatifs et de l'ensemble des rationnels ;
> - etc…
>
> Il est raisonnable de penser que c'est un savant équilibre de ces différentes composantes conceptuelles et des situations qui leur donnent du sens qui peut permettre aux élèves de comprendre en profondeur la fonction, la structure et le fonctionnement du raisonnement algébrique. Mais quel équilibre ?" Vergnaud, 1989

Les règles de calcul littéral sont celles qui transforment une expression en une nouvelle tout en conservant l'équivalence entre les deux.

Dans une première partie, nous décrivons le cadre théorique que nous avons utilisé pour faire les analyses des manuels.

Dans la deuxième, nous explicitons l'évolution des programmes concernant le calcul littéral de 1971 à 1995 en classe de 4ème en France. Puis, nous analysons le savoir relatif au calcul littéral dans les programmes officiels au collège dans les deux pays. Dans la troisième partie, nous étudions le chapitre portant sur le calcul littéral dans des manuels mathématiques de la classe de 4ème en France et 5ème au Liban. Pour terminer, nous prolongeons les études faites par une étude lexicographique des termes employés dans les manuels.

1. La théorie Anthropologique du Didactique

Nous nous situons dans le cadre de la théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1998, 1999), notamment pour analyser les manuels et, plus tard, pour les séances de classe (dans nos synopsis).

Dans l'enseignement d'un objet mathématique (pour Chevallard son essai de théorisation va au delà de l'enseignement des mathématiques), Chevallard parle de la praxéologie – la *praxis*, le savoir-faire méthodologique (les tâches et les techniques) – et le *logos*, le discours correspondant au savoir en jeu (technologie-théorie, ou le savoir déclaratif)

Tâche et Techniques

La sémantique du mot "tâche" utilisé dans cette théorie est plus large que celle du français, tout en désignant un objet relativement précis. Dans la notion de tâche est inscrit le principe de coordination de plusieurs opérations simples (par exemple, multiplier deux facteurs 2×3) afin d'atteindre un but plus complexe (par exemple, multiplier des facteurs *et* appliquer la propriété de distributivité pour calculer une expression littérale telle que 2(3+x), ce qui équivaut à effectuer la tâche "développer l'expression 2(3+x)").

Une tâche relève d'un type de tâche, à savoir une typologie d'opérations mathématiques finalisées à un but précis (résultat) (Par exemple "réduire l'expression 2x+4x" et "réduire 5x+6x" sont deux tâches qui appartiennent au même type). D'où c'est la différence du résultat final qui permet de distinguer entre une typologie de tâche d'une autre. Par exemple, ce qui permet de distinguer entre "développer une expression littérale" et "réduire une expression littérale", c'est que dans le premier cas on vise à obtenir une somme de termes à partir d'un produit de facteurs et dans l'autre cas le but sera, par contre, celui d'obtenir un résultat plus simplifié (moins de termes possibles) par rapport à l'expression initiale (par exemple 6x+5x=11x).

Pour accomplir une tâche, il faut mettre en œuvre une certaine technique, c'est-à-dire une manière de faire pour réaliser la tâche. Toute technique peut se décomposer en un ensemble de gestes dans lequel la plupart peuvent eux-mêmes être décrits, analysés comme des tâches ou des sous-tâches.

Nous soulignons que le niveau de "type de tâche", est défini et catégorisé selon le point de vue que le chercheur adopte :

> "Le problème de la délimitation des tâches dans une pratique institutionnelle donnée reste ouvert et variera selon que l'on adopte le point de vue de l'institution où se déroule la pratique ou bien celui d'une institution extérieure d'où l'on observe l'activité pour la décrire dans un but précis" (Bosch et al., 1999, pp. 84)

D'une part, pour un même type de tâche on peut donc avoir ensemble de techniques différentes. Pour le type de tâche développer une expression littérale, par exemple, on peut avoir plusieurs techniques qui varient suivant les années (suivant le niveau de la classe et suivant le professeur). D'autre part, pour des types de tâches différents on peut y avoir mêmes techniques. De plus, une technique peut devenir un type de tâche.

Selon ce cadre théorique, nous pouvons alors caractériser un savoir-faire correspondant par des tâches de même type (par exemple calculer la valeur numérique d'une expression littérale) et des techniques pour réaliser ces tâches.

Technologie et Théorie

Le discours qui rend la technique compréhensible et qui le justifie s'appelle une technologie de la technique. Chevallard a souligné que, parfois, certains éléments technologiques sont insérés dans la technique :

> "*Ainsi en va-t-il traditionnellement en arithmétique élémentaire, où le même petit discours a une double fonction, technique et technologique, en ce qu'il permet tout à la fois de trouver le résultat demandé (fonction technique) et de justifier que c'est bien là le résultat attendu (fonction technologique), comme lorsqu'on dit : « si 8 sucettes coûtent 10 F, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront 3 fois plus, soit 3 fois 10 F.* " (Chevallard, 1999, pp. 226)

De plus, la technologie nécessite à son tour une justification rationnelle. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la théorie. En d'autres termes, "*la théorie est la technologie de la technologie*" comme l'explicite Chevallard. D'ailleurs, une théorie peut justifier plusieurs technologies dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques correspondant à autant de types de tâches.

Enfin, Chevallard identifie un thème (par exemple, le calcul littéral) par un bloc de savoir technologico-théorique correspondant :

> "Dans l'enseignement des mathématiques, un thème d'étude (Pythagore, Thalès, etc.) est souvent identifié à une technologie déterminée (théorème de Pythagore, théorème de Thalès), ou plutôt, implicitement, au bloc de savoir technologico-théorique correspondant, cette technologie permettant de produire et de justifier, à titre d'applications, des techniques relatives à divers types de tâches. On notera cependant que d'autres thèmes d'étude (factorisation, développement, résolution d'équations, etc.) s'expriment, très classiquement, en termes de types de tâches". (Chevallard, 1999, pp. 229)

L'organisation praxéologique permet de définir une organisation mathématique. Ceci nous paraît un outil important pour l'analyse des séances de classes, ce que nous ferons avec les synopsis dans le chapitre 7.

De plus, Chevallard définit les six moments de l'étude qui permettent de décrire une organisation didactique. Les six moments sont :

- la première rencontre avec l'organisation enjeu de l'étude
- l'exploration du type de tâches et de l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches
- la constitution de l'environnement technologico théorique de la technique
- le travail de la technique
- l'institutionnalisation
- l'évaluation.

Les phases de correction font partie de ces différents moments avec des fréquences plus ou moins grandes (par exemple, on en retrouvera davantage lors du moment de travail de la technique ou de l'évaluation) . Dans l'analyse des séances observées, la notion de moments nous est apparue comme un grain d'analyse trop gros qui ne nous permettait pas de rendre compte de ce qui se passait dans la classe. nous avons donc découpé nos séances en faisant intervenir ce que nous avons appelé des phases, grain d'analyse plus petit que les moments. De plus, nous avons constaté que dans ce chapitre sur le calcul littéral, l'organisation didactique comprenait surtout le travail de la technique et l'institutionnalisation. C'est certainement une caractéristique de ce chapitre mais c'est aussi une raison pour laquelle nous l'avons choisi car les phases de correction sont nombreuses.

2. Analyse des programmes officiels du collège

Nous avons analysé les programmes de 1995 en France et de 1998 au Liban (depuis que nous avons commencé notre thèse de nouveaux programmes sont parus qui ne diffèrent que très peu des programmes anciens, ils ont notamment été réécrits pour intégrer les connaissances relatives au socle commun).

Pour compléter notre analyse du programme de 1995 et pour éclairer le moment d'apparition du terme "calcul littéral", en France, nous avons choisi de montrer les anciens programmes de quatrième de 1971 à 2004.

La période de la réforme des mathématiques modernes	1971 -1977	Exemples de fonctions polynômes (applications de IR dans IR). Degré. Exercices de calcul sur les polynômes. Produits $(x+a)^2$, $(x-a)^2$, $(x+a)(x-a)$. Exercices de factorisation.
La période de contre-réforme	1978 -1984	Produits $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$: leur utilisation
		Exemples numériques d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue.
La période contemporaine	1985 -1994	Généralisation des études précédentes aux calculs portant sur des **écritures littérales**. (6^{ème} : Initiation aux écritures littérales (ex. formules d'aires…) appliquer le formules littérales au cercle et au rectangle ; 5^{ème} : L'initiation aux écritures littérales se poursuit, mais le **calcul littéral** ne figure pas au programme). Développement d'expressions de style : (a+b)(c+d) Exemples simples de factorisation. Réduction de sommes algébriques. Résolution de problèmes aboutissant à des équations, à des inéquations du premier degré à une inconnue.
	1995-2004	- Réduire une expression littérale à une variable, du type: $3x–(4x–2)$, $2x^2–3x+x^2$… - Sur des exemples numériques ou littéraux, développer une expression du type (a+b)(c+d). - Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. - Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue

Tableau n°1 : L'évolution du programme de 4ème, en France, portant sur le calcul littéral

Ce tableau récapitulatif nous montre que les termes "calcul littéral", "développement", et "réduction" apparaissent-dans le programme français des années 1985. Avant cette année, les écritures littérales sont désignées et étudiées par "les polynômes" particulièrement entre 71-77. On voit donc d'une part que les termes ont changé ainsi que les éléments technologico théoriques puisque le point de vue d'étude en 1971 indique une référence explicite aux fonctions polynômes, qui disparaît ensuite.

Nous continuons cet étude par une analyse détaillée des programmes de 1995 en France et 1998 au Liban.

Dans les tableaux ci-dessous sont présentés successivement des extraits des programme de collège en France et au Liban. Nous avons choisi de les montrer pour faciliter la lecture de nos analyses.

Les deux programmes sont décomposés en trois rubriques relativement semblables. Notons également qu'en France on parle "d'écritures littérales" alors qu'au Liban, on utilise "expressions algébriques".

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
$6^{ème}$		
4. Initiation à la résolution d'équations.		
5. Initiation aux écritures littérales.	Appliquer une formule littérale dans une situation familière à l'élève.	On entraînera l'élève à schématiser un calcul en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacées par des valeurs numériques.
$5^{ème}$		
1. Enchaînement d'opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs. Conventions de priorités entre opérations Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	Ecrire une expression correspondant à une succession donnée d'opérations. Connaître et utiliser les identités : k(a+b)=ka+kb et k(a–b)=ka–kb dans les deux sens.	Pour la lecture et l'écriture d'expressions, on pourra utiliser le vocabulaire : terme d'une somme, facteur d'un produit La distributivité est à connaître sous forme générale d'identité. La comparaison avec une formulation en français – « le produit d'un nombre par la somme de deux nombres est égal à la somme des produits du premier par chacun des deux autres »…– pourra être l'occasion de montrer un intérêt (en économie et précision) de l'écriture symbolique. On entraînera les élèves à la convention usuelle d'écriture bc pour b×c, 3a pour 3×a. Les applications donnent lieu à deux types d'activités bien distinctes : le développement qui correspond au sens de lecture de l'identité indiquée, et la factorisation qui correspond à la lecture «inverse» ka+kb = k(a+b). Cette réversibilité se retrouve dans l'initiation à la résolution d'équations.
4. Initiation à la résolution d'équations	Trouver, dans des situations numériques simples, le nombre par lequel diviser un nombre donné pour obtenir un résultat donné. Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données.	Les programmes prévoient une initiation très progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter l'écueil connu d'apprentissages aboutissant à la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens. La classe de 5^e correspond à une étape importante dans l'acquisition du sens, avec la présentation d'égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner. Par exemple, dans l'étude d'une situation conduisant à une égalité telle que 3y=4x+2, on sera amené à en tester la véracité pour diverses valeurs de x et y. Les expressions qui figurent de part et d'autre du signe d'égalité jouent ici le même rôle.
$4^{ème}$		
2. Calcul littéral	Réduire une expression littérale à une variable, du type: 3x–(4x–2), $2x^2–3x+x^2$…	L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement en recherchant des situations qui permettent aux élèves de donner du sens à l'introduction de ce type de calcul. Le travail proposé s'articule sur deux axes : – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques – utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers. Les situations proposées aux élèves doivent exclure tout type de virtuosité et répondre chaque fois à un objectif

Développement Résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue	Sur des exemples numériques ou littéraux, développer une expression du type (a+b)(c+d). Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue	précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique). On évitera en particulier les expressions à plusieurs variables introduites a priori. Les activités de développement poursuivent celles de 5e en utilisant l'identité k(a+b)=ka+kb. L'introduction progressive des lettres et des nombres relatifs s'intégrant aux expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte. À cette occasion, le test d'une égalité par substitution de valeurs numériques aux lettres prendra tout son intérêt. Le développement de certaines expressions du type (a+b)(c+d) peut conduire à des simplifications d'écriture, mais les identités remarquables ne sont pas au programme. L'objectif est d'apprendre aux élèves à développer pas à pas ce type d'expression en une somme de termes. La factorisation d'expressions analogues à x(3x+4)–5(3x+4) n'est pas au programme.
3ème		
1. Écritures littérales ; identités remarquables	Factoriser des expressions telles que : (x+1)(x+2)-5(x+2) ; $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$. Connaître les égalités : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; $(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2= a^2-2ab+b^2$ et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que : $101^2 = (100+1)^2 = 100^2+200+1$, $(x+5)^2-4=(x+5)^2-2^2$ $=(x+5+2)(x+5-2)$	La reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articuleront sur deux axes : - utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; - utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes. Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. On consolidera les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment sur les puissances de 10.

Tableau n°2 : extraits du programme du collège en France

Le programme libanais :

Contenus	Objectifs	Commentaires
6ème		
10. EXPRESSIONS ALGEBRIQUES 10.1. Calcul sur des expressions littérales. 10.2. Valeur numérique d'une expression littérale.	 Ecrire des formules en utilisant des lettres qui remplacent des grandeurs connues. Utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction dans des expressions littérales. Calculer la valeur numérique d'une expression littérale.	 On se limitera aux cas où la multiplicateur est un nombre positif. On n'utilisera pas des nombres relatifs.
5ème		
4. OPERATIONS 4.2 Calcul sur les expressions algébriques. 4.3. Facteur commun. Factorisation	 Développer et réduire des expressions algébriques. Rechercher un facteur commun à plusieurs termes algébriques. Factoriser une somme algébrique en utilisant un facteur commun. Factoriser une expression numérique et	 On se limitera à des cas simples.

6. EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES 6.1. Puissances d'exposant entier positif d'un nombre positif. 6.2. Equations se ramenant à ax=b.	littérale.	
$4^{\text{ème}}$		
5. EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES 5.1. Puissances d'exposant entier positif d'un nombre relatif. 5.1. Puissances d'exposant entier négatif de 10. 5.3. Identités remarquables. 5.4. Equation du type (ax+b)(cx+d)=0 5.5. Equations et inéquations du 1^{er} degré à une inconnue.	Développer $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ Factoriser $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$, a^2-b^2	
$3^{\text{ème}}$		
3. EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES		
3.1. Expressions algébriques comprenant des radicaux.		
3.2. Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues.		
3.3. Systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue.		
3.4. Equations fractionnaires.		
3.5. Equations de la forme racine(x+a)=b.		
3.6. Polynôme à une variable.		
3.7. Fonction linéaire et proportionnalité		

Tableau n°3 : extraits du programme du collège au Liban

Le calcul littéral est introduit à partir de la classe de $5^{\text{ème}}$ en France et en $6^{\text{ème}}$ au Liban. Les élèves ont déjà rencontré des formules dans lesquelles on utilise des lettres pour désigner des nombres et ils ont déjà résolu des équations mais sans introduire d'inconnue.

Les éléments de savoir sont introduits progressivement et séparés dans le temps : les élèves étudient la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction ainsi les identités $k(a\pm b)=ka\pm kb$ (en $6^{\text{ème}}$ au Liban, en $5^{\text{ème}}$ en France) puis les identités $(a\pm b)(c\pm d)=ac\pm ad\pm bc\pm bd$ (en $5^{\text{ème}}$ au Liban, en $4^{\text{ème}}$ en France) et enfin les identités remarquables (en $4^{\text{ème}}$ au Liban, en $3^{\text{ème}}$ en France). On voit bien des points essentiels des différences entre le Liban et la France. En effet, les deux types de tâches de factorisation et développement ne se font pas au cours de la même année en France. Le travail sur des tâches de type "factoriser une expression littérale", est introduit en tant que tel en $3^{\text{ème}}$ à la différence du Liban où ces deux type de tâches apparaissent en $5^{\text{ème}}$.

L'apprentissage du type de tâche"réduire une expression littérale" est demandé dans les classes de $4^{\text{ème}}$ en France et de $5^{\text{ème}}$ au Liban. En revanche, contrairement à la façon d'introduire le développement ou la factorisation en s'appuyant sur la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction, on ne donne ni technique mathématique ni d'éléments du bloc technologico-théorique pour l'identifier :

> " Les applications donnent lieu à deux types d'activités bien distinctes : le développement qui correspond au sens de lecture de l'identité indiquée, et la factorisation qui correspond à la lecture «inverse» ka+kb = k(a+b) " (le programme français, classe $5^{\text{ème}}$, colonne commentaire) ".

Cependant deux exemples d'utilisation sont proposés dans le programme français de 4ème : "réduire une expression littérale à une variable, du type $2x^2$-$3x+x^2$; $3x–(4x–2)$ ". Ici nous soulignons la forme particulière des expressions : polynôme de degré inférieur ou égal à 2, écrit sous forme de sommes avec éventuellement des parenthèses. Pour effectuer la tâche sur la deuxième expression, notons qu'on peut développer l'expression $–(4x–2)$ en utilisant la distributivité par $–1$ sur $(4x–2)$, pour enlever la parenthèse, puis qu'on utilise ensuite la factorisation et la soustraction pour avoir une expression littérale réduite. Ainsi, il semblerait que le programme français distingue des cas d'utilisation des termes "développer" ou "réduire" selon la forme des expressions.

Dans le programme libanais, aucune indication sur les formes des expressions à réduire ni sur le nombres de variables n'est indiquée. On note aussi qu'au Liban développer et réduire sont associés dans une même phrase. D'après cela, on peut penser qu'il n'y a pas des tâches de type développer une expression littérale ou réduire une expression littérale.

Pour conclure, cette étude nous a montré qu'il y a un découpage important du savoir relatif au calcul littéral sur plusieurs années. Il nous semble que cela risque d'empêcher les élèves d'établir des liens entre ces différents types de tâche et outils et de parcelliser leur savoir sur l'algèbre élémentaire. Enfin, nous nous questionnons sur les types de tâches dans les manuels, les techniques utilisées, et les éléments des blocs technologico-théoriques correspondantes.

3. Analyse des manuels mathématiques

Nous avons fait l'analyse de 4 manuels français de la classe de 4ème édition 2002 (Cinq sur Cinq, HACHETTE ; Transmath, NATHAN ; Triangle, HATIER ; Math, MAGNARD) et 4 manuels libanais de la classe de 5ème édition 1998 (Construire les Mathématiques, CNRDP ; Puissance, AL-AHLIA DESCARTES ; Euclide, DAR ALMOUFID ; L'art Des Maths, 5ème, CENTRE DES SCIENCES DIDACTIQUES).

Dans la partie "Exercices", nous avons identifié des types de tâches puis nous avons cherché leur fréquence , nous avons relevé les termes utilisés dans les énoncés et les formes des expressions littérales. Ensuite, nous avons cherché dans la partie "Cours"[4] toutes les expressions (phrases en français ou expressions symboliques) qui pourraient avoir un statut (explicite ou non) de définitions, propriétés, règles ainsi que des exemples d'applications.

Une première analyse de ces manuels nous montre que dans chacun d'eux il y a un chapitre portant sur le calcul littéral. Il est séparé du celui concernant les équations dans les 8 manuels. Cela montre donc que les tâches relevant de ce chapitre sont certainement considérées comme des tâches relevant seulement de la technique de calcul et qu'elles risquent d'être proposées sans finalité, ce qui peut paraître en contradiction avec ce que le programme officiel en France propose, à savoir ne pas avoir des exercices de technique pure non liés à la résolution de problèmes :

[4] La partie "Cours" est désigné par des titres différents : "Connaissances, Méthodes, Cours, Savoir-faire, Essentiel, Savoir, Retenir et Appliquer".

« En 4ème, la résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. Les exercices de technique pure ne sont pas à privilégier. »

3.1. Partie "Exercices"

L'analyse de la partie "Exercices", selon la théorie anthropologique de la didactique, nous a permis de déterminer les types de tâches qui mettent en jeu du calcul littéral. Ainsi, nous avons déterminé les "5 grands types de tâches" suivants :

- Développer, réduire, et factoriser des expressions littérales : ces sont les tâches de calcul littéral classique qui permettent de faire des calculs.
- Obtenir un résultat numérique. Par exemple, calculer la valeur numérique d'une expression littérale ou calculer la longueur, l'aire, etc. d'une figure donnée ou vérifier un résultat.
- Traduire par une expression littérale/Associer diverses expressions provenant de registres différents au sens de Duval, 1993 (langue naturelle, langage symbolique ou représentation graphique)/ Indiquer un ou des éléments caractéristiques. Par exemple, indiquer si une expression donnée est une expression-somme ou une expression-produit, associer des expressions littérales à des situations décrites en langue naturelle ou à des figures géométriques.
- Déterminer et utiliser une expression littérale. Par exemple, écrire une expression littérale à partir d'une situation donnée, (périmètre, aire, volume, d'une figure donnée ou correspondant à un programme de calcul donné) et se servir de cette expression pour démontrer une formule générale.
- Résoudre des équations.

En ce qui concerne ce dernier type de tâche, nous l'indiquons ici mais nous ne le prendrons pas en compte dans nos analyses puisque, d'une part, il n'y a que 2 manuels qui intègrent la résolution d'équations dans le chapitre "Calcul littéral" et que d'autre part nous nous centrons sur les types de tâches de développement et réduction.

Les trois premiers types de tâches ont pour la plupart du temps un aspect technique important et sont pratiquées comme des tâches à part entière.

Dans les tableaux suivants, un pour la France et un pour le Liban, nous avons relevé les fréquences d'apparition des différents types de tâches. Nous avons découpé le premier en types de tâches caractérisés par la consigne et par la forme de l'expression. Nous avons relevé chaque tâche à l'intérieur des exercices quand ceux-ci comportaient plusieurs questions[5].

[5] Pour simplifier l'étude, nous avons choisi d'analyser la partie exercices en nous référant à 4 manuels français parmi les 5 et 4 manuels libanais parmi les 6 citées plus haut.

France	Triangle, HATIER		Transmath, NATHAN		Cinq sur Cinq, HACHETTE		Maths 2002, MAGNARD	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%	effectif	%
"Réduire une expression littérale" avec un polynôme de degré inférieur ou égale à 3 et avec un produit de polynômes de degré 1	129	39,8	29	13,4	29	13,1	46	28,6
"Développer une expression littérale" avec un produit de monômes de degré 1	16	4,9	9	4,1	3	1,4	23	14,3
"Développer et réduire une expression littérale" avec un produit de polynômes de degré 1 ou avec un somme de produits de polynômes de degré 1	114	35,2	86	39,6	89	40,1	19	11,8
calculer la valeur numérique d'une expression littérale ou d'une longueur / d'aire / d'un périmètre d'une figure"	17	5,2	45	20,7	56	25,2	20	12,4
"vérifier l'égalité de deux expressions littérales données"	14	4,3	14	6,5	14	6,3	0	0,0
Traduire une expression littérale / Associer diverses expressions dans des registres différents / Indiquer un ou des éléments caractéristiques	16	4,9	0	0,0	1	0,5	28	17,4
Déterminer et utiliser une expression littérale	18	5,6	34	15,7	30	13,5	25	15,5
Total	324	100	217	100,0	222	100,0	161	100,0

Tableau n°4 : analyse de 4 manuels français partie "Exercices"

Un premier résultat est que la grande majorité des tâches sont de type développer et/ou réduire une expression littérale (80%). Parmi ces 80%, la moitié consiste en des types de tâches concernant seulement réduire, et l'autre moitié concernant développer et réduire, assez peu développer seulement. Parmi les tâches de type réduire ou développer et réduire, il y a plusieurs formulations qui peuvent être "simplifier"et "supprimer ou enlever les parenthèses", termes qui n'apparaissent pas dans les programmes.

Le terme "simplifier" apparaît dans les consignes de deux manuels (Triangle et Maths 2002 Magnard). Dans Triangle, simplifier est utilisé 6% avec une somme des polynômes de degré 1, à l'intérieur de parenthèses, ou une somme de termes (produits polynômes de degré 1 et de termes constants). Dans Maths 2002 Magnard, simplifier est utilisé pour 8% des exercices avec des polynômes de degré 1 ; somme des polynômes degré 1, à l'intérieur de parenthèses ; produit des monômes de degré inférieur ou égale à 2., "Enlever (ou supprimer) les parenthèses" apparaît dans Nathan 12% (27 tâches de type supprimer les parenthèses (et réduire)) et dans Magnard 2% (4 tâches). Le terme calculer (à la place de développer ou de réduire) n'apparaît dans aucun de ces manuels.

Les autres types de tâches apparaissent peu fréquemment. On peut penser que les auteurs de manuels considèrent que les tâches simples qui ne mettent en jeu que de la technique sur le calcul littéral sont tellement importantes qu'elles deviennent quasiment les seules proposées. On voit également, comme nous l'avions annoncé précédemment que ces tâches sont réalisées sans finalité et qu'elles sont peu liées aux autres tâches.

Le deuxième tableau porte sur les manuels libanais :

	Puissance AL-AHLIA DESCARTES		Construire les mathématiques CNRDP		Euclide DAR-AL-MOUFID		L'art des Maths CENTRE DES SCIENCES DIDACTIQUES	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%	effectif	%
"Réduire une expression littérale" avec une somme à plusieurs variables un polynôme de degré inférieur ou égale à 3 ou avec un produit de monômes à plusieurs variables	17	8,8	12	13,2	36	22,2	43	39,8
"Développer une expression littérale" avec un produit d'une somme à plusieurs variables et d'un monôme	9	4,6	0	0,0	0	0,0	14	13,0
"Développer et réduire une expression littérale" avec une somme de polynômes de degré inférieur ou égale à 4 ou somme de sommes à 2 variables ou de produit de sommes à 2 ou 3 variables	47	24,2	33	36,3	34	21,0	0	0,0
"factoriser une expression littérale"	49	25,3	10	11,0	33	20,4	10	9,3
calculer la valeur numérique d'une expression littérale ou d'une longueur / d'aire / d'un périmètre d'une figure"	22	11,3	13	14,3	22	13,6	0	0,0
"vérifier l'égalité de deux expressions littérales données"	26	13,4	0	0,0	18	11,1	0	0,0
Traduire une expression littérale / Associer diverses expressions dans des registres différents / Indiquer un ou des éléments caractéristiques	15	7,7	7	7,7	0	0,0	37	34,3
Déterminer et utiliser une expression littérale	9	4,6	16	17,6	19	11,7	4	3,7
Total	194	100,0	91	100,0	162	100,0	108	100,0

Tableau n°5 : analyse de 4 manuels libanais partie "Exercices"

Comme dans les quatre manuels français, la majorité des tâches sont de type développer et/ou réduire une expression littérale : dans deux manuels Euclide et Puissance, plus d'un tiers de tâches sont de type développer et/ou réduire des expressions littérales et dans les deux autres manuels environ la moitié de tâches sont de ce type.

Des exercices comportant "simplifier" ou "donner la forme simplifiée" apparaissent dans trois manuels :

- dans "Construire les mathématiques", simplifier est utilisé 7% dans l'énoncé : Développer, réduire et simplifier une expression littérale avec un produit des sommes à deux variables ;
- dans "Euclide" simplifier n'apparaît pas mais le terme "forme simplifiée" est utilisé 7% dans l'énoncé "écrire en forme simplifiée l'aire / ou le périmètre d'un figure" ;
- Dans "L'art des Maths", simplifier est utilisé 6% dans l'énoncé "simplifier chacun des produits"

Donc, dans ces cas, le terme simplifier (ou forme simplifiée) est lié aux deux types de tâches "développer et réduire une expression littérale" et au type de tâche "réduire une expression littérale".

"Supprimer les parenthèses" n'apparaît que dans Construire les mathématiques 12% (11 tâches). Tandis que "calculer" n'apparaît pas que dans Collection Puissance, 10 %(16 tâches).

Pour conclure, les types de tâches "réduire une expression littérale" et "développer puis réduire une expression littérale" sont les plus fréquentes dans les manuels libanais et français. Nous remarquons que les mêmes types de tâches apparaissent, avec une fréquence différente, dans les deux pays sauf “factoriser une expression littérale” qu’on le trouve seulement dans les manuels libanais.

Les formes des expressions littérales

Dans les deux pays, les formes classiques des expressions littérales à développer sont des produits de deux polynômes de degré inférieur ou égal à deux. D’autres sont des sommes de deux polynômes de degré inférieur ou égal à deux où chacun est à l’intérieur de parenthèses. Les formes non classiques sont des produits de deux ou trois facteurs, chacun ayant trois termes à l’intérieur de parenthèse.

Par ailleurs, les expressions qui apparaissent seulement dans des manuels libanais sont des produits de trois facteurs, des produits de deux facteurs tels que chacun est un polynôme formé de trois termes ou des polynômes à deux variables, somme de deux ou trois termes à deux ou trois variables à l’intérieur de parenthèses.

Dans les manuels français et libanais, les formes classiques des expressions littérales à réduire sont des polynômes de degré inférieur ou égale à 3, des polynômes à deux variables, des produits de deux monômes ou d’une constant et d’un monôme de degré égal à 1.

Dans les manuels libanais, les formes des expressions littérales à réduire qui n’apparaissent pas en France sont des polynômes de degré égal à 4, des sommes à deux variables de degré plus grand que 1, des sommes avec parenthèses avec deux variables, ou des produits des monômes dans les parenthèses.

Finalement, les expressions littérales rencontrées dans les manuels libanais ont un degré de complexité plus élevé qu’en France (utilisation de plusieurs variables et polynômes de degré plus élevé au Liban).

Conclusion

Nous avons trouvé qu’il y a une variation des termes (développer, réduire, simplifier) dans la consigne en fonction de la forme de l’expression littérale. Nous constatons que la majorité des tâches sont de type "réduire une expression littérale" ou "développer et réduire une expression littérale".

Pour certaines formes d’expressions, le terme "réduire" est utilisé à la place de "développer". Cependant des nouveaux termes comme "simplifier une expression littérale" ou "supprimer les parenthèses" apparaissent dans les manuels et sont utilisés à la place de réduire ou de développer. On peut penser que les professeurs et les élèves risquent d’associer un terme de la consigne et un type d’expression littérale. Ce qui conduira à découper et donner peu d’homogénéité au savoir en jeu et ainsi le risque est de ne pas voir l’unité des objets mathématique relatifs au calcul littéral. On peut donc penser qu’il n’y a pas une seule technique pour réaliser ces tâches et que les élèves ne disposent pas toujours d’éléments du bloc technologiques-théoriques pour justifier ces techniques ou valider ces tâches, notamment la propriété de la distributivité de la multiplication sur l’addition ou sur la soustraction. Cette hypothèse nous est apparue intéressante à étudier. Enfin, nous continuons l’analyse à deux niveaux : celui des types de tâches et celui des termes employés pour les consignes.

3.2. Partie "Cours"

Nous allons maintenant étudier les parties "Cours" des manuels pour identifier les objets ou notions qui sont définies et de quelle façon. Nous verrons également quels types de tâches sont institutionnalisés et quels sont les techniques et les éléments du bloc technologico-théorique qui sont donnés. Les manuels[6] semblent suivre le plan donné par les programmes puisqu'ils définissent des types de tâches, "Développer et/ou réduire une expression littérale" et pour certains "simplifier une expression littérale"

Le type de tâche "développer une expression littérale"

Nous avons groupé les différentes formulations en trois :

- Utiliser les règles de la distributivité par rapport à l'addition ou la soustraction pour transformer le produit de facteurs en une somme (ou différence) de termes.(3 manuels sur 8)
- la factorisation est l'opération inverse du développement ou ab-ac (forme développée)= a(b-c) (forme factorisée)." (2 sur 8)
- Transformer une expression de la forme d'un produit de facteurs à la forme d'une somme ou différence de termes (ou remplacer le produit (a+b)(c+d) par la somme ac+ad+bc+bd ou remplacer m(a+b) par la somme ab+ac). (4 sur 8 manuels)

Nous allons détailler chacune de ces formulations.

Tout d'abord, pour développer une expression littérale, la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction, élément dans le bloc technologico-théorique, n'est pas mise en avant dans tous les manuels. On peut le trouver dans seulement 3 sur 8 manuels (2 manuels français et 1 libanais) :

> "Développer c'est transformer le produit de facteurs en une somme (ou différence) de termes en utilisant les règles de la distributivité par rapport à l'addition ou la soustraction." (Triangle, 4ème, HATIER, 2002, p. 112, Math, 4ème, MAGNARD, 2002, p. 209)

> "Le produit de deux expressions algébriques est une expression algébrique ; et l'opération qui consiste à effectuer ce produit s'appelle le développement" ou "développer : transformer une expression de la forme d'un produit à la forme d'une somme." (Construire les Mathématiques, 5ème, CNRDP, 1998, p. 112-113)

On voit bien que dans ces formulations il y a une référence explicite à la propriété de distributivité.

On fait référence à factoriser dans 2 manuels libanais :

> "factoriser : transformer une expression de la forme d'une somme à la forme d'un produit : c'est l'opération inverse du développement" (Construire les Mathématiques, 5ème, CNRDP, 1998, p. 113)

> "ab-ac (forme développée) = a(b-c) (forme factorisée)" (L'art Des Maths, 5ème, CENTRE DES SCIENCES DIDACTIQUES, 1998, p. 177)

Enfin, il y a des références à la forme de l'expression initiale (à développer) et/ou finale (développée) dans 4 sur 8 manuels (2 manuels français et 2 libanais).

---

[6] Nous avons étudié tous les manuels, cités ci-haut, en France et au Liban.

Quand on remplace le produit $(a + b)(c + d)$ par la somme $ac + ad + ... + ...$, cela s'appelle **développer** le produit.

Figure n°1: Extrait dans la partie «De quoi S'agit-il ?», page 73. Cinq Sur Cinq, 4$^{\text{ème}}$, HACHETTE, 2002

Nous voyons qu'il y a une définition essentiellement basée sur des ostensifs "développer une expression littérale, c'est l'écrire comme une somme de termes", on ne mentionne aucune référence à une technique utilisant, par exemple, des opérations. Le développement est vu comme une simple transformation d'écriture.

Voici d'autres citations qui sont un peu semblables : ces énoncés donnent une indication de ce qu'il faut faire sans donner de méthode. Il n'y a pas d'indications de techniques dans ces définitions.

> "c'est transformer en une somme de termes" (Transmath, 4$^{\text{ème}}$, NATHAN, 2002, p. 71)

Dans les deux énoncés suivants, il n'y aucune indication sur la forme (produit, somme) , il y a seulement la données des expressions initiales et finales.

> "le développement de (a+b)(c+d) est ac+ad+bc+bd" (Puissance, 5$^{\text{ème}}$, AL-AHLIA DESCARTES, 1998, p. 37)

Enfin, dans le manuel suivant, on donne l'idée d'une règle à appliquer sans que celle-ci soit caractérisée.

> "on développe d'après la règle de calcul a(b±c)=ab±ac" (Euclide, 5$^{\text{ème}}$, DAR ALMOUFID, 1998, p. 189)

Nous nous demandons quelles significations ces formulations peuvent avoir pour les élèves et surtout quels moyens de contrôle ils peuvent exercer.

Avec des types d'expressions assez semblables, on peut trouver aussi "supprimer les parenthèses" ou "réduire" avec les expressions (a±b)±(c±d) ou –(a±b). Dans les manuels les règles associées sont les suivantes :

> "Quand les parenthèses sont précédés du signe +,on peut les supprimer en conservant les signes intérieurs aux parenthèses" ou "Quand les parenthèses sont précédées du signe – , on peut les supprimer en changeant les signes intérieurs aux parenthèses." (Cinq sur Cinq, 4$^{\text{e}}$, HACHETTE, 2002, p. 74, partie "retenir et appliquer", règles, suppression de parenthèses)

> "L'opposé de la somme a+b est la somme des opposés de a et de b : -(a+b)=-a-b et l'opposé de la différence a-b est la somme de b et de l'opposé de a : -(a-b)=-a+b" (Transmath,4$^{\text{e}}$, NATHAN, 2002, p. 70, partie "cours", propriétés, opposé d'une somme, d'une différence)

Là encore, on note des indications sur comment il faut faire sans que des justifications soient données, sans faire appel à des connaissances mathématiques que les élèves possèdent. Ainsi ceux-ci ont des procédures à appliquer ou bien des cas différents sont montrés mais ils n'ont pas de procédures de contrôle. Notons enfin, suite au deuxième exemple, que les deux opérations additions et soustractions sont sans cesse convoquées.

Pour conclure, nous constatons que pour un type de tâches qui pourrait être le même, à savoir "développer une expression littérale" en utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition, il y a des formulations différentes suivant la forme de l'expression. De plus la propriété de distributivité n'est pas rappelée dans la majorité des manuels étudiés (5 sur 8), ce qui confirme une de nos hypothèses de recherche selon laquelle il y a une absence dans les éléments technologiques/théoriques pour justifier les calcul littéraux. Il faudra donc voir dans les classes comment les professeurs utilisent ces éléments.

Réduire une expression-produit

Dans 1es manuels français, l'explication est limitée à un exemple sans donner ni la technique ni les éléments technologiques/théoriques:

> "B=(5x-3)(2x+4)-2(4x^2+10x) ; On développe B=5x×2x+5x×4-3×2x-3×4-2×4x^2-2×10x ; On réduit les produits B=10x^2+20x-6x-12-8x^2-20x ; On regroupe les termes B=10x^2-8x^2+20x-6x-20x–12" (Triangle, 4ème, HATIER, 2002, p. 37)

Contrairement aux manuels français, ce type de tâche est expliqué dans 2 sur 4 des manuels libanais (même si parfois le terme réduire n'apparaît pas) :

> "Le produit de deux expressions algébriques est une expression algébrique obtenue en multipliant chaque terme de l'une par chaque terme de l'autre et en ajoutant les résultats" (Puissance, 5^e, AL-AHLIA DESCARTES, 1998, p. 129)
>
> "on peut multiplier deux monômes en multipliant les coefficient puis les parties variables. On applique la règle du produit sur les puissances des variables" (Construire les mathématiques, 5^e, CNRDP, 1998, p. 111)

Enfin, nous constatons, encore une fois, que les éléments technologiques/théoriques, spécifiquement les propriétés de la multiplication (l'élément neutre, la commutativité, l'associativité), ne sont pas mis en avant dans presque tous les manuels.

Le type de tâche "réduire une expression littérale"

La tâche "réduire une expression littérale" est introduite dans les classes de 4ème en France et 5ème au Liban dans tous les manuels dans la partie "Cours". Or, plusieurs citations apparaissent. Par ailleurs, l'expression peut être, d'une part, un polynôme, une somme avec éventuellement des parenthèses ou une somme à plusieurs variables (au Liban) et, d'autre part, un produit de deux ou plusieurs monômes. Pour cela nous faisons la distinction entre réduire une expression-somme et réduire une expression-produit.

Réduire une expression-somme

Voici les formulations que nous avons trouvées et que, nous regroupons de la façon suivante :

- La distributivité permet de justifier les réductions des sommes / k, a et b désignent des nombres relatifs : ka±kb=k(a±b) ; ak±bk=(a±b)k, est une propriété pour réduire une expression. (4 sur 8)
- Trouver la somme des termes semblables dans une expression (3 sur 8)
- Ecrire avec le moins de termes possibles (1 sur 8)

Pour réduire un polynôme ou une somme à plusieurs variables, il y a des manuels français (3 sur 4) et libanais (1 sur 4) qui renvoient explicitement à la distributivité :

> "La distributivité permet de justifier les réductions des sommes"(Triangle, 4ème, HATIER, 2002, p. 112)
>
> "Pour réduire une expression on utilise la propriété : k, a, b désignent des nombres quelconques, les égalités suivantes sont toujours vraies : k×a+k×b=k×(a+b) ; k×a-k×b=k×(a-b)" (Math, 4ème, MAGNARD, 2002, p. 208)
>
> "une propriété pour réduire une expression : k, a et b désignent des nombres relatifs ka±kb=k(a±b) ; ak±bk=(a±b)k" (Cinq sur Cinq, 4^e, HACHETTE, 2002, p. 74)

> "somme réductible, monômes semblables : $3x^2+2x^2=(3\times x^2)+(2\times x^2)=(3+2)x^2$ la multiplication est distributive par rapport à l'addition". (L'art Des Maths, 5ème, CENTRE DES SCIENCES DIDACTIQUES, 1998, p. 177)

Nous remarquons qu'ils s'appuient sur la factorisation comme technique mais sans parler explicitement de ce terme.

Cependant, dans la majorité des manuels libanais (3 sur 4 libanais) l'explication est faite à travers l'algèbre de polynômes, notamment "termes ou monômes semblables"[7], avant l'introduction de la factorisation :

> "On réduit les termes semblables d'une expression algébrique d'après ax+bx-cx=(a+b-c)x (Euclide, 5e, Dar AL MOUFID, 1998, p. 189)
>
> Réduire c'est trouver la somme des termes semblables dans une expression (Construire les mathématiques, 5e, CNRDP, 1998, p. 113)
>
> Réduire des termes semblables revient à les remplacer par un terme unique, semblable à chacun d'eux et ayant pour coefficient la somme algébrique de leurs coefficients" (Puissance, 5e, AL-AHLIA DESCARTES, 1998, p. 128).

D'autres manuels (1 sur 8) ne présentent ni la factorisation ni la propriété de la distributivité. On trouve des formulations portant sur le sens courant :

Réduction d'une expression littérale

Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

EXEMPLE : réduction de $A = 3x^2 + x - (x^2 + 3x - 1)$

$A = 3x^2 + x - (x^2 + 3x - 1) = 3x^2 + x - x^2 - 3x + 1$ (d'après la règle 2)

$A = 3x^2 - x^2 + x - 3x + 1 = (3-1)x^2 + (1-3)x + 1$ (on regroupe les termes « en x^2 », les termes « en x » et on réduit)

$A = 2x^2 + (-2)x + 1 = 2x^2 - 2x + 1$

Figure n°2 : Extrait dans la partie «Cours», page 70. Transmath, 4ème, NATHAN, 2002.

Dans cette phrase, il n'y a pas de référence mathématique, ni à une procédure ni à une technique. On peut se demander, du point de vue de l'élève, quelle sera la signification du "moins de termes possibles". On peut penser que cela l'incitera peut-être à n'en avoir qu'un seul.

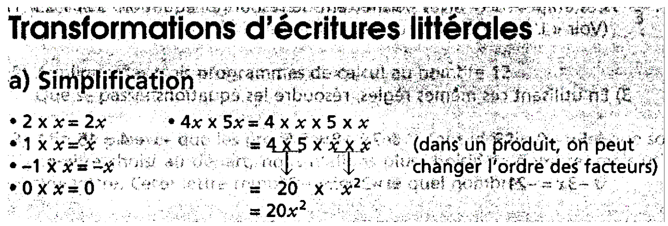
Pour conclure, quand on réduit une expression littérale, on n'a pas toujours besoin de mobiliser la distributivité parce que d'autres techniques sont disponibles. En effet, il y a deux blocs technologico-théorique qui correspondent à ce type de tâche : l'un fait référence à la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction sur l'ensemble des réels : c'est celui qu'on trouve dans la majorité des manuels français (3 sur 4) et qui correspond aux programmes français et libanais. Tandis que l'autre technique est d'ajouter les coefficients des monômes semblables. Pour cela, on se place dans l'algèbre des polynômes dans laquelle la lettre représente une variable ou une indéterminée ainsi. C'est ce qu'on trouve dans la majorité des manuels libanais (3 sur 4) dans lesquels on identifie la réduction sans parler de la propriété de la distributivité et avant d'introduire la factorisation.

[7] D'après ces manuels : "deux monômes ayant la même variable et le même degré sont appelés monômes semblables ou termes semblables" ou "deux monômes ayant la même partie littérale sont dites monômes semblables".

"Simplifier une expression littérale"

Nous remarquons que le terme simplifier n'apparaît pas dans la partie "Exercices" de tous les manuels certainement parce qu'on ne le trouve pas non plus dans les programmes. Or, dans 2 manuels français et 1 libanais on l'explique différemment dans différentes formulations (exemple, remarque, ou encadrée pour souligner son caractère important).

Dans un manuel il y a deux techniques différentes : l'une est au niveau syntaxique (cacher le signe ×, par exemple 2×x=2x), le bloc technologico-théorique est une convention en algèbre et l'autre est au niveau de la réduction d'un produit (4x×5x=…=20x^2) :



Transformations d'écritures littérales

a) Simplification

- $2 \times x = 2x$
- $1 \times x = x$
- $-1 \times x = -x$
- $0 \times x = 0$

$4x \times 5x = 4 \times x \times 5 \times x$
$= 4 \times 5 \times x \times x$ (dans un produit, on peut changer l'ordre des facteurs)
$= 20 \times x^2$
$= 20x^2$

Figure n°3 : Extrait dans la partie « Essentiel », page 208. Magnard, 4ème, 2002

Dans deux manuels français nous soulignons que la technique est le développement ou la factorisation avec la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction comme élément dans le bloc technologico-théorique :

> "Simplifier l'expression 3x-(5-8x) : 3x-(5-8x)= 3x-1(5-8x)=3x-5+8x" (Triangle, 4ème, HATIER, 2002, p. 112 dans un exemple)

> "Le développement et la factorisation permettent, parfois, une simplification des calculs. Exemple : A=34×101= 34(100+1)=34×100+34×1=3400+34=3434 ; B=13,8×1,6+13,8×8,4=13,8(1,6+8,4)=13,8×10=138" (Puissance, 5e, AL-AHLIA DESCARTES, 1998, p. 137, dans une remarque)

Finalement, il n'y a pas une seule identification de simplifier. Parfois, c'est alléger l'écriture (cacher le signe ×, par exemple). D'autre fois, il peut signifier développer et/ou réduire une expression littérale. Ces différents rôles correspondent aussi à la partie "Exercices" dans laquelle ce terme apparaît avec des expressions à développer et/ou réduire.

Conclusion

Dans le tableau résumé ci-dessous sont présentées les types de tâches (avec les différents utilisations possibles des termes dans la consigne), les techniques et blocs technologico-théoriques correspondants.

Type de tâche	Technique	Bloc technologico-théorique
Développer 2(x+3)	Multiplier 2 par x et 2 par 3 et ajouter	(IR, +, ×) est un corps Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
Réduire / simplifier un polynôme : 2x+5x	Mettre x en facteur (2+5)x puis ajouter le 2 et 5	(IR, +, ×) est un corps Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
	Ajouter/grouper des termes/ monômes semblables	Algèbre des polynômes

Développer / Simplifier / Réduire / Supprimer les parenthèses : (2x+3)-(5x-2)	1(2x+3)-1(5x-2) et développer	(IR, +, ×) est un corps Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
	Quand il y a un signe moins devant la parenthèse on change les signes des termes à l'intérieur …	(IR, +, ×) est un corps Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
simplifier 2××x	Cacher signe ×	Convention : on supprime signe ´ entre une lettre et un nombre

Tableau n°6 : tableau récapulutatif de types de tâches et des termes utilisées en calcul littéral

Nous continuons donc notre étude en effectuant une analyse lexicographique de termes (développer, réduire, et simplifier).

4. Analyse lexicographique des termes employés en calcul littéral

Comme nous venons de le voir dans l'analyse des manuels, on peut constater que les termes "développer, réduire, simplifier" apparaissent plus fréquemment (au moins pour les deux premiers) dans la désignation des tâches. Nous complétons ces analyses par une recherche sur le sens courant de ces différents termes ainsi que sur leur définition dans les dictionnaires mathématiques.

- Nous avons cherché les différentes significations qui se trouvent dans deux dictionnaires de la vie courante : le Petit Robert (1993), le Grand Robert (2001).
- Nous avons cherché les sens, contextes et utilisations dans un dictionnaire mathématique : Bouvier et al. (2005) ; dans le dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique Hauchecorne B. (2003) Les Mots & les Maths : Dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique.

4.1. Dans les dictionnaires de la vie courante

Dans les deux dictionnaires, le mot "développer" a plusieurs sens et est utilisé dans plusieurs contextes[8] :

- En économie et industrie : faire croître ou agrandir.
- En art et littérature : exposer en détails.
- En algèbre : développer une expression algébrique, effectuer les opérations indiquées.
- En géométrie et architecture : projeter ou représenter (faire apparaître en les étalant) sur un plan toutes les surfaces d'un corps solide.
- En photographie : faire apparaître les images fixées sur la pellicule au moyen de procédés chimiques.
- En cyclisme : parcourir une certaine distance par tour de pédalier de bicyclette.
- Dans d'autre contexte, c'est enlever ce qui enveloppe, étendre ce qui est plié, enroulé.

On voit donc que développer est associé à grandir, s'accroître et qu'il a plusieurs sens qui varient selon les différents contextes. "Détailler" est l'un des synonymes qui peut être en contradiction avec la signification

[8] Les priorités dans lequel nous avons écrit les différents sens des mots, correspondant à différents contextes, n'indique pas que l'utilisation d'un sens est plus courant d'autre.

d'une expression développée (une somme) comme nous avons déjà indiqué. Une expression développée a la forme d'une somme, signifiant une unité : "ensemble de choses considérées globalement ou qui s'ajoutent→ total ou "résultat du groupement de plusieurs objets". Or, développer peut signifier détailler. Ces deux termes, "unité" et "détailler", sont contradictoires et peut donc provoquer des confusions chez les élèves surtout quand la propriété de la distributivité n'est pas mise en avant.

En ce qui concerne "réduire", on trouve:

- En géométrie : changer en diminuant la dimension de.
- En économie et commerce : rendre plus petit ou moins nombreux. C'est synonyme d'abaisser, diminuer, restreindre. Par exemple, réduire le prix de 10%.
- En littérature : rendre plus court. C'est synonyme de raccourcir.
- En mathématique et en physique : ramener à ses éléments, à un état plus simple. C'est synonyme de simplifier. Par exemple réduire des fractions au même dénominateur.
- En chimie : éliminer l'oxygène de (un corps).
- Dans d'autre contexte c'est ramener à un état inférieur, plus simple ou c'est borner ou limiter (à).

Des sens différents comme diminuer, raccourcir et rendre plus petit peuvent provoquer des difficultés chez les élèves. Par exemple, raccourcir peut dire, pour les élèves, avoir une réponse formée seulement d'un nombre. De plus, cela peut être renforcer par les pratiques en arithmétique où les élèves ont l'habitude d'avoir un nombre dans la réponse.

Des synonymes de développer, comme "élargir" ou "s'allonger", sont des antonymes du terme réduire. Nous nous questionnons donc sur la signification de "développer, puis réduire".

Simplifier est un mot courant de la langue française signifiant : rendre plus simple, moins complexe ou moins chargé d'éléments accessoires ⇒ réduire ; représenter sans tenir compte de la complexité. Le contraire de simplifier c'est "développer" ou compliquer. Ce terme renvoie à différents contextes : art et littérature, droit, physique, économie, ergonomie, mathématique, etc. On l'utilise aussi sur le plan moral et dans la communication. Enfin, en mathématique, ce terme apparaît dans le contexte des fractions : "simplifier une fraction : trouver, si possible, une fraction irréductible équivalente". Dans ce cas, son synonyme est "réduire". Ainsi, nous se demandons si les élèves et professeurs considèrent que simplifier et réduire une expression littérale veut dire la même tâche à effectuer.

Nous soulignons que ce terme est vague et nous pensons encore une fois qu'il peut provoquer des erreurs chez les élèves. Par exemple, s'il y a une expression littérale avec une parenthèse de la forme (a+b)-(c+d) et on demande de simplifier, il y a un risque que les élèves s'appuient sur le sens commun et enlèvent juste les parenthèses sans changer les signes à l'intérieur des parenthèses. Nous nous demandons si la signification de rendre simple ou alléger l'écriture dans le contexte du calcul littéral, pour les élèves et pour les professeurs, conduit à effectuer des opérations (par exemple annuler les nombres opposés ou supprimer les parenthèses) ou se limite aux conventions syntaxiques (par exemple cacher le signe multiplier).

Pour conclure, nous avons trouvé que développer et réduire ont plusieurs significations dans des contextes différents. Parmi ces sens, il y'en a qui sont antonymes (par exemple développer c'est détailler ou agrandir, tandis que réduire c'est diminuer ou raccourcir). Il semble donc que les énoncés d'exercices qui demandent de "développer et réduire" risquent d'entraîner une confusion chez les élèves.

4.2. Dans les dictionnaires mathématiques

Développer une expression littérale

La première utilisation du terme développer revient au moyen âge :

> "au moyen âge développer signifie sortir de ce qui enveloppe. Le mot développement existe dès la fin du XIV siècle pour désigner l'action de déplier ce qui est enveloppé. Son sens s'est étendu depuis à nombreux domaines et consiste a décomposer des structures ou des expressions compliquées en éléments plus simple et mieux connues". (Hauchecorne, 2003)

La définition du développement d'une expression littérale dans Bouvier et al., 2005 et dans Chambadal, HACHETTE, 1981, fait référence à la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition :

> "Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction ; lorsqu'un produit AB a pour développement la somme C+D ou la différence C-D, on dit que le produit AB a pour développement la somme C+D ou la différence C-D. Exemple : pour tous réels x, y et z, les sommes ou différences xy-xz, $x^2+2xy+y^2$, $5x^2y+20xy^2-10xy$ sont respectivement les développements de x(y-z), de $(x+y)^2$ et de $5xy(x^2+4y-2)$". (Bouvier, et al., 2005)

> "lorsqu'un produit AB est une factorisation d'une somme C+D ou d'une différence C–D, on dit que le produit AB a pour développement la somme C+D ou la différence C–D. Exemples : pour tous réels x, y et z, les sommes ou différences xy–xz, $x^2+2xy+y^2$, $5x^3y+20xy^2–10xy$ sont respectivement les développements de x(y-z) (distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction), de $(x+y)^2$ et de $5xy(x^2+4y–2)$". (Chambadal, HACHETTE, 1981, p. 247)

Nous soulignons que dans le deuxième dictionnaire, on met un lien avec factoriser une expression littérale défini de la façon suivante :

> "Mise en facteur. Ainsi, factoriser une somme ou une différence, c'est l'écrire sous la forme d'un produit. Exemples, pour tous réels x, y et z, les produits x(y+z), (x-y)(x+y), $2x(3x^2-y)$, $(x-3)^2$ sont, respectivement, des factorisations de xy+xz (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)"

Ainsi, les deux types de tâches développer-factoriser une expression littérale s'identifient par la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction sur l'ensemble des réels, ce qui est mis en avant par les programmes.

Notons que nous avons trouvé d'autres significations pour développer qui renvoient à plusieurs contextes mathématiques que les élèves n'ont pas encore rencontré : arithmétique ; fonction et série ; Courbes ; Analyse ; Matrices ; etc. et qui ont plusieurs sens. Par exemple dans le contexte du courbes :

> "Courbe T dont C est développée. Si l'on imagine un fil enroulé autour d'un cercle, l'extrémité du fil décrit, lorsqu'il se déroule tout en restant tendu, une développante de cercle".(Bouvier, et al., 2005)

Réduire une expression littérale

Ce terme est dérivé du verbe "duire" en Latin, dans le sens de "ramener". Il a été utilisé pour la première fois en mathématiques en 1690 :

> "On le trouve en français dès le Moyen Âge dans le sens d'anéantir. La Renaissance calque son sens le latin. Le mot réduction apparaît en mathématiques dès 1690 dans le dictionnaire de la Furetière". Hauchecorne, 2003)

On ne trouve pas le verbe "réduire" dans Bouvier et al, 2005. En revanche, il y a "reduce", "réduction", "réduit", "réduite" et "réduites". "Reduce" est utilisé la première fois, pour la manipulation formelle et la simplification algébrique, en informatique dans le langage de programmation vers 1968. Or, il n'y a pas d'indications sur la façon dont ce terme est utilisé, ni la signification de "simplification algébrique". Par ailleurs, ce terme a plusieurs sens correspondant à différents contextes (en calcul algébrique ; en fractions, réduites associées à un nombre irrationnel α positif ; équations ; algèbre linéaire ; en physique, éléments de réduction d'un torseur en un point O ; en technologie, les réduites permettent de déterminer les nombres de dents de deux engrenages en prise en façon que le rapport des vitesses de rotation ; etc.). Or, aucun de ces contextes revient au calcul littéral. D'ailleurs, il y a renseignement sur la forme "réduite"dans le cas des équations :

> Forme réduite d'une équation du troisième degré $z^3+az^2+bz+c=0$.– Equation de la forme $x^3+px+q=0$ obtenue en posant $z=x-1/3\ a$.

Simplifier une expression littérale

Le terme simplifier n'apparaît pas dans le dictionnaire mathématique Bouvier et al., 2005. En revanche, on trouve le terme "simplifiable":

> "élément simplifiable à droite (resp. à gauche) dans un magma (E, *). –Élément a de E tel que, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, l'égalité x*a=y*a (resp. a*x=a*y) entraîne l'égalité x=y"

Dans ce cas là, nous avons allégé l'écriture en divisant par des nombres égaux. Cette signification correspond à celle de la vie courante. Par contre, ce terme reste ambigu en ce qui concerne les règles de transformation des expressions parce qu'il n'y a pas des références mathématiques relatives à cet objet.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons voulu montrer des éléments de transposition didactique (Chevallard, 1991) en ce concerne le calcul littéral en classes de $4^{ème}$ en France et $5^{ème}$ au Liban.

En ce qui concerne les programmes nous avons montré que les programmes de $5^{ème}$ au Liban et $4^{ème}$ en France différaient sur quelques points : une limitation de la complexité des expressions utilisées en France et pas au Liban et la place de la factorisation. Dans le programme français et contrairement à celui du Liban, les types de tâches "développer" et "factoriser" ne sont pas données pour le même niveau de classe. Or, pour réduire une expression littérale, la majorité des manuels français analysés s'appuient sur la technique de factorisation tandis que les libanais introduisent "réduire" avant "factoriser" et utilisent la technique d'ajouter des monômes semblables. Il y a donc ici quelques incidences sur les éléments technologico–théoriques mobilisables par les élèves.

En ce qui concerne l'analyse de manuels, nous avons vu que le chapitre portant sur le calcul littéral est séparé de celui des équations. La plupart des tâches proposées dans ce chapitre n'ont pas de finalité et correspondent seulement à des exercices de techniques pure, notamment développer et/ou réduire une expression littérale.

Pour désigner une même tâche de développement nous avons mis en avant l'utilisation de différents termes comme "supprimer les parenthèses" et "simplifier", apparaissent en fonction de la forme de l'expression littérale. En ce qui concerne réduire une expression littérale, nous pensons qu'il y a soit un déficit d'éléments téchnologiques-théoriques parce que les propriétés qui permettent de justifier les calculs ne sont pas clairement indiquées ou sont absentes, soit le recours à des éléments technologico-théoriques qui ne sont pas enseignés au collège (la théorie des polynômes). Dans les deux cas, celui peut conduire à ne donner que des éléments de procédures ou des critères portant sur la forme finale des expressions. Cela peut donc renforcer l'utilisation des ostensifs par les professeurs pour indiquer ce qu'il faut faire et ne pas donner de procédures de contrôle aux élèves. Ainsi ceux-ci risquent de se concentrer sur la forme des expressions ou sur le sens commun sans donner des techniques justifiées par des éléments technologiques-théoriques pour réaliser des tâches et ils peuvent se limiter à des critères de surface portant sur des ostensifs pour valider ou invalider une réponse.

Dans les chapitres suivantes, nous allons tenter de voir comment les professeurs gèrent ces phénomènes dans la classe. Pour continuer notre étude, nous avons fait un questionnaire pour les élèves et un autre pour les professeurs qui visent à préciser leurs connaissances et usages des termes "développer", "réduire", et "simplifier". Ainsi nous tenterons de répondre à certaines questions telles que: Comment les élèves et les professeurs identifient ces termes ? Reviennent-ils à des éléments technologiques/théoriques, notamment la propriété de la distributivité, ou réfèrent-ils à des significations de la vie courante pour les identifier ? Quelles formes des expressions littérales utilisent-ils ces termes ? Est-ce que les élèves et les professeurs les identifient et les utilisent de la même façon ? Quelles sont les différences et les similarités entre la France et le Liban ?

Chapitre 3
Analyse des questionnaires

Dans ce chapitre nous allons analyser les deux questionnaires professeurs et élèves que nous avons élaboré (la plupart des exercices dans les deux questionnaires sont les mêmes), qui visent à préciser leurs représentations (connaissances et usages) concernant les tâches : "développer, réduire et simplifier une expression littérale". Nous analysons question par question et l'intégralité des questionnaires se trouve dans les annexes, partie 2.

Partie 1 sera consacré à la présentation des deux questionnaires et à l'analyse a priori de certaine réponses. Puis, nous analysons les réponses des professeurs et des élèves dans partie 2.

Le questionnaire professeurs a été proposé à 33 professeurs du collège (16 français et 17 libanais). Cependant, vu la difficulté à trouver des volontaires, nous n'avons pas choisi ces professeurs, notre échantillon n'est donc pas représentatif.

- Plus de la moitié des professeurs français (10) et libanais (9) ont plus de 10 ans d'expérience d'enseignement au collège, 2 professeurs français et 3 libanais ont plus de 5 ans l'expérience, les autres ont moins d'expérience.
- 5 professeurs français et 2 libanais ont eu plus de 10 stages de formation continue, 5 professeurs français et 3 libanais ont eu entre 5 et 10 stages de formation continue, 4 professeurs français et 5 libanais ont eu moins de 5 stages et enfin 2 professeurs français et 6 libanais n'ont participé à aucun stage.

Le questionnaire "élèves" a été diffusé à 212 élèves en France dans 4 classes de 4ème et 5 classes de 3ème et à 164 élèves au Liban dans 5 classes de 5ème et 1 classe de 4ème en janvier-avril 2006, après que les élèves ont fait le chapitre "Calcul littéral".

1. Présentation des deux questionnaires et analyse a priori

Le questionnaire "professeur" comporte quatre parties :

- Une partie comportant des questions générales sur l'enseignement du calcul littéral : si les professeurs proposent un chapitre portant sur le calcul littéral et sur les objectifs. Au vu de l'analyse des manuels, nous pensons que la majorité des professeurs y consacre un chapitre et que les objectifs relèvent de la maîtrise de tâches strictement calculatoires.
- Une partie (question n°6) qui porte sur les pratiques des professeurs en matière de connaissances instituées. Nous avons leur demandé s'ils définissaient les trois expressions "développer, réduire,

simplifier une expression littérale" soit dans leur cours soit à l'occasion d'exercices : "Dans votre cours, est-ce que vous expliquez ce que signifie développer, réduire et simplifier une expression littérale ? Si oui, comment ? Que dites-vous ? Si non, pourquoi ?".

- Une partie (question 7) qui vise à distinguer (ou pas) des conditions d'usages en lien avec les formes des expressions. Pour cela, nous avons proposé des tâches classiques de calcul littéral sans mettre la consigne et nous avons demandé aux professeurs de rajouter cette consigne.
- Une partie qui vise à étudier, les connaissances des professeurs sur les erreurs des élèves, notamment en termes de description et d'interprétation[9].

Le questionnaire "élève" comporte trois parties :

- Une partie (question ouverte) qui vise à déterminer comment les élèves définissent, expliquent ces mêmes expressions : "on cherche à expliquer l'expression développer, réduire, simplifier une expression littérale"
- Une partie qui vise à préciser ces définitions, à distinguer des conditions d'usages en lien avec les formes des expressions ou encore à faire des liens entre ces trois termes (synonymes ou opposition) : il s'agit de donner un accord à des propositions.
- Une partie constituée de questions à choix multiples qui vise à préciser certains points (erreurs, signification de mots en lien, etc.).[10]

1.1. Les définitions par les professeurs et les élèves

Pour la première partie des questionnaires "professeur" et "élève", nous classons les réponses selon cinq catégories [11] :

- Référence à une définition ou une propriété mathématique ou un exemple complet d'application (expression de départ et expression d'arrivée). L'élève cite une propriété qu'il connaît et qu'il associe à l'expression proposée, ou il écrit un exemple d'application qui illustre une propriété mathématique. Par exemple, "développer une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme de termes". (cf. chapitre 2, §3)
- Référence à ce qu'il faut faire. L'élève fait référence à des actions qui lui permettent de "développer, réduire ou simplifier". Comme il faut multiplier, ajouter, etc..
- Référence à la forme de l'expression initiale sur laquelle on va développer, réduire ou simplifier. L'élève donne des caractéristiques de cette expression sur laquelle il va opérer.

---

[9] Nous faisons l'introduction et l'analyse de cette partie du questionnaire dans chapitre 5 dans la partie II du thèse

[10] Nous allons introduire et traiter cette partie dans la partie II de la these, chapitre "Les erreurs des élèves et les procédures de validation".

[11] Nous soulignons que la dernière catégorie est seulement pour les réponses des élèves.

- Référence à la forme de la réponse attendue. L'élève indique des critères sur la forme de l'expression une fois développée ou réduite ou simplifiée.
- Autre. Dans cette catégorie nous classons les réponses qui emploient le même terme que celui proposé (par exemple, développer c'est développer au maximum ou c'est avoir une expression développée), qui indiquent "calculer" seulement ; qui indiquent des exigences du professeur[12] ou des éléments relevant du contrat didactique.

Il n'est pas toujours facile de distinguer "référence à une définition ou propriété mathématique ou exemple d'application complète" et "référence à ce qu'il faut faire". Cependant, comme nous avons vu que dans l'analyse des manuels, certaines définitions étaient proposées. Donc nous avons gardé le premier critère pour distinguer des citations dans les manuels mathématique du sens commun.

1.1.1. Développer une expression littérale

Comme nous l'avons déjà indiqué, dans tous les manuels étudiés nous avons trouvé dans la partie "Cours" du chapitre "Calcul littéral" une ou plusieurs formulations qui tendent à définir ce type de tâche. Ainsi, nous avons recensé les formulations suivantes :

- Utiliser les règles de la distributivité par rapport à l'addition ou la soustraction pour transformer le produit de facteurs en une somme (ou différence) de termes.
- la factorisation est l'opération inverse du développement ou ab-ac (forme développée)= a(b-c) (forme factorisée)."
- Transformer une expression de la forme d'un produit de facteurs à la forme d'une somme ou différence de termes (ou remplacer le produit (a+b)(c+d) par la somme ac+ad+bc+bd ou remplacer m(a+b) par la somme ab+ac).

Nous rappelons que la première formulation renvoie au sens donné par le dictionnaire mathématique Bouvier et al., 2005, et apparaît seulement en France. La deuxième formulation se centre sur l'opposition développement / factorisation et se trouve dans les manuels libanais. La dernière s'appuie sur la forme et elle est utilisée dans les deux pays.

1.1.2. Réduire une expression littérale

Réduire une expression-somme

Les explications dans les manuels qu'on a étudié sont les suivantes :

- La distributivité permet de justifier les réductions des sommes / k, a et b désignent des nombres relatifs : ka±kb=k(a±b) ; ak±bk=(a±b)k, est une propriété pour réduire une expression.

[12] Coppé, 1993, fait une distinction entre et les exigences du professeur, qui sont explicites et constantes avec le temps (par exemple quand le professeur écrit une note au tableau : "quand on réduit il faut faire toutes les étapes"), et les exigences implicites qui peuvent évoluer et constituent le contrat didactique au sens de G. Brousseau.

- Trouver la somme des termes semblables dans une expression
- Ecrire avec le moins de termes possibles

Comme nous l'avons déjà indiqué, la première formulation qui s'appuie sur la propriété de la distributivité ou sur la factorisation apparaît plutôt en France tandis que la deuxième formulation qui met en avant les ostensifs est utilisée au Liban. Le dernière énoncé renvoie au sens commun du terme, il est plus rare mais il apparaît dans quelques manuels.

Réduire une expression produit

Nous pensons que la majorité des professeurs et des élèves ne se référons pas à cette expression parce qu'elle n'apparaît pas dans les programmes et se trouve rarement dans les manuels dans la partie "Cours".

1.1.3. Simplifier une expression littérale

Cette expression terme n'est pas employée dans les programmes pour effectuer des calculs littéraux, ni dans les dictionnaires mathématiques tandis que dans les manuels son utilisation dépend de la forme de l'expression (elle signifie parfois développer, parfois réduire un produit, parfois cacher le signe $\times$). Ces différents emplois peuvent provoquer des confusions et difficultés chez les élèves. Nous supposons donc que la majorité des professeurs ne la définissent pas en calcul littéral[13]. Cependant, on peut imaginer qu'ils l'utilisent selon la forme des expressions dans les énoncés de la partie "Exercices". Ainsi, les réponses des professeurs (qu'ils l'utilisent) et des élèves seront partagées :

- ceux qui font référence à ce qu'il faut faire en citant "réduire" ou "développer et réduire" ou "supprimer les parenthèses et réduire" ou en soulignant des conventions d'écriture (par exemple cacher le signe $\times$)
- ceux qui font référence à la forme de la réponse attendue en citant "avoir une réponse plus simple ou réduite".

1.2. Les conditions d'usages

1.2.1. Selon les professeurs

Nous avons choisi des formes classiques d'expressions littérales qui se trouvent dans les manuels : produit de deux facteurs dont chacun est un polynôme de degré 2, polynôme de degré 2 non réduit, opposé d'un polynôme, produit des monômes. Nous demandons aux professeurs de donner leur degré d'accord avec des énoncés d'exercices dans lesquels nous avons varié les consignes entre "calculer, développer, simplifier ou réduire". Nous avons rajouté "calculer" aux termes choisis puisque ce terme générique pourrait s'appliquer à tous les énoncés de calcul littéral. Nous avons laissé un choix de réponse "autre" pour que les

[13] L'utilisation peut se limiter au contexte des fractions

professeurs puissent employer d'autres consignes comme "supprimer les parenthèses" ou "écrire plus simplement" ou encore "effectuer".

Voici les cinq questions.

- Quelle consigne donnez vous pour trouver la réponse $5x^2-3x+4$ à partir de l'expression $5x^2+3x-6x+4$?
- Quelle consigne donnez vous pour trouver la réponse $15x^2+14x-8$ à partir de l'expression $(3x+4)(5x-2)$?

Nous pensons que les réponses de presque tous les professeurs seront réduire pour la première question et développer et réduire pour la deuxième.

- Quelle consigne donnez-vous pour trouver la réponse $20x^2$ à partir de l'expression $4\times x\times 5\times x$?

Nous pensons que les réponses des professeurs seront partagées : réduire ou simplifier (plutôt les professeurs français) ou effectuer le produit (plutôt les professeurs libanais).

- Quelle consigne donnez vous pour trouver la réponse $-x-2$ à partir de l'expression $(5x+2)-(6x+4)$?
- Quelle consigne donnez vous pour trouver la réponse $-3-2x$ à partir de l'expression $-(3+2x)$?

Nous avons choisi ces expressions littérales un peu plus particulières que les précédentes car on peut utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition pour justifier les calculs faits En revanche, selon les analyses des manuels, les énoncés correspondant à la première expression sont souvent : supprimer les parenthèses puis réduire, simplifier, réduire, ou développer puis réduire. Nous pensons donc que les réponses des professeurs seront plus partagées pour ces deux expressions littérales.

1.2.2. Selon les élèves

Pour compléter ces définitions, nous avons proposé des énoncés d'exercices, dans lesquels ces trois mots pouvaient être employés et nous avons demandé aux élèves de se positionner face à ces propositions. Nous avons donc cherché à savoir s'ils associaient des formes d'expressions littérales à l'un de trois termes étudiés et quelles étaient les associations fréquentes entre ces termes ou quelles étaient les oppositions.

Dans les paragraphes suivantes, nous allons présenter les différents énoncés.

- a, b et m étant des nombres relatifs, on a : $m(a+b)=ma+mb$. Développer l'expression $m(a+b)$ c'est la remplacer par $ma+mb$.
- Développer un produit, c'est l'écrire comme une somme de termes.

Tout d'abord, nous pensons que presque tous les élèves seront d'accord parce que comme nous avons déjà indiqué, ces formulations apparaissent dans plus de la moitié des manuels étudié. Cependant, même si elles s'appuient plutôt sur la forme de l'expression, elles correspondent au sens mathématique.

- Développer, c'est l'opération inverse de factoriser.

On teste ici le lien entre développer et factoriser. D'après les manuels mathématiques libanais, nous pensons que la plupart des élèves libanais seront d'accord. En revanche, les avis des élèves français seront, peut être, plus partagés puisqu'en $4^{\text{ème}}$, d'une part, le mot "factoriser" n'apparaît pas dans les manuels et, d'autre part, les professeurs peut être ne l'utilisent pas en tant que telle conformément au programme.

- La multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction k(a+b)=ka+kb et k(a-b)=ka-kb. Cette règle permet de développer des produits.

Ici, les deux égalités sont écrites dans le registre algébriques et sont déjà connues en $5^{\text{ème}}$ en France et $4^{\text{ème}}$ au Liban. La technologie/théorie est la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction qui permet d'avoir ces deux égalités.

- Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

Comme nous avons vu, cette citation correspond au sens courant : alléger l'écriture, et se trouves dans quelques manuels français. Nous pensons que les élèves vont être plutôt d'accord mais le pourcentage des élèves français sera probablement plus élevé de celui des libanais.

- Pour simplifier les écritures mathématiques, on utilise les conventions suivantes : On n'écrit pas le signe × entre un nombre et une parenthèse, deux parenthèses, une lettre et une parenthèse, deux lettres, un nombre et une lettre.

Cette convention est vraie en calcul littéral et le sens courant de simplifier est compatible. Nous pensons donc que les élèves seront plutôt d'accord.

- Quand on a une expression de la forme 7x-(3-x), le professeur demande de réduire l'expression.
- Quand on a une expression de la forme 6x×4x, le professeur demande de réduire l'expression.
- Quand on a une expression de la forme 4×x×5×x, le professeur demande de simplifier l'expression.

Dans ces trois cas, c'est la forme de l'expression initiale qui est mise en avant. Comme nous avons déjà indiqué, pour le premier cas, on trouve plutôt, dans les manuels, "supprimer les parenthèses". Pour les deux derniers, quand l'expression est un produit, on utilise réduire ou simplifier ou effectuer le produit. Par contre, les deux derniers termes,"simplifier" ou "effectuer le produit", apparaissent beaucoup moins dans les manuels. Donc on peut penser que les élèves ne seront pas d'accord pour le premier cas. Pour les deux derniers, les avis seront plus partagés.

- Développer c'est simplifier une expression comme (5x+2)-(6x+4)
- Développer c'est simplifier une expression comme (3x+9)+(2x+3)×4

Dans ces deux cas on teste le lien entre simplifier et développer pour voir si ces deux termes sont utilisés avec des expressions littérales ayant des formes semblables. Comme nous avons vu, développer et simplifier sont des antonymes dans le sens courant. De plus, "supprimer les parenthèses" apparaît souvent dans l'énoncé associée à la première expression, Nous pensons donc que la majorité des élèves ne vont pas être d’accord. Pour le deuxième cas nous avons choisi une expression ayant une forme non classique. On peut donc se demander s’il y aura une différence dans les réponses.

- Développer c’est calculer une expression comme $(3x+4)(5x-2)$

On teste ici le lien entre développer et calculer une expression littérale. Nous pensons que la majorité des élèves vont être d’accord parce que la forme de l’expression littérale est classique et, dans ce cas, calculer a la même signification qu'effectuer des opérations sans avoir une réponse numérique.

- Développer c’est réduire une expression comme $5x^2+3x-6x+4$

D’après les analyses des manuels et le sens courant de chaque mot, nous pensons que la plupart des élèves ne seront pas d’accord.

- On dit parfois "simplifier une expression littérale" au lieu de "réduire une expression littérale"

On teste ici le lien entre simplifier et réduire pour voir si ces deux termes sont synonymes en calcul littéral. D’après les analyses des manuels, nous avons indiqué que le terme simplifier n’apparaît pas toujours, et de plus l’utilisation de ce terme dans la partie exercices n’est pas restreint aux expressions à réduire. Or, d’après le sens courant, nous avons indiqué que les deux termes sont synonymes. Nous pensons donc que les réponses des élèves seront partagées.

- Si on veut calculer 23×101 on peut faire $23\times101=23\times(100+1)=2300+23=2323$. On a utilisé le développement pour passer de la première ligne à la deuxième ligne pour faciliter le calcul.
- Quand on écrit les égalités suivantes, $(3x+2)\times(x+4)=3x^2+12x+2x+8=3x^2+14x+8$ on développe et on réduit
- Quand on écrit les égalités suivantes, on développe $(a-1)\times(a+3)=a^2+3a-a-3=a^2+2a-3$

Nous visons tester le lien entre développer et réduire. Ainsi, nous cherchons à savoir si les élèves considèrent que développer est seulement synonyme de distribuer ou bien de réduire un polynôme. Pour cela, nous avons choisi des exemples complets d’application qui portent sur un produit de nombres ou sur un produit des polynômes de degré 1. Pour le premier cas, nous pensons que les élèves seront plutôt d’accord parce que cette technique correspond à ce qu’ils ont déjà fait dans des classes antérieurs pour le calcul mental. Pour le second, les élèves seront aussi d’accord. Pour le dernier cas, les avis des élèves seront peut être plus partagés parce que habituellement on demande de développer et réduire. On ne s’arrête pas à une expression développée et non réduite.

- $3x^2+6x+7$ est une forme réduite de $3x^2+2x+4x+7$.

Nous cherchons à déterminer le pourcentage des élèves qui acceptent une expression sous forme réduite comportant encore des signes "+" ou "–". Pour cela, nous avons choisi un exemple complet d’application qui porte sur polynôme de degré 2. Les analyses de manuels et le sens courant de terme nous conduisent à penser que la plupart des élèves seront d’accord.

- $(4x-1)(6x-2)$ est une forme simplifiée de $(4x-1)\times(6x-2)$
- $6x^2+x-2$ est une forme simplifiée de $(3x+2)(2x-1)$
- $-(3+2x)$ est l'écriture simplifiée de $(3+2x)\times(-1)$

Dans ces trois cas, c'est la forme de l'expression attendue qui est mise en avant. Pour les deux premières expressions, on demande souvent de "développer et réduire" mais le signe × rarement apparaît entre deux parenthèses. Pour la dernière expression on demande de développer mais souvent le signe "–" apparaît sans le 1 devant la parenthèse. Dans les cas 1 et 3 nous n'avons pas effectué des calcul mais nous avons allégé l'écriture selon les conventions en calcul littéral. Les effets du contrat (avoir une réponse développée et réduite) peut jouer un facteur plus important que le terme utilisé dans l'énoncé. Nous pensons que les réponses des élèves seront partagées.

- Développer $3x(2x–1)$ c'est multiplier $3x$ par $2x$, cela fait $6x^2$ et $3x$ par $–1$, cela fait $–3x$, et faire la somme.
- Quand le professeur demande de simplifier l'expression $3x–(5–8y)$ on supprime ce "–" et les parenthèses à condition de multiplier l'expression entre parenthèses par $–1$. Donc la réponse est $3x–5+8y$.

Ici on donne deux citations en langage naturel et symbolique en utilisant les verbes "multiplier" et "supprimer". On indique ici une technique. Les deux expressions littérales sont familières. Pour la première formulation, nous pensons que les élèves seront plutôt d'accord. Pour le deuxième cas, les avis des élèves seront partagés. En fait, le terme simplifier apparaît, mais rarement, dans les manuels avec des expressions littérales ayant cette forme. D'autre part, nous pensons que souvent les élèves enlèvent les parenthèses et changent les signes de termes sans avoir conscience qu'ils utilisent la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction. En revanche, l'expression littérale simplifiée est moins chargée des éléments (il n'y a plus de parenthèses), ce qui correspond au sens courant du terme.

2. Analyse a posteriori

Comme nous avons prévu la majorité des professeurs consacrent un chapitre portant sur le calcul littéral où l'objectif est d'enseigner et de pratiquer les techniques pour résoudre des tâches de type développer ou réduire ou factoriser une équation littérale.

2.1. Les définitions par les professeurs et les élèves

Presque tous les professeurs expliquent "développer une expression littérale" (32 sur 33) tandis que définissent "réduire une expression littérale" (31 sur 33) dans la partie "Cours". Il y a un professeur qui explique développer lors des exercices. Il y a deux professeurs qui n'expliquent pas réduire.

La moitié des professeurs ne définissent pas "simplifier une expression littérale". Parmi ces professeurs, il y a ceux qui préfèrent l'utiliser dans le contexte des fractions : "it applies more for representing a fractional answer", "je préfère utiliser le terme simplification pour une fraction" et d'autres qui considèrent ce terme non nécessaire et flou : "expression ambiguë", "simplifier est trop général", "pour ne pas multiplier les termes à connaître (développer et réduire suffisent)".

Dans le tableau suivant, nous montrons l'effectif et pourcentage des élèves qui non pas répondu à au moins une des questions : expliquez "développer/réduire/simplifier une expression littérale".

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
expliquez développer une expression littérale	53	25	33	20,1	86	22,9
expliquez réduire une expression littérale	66	28,8	36	22,0	102	27,1
expliquez simplifier une expression littérale	62	29,2	32	19,5	94	25

Tableau n°1 : effectif et pourcentage des élèves qui n'ont pas répondu

Un premier point qui paraît significatif est le nombre de non réponse à au moins une de ces questions. Plus d'un quart des élèves français n'ont pas répondu à au moins une des questions. Ce pourcentage est un peu plus faible chez les élèves libanais mais il reste élevé. Ainsi, ces résultats montrent la difficulté d'un groupe d'élèves d'expliquer ces termes, même s'ils arrivent à faire correctement des tâches concernant développer et/ou réduire des expressions littérales. Enfin, on peut penser que ces questions ne sont pas habituelles chez les élèves.

Nous allons maintenant analyser les réponses des professeurs et des élèves selon la classification que nous avons présenté[14].

2.1.1. Une photographie autour "développer une expression littérale"

Les représentations des professeurs

Tout d'abord, la majorité des professeurs utilisent le registre du langage naturel pour expliquer cette expression. Ils ne donnent ni d'exemples d'applications ni des égalités : $k(a\pm b)=ka\pm kb$ ou $(a\pm b)(c\pm d)=ac\pm ad\pm bc\pm bd$. Ceci peut être un effet du questionnaire puisque nous avons parlé de définition. Les formulations les plus citées sont dans l'ordre :

- Transformer un produit de facteurs en une somme de termes (15 sur 33)
- enlever les parenthèses (9 sur 33 : 4 français et 5 libanais)
- appliquer la règle de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction (6 sur 33)

Contrairement à ce que nous avions prévu, presque tous les professeurs français s'appuient seulement sur la première formulation et ne parlent pas de la propriété de distributivité. D'autre part, "utiliser la distributivité"

[14] Pour le reste du chapitre, les pourcentages des réponses des élèves seront calculer sur les nombres de réponses et non sur le nombre total d'élèves.

est citée plutôt par les professeurs libanais. Cependant, une nouvelle formulation est citée : "enlever les parenthèses".

Pour conclure, nous soulignons que ces formulations ne relèvent pas du même champ et surtout n'indiquent pas aux élèves ce qu'ils peuvent faire ; ainsi, la troisième formulation fait explicitement référence à une propriété mathématique alors que 1 et 2 donnent une indication de ce qu'il faut faire sans donner la technique : comment enlever les parenthèses ? On voit bien l'ambiguïté d'une telle formulation et la centration des professeurs sur la forme de l'expression : sans parenthèses, somme de termes. Enfin, nous pouvons constater qu'il y a une absence d'éléments théoriques pour justifier les calculs littéraux.

Les représentations des élèves

Plus d'un tiers des élèves français et plus le quart des élèves libanais, n'ont pas répondu, ou ont expliqué par "développer une expression littérale" en utilisant : le même terme (expression développée ; développer au maximum), d'autres termes (calculer ; résoudre), ou en citant des exigences du professeur (écrire le bon résultat, faire le calcul dans plusieurs étapes).

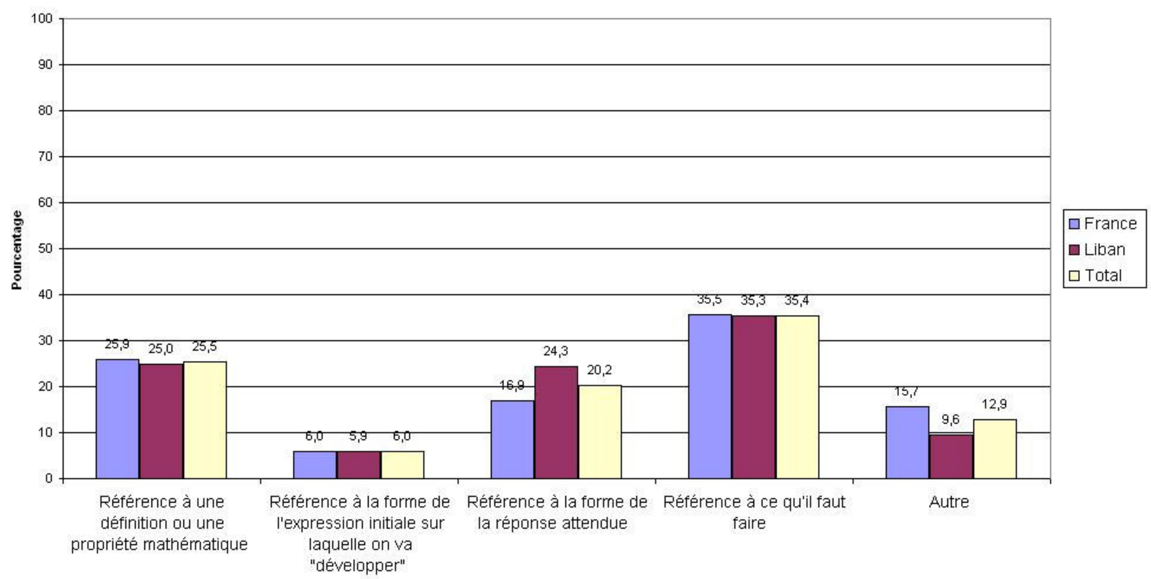


Figure n° 1 : l'explication de développer par 290 élèves (159 français, 131 libanais).

Tout d'abord, l'écart entre les élèves français et libanais ne dépasse pas 5%. Ensuite, contrairement à ce que nous avons prévu, la majorité des réponses des élèves sont partagées dans les trois catégories :

- référence à une propriété ou définition ou exemple d'application

La majorité de réponses sont distribuées en trois : "transformer un produit de facteurs en somme ou différence de termes" ; "multiplier chaque nombre du premier parenthèse par les nombres de deuxième parenthèse", et des égalités $(a\pm b)(c\pm d)=ac\pm ad\pm bc\pm bd$; $k(a\pm b)=ka\pm kb$ qu'on trouve dans les programmes et manuels mais qui n'exprime pas des définitions et s'appuie plutôt sur la forme de l'expression initiale et finale. Enfin, ces réponses sont conformes aux réponses de la majorité des professeurs et aux manuels où les éléments technologiques/théoriques ne sont pas mises en avant[15].

- référence à ce qu'il faut faire

La majorité des réponses sont partagées en trois : "réduire ou grouper des termes semblables" ; "simplifier" ; "supprimer les parenthèses". La première réponse montre la confusion des élèves avec d'autres notions. Nous pensons que c'est un effet des pratiques de classe dans lequel souvent on fait développer et réduire une expression littérale. Tandis que la troisième correspond aux réponses des professeurs.

- référence à la forme de la réponse attendue

La majorité des réponses sont : "plus simple" ou "plus facile" ou "plus petite". Nous pensons encore une fois que les élèves ne font pas distinction entre "expression développée" et "développée et réduite" parce que dans la classe on ne laisse pas une expression développée sans le réduire. Nous se demandons si c'est un effet du contrat : une "expression somme sans parenthèses" est plus facile ou plus simple d'un produit de deux expressions.

Pour conclure, nous constatons la non mobilisation de la propriété mathématique concernant la distributivité de la multiplication sur l'addition par la majorité des élèves, ni la technique de factorisation. Cela correspond aux réponses des professeurs et aux manuels. D'autre part, nous soulignons encore une fois la difficulté et confusion chez les élèves d'expliquer cette notion. Enfin, presque tous les professeurs français citent "transformer un produit de facteurs en une somme de termes tandis que les citations des professeurs libanais sont partagées.

2.1.2. Une photographie autour "réduire une expression littérale"

Les représentations des professeurs

Les réponses des professeurs sont partagées de la façon suivante :

- "additionner (ou grouper ou réduire) les termes semblables ou les termes ayant la même partie littérale". (24 sur 33 professeurs : 16 libanais et 8 français)
- "une forme plus simple ou plus courte ou moins de termes possibles" (7 professeurs français)

Presque tout les professeurs libanais citent la première formulation. Plus de la moitié des professeurs français s'appuient sur la forme de l'expression et le sens courant en négligeant la technique de factorisation et la propriété de distributivité. Nous soulignons ici qu'au Liban on n'utilisent pas ce terme dans la vie courante. D'ailleurs, presque aucun professeur propose des exemples d'application complète ou écrit dans le registre algébrique ou parle de réduire un produit. Nous se demandons la signification de l'expression "partie

[15] Moins de 8% des élèves citent le terme "distribuer" (aucun élève libanais le cite) ou "factoriser" (aucun élève français le cite).

littérale" et les éléments technologiques/théoriques qui permettent de dire que deux monômes ont la même partie littérale. Nous pensons que ces citations vivent dans les classes ainsi ont des effets sur les techniques de correction des professeurs, les erreurs des élèves et leurs procédures de validation. Ainsi

- les professeurs risquent ne pas lier les erreurs à une manque des propriétés mathématiques (la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction) et pour réaliser ou corriger ces tâches, ils utilisent probablement des éléments ostensifs pour indiquer les monômes ayant la même "partie littérale" (en les soulignant ou encadrant).
- les élèves risquent de commettre des erreurs de type concaténation[16] et leurs procédures de validation peuvent se limiter sur des éléments d'ostensifs (plutôt les élèves libanais) et sur le sens commun (plutôt les élèves français).

Ces résultats et hypothèses sont à mettre en lien avec ceux de Tirosh et al., 1998, qui ont étudié les types d'explication données par des professeurs ayant des expériences différents, dans les classes et dans des entretiens (avant et après la classe). Ils indiquent qu'un professeur débutant cite la règle suivante : "on réduit des termes ayant la même partie littérale". Pour effectuer la tâche réduire 7x-5-x+12 dans la classe, il incite les élèves à chercher des termes avec x et des termes sans x. Nous notons que cette technique peut provoquer les élèves à effectuer des erreurs quand ils réduisent des expressions littérales contenant, par exemple, des termes en x et des termes en x^2 parce que probablement ils vont ajouter ces termes. D'autre part, un autre professeur, débutant aussi, cite "pour réduire une expression littérale on ajoute les lettres à part et les nombres à part"[17] en proposant la tâche réduire 3m+5+2m dans la classe. Il faut noter que suivant cette citation l'expression littérale 5m+2 peut être égale 7+m ou 7m. Cependant, suite à une erreur de concaténation effectuée par un élève, le professeur corrige en s'appuyant sur des ostensifs (des couleurs différents pour distinguer le 5 d'autres termes) et en répétant la même règle.

Enfin, nous soulignons une citation de deux professeurs qu'ils nous est apparue intéressante : "réduire c'est comme regrouper tous ceux qui sont d'une même espèce ensemble : les hommes avec les hommes ; les objets avec les objets ; les animaux avec les animaux".

Représentations des élèves

Plus d'un tiers des élèves français et plus le quart des élèves libanais n'ont pas répondu à la question ou ont expliqué réduire une expression littérale en utilisant soit le même terme (expression réduite ; réduire au maximum) soit le terme calculer.

---

[16] C'est une erreur classique que nous allons identifier et expliquer selon points de vues différents dans le chapitre 4

[17] Un professeur, parmi les 33, cite une formulation pareille "additionner ou soustraire les parties de cette expression qui concernent la même variable".

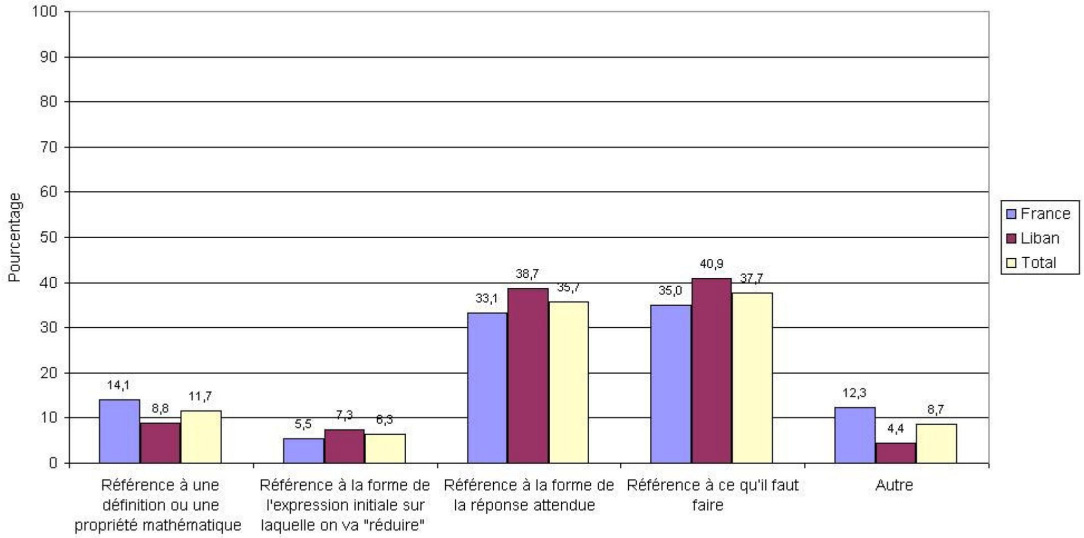


Figure n 2 : l'explication de réduire une expression littérale par 274 élèves (146 français ,128 libanais)

L'écart entre les élèves français et libanais ne dépasse pas 5% (sauf dans "Autre") avec une répartition différente de celle des professeurs, la majorité de réponses correspondent au sens courant et sont partagées de la façon suivante :

- référence à ce qu'il faut faire

La majorité de réponses correspondent à "simplifier" qui n'a pas une définition au sens mathématique en calcul littéral[18]. Ce terme n'a pas été indiqué par les professeurs. On peut penser donc que la signification et l'utilisation de ces deux termes dans le contexte de fractions et dans la vie courante a un effet assez important sur les représentations des élèves.

- référence à la réponse attendue

La majorité citent : "le moins de termes possibles" ou "la plus petite possible"[19], qui correspondent aux réponses des professeurs français. Par ailleurs, la majorité de réponses dans référence à une définition ou propriété mathématique sont conformes à celles des professeurs "additionner les termes ayant la même partie littérale". D'autres proposent des exemples d'application (3x+4y+2x=5x+4y).

Pour conclure, nous constatons encore une fois, d'une part, la difficulté d'expliquer cette tâche et, d'autre part, les éléments technologiques/théoriques basés sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition sont peu utilisés par les professeurs et les élèves. La technique de factorisation n'est pas mise en avant. En revanche, ils utilisent des ostensifs. Enfin, les professeurs français s'appuient

[18] D'autres réponses sont partagées dans quatre formulations : grouper les termes semblables ; développer ; effectuer une opération mathématique ; alléger ou enlever les signes qui ne servent pas. Nous constatons donc qu'il y a une confusion entre la tâche en question et les procédures ou techniques mis en œuvre pour effectuer cette tâche.

[19] D'autres citations mais moins fréquentes : plus simple ou simplifiée

davantage que les libanais sur le sens commun pour expliquer ce terme mais il n'y a pas un écart signifiant entre les réponses des élèves français et libanais.

2.1.3. Une photographie autour "simplifier une expression littérale"

Les représentations des professeurs

Conformément à ce que nous avons prévu, la majorité des professeurs utilisent le terme "simplifier" plutôt dans le contexte des fractions et ils préfèrent de ne pas l'employer avec les expressions littérales : la moitié des professeurs ne l'explique pas dans le cours et d'autres le considèrent ambigu ou trop général. Ainsi, ils préférent utiliser des termes comme "développer et réduire" ou "réduire". En revanche, pour ceux qui l'expliquent, ils s'appuient sur la forme : "(…) plus simple" ou sur ce qu'il faut faire "je distingue peu réduire et simplifier" ce qui correspond au sens courant mais qui ne donne pas ni une technique ni des éléments technologiques/théoriques. Enfin, nous n'avons pas trouvé des différences entre les réponses des professeurs français et libanais.

Les représentations des élèves

Plus d'un tiers des élèves français et un quatrième des élèves libanais n'ont pas répondu à la question ou ont expliqué "simplifier une expression littérale" soit en utilisant le même terme (expression simplifiée ; simplifier le maximum), ou le terme calculer soit en citant des exigences du professeur (on n'est pas forcément aller jusqu'au bout ; on exécute pas de calcul).

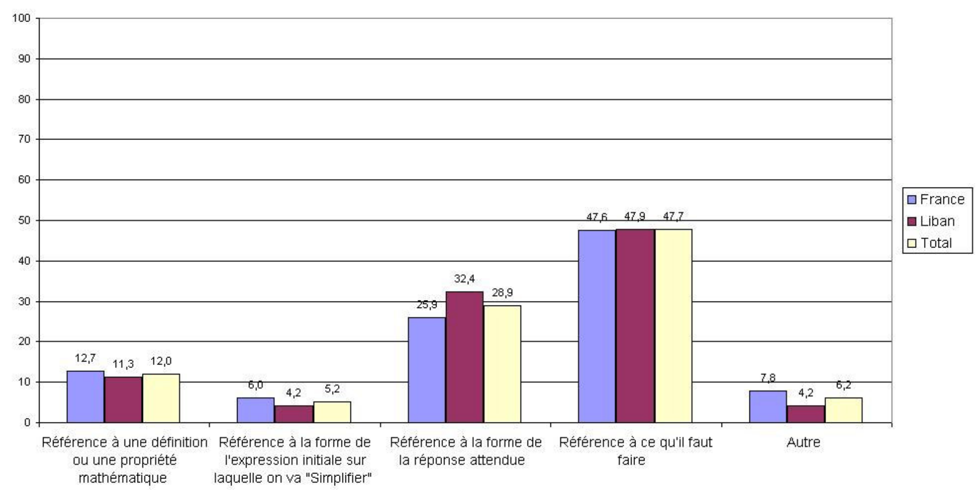


Figure n° 3 : l'explication de simplifier une expression littérale par 282 élèves (150 français, 132 libanais)

L'écart entre les pourcentages des élèves libanais et français ne dépasse pas 6%. Comme nous l'avons prévu, la majorité de réponses correspondent au sens courant :

- référence à ce qu'il faut faire

La majorité de réponses correspondent à : réduire ou grouper une somme ; alléger l'écriture (plutôt les élèves fraçais)

- référence à la réponse attendue

La majorité correspondent à : avoir une forme "plus facile" (plutôt les élèves fraçais) ou avoir une expression "moins longue ou plut petite" (plutôt les élèves libanais)

Nous expliquons les différences entre les réponses des élèves libanais et français par le fait que les élèves français utilisent "simplifier" dans la vie courante et en mathématique surtout dans le contexte de fractions, tandis que les élèves libanais l'utilisent notamment en mathématique. Pour cela, peut être ils se limitent à une seule signification : "plus petite". Par ailleurs, la majorité des réponses dans d'autres catégories correspondent à : "additionner les termes ayant la même partie littérale", ou à des formulations concernant la factorisation. On voit donc que simplifier et réduire sont très proches.

Pour conclure, la propriété de la distributivité n'est pas mis en avant pour définir développer, réduire, ou simplifier une expression littérale.

Pour la définition de chaque type de tâche, les réponses des professeurs et des élèves ne se limitent pas aux propriétés des manuels. En effet, il y'en a qui font référence à des propriétés mathématiques, d'autres qui font référence à la forme de l'expression (initiale ou finale) et d'autres qui font référence à ce qu'il faut faire.

2.1.4. Etude par classe

Pour faire un lien entre ce que les élèves disent et les citations qui peuvent vivrent dans les classes nous avons répertorié les réponses des élèves dans chaque classe dans le sens où celles-ci sont particulièrement remarquables ou particulières.

Vous trouvez dans l'annexe partie 3, le nombre des élèves dans chaque classe et le niveau de la classe ($5^{ème}$, $4^{ème}$ ou $3^{ème}$).

Développer une expression littérale

La majorité des élèves dans deux classes en France (classes 5 et 10)[20] citent : "transformer un produit de facteurs en somme de termes". Tandis qu'au Liban, la majorité des élèves dans une classe (classe 3B) citent : "remplacer l'expression m(a+b) par ma+mb". La différence avec les deux classes en France (classes 5 et 10) est qu'ici les élèves utilisent le registre algébrique et se limitent à parler d'un produit d'un monôme par un polynôme, tandis qu'en France ils utilisent le langage naturel. Cependant, ces réponses correspondent à celles des professeurs et de l'ensemble des élèves. Nous soulignons que même si les élèves font référence à une formulation qui se trouve dans les manuels, ils s'appuient sur la forme de l'expression.

[20] Nous avons donné un numéro à chaque classe pour les distinguer.

Dans la classe 8 en France, la majorité des élèves citent: "le mettre sous forme d'addition ou de soustraction" ou "passer à une somme". Ici les élèves prennent une partie de la citation : "transformer un produit de facteurs en somme de termes". Dans la classe 3C au Liban "rendre l'expression plus claire et plus facile" et "la rendre plus grande". Ces formulations n'ont pas été rappelé ni par la majorité des professeurs ni par l'ensemble des élèves. On pense qu'il y a effets du contrat dans classe 3C. Nous soulignons qu'ici les élèves mettent en avance la forme finale de l'expression sans parler de la procédure ni des éléments technologiques/théoriques qui permettent d'avoir une expression sous forme développée.

Dans deux classes au Liban la majorité des élèves font référence à ce qu'il faut faire, en citant : "réduire une expression algébrique" (classe 2) et "multiplier les termes puis réduire les termes semblables" (classe 3). D'après cela, nous pouvons penser encore une fois qu'on ne donne pas des tâches de type développer mais toujours des tâches de type développer et réduire. Des citations semblables n'apparaissent pas dans des classes français. Enfin, environ la moitié des élèves dans trois classes en France (classes 3, 4 et 11) ne répondent pas. Peut être nous pensons que les professeurs dans ces classes ne donnent pas des explications autour la notion développer.

Réduire une expression littérale

La majorité des élèves dans deux classes en France, soit ils citent : "additionner les termes ayant la même partie littérale" (classe 10) qui correspondent à la majorité des réponses des professeurs, soit ils proposent des exemples d'application complète : $6x+3x+x^2=9x+x^2$ (classe 8) (on pense que le professeur dans cette classe s'appuie sur des exemples d'application pour expliquer la notion de réduire une expression littérale). En revanche, nous n'avons pas trouvé dans aucune classe au Liban, une formulation qui font référence à une définition ou propriété mathématique ou un exemple d'application compète.

Conformément aux citations de l'ensemble des élèves et au sens courant. Environ un tiers des élèves dans trois classes en France (classes 1, 2 et 6) et la moitié dans une classe au Liban (classe 2) font référence à ce qu'il faut faire en citant : "la simplifier". Par ailleurs, la majorité des élèves dans deux classes en France font référence à la forme de la réponse attendue en citant : "l'écrire avec le moins de termes possibles" (classes 2 et 8) et "avoir une formule plus simple" (classe 2).

Simplifier une expression littérale

La majorité des élèves dans une classe en France donnent des exemples d'application complète correspondant à réduire une expression littérale : $4x^2+2x^2+3=6x^2+3$ (classe 8).

La majorité des élèves dans une classe en France (classe 2) et dans une classe au Liban (classe 3B) font référence à la forme de la réponse attendue en citant : "rendre la plus facile ou plus simple". Ce résultat est conforme à la citation de l'ensemble des élèves français. Ainsi, environ la moitié des élèves dans deux classes en France (classes 1 et 10) et la majorité des élèves dans deux classes au Liban (classes n°2 et n°3) citent "la réduire" en faisant référence à ce qu'il faut faire. Cela correspond à ce que nous avons trouvé chez la majorité de l'ensemble des élèves. Enfin, environ la moitié des élèves dans deux classes en France (classes n°4 et n°11) ne répondent pas.

Pour conclure, l'étude de différentes classes nous à montrer qu'il y a des définitions qui vivent dans une ou plusieurs classes. En revanche, il y a des classes où les réponses des élèves ne correspondent pas à une formulation. Cependant, les citations qui vivent dans les deux pays s'appuient plutôt sur la forme de l'expression ainsi la propriété de la distributivité n'est pas rappelé. Ce résultat est à mettre en lien avec d'autres recherches comme celle de Lemoyne et al., 1993, et Kirshner et al., 2004, qui indiquent que les erreurs en algèbre, notamment dans le traitement d'écritures littérales, sont provoquées par le fait que les élèves ne s'appuient pas sur les éléments théoriques concernant les règles. Ils ont plus d'intérêt aux formes sans donner du sens à ces écritures. Ainsi, ils s'appuient plutôt sur des formes des expressions d'une façon automatique.

2.2. Les conditions d'usages

2.2.1. Selon les professeurs

La partie n°1

- Quelle consigne donnez vous pour trouver la réponse $5x^2-3x+4$ à partir de l'expression $5x^2+3x-6x+4$?

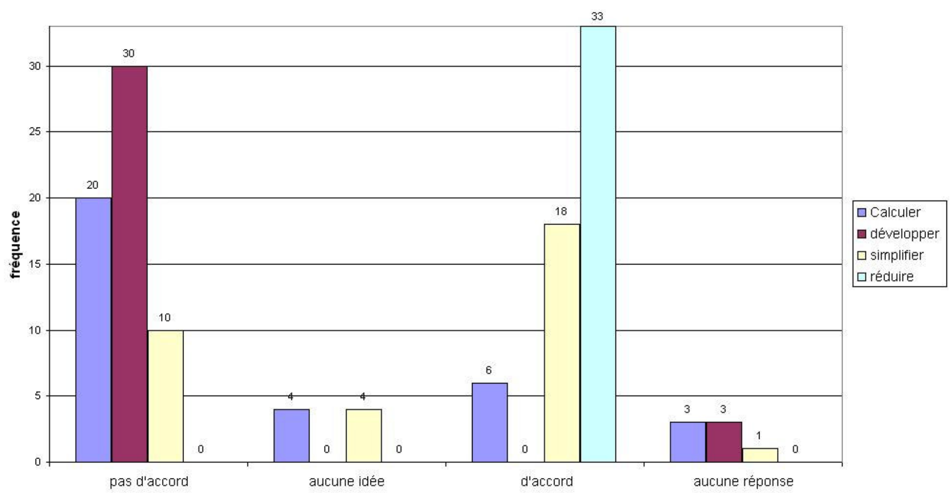


Figure n°4 : Les réponses de 33 professeurs

Conformément à ce que nous avons pensé, tous les professeurs utilisent le terme réduire. D'autre part, plus de la moitié sont d'accord pour simplifier. Ce résultat est conforme avec les réponses des professeurs et des élèves pour expliquer simplifier et correspond au sens courant. Cependant, plus de la moitié des professeurs ne sont pas d'accord à utiliser "calculer", ce qui paraît étonnant parce que tout ce qu'on fait est d'effectuer des règles de calculs en s'appuyant sur des propriétés mathématiques. Nous soulignons qu'il n'y a pas un écart signifiant entre les professeurs français et libanais.

La partie n°2

- Quelle consigne donnez vous pour trouver la réponse $15x^2+14x-8$ à partir de l'expression $(3x+4)(5x-2)$?

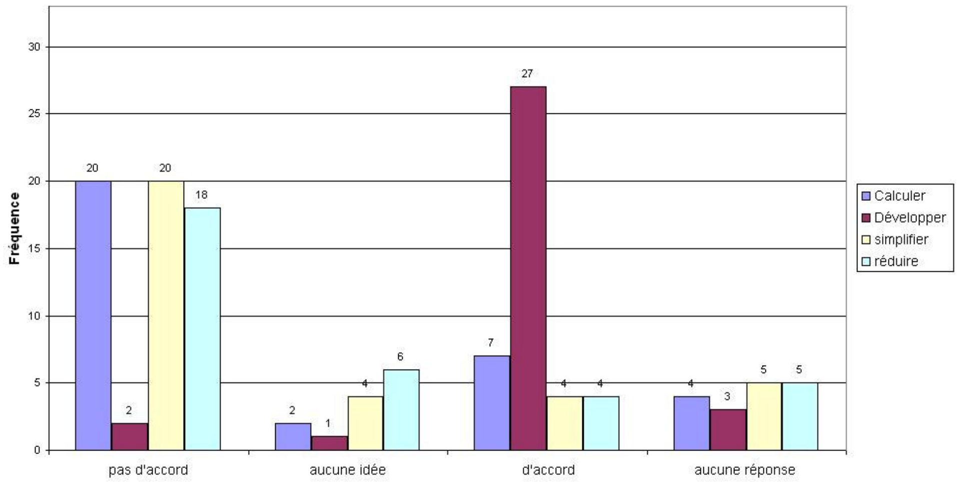


Figure n°5 : Les réponses de 33 professeurs

Comme nous avons prévu, la grande majorité des professeurs sont d'accord pour développer. Presque la moitié (14 sur 33) utilisent "développer et réduire". Il n'y a pas un écart signifiant entre les professeurs français et libanais.

La partie n°3

- Quelle consigne donnez vous pour trouver la réponse $20x^2$ à partir de l'expression $4\times x\times 5\times x$?

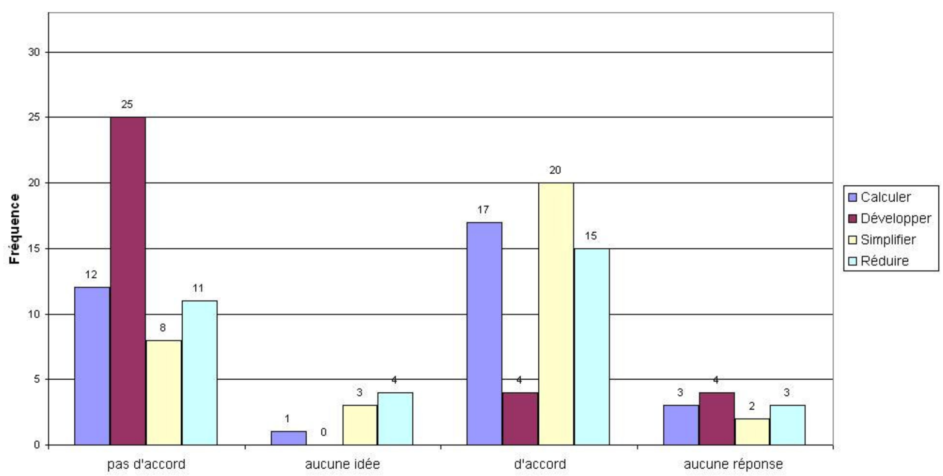


Figure n°6 : Les réponses de 33 professeurs

Conformément à l'analyse a priori, environ la moitié des professeurs (10 professeurs français et 5 libanais) sont d'accord pour utiliser le terme "réduire". Cependant, ce qui n'a pas été prévu, c'est que le nombre des professeurs (11 français et 9 libanais) qui sont d'accord d'utiliser "simplifier" est plus de celui pour "réduire".

Ensuite, environ la moitié sont d'accord pour utiliser "calculer" (4 français et 13 libanais) tandis que dans les deux cas précédents, la majorité n'ont pas été d'accord. D'après cela, nous se demandons si la forme de la réponse finale qui a invoqué les professeurs à cet accord. Nous se questionnons si "calculer" veut dire avoir une réponse où il n'y a pas des opérations "+" ou "–"[21].

La partie n°4

- Quelle consigne donnez-vous pour trouver la réponse -x-2 à partir de l'expression (5x+2)-(6x+4) ?

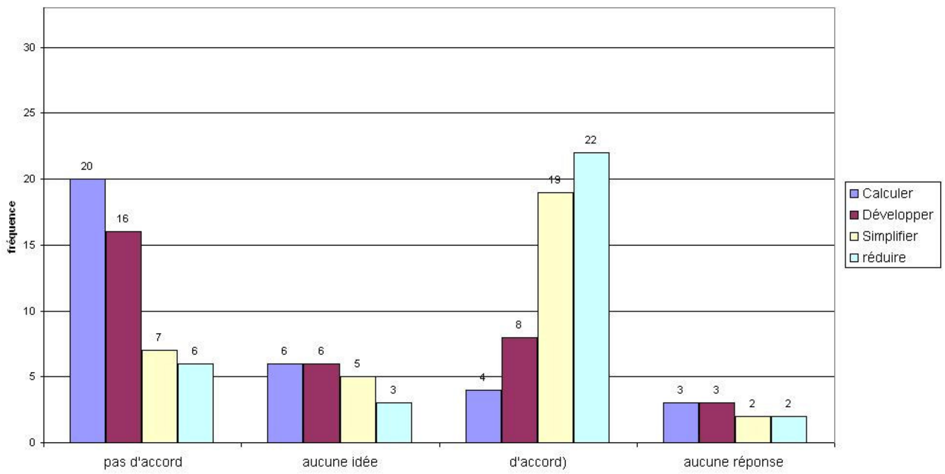


Figure n°7 : Les réponses de 33 professeurs

Même si la répartition des réponses est conforme à l'analyse à priori mais la fréquence des accords ne corresponde pas à ce que nous avons pensé. La majorité des professeurs sont d'accord pour utiliser "réduire" (13 français et 9 libanais) ou "simplifier" (11 français et 8 libanais). D'autre part, ils citent d'autres consignes : "supprimer les parenthèses puis réduire" (4 français et 1 libanais) et "développer et réduire" (1 français et 3 libanais). Nous constatons que les professeurs acceptent d'utiliser simplifier quand ce terme apparaît dans l'énoncé et quand ils considèrent que l'expression est à réduire.

D'ailleurs, les deux égalités : $(3x+4)(5x-2)=15x^2+14x-8$ et $(5x+2)-(6x+4)=-x-2$ sont justifiées par la même propriété mathématique (la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction sur l'ensemble des réelles). Malgré que la majorité des professeurs ont été d'accord pour développer (3x+4)(5x-2). En revanche, ils n'ont pas été d'accord de l'utiliser comme nous avons déjà indiqué avec (5x+2)-(6x+4). Enfin, la forme de l'expression a bien une influence sur la consigne.

La partie n°5

- Quelle consigne donnez vous pour trouver la réponse -3-2x à partir de l'expression -(3+2x) ?

[21] Dans le chapitre 4, partie II de la thèse, nous faisons une étude sur le concept d'une réponse, et des opérations + et – en arithmétique et en algèbre

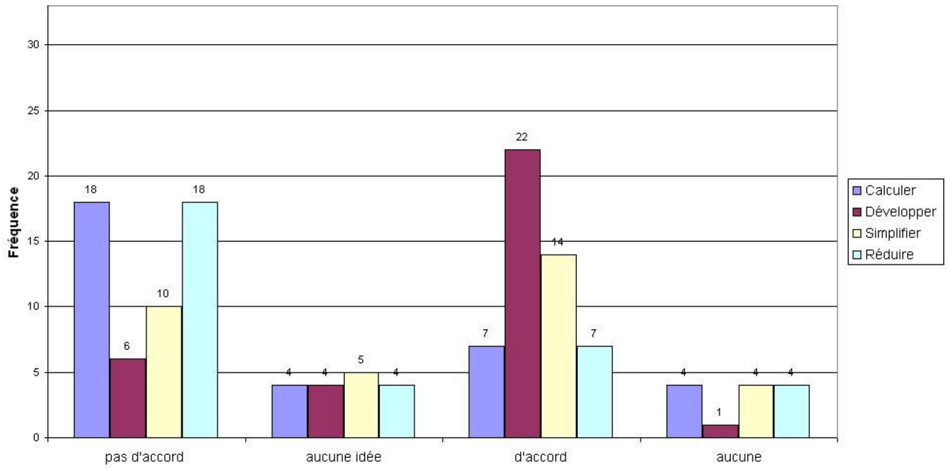


Figure n°8 : Les réponses de 33 professeurs

Deux tiers des professeurs sont d'accord d'utiliser "développer" (9 français et 13 libanais) et presque un quart des professeurs (8 français et 1 libanais) utilisent "supprimer les parenthèses". Nous soulignons que moins de la moitié (10 français et 4 libanais) sont d'accord pour "simplifier" et moins d'un quart (3 français et 4 libanais) pour réduire. Ce résultat ne correspond pas à celui de la partie n°4, où la majorité ont été d'accord pour réduire et simplifier et pas d'accord pour développer. Nous constatons, encore une fois, la consigne est liée à la forme de l'expression d'après les professeurs.

Nous pensons que ce résultat concernant l'utilisation ou non de "simplifier" et "réduire" n'est pas conforme avec celui selon lequel il y'avait un accord d'utiliser simplifier avec des expressions à réduire, selon les professeurs. Cette contradiction nous amène à se demander si c'est l'expression finale (la réponse) ou si c'est la procédure effectuée qui provoquent les professeurs de distinguer simplifier et réduire. Dans les cas précédents on réduit pour arriver aux expressions : $5x^2$-3x+4, $20x^2$, -x-2. Tandis qu'ici on ne réduit pas.

Pour conclure, l'hypothèse que nous avons fait dont lequel les professeurs ont des catégories plus ou moins implicites de formes d'expressions auxquelles ils associent des consignes particulières nous semble vérifiée, même si notre questionnaire ne porte que sur un nombre réduit de professeurs. Le découpage correspond à celui des manuels. Enfin, nous font l'hypothèse suivante : un découpage de ce savoir mathématique en morceaux dans les pratiques des professeurs a des conséquences sur les élèves qui probablement ne voient pas l'unité de tous ces objets mathématiques.

2.2.2. Selon les élèves

La forme de l'expression : Produit de facteurs ; somme de termes.

- a, b et m étant des nombres relatifs, on a : m(a+b)=ma+mb. Développer l'expression m(a+b) c'est la remplacer par ma+mb

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	22	10,4	11	6,7	33	8,8
aucune idée	7	3,3	5	3,0	12	3,2
d'accord	181	85,4	147	89,6	328	87,2
aucune réponse	2	0,9	1	0,6	3	0,8
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 2 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 1

Comme nous avons prévu, la majorité des élèves sont d'accord. Cela confirme son caractère classique. Ainsi, l'écart entre les pourcentages des élèves français et libanais ne dépasse pas 5%. Nous soulignons que cette formulation est citée par la majorité des élèves dans une classe.

- Développer un produit, c'est l'écrire comme une somme de termes.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	46	21,7	46	28,0	92	24,5
aucune idée	49	23,1	25	15,2	74	19,7
d'accord	112	52,8	86	52,4	198	52,7
aucune réponse	5	2,4	7	4,3	12	3,2
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 3 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 2

Environ la moitié des élèves seulement sont d'accord. Nous se demandons si ce pourcentage est faible parce que 87 % des élèves ont été d'accord que "développer l'expression m(a+b) c'est la remplacer par ma+mb". Nous se questionnons si les élèves savent que m(a+b) est une expression produit et ma+mb est une expression somme. Nous répondrons à cette question dans le paragraphe suivant. De plus, presque tout les professeurs français l'utilisent pour expliquer développer, comme nous avons déjà indiqué. Pour cela peut être que le pourcentage des élèves français qui ne sont pas d'accord est moins élevé de celui des libanais.

Ensuite, pour voir si les élèves savent la différence entre "produit de facteurs" et "somme de termes", nous avons proposé, dans une autre question, les expressions littérales suivantes : 3(2x+4) ; (5x+3)×2 ; -6x+9 ; 4-3x en demandant aux élèves d'indiquez si l'expression s'agit d'une somme, d'un produit, ou autre.

Un premier point qui paraît significatif est le nombre de non réponse : 10% des élèves n'ont pas répondu à au moins une de questions. De plus, un écart d'environ 7% apparaît entre les pourcentages des élèves français et libanais (le plus élevé).

Conformément à ce que nous avons pensé, environ deux tiers des élèves ont considéré que 3(2x+4) et (5x+3)×2 sont des expressions produits. D'autre part, plus de deux tiers des élèves considèrent que -6x+9 est une expression somme (avec un écart de 16% entre les pourcentages des élèves français (le plus élevé) et libanais) et 4-3x est une somme ou différence. En revanche, ces résultats montrent, d'une part, la difficulté chez un groupe d'élèves (entre 12 et 19%) d'identifier correctement ces expressions, même s'ils arrivent à faire correctement des tâches concernant développer des expressions littérales (les transformer d'un produit de facteurs à une somme de termes). Finalement, le langage utilisé dans les manuels et programmes et peut être dans les classes, n'est pas compréhensible par au moins 12% des élèves. Enfin, pour chaque un écart (entre 7 et 16 % selon l'expression) apparaît entre les pourcentages des réponses français et libanais.

Lien avec factoriser

- Développer, c'est l'opération inverse de factoriser.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	42	19,8	24	14,6	66	17,6
aucune idée	31	14,6	6	3,7	37	9,8
d'accord	135	63,7	132	80,5	267	71,0
aucune réponse	4	1,9	2	1,2	6	1,6
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 4 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 3

Conformément à ce que nous avons pensé, la majorité des élèves sont d'accord et le pourcentage des élèves libanais est plus élevé de celui des français (écart d'environ 17%). Or, ce résultat ne correspond pas aux réponses des élèves ou professeurs concernant l'explication de développer où presque aucun élève ou professeur n'a parlé du terme factorisé. Conformément aux programmes, nous pouvons constater que les élèves ont déjà vu ce terme et connaissent qu'il est en relation avec le développement même si eux ou les professeurs ne l'utilisent pas pour donner une procédure à réduire. D'après cette contradiction nous se demandons si la technique de factorisation est mis en avance pour réduire une expression littérale.

- La multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction k(a+b)=ka+kb et k(a-b)=ka-kb. Cette règle permet de développer des produits.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	15	7,1	19	11,6	34	9,0
aucune idée	31	14,6	15	9,1	46	12,2
d'accord	158	74,5	119	72,6	277	73,7
aucune réponse	8	3,8	11	6,7	19	5,1
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 5 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 9

Comme nous avons prévu, la majorité des élèves français sont d'accord. Or, ce qui n'a pas été prévu c'est le pourcentage élevé des élèves libanais qui sont aussi d'accord. Ce résultat n'est pas en conformité avec d'autres résultats dont les professeurs et les élèves n'indiquent pas cette égalité pour expliquer développer une expression littérale. Nous se demandons si les élèves ont dit d'accord pour la propriété de la distributivité ou pour les égalités ou pour les deux.

Sens courant

- Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	16	7,5	23	14,0	39	10,4
aucune idée	8	3,8	8	4,9	16	4,3
d'accord	177	83,5	113	68,9	290	77,1
aucune réponse	11	5,2	20	12,2	31	8,2
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 6 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°3b partie 3

Comme nous avons prévu trois quart des élèves sont d'accord. Dans ce cas, un écart de 15% apparaît entre les réponses des élèves français (le plus grand) et libanais. Ce résultat correspond, d'une part, à la citation de la majorité de l'ensemble des élèves qui ont fait référence à la forme de la réponse attendue, et d'autre part, à la citation de la majorité dans deux classes en France. Nous constatons, encore une fois, que ce langage vivre dans les classes en France et pas au Liban et peut être une source de l'erreur de concaténation pour les élèves français. Cet écart important nous interroge. Tout d'abord, nous avons trouvé cette citation dans un manuel français tandis qu'au Liban cette phrase n'apparaît pas dans aucun manuel. Puis, on peut penser que le sens commun du mot réduire est un facteur important pour cette différence. D'autre part, nous se demandons si le sens commun est aussi important pour les professeurs et comment cela peut provoquer des explications différentes pour chaque terme.

- Pour simplifier les écritures mathématiques, on utilise les conventions suivantes : on n'écrit pas le signe × entre un nombre et une parenthèse, deux parenthèses, une lettre et une parenthèse, deux lettres, un nombre et une lettre.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	33	15,6	32	19,5	65	17,3
aucune idée	28	13,2	23	14,0	51	13,6
d'accord	141	66,5	99	60,4	240	63,8
aucune réponse	10	4,7	10	6,1	20	5,3
Total	212	100	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 7 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°2b partie 6

Comme nous avons prévu, la majorité des élèves sont d'accord. L'écart entre le pourcentage des réponses des élèves français et libanais ne dépasse pas 6%.

Forme initiale des expressions

- Quand on a une expression de la forme 7x-(3-x), le professeur demande de réduire l'expression.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	67	31,6	65	39,6	132	35,1
aucune idée	46	21,7	13	7,9	59	15,7
d'accord	89	42,0	72	43,9	161	42,8
aucune réponse	10	4,7	14	8,5	24	6,4
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 8 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°3b partie 4

Contrairement à ce que nous avons prévu, presque la moitié des élèves sont d'accord. Un écart d'environ 14% entre le pourcentage des élèves français (le plus grand) et libanais qui ont mis aucune idée. Ce résultat et cet écart sont compatibles avec celui des professeurs dont lequel la majorité ont été d'accord pour utiliser réduire avec une expression ayant une forme semblable, comme nous avons déjà montré.

- Quand on a une expression de la forme 6x×4x, le professeur demande de réduire l'expression.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	61	28,8	56	34,1	117	31,1
aucune idée	22	10,4	5	3,0	27	7,2
d'accord	121	57,1	89	54,3	210	55,9
aucune réponse	8	3,8	14	8,5	22	5,9
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 9 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°3b partie 5

Comme nous avons prévu, le pourcentage des réponses des élèves sont partagés avec un pourcentage plus élevé correspondant au "d'accord". Pour ceux qui ne sont pas d'accord, le pourcentage des élèves libanais est plus élevé. Cela est conforme avec l'utilisation de ce terme dans les manuels et aux réponses des professeurs dont lequel environ la moitié d'eux (10 professeurs français et 5 libanais) ont été d'accord pour l'utiliser avec une expression produit. Par contre, aucun élève a cité "on réduit un produit" durant l'explication de réduire une expression littérale comme nous avons déjà indiqué.

- Quand on a une expression de la forme 4×x×5×x le professeur demande de simplifier l'expression.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	27	12,7	48	29,3	75	19,9
aucune idée	27	12,7	16	9,8	43	11,4
d'accord	123	58,0	91	55,5	214	56,9
aucune réponse	35	16,5	9	5,5	44	11,7
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 10 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°2b partie 4

Contrairement à ce que nous avons prévu, plus de la moitié des élèves sont d'accord. Or, cela est conforme aux réponses des professeurs qui ont été d'accord d'utiliser "simplifier" avec une expression ayant une forme semblable. Par ailleurs, un écart de 16% apparaît, entre les élèves français et libanais (plus grand) qui ne sont pas "pas d'accord". Nous pensons que cela revient à l'utilisation moins fréquent de ce terme dans les manuels libanais. Enfin, environ un quart des élèves n'ont pas répondu ou ont mis "aucune idée", ce qui montre une difficulté chez ces élèves de comprendre avec quelles formes on utilise ce terme et dans quelles conditions.

Lien entre les trois termes et la forme de l'expression initiale

- Développer c'est simplifier une expression comme (5x+2)-(6x+4)

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	93	43,9	87	53,0	180	47,9
aucune idée	15	7,1	10	6,1	25	6,6
d'accord	103	48,6	65	39,6	168	44,7
aucune réponse	1	0,5	2	1,2	3	0,8
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 11 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 5

Contrairement à ce que nous avons prévu, les réponses des élèves sont partagées entre "pas d'accord" et "d'accord" dont lequel il y a 9% d'écart entre les pourcentages des élèves français, qui sont plutôt d'accord, et libanais, qui sont plutôt pas d'accord à cause de la non utilisation de ce terme dans la majorité des manuels libanais comme nous avons déjà cité. Ce pourcentage élevé, pour ceux qui disent qu'ils sont d'accord, peut être expliqué par le fait que, d'une part, environ le même pourcentage d'élèves ont été d'accord d'utiliser réduire et, d'autre part, plus de la moitié des professeurs ont été d'accord d'utiliser simplifier avec une expression ayant une forme semblable. Or, comme nous avons déjà indiqué, pour expliquer "développer une expression littérale", seulement 6% des élèves ont répondu "simplifier". On peut penser donc que la forme de l'expression initiale prend un rôle plus important du vocabulaire utilisé dans l'énoncé.

- Développer c'est simplifier une expression comme (3x+9)+(2x+3)×4

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	73	34,4	63	38,4	136	36,2
aucune idée	31	14,6	18	11,0	49	13,0
d'accord	105	49,5	69	42,1	174	46,3
aucune réponse	3	1,4	14	8,5	17	4,5
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 12 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 7

Les pourcentages des réponses des élèves sont partagés avec un pourcentage plus élevé pour ceux qui sont d'accord. Ce résultat est à mettre en lien avec celui de la question précédente. Nous pouvons donc constater l'hypothèse dont lequel la forme de l'expression initiale joue un rôle plus important du vocabulaire utilisé. Enfin, environ un quart des élèves ne répondent pas ou ont mis aucune idée. Cela montre l'ambiguïté d'utilisation du terme simplifier avec les expression littérales, comme indique la majorité des professeurs.

- Développer c'est réduire une expression comme $5x^2+3x-6x+4$.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	135	63,7	93	56,7	228	60,6
aucune idée	20	9,4	5	3,0	25	6,6
d'accord	55	25,9	58	35,4	113	30,1
aucune réponse	2	0,9	8	4,9	10	2,7
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 13 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 11

Environ deux tiers des élèves ne sont pas d'accord, ce qui montre que les élèves sont plutôt d'accord d'utiliser développer avec des expressions contenant des parenthèses. Or, contrairement à ce que nous avons prévu, 30% des élèves sont d'accord. Ce pourcentage élevé est à mettre en lien avec celui dans la question expliquer "développer une expression littérale" où 30 réponses ont cité "réduire" ou "grouper des termes semblables". Dans ce cas, un écart de 9% apparaît entre les pourcentages des élèves français et libanais (le plus grand).

- On dit parfois simplifier une expression littérale au lieu de réduire une expression littérale.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	65	30,7	67	40,9	132	35,1
aucune idée	27	12,7	15	9,1	42	11,2
d'accord	111	52,4	71	43,3	182	48,4
aucune réponse	9	3,8	11	6,7	20	5,4
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 14 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°3b partie 1

Comme nous avons indiqué, le pourcentage le plus élevé correspond aux élèves qui citent qu'ils sont d'accord. Dans ce cas, un écart de 9% apparaît entre le pourcentage des élèves libanais et celui des élèves français (le plus grand) parce que le terme simplifier est beaucoup moins utilisé par les élèves libanais conformément à d'autres parties du questionnaire.

Lien entre développer et calculer

- Développer, c'est calculer une expression comme (3x+4)(5x-2)

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	56	26,4	41	25,0	97	25,8
aucune idée	14	6,6	9	5,5	23	6,1
d'accord	135	63,7	100	61,0	235	62,5
aucune réponse	7	3,3	14	8,5	21	5,6
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 15 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 8

Comme nous avons prévu, la majorité des élèves sont d'accord. L'écart entre les pourcentages des réponses des élèves français et libanais ne dépasse pas 5%.

Exemples d'application complètes

- Si on veut calculer 23×101 on peut faire 23×101=23×(100+1)=2300+23=2323. On a utilisé le développement pour passer de la première ligne à la deuxième ligne pour faciliter le calcul.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	23	10,8	30	18,3	53	14,1
aucune idée	6	2,8	3	1,8	9	2,4
d'accord	182	85,8	130	79,3	312	83,0
aucune réponse	1	0,5	1	0,6	2	0,5
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 16 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 4

Comme nous avons prévu, la grande majorité des élèves sont d'accord. Un écart de 7% apparaît entre le pourcentage des élèves français, qui sont plutôt d'accord, et celui des élèves libanais, qui sont plutôt non d'accord.

- Quand on écrit les égalités suivantes, $(3x+2)\times(x+4)=3x^2+12x+2x+8=3x^2+14x+8$ on développe et on réduit.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	22	10,4	27	16,5	49	13,0
aucune idée	16	7,5	8	4,9	24	6,4
d'accord	172	81,1	123	75,0	295	78,5
aucune réponse	2	0,9	6	3,7	8	2,1
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 17 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 12

Comme nous avons prévu, la grande majorité des élèves sont d'accord. L'écart entre les pourcentages de réponses des élèves français et libanais ne dépasse pas 6%.

- Quand on écrit les égalités suivantes, on développe $(a-1)\times(a+3)=a^2+3a-a-3=a^2+2a-3$

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	43	20,3	36	22,0	79	21,0
aucune idée	19	9,0	7	4,3	26	6,9
d'accord	148	69,8	118	72,0	266	70,7
aucune réponse	2	0,9	3	1,8	5	1,3
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 18 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 12

Contrairement à ce que nous avons prévu, la grande majorité des élèves sont d'accord. Nous pensons que cela revient aux effets du contrat. Ainsi, les élèves ont l'habitude de ne pas laisser une expression sous une forme développée non réduite. L'écart entre les pourcentages des réponses des élèves français et libanais ne dépasse pas 5%. D'après ce résultat et celui de la question précédente, nous se demandons si, pour les élèves, la forme de l'expression initiale associée au terme utilisé joue un rôle plus important de celle de l'expression finale.

- $3x^2+6x+7$ est une forme réduite de $3x^2+2x+4x+7$.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	25	11,8	39	23,8	64	17,0
aucune idée	11	5,2	9	5,5	20	5,3
d'accord	168	79,2	105	64,0	273	72,6
aucune réponse	8	3,8	11	6,7	19	5,1
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 19 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°3b partie 2

Comme nous avons prévu, la grande majorité des élèves sont d'accord. L'écart entre les pourcentages des réponses des élèves français et libanais ne dépasse pas 5%. Ce résultat montre aussi que les élèves acceptent une réponse avec de signes opératoires.

La forme de l'expression attendue

- -(3+2x) est l'écriture simplifiée de (3+2x)×(-1)

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	69	32,5	49	29,9	118	31,4
aucune idée	38	17,9	15	9,1	53	14,1
d'accord	100	47,2	91	55,5	191	50,8
aucune réponse	5	2,4	9	5,5	14	3,7
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 20 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°2b partie 4

La grande majorité des élèves sont d'accord. Cela correspond au résultat concernant la question : "(4x-1)(6x-2) est la forme simplifiée de (4x-1)×(6x-2)". Enfin, la grande majorité des élèves considèrent que "simplifier" est alléger l'écriture. Spécifiquement, on simplifie quand on cache le signe ×.

- (4x-1)(6x-2) est la forme simplifiée de (4x-1)×(6x-2)

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	68	32,1	61	37,2	129	34,3
aucune idée	10	4,7	8	4,9	18	4,8
d'accord	131	61,8	89	54,3	220	58,5
aucune réponse	3	1,4	6	3,7	9	2,4
Total	212	100	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 21 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°2b partie 1

La majorité des élèves sont d'accord. Cela correspond au résultat concernant la question : "expliquer simplifier une expression littérale". Le pourcentage des élèves qui ont cité "alléger l'écriture" a été plus grand de celui qui ont dit "développer" ou "développer et réduire". D'autre part, l'écart entre les pourcentages des réponses des élèves français et libanais ne dépasse pas 8%.

- $6x^2$+x-2 est une forme simplifiée de (3x+2)(2x-1)

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	97	45,8	80	48,8	177	47,1
aucune idée	13	6,1	5	3,0	18	4,8
d'accord	70	33,0	70	42,7	140	37,2
aucune réponse	32	15,1	9	5,5	41	10,9
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 22 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°2b partie 3

Contrairement à ce que nous avons pensé, environ la moitié des élèves ne sont pas d'accord. Nous pensons qu'il y a des élèves qui ont effectué le calcul mais ont fait une erreur ainsi, ils ont choisi pas d’accord. D’autres, qui considèrent que simplifier n’est pas synonyme au développer et donc il ne sont pas d’accord d’utiliser ce terme avec une expression à développer. (Nous avons indiqué que, moins d’un quart ont définit simplifier comme "développer" ou "passer d’un produit à une somme"). Ce résultat est à mettre en lien avec, d’une part, les réponses des professeurs dont lequel ils ont montré qu’ils n’utilisent pas ce terme avec une expression ayant forme semblable et, d’autre part, le précédant dont lequel un pourcentage plus élevé des élèves ont été d’accord de simplifier une expression littérale en cachant le signe × sans effectuant les opérations.

Lien avec les verbes multiplier et supprimer

- Développer 3x(2x-1) c’est multiplier 3x par 2x, cela fait $6x^2$ et 3x par –1, cela fait –3x, et faire la somme.

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	46	21,7	48	29,3	94	25,0
aucune idée	21	9,9	8	4,9	29	7,7
d'accord	141	66,5	96	58,5	237	63,0
aucune réponse	4	1,9	12	7,3	16	4,3
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 23 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°1b partie 10

Presque deux tiers des élèves sont d’accord. L’écart entre les pourcentages des réponses des élèves français et libanais ne dépasse pas 8%. Nous pensons qu’il y a des élèves qui ne sont pas d’accord parce qu’on ne trouve pas cette une formulation dans les manuels.

- Quand le professeur demande de simplifier 3x-(5-8y) on supprime ce "-" et les parenthèses à condition de multiplier l’expression entre parenthèses par –1. Donc la réponse est 3x-5+8y

	France		Liban		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
pas d'accord	55	25,9	70	42,7	125	33,2
aucune idée	38	17,9	11	6,7	49	13,0
d'accord	115	54,2	74	45,1	189	50,3
aucune réponse	4	1,9	9	5,5	13	3,5
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 24 : effectif et % de réponses des élèves à la question n°2b partie 2

La moitié des élèves sont d’accord. Or, ce pourcentage est élevé par rapport à celui des élèves qui ont été plutôt pas d’accord que $6x^2$+x-2 est une forme simplifiée de (3x+2)(2x-1). Pour ceux qui choisissent pas d’accord, un écart de 17% apparaît entre les pourcentages des élèves français et libanais (le plus grand). Nous indiquons encore une fois que le terme simplifier est utilisé moins fréquemment dans les manuels libanais.

Pour conclure, nous constatons que les termes développer, réduire, simplifier une expression littérale varient, dans les manuels, par les professeurs et les élèves, en fonction de la forme de l'expression littérale, alors qu'il s'agit toujours d'utiliser la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction. Par exemple, on trouve fréquemment "supprimer les parenthèses" ou "réduire" pour des expressions de type (a±b)-(c±d) tandis qu'on utilise "développer" pour des expressions de type (a±b)(c±d). Ainsi, il y a un découpage du savoir relatif au calcul littéral et nous pensons que cela provoque peu d'homogénéité pour les élèves. Il est probable qu'ils ne disposent pas toujours d'éléments technologiques/théoriques pour justifier les techniques utilisées pour résoudre des tâches de ce type ou pour valider une réponse, notamment la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition ou sur la soustraction. Cette hypothèse nous est apparue intéressante à étudier. La variation du terme avec l'expression littérale par les élèves et les professeurs sont compatibles.

3. Conclusion

Nous constatons que pour définir développer et/ou réduire une expression littérale la propriété de la distributivité est peu citée par la majorité des professeurs et des élèves. De plus, des définitions de ces termes, sont utilisées (voire institutionnalisées) par le professeur de chaque classe et vivent dans les classes. A noter qu'il y a un pourcentage non faible des élèves français et libanais qui n'ont pas répondu à la question concernant la définition de chacun des types de tâches.

D'ailleurs, le sens commun de chaque mot (développer, réduire, simplifier) et la forme de l'expression littérale jouent un rôle important pour les professeurs et les élèves. Ainsi, ils utilisent des termes différents dans la consigne selon la forme de l'expression littérale.

On peut donc se questionner sur les procédures de validation qui pourront être mise en œuvre par les élèves notamment à partir des définitions basées sur le sens courant de chacun des termes ou en s'appuyant sur des éléments d'ostensifs sans faire référence à des éléments technologico-théoriques. Alors nous font l'hypothèse suivante : il y a un déficit de justification par des éléments théorico-technologiques au collège, en ce qui concerne le calcul littéral, et les élèves ont des difficultés à valider leur calculs.

PARTIE II

Chapitre 4
Quelques éléments sur les travaux en didactique de l'algèbre

Dans ce chapitre, nous allons faire une synthèse non exhaustive des travaux de didactique de l'algèbre en nous centrant sur ceux portant sur les erreurs en calcul littéral. D'autres thèses (Grugeon, 1995, Coulange, 2000, Lenfant, 2002) ont déjà fait ce travail de synthèse dont nous reprenons certains points. Le lecteur pourra s'y référer.

Nous attirons l'attention que diverses recherches ont été faites qui portent sur la modélisation, notamment concernant le lien algèbre-arithmétique ; nous citons comme exemple Chevallard, 1985, 1989, 1990 et Gascon, 1993. Or cet aspect n'est pas notre objet d'étude dans la présente recherche ; nous étudions seulement le calcul littéral du point de vue des techniques de résolution, erreurs et difficultés éventuelles et moyens de correction.

Différents chercheurs en didactique ont été intéressés à l'étude des objets de l'algèbre (cf. chapitre 1, §1). Il s'avère alors nécessaire de faire une synthèse succincte de ces travaux notamment ceux qui sont en lien avec notre objet d'étude.

Dans les recherches en didactique, nous nous rendons compte qu'il y a différents points de vues sur l'erreur ; nous soulignons dans la partie 1, notre point de vue de l'erreur en nous référant à plusieurs recherches.

Dans la partie 2, nous présentons la mise en relation du développement de la pensée algébrique, en prenant compte d'une nécessaire rupture avec la pensée arithmétique, précisément les fausses continuités (partage des même symboles, signes et lettres) et les discontinuités (démarches de résolution ; double caractère procédural et structural des concepts mathématiques ; représentation formelle des problèmes par des équations), en montrant les difficultés qui sont soulevées par cette rupture.

Puis, nous indiquons dans les parties 3 et 4 les erreurs en algèbre et leurs sources ainsi que les erreurs classiques en calcul littéral, en nous basant sur les résultats des études en didactique en France et à l'étranger et en faisant une confrontation entre les différents points de vues.

Enfin, dans la partie 5, nous parlons de l'activité du professeur dans le domaine d'algèbre, en pointant sur le fait qu'il n'y a pas beaucoup d'études qui ont été effectuées sur les pratiques du professeur dans la classe, dans les phases de correction.

1. Notre point de vue sur l'erreur

Tout d'abord, il faut noter que l'intérêt porté aux erreurs des élèves n'est certes pas un phénomène nouveau. Durant les années 1980, un vaste travail a été réalisé sur la notion d'erreur en mathématiques. Les erreurs ont été étudiées non seulement du point de vue de leur fréquence, mais aussi du point de vue de leur nature.

Pour spécifier notre position de l'erreur, nous rejoignons DeBlois et al., 2005 qui indiquent que l'erreur émerge des réflexions et des expériences des élèves :

> "L'erreur n'est pas le fruit de hasard ; elle peut être l'indice d'une connaissance qui s'est révélée efficace dans certains cas, mais qui, mise en œuvre dans un nouveau problème, s'avère inappropriée ou inadaptée." (pp. 135-136)

Sackur et al., 1997 sont en accord avec l'idée précédente et voient que les erreurs des élèves, notamment en mathématiques, ne sont pas le résultat d'incohérences, de conceptions erronées, mais de connaissances qui ont une "forme particulière".

Nous adoptons également le point de vue de Ravestein et al., 1994, qui se placent du point de vue de l'enseignant pour spécifier l'erreur. Ainsi, ils indiquent une autre dimension de l'erreur comme un écart entre ce qui est attendu par le maître et ce qui est produit par l'élève:

> "L'erreur dans la relation didactique, relevée, parfois archivée, renvoie aussitôt à un système de référence : celui du savoir enseigné. Institutionnellement reconnu et jouissant d'une relative stabilité à l'échelle d'une classe, incarné dans la parole du maître, ce savoir disponible permet de circonscrire ce qui aurait dû être fait et qui ne l'a pas été. En présence de l'erreur on est donc ici invité à mesurer un écart, évaluer une différence, entre le produit attendu et la production de l'élève." (pp. 83)

De plus, de nombreuses études tendant à considérer le statut de l'erreur comme un support possible pour les apprentissages des élèves en classe (Cange et al., 2003, Brousseau, 1983). Dans ce cas, Brousseau, 1983, parle des obstacles, des conceptions anciennes qui résistent face à une nouvelle conception. Ainsi, elles provoquent des erreurs dans des nouvelles situations :

> « Un obstacle est un ensemble de difficultés d'un actant (sujet ou institution), liées à « sa » conception d'une notion. Cette conception a été établie par une activité et par une adaptation correctes, mais dans des conditions particulières, qui l'ont déformée ou qui en ont limité la portée. Les difficultés créées par cette conception sont liées par des « raisonnements » mais aussi par les nombreuses circonstances où cette conception intervient. Ainsi la conception résiste au simple apprentissage d'une connaissance plus correcte. Les difficultés semblent disparaître, mais elles réapparaissent de façon inattendues et causent des erreurs par des relations insoupçonnées. L'identification et l'inclusion explicite du rejet d'un obstacle dans la nouvelle connaissance sont généralement des conditions nécessaires à son usage correct. »

Ensuite, en se référant à Bachelard, Brousseau identifie l'obstacle épistémologique :

> « une connaissance qui donne des résultats corrects dans certain domaine mais se révèle fausse ou tout à fait inadaptée dans un domaine nouveau ou plus vaste, (…) ces connaissances ne sont pas des constructions personnelles variables. Elles sont des réponses universelles à des domaines précis. Elles apparaissent donc presque nécessairement dans la genèse d'un savoir. » (Brousseau, 1983)

2. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre

Dans l'enseignement des mathématiques en France et au Liban (voire dans les pays anglo-saxons : Canada, Etats-Unis, Angleterre l'algèbre vient après l'arithmétique. Du coup, se pose la question du rapport éventuel entre l'algèbre et l'arithmétique et des difficultés liées. Particulièrement, la question des rapports entre algèbre et arithmétique et l'identification des ruptures et des continuités entre ces deux domaines ont intéressé de nombreux chercheurs. Dans la suite nous mentionnons quelques citations en lien avec ce sujet.

Vergnaud, 1987, indique qu'il y a une double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre :

> "d'une part l'introduction d'un détour formel dans le traitement des problèmes habituellement traités intuitivement, d'autre part, l'introduction d'objets mathématiques nouveaux comme ceux d'équation et d'inconnue, de fonction et de variable, …"

Grugeon, 1995 indique que :

> «Kieran, 1992, 1994, relie les difficultés des élèves à l'introduction de l'algèbre comme une généralisation de l'arithmétique. Elle développe ensuite les continuités et discontinuités entre arithmétique et algèbre.
>
> Les fausses continuités résident dans :
>
> - le partage des mêmes symboles et signes (signes d'égalité et d'opération) n'ayant pas la même interprétation
>
> - la présence de lettres n'ayant plus la même signification selon le contexte.
>
> Les discontinuités sont reliées à :
>
> - la mise en œuvre de démarches de résolution distinctes
>
> - l'utilisation de nouveaux objets, voire la mise en jeu de conceptions d'ordre structural et non plus procédural des objets (mémorisation d'un calcul et non plus effectuation du calcul, process-product dilemma de Davis, 1975)
>
> - la représentation formelle des problèmes par des équations et à l'utilisation de procédures formelles nouvelles pour les résoudre (didactical cut de Filloy et Rojano, 1984) » (Grugeon, 1995)

Il faut noter qu'on retrouve ici le rôle important des ostensifs dans l'utilisation des mêmes symboles et signes.

2.1. Les fausses continuités : Changement de statut des objets

A la sortie de l'école primaire, les élèves ont une pratique exclusive de l'arithmétique : toutes les situations rencontrées se résolvent uniquement avec des nombres. Au début et durant l'enseignement de l'algèbre il existe certains outils commun à l'arithmétique : les signes opératoires, le signe "=", l'usage des parenthèses. Or ces symboles ne vont pas forcément avoir le même sens, ou du moins le même usage, selon le domaine dans lequel on travaille.

Dans le paragraphe suivant nous allons montrer qu'à partir du collège, une rupture s'amorce à partir du passage "obligé" entre arithmétique et algèbre. Nous présentons aussi les difficultés et les erreurs qui soulèvent par cette rupture.

2.1.1. Le signe "="

L'égalité pose un problème de rupture essentiel parce qu'il peut avoir un double statut en désignant soit l'annonce d'un résultat, soit une relation d'équivalence.

Coulange, 2000 a mentionné dans sa thèse que :

> "Au sein de l'arithmétique enseignée actuellement, la signification dominante du signe d'égalité est celle de l'annonce d'un résultat, ou d'effectuation d'opérations (fréquentes sont les écritures de type 2+6=8 dans les solutions arithmétiques associées d'ailleurs à l'oral d'expression du type 2 et ou plus 6 font ou donne 8). Le

signe d'égalité traduit alors, pour les élèves, une relation qui n'est ni symétrique, ni transitive. Dans ce cas, son rôle dominant est un rôle de production (4+3=7 où le signe = est vu comme signe de production des écritures). Cela peut entraîner des difficultés dans l'apprentissage de ces tâches relative au calcul littéral ou aux techniques associées".

En revanche, le rôle du signe égal, en algèbre, ne peut être réduit à celui en arithmétique (puisque par exemple, le signe = est vu comme relation dans l'écriture 4+3=6+1). Quand on travaille sur les objets de l'algèbre, le signe d'égalité traduit alors nécessairement une relation d'équivalence. Des chercheurs comme Wagner's, 1977, Vergnaud et al., 1987, Kieran, 1981, Kieran & al., 1991, Cortès, 1992, montrent qu'au début de l'enseignement de l'algèbre le signe d'égalité, pour certaines élèves, se limite souvent au sens initial dominant en arithmétique. Alors, les propriétés de la symétrie et la transitivité du signe d'égalité ne sont pas claires et peuvent donc conduire à des écritures incorrectes (par rapport au signe d'égalité, par exemple 50-24=26+12=38). Pour illustrer, on cite :

"The equal sign is read as "it gives" that is left-to-right directional sign" (Kieran & al, 1991)

"a unidirectional symbol preceding a numerical answer" (Wagner's, 1977, Kieran, 1981)

Pour conclure, la difficulté revenant à l'interprétation du signe égale comme équivalence peut ainsi entraîner une résistance importante de la part d'élèves dans l'apprentissage des règles formelles du calcul algébrique, notamment au calcul littéral. Enfin, les élèves débutant peuvent donc tenter de faire appel à des techniques se rapprochant de l'arithmétique et non de l'algèbre. Enfin, nous indiquons les erreurs qui peuvent être provoqué par cette rupture dans les paragraphes qui suivent.

2.1.2. Les lettres

Grugeon, indique que :

« Kuchëmann, 1981, Booth 1984, Kieran, 1991, ont montré qu'en mathématiques une lettre peut avoir, selon le contexte, des statuts différents (comme être évalué : la lettre est remplacée par une valeur numérique ; non considérée : la lettre est ignorée dans le calcul ; être une étiquette : la lettre représente un objet concret ; être une inconnue spécifique : la lettre désigne un nombre inconnu ; être un nombre généralisé : la lettre peut prendre plusieurs valeurs ; être une variable ou un paramètre : la lettre est utilisée dans un contexte fonctionnel).

En arithmétique, souvent on utilise les lettres pour désigner des étiquettes (par exemple 12m peut désigner 12 motos) ou des mesures (par exemple 12m peut désigner 12 mètres). Tandis qu'en algèbre on peut aplatir les nombres sur des étiquettes (par exemple 2x+3x=5x on suggère de penser x comme à des pommes), mais cela ne veut pas dire que le statut d'une lettre est réductible à celui d'étiquette ou des mesures. Nous remarquons que certains professeurs utilisent la première lettre des mots pour représenter l'objet indiqué par ce mot, dans ce cas, la lettre peut devenir pour les élèves un objet. » (Grugeon, 1995)

L'utilisation des lettres dépend du contexte. En effet, l'algèbre fournit un moyen plus puissant que l'arithmétique traditionnelle pour résoudre des problèmes essentiellement liés à l'usage des lettres (Chevallard, 1989a). Par exemple ces dernières peuvent être des quantités inconnues pour résoudre des équations.

Nous revenons au calcul littéral pour noter que dans les tâches de type "développer et/ou réduire une expression littérale" la lettre a le statut d'une variable. Mais au sein d'autres types de tâches, comme "résoudre des équations", ces tâches deviennent des outils et la lettre peut prendre différents statuts (ce qui peut créer des difficultés pour les élèves) comme le montre Croset, 2005, en indiquant un exemple de résolution d'équation:

x+7=8 (1)
x+7-7=8-7 (2)
x=1 (3)

Selon le raisonnement horizontal ou vertical, le statut de la lettre change :

> "entre le membre de gauche x+7 et le 8 (1), il y a recherche d'équilibre, x n'est pas une variable mais une inconnue ; on cherche à déterminer quelles seraient les valeurs à donner à x pour que cette égalité soit vraie, tandis qu'entre les deux membres de gauche x+7-7 (2) et x (3), il y bel et bien égalité, quel que soit la valeur de x ; x a ici le statut de variable. En revanche, entre x+7 (1) et x+7-7 (2), il n'y a aucune égalité possible." (Croset, 2005, pp. 13)

Pour conclure, nous nous mettons d'accord que le changement de statut dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre n'a rien d'évident pour les élèves. Nous rejoignons Kuchëmann, 1981, Booth, 1988, qui soulignent que parfois l'enseignement, notamment les approches choisies par certains enseignants, participe à créer des erreurs pour les élèves. En fait, certains professeurs représentent les variables par des objets. Par exemple : "deux pommes plus cinq bananes" pour représenter 2x+5y. Cela peut encourager les élèves à écrire 7xy parce que couramment on peut dire deux pommes plus cinq bananes c'est sept fruits. Enfin, par ces approches les professeurs ne font pas recours à des éléments théoriques et ils s'appuient plutôt sur des éléments ostensifs et sur des exemples de la vie commune.

2.1.3. Les signes opératoires

Dans les paragraphes suivants, nous parlons, d'une part, de changement du statut de signes "+" et "-" lié au passage arithmétique-algèbre et, d'autre part, nous citons les résultats des études didactiques sur les conceptions et des difficultés des élèves liées au changement de signes. Ensuite, nous indiquons les difficultés liées au syntaxe d'une expression littérale, notamment au signe puissance et à l'apparition ou non de signe "×".

> Tout d'abord, en arithmétique, les enchaînements opératoires, ne sont pas traités comme des objets mais comme des processus de calcul. Ainsi les expressions contenant des signes opératoires sont toujours évaluées pour obtenir un résultat. Par exemple, 2(3+5) est un processus conduisant au nombre 16. Tandis qu'en algèbre, ce n'est pas toujours le cas : une expression littérale ayant le statut de résultat peut conserver un signe opératoire et rester non évaluée (par exemple x+3 peut avoir le statut d'un résultat). (Grugeon, 1995)

Les chercheurs Sfard, 1991, et Kieran, 1994, ont montré qu'au début de l'enseignement de l'algèbre, qu'une expression littérale avec un signe opératoire (par exemple 4n+3) n'est pas un objet mathématique pour les élèves, car la conception du signe "+" est lié à un processus de calcul. De plus, il est associé à l'idée de réunion physique et à l'exécution d'une action (par exemple, les élèves peuvent ajouter 4n et 3 pour avoir 7n comme "résultat"), ceci peut être renforcé par la conception en arithmétique du signe "=".

> "In arithmetic, symbols such as + and = are typically interpreted in terms of actions to be performed,+ means to actually perform the operation and = means to write down the answer". (Ginsburg, 1977, Behr et al., 1980)

D'ailleurs, Kirshner, 1989, relie les erreurs des élèves à une absence de marques explicites dans les expressions littérales. Par exemple, pour transformer $(3x^2)^2$ en $9x^4$, l'élève doit identifier $3x^2$ comme un produit (et non une puissance).La difficulté provient donc de l'absence de marque explicite indiquant que l'exposant " ^{2} " ne s'applique qu'à x et non à 3x.

Drouhard, 1992, constate que la syntaxe des règles de priorité est une plus grande cause d'erreur que la complexité des structures. Il conclut que le critère le plus pertinent est celui de la catégorie des expressions mises en jeu.

> "ce n'est pas la notion même de suite d'opérations que la manière dont l'ordre des opérations est exprimée : explicitement (avec des parenthèses) ou implicitement (par les conventions de priorité), ni le degré de complexité de ces suites qui posent des problèmes aux élèves. Ces sont les propriétés de ces suites d'opérations, telles que la commutation des opérateurs (le carré de la somme n'est pas la somme des carrés) qu'ils maîtrisent mal, propriétés liées à celles des opérations elles-mêmes".

Il montre les ambiguïtés qui peuvent apparaître lorsque le signe "$\times$" est caché : d'abord, lorsque les deux facteurs sont des constants il y a un risque de confusion avec la concaténation ; ensuite, quand le second facteur seulement est une constante, il y a un risque de confusion à l'oral avec l'exponentiation ; enfin, lorsque il y a "nombre fractionnaire" (par exemple de type $3\frac{2}{3}$) dont la structure additive est en conflit avec l'interprétation multiplicative de la juxtaposition (ce type est encore actuel dans le monde anglo-saxon et au Liban).

Pour conclure, nous constatons, encore une fois, que contrairement à l'arithmétique, l'algèbre ne permet pas généralement une distinction claire entre le processus de calcul et son résultat et que le changement de statut de signes opératoires va aboutir à une rupture avec les pratiques arithmétiques. Nous rejoignons donc Booth, 1984 et Grugeon, 1995 qui indiquent que cela peut constituer un obstacle pour les élèves. Finalement, on se demande si, dans les phases de correction, les professeurs font des analyses de la source de l'erreur, en la renvoyant à des pratiques arithmétiques.

2.2. Les discontinuités

2.2.1. Nouveaux objets en calcul littéral

Les expressions littérales, ainsi que les équations et les fonctions, sont de nouveaux objets introduits avec l'algèbre au collège. On peut soit effectuer des calculs, soit justifier et valider des transformations opérées (développer, réduire, factoriser une expression littérale).

2.2.2. Nouvelle perception des expressions littérales: procédural vs structural

De nombreux chercheurs ont distingué l'arithmétique-algèbre dans l'opposition procédural-structural. (Artigue, 1996, Kieran, 1991, Sfard, 1991). En arithmétique, les chaînes de nombres et d'opérations ne sont pas traités comme des objets mais comme des processus de calcul permettant d'obtenir un résultat. Par exemple, 4(2+6) est un processus conduisant au nombre 32.

Contrairement à l'arithmétique, l'algèbre est "structurale", c'est-à-dire une expression littérale ayant le statut de résultat peut conserver un signe opératoire et rester non évaluée (par exemple a+5 peut avoir le statut d'un résultat). En effet, les symboles portent du sens indépendamment des procédures. Dans ce cas, les signe "+" ou "–" ne donnent pas forcément lieu à une exécution de calcul. Enfin, l'algèbre ne permet pas généralement une distinction claire entre le processus de calcul et son résultat.

Pour certains élèves, cette rupture avec les pratiques arithmétiques constitue un obstacle durable. Ils refusent, d'accepter qu'une expression algébrique ayant un statut de résultat, donc d'objet, conserve un signe opératoire. Dans ce cas, l'expression donnée est perçu comme une suite d'opérations arithmétiques et l'ordre des priorités est régulièrement omise (par exemple les élèves peuvent transformer x+3 en 3x). Cette difficulté, identifiée par de nombreux chercheurs, est nommée "le dilemme process-product" par Davis, 1975.

Grugeon, 1995 cite que Sfard, 1991 montre que les processus d'apprentissage et de résolution de problèmes consistent en un jeu complexe entre les conceptions opérationnelle et structurale des concepts[22] telle que les conceptions opérationnelles précèdent celles structurales. Le passage des unes aux autres constituent un saut qualitatif. Enfin, elle montre que des approches structurales trop précoces dans l'enseignement aboutissent au développement de conceptions qualifié de "pseudo-structurales" et qui conduisent les élèves à percevoir les expressions algébriques comme des chaînes de symboles indécomposables.

2.2.3. Nouveaux traitement des expressions littérales

Pour comprendre les écritures symboliques de l'algèbre, notamment du calcul littéral, nous reprenons le point de vue de Drouhard, 1992. Il défend l'idée qu'on ne peut pas parler de la signification des expressions algébriques en faisant l'impasse sur leur syntaxe. Pour lui,

> "comprendre ces écriture revient donc à prendre en compte ensemble leur syntaxe[23] (ou conventions) leur dénotation[24] (ou référence), leur sens[25] et leur interprétation[26]".

[22] "Dans cette approche les conceptions et concepts sont différenciés, les conceptions étant définies comme des représentations et des associations évoquant des notions mathématiques abstraites". (Grugeon, 1995)

[23] "Les conventions d'écritures voir les implicites liées à l'écriture des expressions algébriques, par exemple, les trois fonctions du point multiplicatif, le rôle des parenthèses, la non présence de la constante multplicatif 1." (Grugeon, 1995)

[24] "Neil Armstrong et le premier homme sur la Lune ont le même dénoté : l'homme nommé Neil Armstrong. Toutefois, ces deux phrases n'ont pas le même sens : le seconde phrase insiste sur ce qu'il a fait, tandis que la première souligne son patronyme. Par exemple le nombre 2 a plusieurs écritures 4/2, (1+1), $\sqrt{4}$ réfèrent un même nombre." (Sackur et al., 1997)

[25] le sens d'une écriture nous permet de savoir comment elle est faite, comment on peut la calculer ; il permet également d'avoir des informations sur ce qu'on peut en faire (telle forme est factorisable, telle autre est développable, etc.) Deux expressions n'ont pas le même sens si elles ne relèvent pas du même domaine de description.

Pour définir ces concepts, Drouhard reprend les travaux de Frege, 1971.

Le choix des transformations et procédures applicables à des expressions littérales en fonction de la tâche à réaliser dépend de leur sens. Par exemple, les expressions $(x-1)^2$ et x^2-2x+1 ont la même dénotation. Par contre, les informations données par les écritures sont différentes et en particulier les transformations formelles, qui leur sont applicables, sont distinctes.

D'ailleurs, Drouhard, 1992 montre que les élèves font les calculs en s'appuyant d'avantage sur la forme de l'expression que sur le sens :

> "De notre enquête il ressort donc que pour un certain nombre d'élèves, la tâche de mise sous forme canonique (ou sans parenthèses) apparaît comme prioritaire par rapport à la tâche d'effectuation ou, ce qui revient au même, que seules les expressions canoniques sont susceptibles d'être évaluées. Ce qui est intéressant ici, c'est qu'on a une étape intermédiaire sur le chemin qui conduit progressivement les élèves à perdre le « sens » des expressions (mêmes numériques) qu'ils manipulent. Alors que dans le premier degré toute expression, même parenthésée, a une valeur numérique (c'est le but du calcul arithmétique que de découvrir cette valeur), on voit ici des élèves pour lesquelles les expressions parenthésées ne peuvent être évaluées directement : seules les expressions non parenthésés ont une valeur calculable." (pp. 263-264)

D'autres recherches, comme celle de Sackur et al., 1997 font le lien entre les pratiques des professeurs et les difficultés des élèves. Ils tentent de donner une explication en termes de sens et de dénotation, aux erreurs des élèves en calcul littéral, en montrant l'approche classique de correction "tester par un nombre" effectuée par les professeurs. Ils expliquent que le professeur qui tente d'avancer l'argument : si a est égale à 2 et b égale à 3, alors $(a+b)^2$ vaut 25 tandis que a^2+b^2 vaut 13, n'est guère convaincant pour les élèves qui ont fait cette erreur car l'algèbre apparaît comme une affaire de règles :

> "Peu leur importe que $(a+b)^2$ soit égale à 25 ou à 13 ou à n'importe quelle autre valeur : pour eux, la valeur des expressions n'est pas un critère pertinent. (…) En plus du concept de carré lui-même et de la situation, ils ont besoin de savoir que la valeur de carré doit rester la même pendant son développement. A plus forte raison, ils ne peuvent pas savoir que cette dénotation est conservée par les transformations. Or il est très difficile de discuter de cela avec eux. Quand le professeur n'est pas d'accord avec la transformation : $(a+b)^2=a^2+b^2$ parce qu'elle ne conserve pas la dénotation, ils pensent que c'est seulement parce que le professeur préfère une autre règle (de transformation) qui serait par exemple : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Même l'interprétation numérique proposée par le professeur n'est pas pertinente pour eux, s'ils ignorent que les transformations sont censées conserver la dénotation. Pour eux, les procédures étant différentes, les résultats le sont évidemment aussi. Que la même expression puisse à l'issue de deux transformations différentes, donner des valeurs différentes, ne leur apparaît pas comme une contradiction."

Enfin, nous sommes d'accord avec Sackur et al., 1997, qui disent que les calculs algébriques deviennent vite très répétitifs et les élèves finissent par appliquer simplement par conformité des règles syntaxique, ignorant la dénotation et la dimension de compréhension.

2.2.4. La mise en œuvre de démarches de résolution distinctes

En ce qui concerne l'opposition entre la démarche de résolution arithmétique et celle algébrique, Grugeon, 1995, montre les principales ruptures identifiées par d'autres chercheurs :

---

[26] "Tout objet qui correspond à la dénotation d'une expression dans un cadre (dans le sens qui lui donne Douady, 1984) donné. Par exemple, l'expression 2x-3 a pour interprétation dans le cadre des fonctions de R dans R la fonction $x \rightarrow 2x-3$. " (Grugeon, 1995)

- la démarche de résolution arithmétique consiste à rechercher puis à calculer les inconnues intermédiaires dans un ordre convenable par des stratégies souvent attachées au contexte.
- la démarche de résolution algébrique consiste à représenter le problème (relation entre les inconnues et données) puis à utiliser les procédures de traitement formel pour trouver la solution. En particulier, la mise en équation d'un problème nécessite les opérations inverses de celles utilisées en arithmétique.

> "lorsqu'on fait un raisonnement arithmétique, on part du connu pour aller vers l'inconnu. (…) lorsqu'on fait de l'algèbre, on inverse la démarche : en désignant le nombre inconnu par une lettre, on le manipule comme s'il était connu et on transpose l'énoncé sous une forme accessible à un traitement algébrique" (G.R.E.M., 1988)

Enfin, ce qui nous intéresse ici est d'indiquer le lien avec les équations et de rappeler que les tâches relatives au calcul littéral, notamment "développer et / ou réduire une expression littérale" sont des outils qui servent à résoudre des équations.

3. Points de vue différents autour des sources d'erreurs en algèbre

Différentes études ont porté sur l'analyse des erreurs en mettant en avant différentes hypothèses et points de vue sur la source de l'erreur. Voici les grandes causes que nous avons trouvées et que, nous regroupons de la façon suivante :

- les erreurs ont des traces dans les pratiques scolaires précédentes, notamment dans le domaine de l'arithmétique ;
- la satisfaction des élèves à se limiter à des éléments d'ostensifs et la perte de sens de l'expression littérale ;
- des règles déviantes et généralisation du contexte des bonnes règles ;
- des tâches répétitives qui visent seulement à la maîtrise de la technique

* La rupture arithmétique-algèbre

Matz, 1980, étudie les erreurs des élèves dans le domaine d'algèbre (factorisation, résolution d'équations, simplification de fractions, etc.). Elle propose une typologie des erreurs du point de vue psychologique et didactique. Elle identifie donc deux types d'erreurs : les erreurs correspondant à l'absence de changements conceptuels qui renvoient au passage arithmétique-algèbre (par exemple les erreurs de concaténation) et les erreurs liées à des techniques d'extrapolation qui sont des utilisations accommodées et inappropriées de règles justes d'abord rencontrées dans des contextes partiellement comparables. Pour le deuxième type d'erreur elle fait donc appel à une interprétation psychologique sur les processus d'élaboration de connaissances, notamment aux processus d'assimilation et d'accommodation proposé par Piaget, 1936, 1947. Puis, elle montre que les erreurs témoignent de tentatives raisonnables mais infructueuses d'adaptation des connaissances antérieurs à de nouvelles situations. Enfin, elle montre que les élèves font des erreurs liées à des généralisations des bonnes règles.

> "error patterns arise through the (mis)application of *extrapolation techniques* that specify ways to bridge the gap between known rules and unfamiliar problems. mal-rules are overgeneralizations of the correct rules gained as explicit, declarative knowledge from the curriculum"

Booth, 1984, 1988, renvoie les erreurs et difficultés des élèves en algèbre, d'abord à une incompréhension de lois de l'arithmétique et de la signification des lettres et des signes opératoires, puis au retrait dans les programmes d'enseignement des items visant une compréhension structurale des mathématiques (lois des nombres, opérations inverses, associativité et commutativité, distributivité), enfin à certaines approches des professeurs qui s'appuient d'avantage sur le sens commun et sur des éléments d'ostensifs à la place des éléments théoriques.

Kieran, 1992, 1994, considère que les difficultés des élèves en algèbre sont une conséquence de l'introduction de l'algèbre comme une généralisation de l'arithmétique où il y a des fausses continuité et des discontinuités (qu'on a déjà détaillé dans une paragraphe précédente).

Cauzinille et al., 1987 font une étude sur les erreurs des élèves au collège sous l'angle du passage arithmétique-algèbre. Ils relient les erreurs des élèves : à des lacunes dans les connaissances, notamment calcul des relatifs, à des restrictions dans l'application des connaissances (par exemple procédure de ré-écriture d'une expression avec parenthèses appliquée correctement seulement s'il s'agit d'une expression numérique), et à des généralisations des conditions d'application des connaissances (par exemple la commutativité de la soustraction).

* Limitation à des éléments d'ostensifs

Des chercheurs constatent qu'on ne peut pas effectuer des tâches sans appui sur la forme de l'expression et sur des éléments ostensifs :

> "Declarative knowledge does not become sufficiently well established to enable correct parsing without the support of the visual relations in standard notation. Thus visual salience comes into play not only in the character of some transformational rules, but also in the parsing structure of algebraic expressions" (Kirshner, 2004).

> "Toute activité humaine se laisse décrire comme une manipulation d'objets ostensifs. Mais l'analyse la plus sommaire révèle que l'opérateur humain ne peut la réaliser (et ne sait éventuellement en rendre compte) qu'en évoquant ou en invoquant, à l'aide d'objets ostensifs appropriés, des objets non ostensifs qui n'apparaissent pas forcément spécifiques de l'activité. Ecrire 2+3=5 peut être vu comme une simple manipulation d'objets ostensifs, mais ne saurait s'effectuer intentionnellement sans l'intervention de certains objets non ostensifs spécifiques, telle la notion d'addition. Plus généralement, nous poserons le principe que, en toute activité humaine, il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs. La mise en œuvre d'une technique se traduit par une manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs". (Bosch et al., 1999)

Mais nous soulignons que le fait de se baser uniquement sur les éléments d'ostensifs peut conduire à provoquer des erreurs chez les élèves. Nous citons quelques études montrant ces différentes erreurs.

Kirshner, 2004, renvoie aussi la source des erreurs en algèbre à une absence d'éléments théoriques et à la limitation des élèves à la forme de l'expression littérale en s'appuyant sur des éléments ostensifs pour effectuer les calculs :

> "persistent algebra errors may reflect disengagement from declarative content rather than an inability to deal with it. (…) from the very start they are receptive to the visual structure of such rules separate and apart from intellectual engagement with the declarative content (...) Rather than reflecting mis*understanding* of the *meaning*

of correct algebra rules, they seem to indicate nothing more substantial than mis*perception* of the *forms* of the correct rules"

Pour montrer que les élèves s'appuient d'avantage sur la forme de l'expression que sur les propriétés mathématiques, Kirshner donne l'exemple suivant :

"$5x^2$ groups the *x* with the 2 prior to the 5 is accomplished through a visual hierarchy of diagonal juxtaposition ahead of horizontal juxtaposition rather than through a declarative hierarchy of exponentiation before multiplication"

Ainsi, les erreurs des élèves reviennent aussi à la généralisation du contexte de l'application d'une règle :

"The errors students tend to make in overgeneralizing rules are related to syntactic structure : they overgeneralize the context of application of the rule, not the nature of the transformational action. For example when students overgeneralize $(xy)^2=x^2y^2$ as $(x+y)^2=x^2+y^2$, they are overgeneralizing the context of application of the rule; the transformational action is essentially correct"

De plus, le contexte et la forme de l'expression littérale, pour que les élèves effectuent une généralisation de la bonne règle, ont un impact important et exclusif :

"whereas students regularly overgeneralize the visually-salient rule $(xy)^2=x^2y^2$ as $(x+y)^2=x^2+y^2$, they virtually never overgeneralize a nonvisually-salient rule like $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ a, say $x^2+y^2=(x+y)(x-y)$".

Pascal, 1980, montre que les erreurs des élèves durant les transformations du calcul et le traitement des écritures littérales témoigneraient, d'une tendance à conserver les différences ostensives entre les écritures. (par exemple $0\times a \rightarrow a$, il explique cette erreur sous l'angle des éléments d'ostensive en citant que, du point de vue de l'élève, c'est le moyen privilégié pour contrôler la non-réversibilité;$(19,7-3,8)+7,4 \rightarrow (3,8-7,4)-19,7$ L'équivalence reconnue par les élèves entre ces expressions pourrait également témoigner de cette tendance à conserver les différences ostensives). De plus les élèves se satisfont d'une analyse "syntaxique".

Lemoyne et al., 1993, valident l'hypothèse que les erreurs des élèves reviennent à des pratiques de classes précédentes. Plus spécifiquement, les élèves font des transformations sur des expressions littérales en s'appuyant sur la forme de l'expression et sur des éléments ostensifs. Pour ces élèves, l'algèbre se présente alors uniquement comme une écriture ostensive dont le sens échappe en raison de l'incapacité de référer aux informations portées par ces expressions.

"Les erreurs sont inscrites dans les habitus scolaires développés tout au long des études primaires, habitus qui concernent le traitement des écritures symboliques et qui se cristallisent dans une tendance à traiter de formes d'écriture au détriment du sens de ces écritures. De nombreuses connaissances mathématiques interviennent dans le traitement de ces écritures mais ces connaissances nous semblent sous le contrôle de formes mémorisées comme ces formes constituaient les mathématiques"

* Généralisation, du contexte des bonnes règles et les règles déviantes

Drouhard, 1992, montre que le syntaxe des règles de priorité est une plus grande cause d'erreur que la complexité des structures. Pour lui, les élèves font des erreurs parce qu'ils ne maîtrisent pas des propriétés pour effectuer des transformations sur des expressions littérales (telles que la distribution du carré sur la somme).

Sleeman, 1984, étudie les erreurs des élèves âgés de 14 ans, ayant des compétences moyennes, dans le domaine de la résolution d'équation. Elle modélise les erreurs des élèves par une typologie basée sur des règles déviantes "mal-rules". Chacun de ces règles est un transformation de la bonne règle qui amène à une réponse juste. Enfin, elle propose une typologie des erreurs qui couvre un ensemble de tâches de type résoudre une équation de degré 1. Quatre types principaux d'erreurs sont alors définis :

1. les erreurs de calcul "manipulative errors" qui correspondent à une transformation de la bonne règle par l'application d'une opération incorrecte (par exemple : résout la tâche 6-8 en ajoutant +6 et +8. Ce règle est une transformation de la bonne règle de soustraction des nombres négatifs),
2. les erreurs syntaxique ou des représentations incorrectes qui montrent un traitement syntaxique erroné "mal-parsing rules" et qui ne sont en général appliquées qu'une fois dans une tâche de traitement d'équation (par exemple : $3x+5x=19 \rightarrow x+x=19-3-5 \rightarrow 2x=11 \rightarrow x=11-2$),
3. les erreurs "clerical errors" qui correspondent aux erreurs de calcul en arithmétique (par exemple $2x=6\times5 \rightarrow x=18$) ou à une fausse lecture (par exemple $10x=25 \rightarrow x=25/18$; l'élève a probablement vu 8 à la place de 0),
4. les erreurs non explicable parce que les règles déviantes ne sont pas identifié. Selon cette typologie, les erreurs des élèves montrent bien une tendance d'intégration de connaissances présentées dans l'enseignement et que ces erreurs ont donc une histoire scolaire.

* Tâches répétitives qui visent seulement à la maîtrise de la technique

Les analyses que nous avons effectué sur les manuels montrent que, dans le chapitre du calcul littéral, la majorité des exercices contiennent uniquement des tâches de type "développer et/ou réduire une expression littérale", sans aucune autre finalité et que cela ne peut être à la base des erreurs chez les élèves.

En effet Sackur et al., 1997, constatent que les professeurs expliquent les calculs algébriques, mais ces calculs deviennent vite très répétitifs et les élèves finissent par appliquer simplement par conformité de règles syntaxiques ignorant le but des transformations de l'écriture algébrique pour résoudre le problème mathématique posé. Douady cite que les erreurs persistantes et récurrentes des élèves sont liées, en général, à un travail sur des écritures coupées des problèmes qui en font l'intérêt et qui leur donnent du sens.

Pour conclure, nous nous demandons si les professeurs dans les phases de correction s'appuient plutôt sur des éléments d'ostensifs en négligeant les éléments technologico-théoriques pour corriger les erreurs. Ne suivent-ils pas le découpage du chapitre portant sur le calcul littéral, dans les manuels, en proposant des tâches répétitifs de même type séparées de situations problèmes ?

4. Erreurs classiques en calcul littéral

Nous restreignons notre étude aux erreurs spécifiques à trois types de tâches : réduire une expression littérale ; développer une expression littérale ; développer puis réduire une expression littérale.

Erreurs spécifique au type de tâche "réduire une expression littérale"

Plusieurs travaux de recherche portent sur l'analyse des erreurs liées à cette tâche ainsi ils soulignent des erreurs classiques concernant le type de tâche "réduire une expression littérale" :

- L'erreur de concaténation : la concaténation est une erreur classique dans la tâche réduire une expression littérale . Par exemple 39x-4 devient 35x, 2yz-2y devient z.

Plusieurs interprétations et analyses ont été introduits par des recherches en didactiques autour le type d'erreur concaténation. Tout d'abord, des travaux soulignent que certains élèves travaillent sur des opérations dépourvues de sens (Payne et Squibb, 1990 "meaningless symbolic manipulation"). Plus précisément, certains évoquent des erreurs liées à l'exécution des opérations. Ainsi les élèves vont exécuter les opérations dans l'ordre de lecture c'est-à-dire de gauche à droite et vont se tromper dans des expressions de la forme $a\pm b\times c \rightarrow [a\pm b]c$. Ensuite, à cause des fausses continuité du signe "=" et des signes opératoires et, le nouveau statut du réponse d'avoir un opératoire structural, certains élèves n'acceptent pas de donner comme réponse à un calcul 4n+3 (qui serait un calcul inachevé) et transforment en 7n (erreur de concaténation). De plus, Booth, 1988 souligne que l'approche choisie par certains enseignants de représenter les variables par des objets de la vie courant pour représenter encourage les élèves à commettre l'erreur de concaténation. Tall et al., 1991, renvoie ce type d'erreur au conventions de la vie commun, notamment "+" et "et" sont des synonymes telle que "et" signifie

> "conjonction qui indique la liaison entre deux mots, deux éléments de phrase, et qui sert pour exprimer une addition, une opposition, un rapprochement ou une conséquence". (logiciel Cordial Pro)

Tandis que Stacey et al. 1994, le renvoie à d'autres disciplines :

> "students may erroneously draw on previous learning from other areas that do not differentiate between conjoining and adding, e.g. in chemistry adding oxygen to carbon produces CO_2."

Ainsi, Bell, 1988 l'explique en donnant l'exemple 2a+a+15 se réécrit 3a+15 mais $a+a+a\times2$ ne se réécrit pas $3a\times2$. Il cite que cela revient à une incompréhension dans les conventions syntaxiques.

Enfin, nous ajoutons à cette liste des erreurs liées au calcul algébrique notamment parce que la technique de factorisation n'est pas mise en avant et que des éléments technologiques basés sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ne sont pas utilisés.

Erreurs spécifique au types de tâche "développer une expression littérale" et "développer et réduire une expression littérale"

Ensuite, nous présentons des règles erronées concernant le développement. (Notamment des règles erronées concernant les identités remarquables et la distributivité de la multiplication par rapport à l'adition ou la soustraction)

- Pour tous réels a, b et c, a(b+c)=ab+c (Drouhard, 1992)

- Pour tous réels a, b et c, $(a+b)^2=a^2+b^2$ (Al-Lakkis, 1985, Kirshner, 1990, Drouhard, 1992) ; $(a-b)^2=a^2-b^2$ (Drouhard, 1992) ; $(a+b)^c=a^c+b^c$ (Matz, 1980)

Des recherches, comme celles de Al-Lakkis, 1985, Kirshner, 1990, Drouhard, 1992, parlent de l'erreur classique $(a+b)^2=a^2+b^2$. Ils renvoient cette erreur à un usage erroné de la distributivité et à la généralisation du contexte d'application d'une règle comme $(ab)^2=a^2b^2$. D'autres recherches parlent de l'erreur classique $(x+4)^2=2(x+4)$. Selon Drouhard, 1992, l'une des difficultés pour les élèves, à voir x^2 comme x2, c'est d'un côté, la confusion à l'oral avec l'exponentiation, et de l'autre côté, la non utilisation d'un marqueur $\times$. Douady, 1994, donne une autre explication, elle indique que les élèves font glisser, selon les "besoins" du calcul, des nombres en position de coefficient vers la position de puissance ou réciproquement (par exemple, x^2 devient 2x) pour qu'ils puissent regrouper en un seul terme, des termes de degrés différents.

Enfin, ces travaux attestent, non seulement, qu'au collège, l'activité mathématique s'articule autour de l'algèbre, dont les tâches développer et/ou réduire une expression littérale sont des outils essentiels pour en acquérir la maîtrise, mais aussi, qu'ils deviennent source de difficultés.

5. Prise en compte du rôle de l'enseignant

Pendant notre recherche bibliographique nous n'avons pas trouvé beaucoup des travaux centrés sur les pratiques de l'enseignant en calcul littéral. Un intérêt croissant pour l'étude de l'activité du professeur en didactique des mathématiques a connue un essor depuis quelques années, alors nous avons trouvé quelques traces d'analyses des pratiques enseignantes soit dans les phases de correction soit dans le domaine d'algèbre en prenant en compte le passage arithmétique-algèbre. Nous allons présenté une synthèse sur ces recherches concernant les pratiques des professeurs.

Ravestein et al., 1994, évoquent le rôle du professeur lorsque une erreur se manifeste : il peut l'apprécier et lui attribuer un sens. Ainsi, ces chercheurs citent quatre types de manifestation de l'erreur où le professeur agit différemment :

> Si l'erreur est massive il cherchera son origine dans la tâche prescrite et ses conditions de réalisation. On le verra alors reconstruire ses énoncés, donner des exercices préparatoires ou encore diminuer ses exigences et négocier à la baisse vis-à-vis du savoir. Si l'erreur est ponctuelle il cherchera du côté de la tâche effective pour tel ou tel élève en particulier. Si l'erreur est pas trop redondante, elle sera assimilé rapidement à une faute, archivée et constitutive du rapport que l'enseignant construit de l'élève producteur. Ils concluent que l'erreur des élèves constitueront le matériau de constitution de nouveaux rapports aux savoirs, et la modification du contrat pourra se comprendre par l'incorporation de nouveaux habitus.

D'autre part, nous rejoignons Cange et al., 2003, dans leurs propositions autour de la responsabilité des professeurs qui leur conduisent à avoir de bonnes analyses de l'erreur

- l'analyse d'erreurs de manière à ce qu'ils en perçoivent à la fois les difficultés et les richesses
- l'analyse des tâches qu'ils soumettent à leurs élèves et l'anticipation des erreurs possibles qui sont en lien direct avec ces tâches.
- la mise en œuvre d'activité mathématiques plus diversifiées

Vergnaud et al., 1987, et Schmidt, 1996, évoquent le rôle que l'enseignant joue pour gérer, contrôler les fausses continuités ou discontinuités entre algèbre et arithmétique enseignée. Vergnaud et al., 1987 affirment que pour gérer la rupture considérable que représente l'algèbre par rapport à l'arithmétique, le professeur doit veiller à installer et à gérer un contrat didactique nouveau. Mais ils ne précisent pas quel serait ce rôle et comment installer et gérer attentivement ce contrat. Schmidt, 1996, étudie des techniques de résolution de problèmes de futur professeurs. Il met également en avant le rôle que l'enseignant aurait à jouer pour gérer la jonction arithmétique-algèbre dans sa classe : il pointe la nécessité de connaissances à la fois arithmétiques et algébriques des enseignants pour une bonne gestion de ce passage de l'arithmétique à l'algèbre à travers l'enseignement des mathématiques. En revanche, Schmidt ne décrit pas précisément leurs connaissances ni comment celles-ci pourraient être activées lors de l'enseignement des débuts de l'algèbre.

D'autres chercheurs font allusion à une activité du professeur spécifique à la gestion du passage de l'arithmétique à l'algèbre mais leurs propos restent souvent généraux et vagues (certains rejoignent le point de vue de Vergnaud et al. en mettant en avant l'installation d'un contrat didactique spécifique à l'algèbre).

Enfin, nous soulignons que les analyses, en général, autour des pratiques du professeur restent insuffisamment développée à travers les différentes études en didactique de l'algèbre, essentiellement en calcul littéral. Plus particulièrement, nous n'avons pas remarqué des recherches sur les pratiques de professeurs dans les classes, dans les phases de corrections.

6. Conclusion

Notre étude nous a permis de dégager les points phares sur les sources des difficultés et des erreurs des élèves en calcul littéral ainsi que sur la détermination des erreurs classiques. Nous concluons que la majorité des études ont reliés les erreurs à la rupture arithmétique-algèbre.

Nous allons utiliser cet étude pour analyser, un questionnaire pour les élèves et un questionnaire professeur. Dans le questionnaire élève, nous avons testé une nouvelle fois des exercices de calcul littéral afin de voir si les erreurs évoquées ici apparaissaient. De plus nous avons également tenté de dégager si les élèves avaient des procédures de validation disponibles dans le cas d'exercices classiques et d'erreurs classiques. Dans le questionnaire professeur nous avons tenté de déterminer leurs , interprétations autour de ces mêmes erreurs.

Chapitre 5
Analyse des questionnaires élèves et professeurs sur les erreurs

Dans ce chapitre nous continuons nos analyses du questionnaire "élèves" que nous avons décomposé en deux parties, l'une concernant les représentations des élèves sur le vocabulaire utilisé en calcul littéral, (voir chapitre précédent) et l'autre vise à préciser leurs procédures de validation, le pourcentage d'échec et de réussite en effectuant des tâches classiques et les types d'erreurs. Dans cette partie, nous avons, d'une part, proposé des exercices à résoudre aux élèves dont certains étaient classiques (la manipulation formelle correspondait à un travail algébrique algorithmisé simple et à l'application directe de savoir-faire de base) et d'autres moins classiques. D'autre part, pour avoir les procédures de validation utilisées par les élèves nous avons proposé des exercices résolus par des élèves fictifs dans lesquels toutes les réponses fournies contenaient des erreurs classiques.

Dans certaines classes en France les deux parties ont été distribuées dans la même séance ou dans deux séances différentes et, dans d'autres classes l'un des deux questionnaires a été seulement distribué (cf. annexe §3).

Nous présentons tout d'abord, dans la première parties, le questionnaire élèves et l'analyse a priori. Ensuite, nous analysons les réponses des élèves en cherchant leurs procédures de validation et les types d'erreurs.

Le problème de la validité des résultats, par les élèves, est abordé par Coppé, 1993 et Margolinas, 1993. En effet, Coppé, 1993 étudie le processus des vérifications des élèves en situations de devoir surveillé. Elle définit le processus de vérification d'un élève:

> « Dans une situation de résolution de problème, un élève a identifié un résultat partiel ou final et il se pose la question de la validité de son résultat.
> Nous appelons vérification tout argument avancé ou toute action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat, si l'élève en a besoin, à ce moment là et dans cette situation. Une vérification a pour conséquence, soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement d'acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement de déboucher sur une phase de rectification. »

Elle met en évidence deux composantes dans l'activité des élèves :

> « une composante publique dont la trace est destinée à être montré au maître et à être évaluée, et une composante privée dont le maître n'a pas connaissance et dans le cadre de laquelle les vérifications sont éventuellement faites. »

Margolinas, 1993, étudie les phases de validation dans la phase de fin de résolution d'un problème. Elle prend en compte la responsabilité du professeur dans cette phase, qu'elle nomme phase de conclusion :

> « la responsabilité du maître dans la phase de conclusion n'implique pas qu'il ait à délivrer directement un jugement sur l'activité de l'élève »

Elle distingue deux phénomènes différents : l'un quand le professeur évalue le travail de l'élève (appelé phase d'évaluation) ; l'autre quand l'élève par une interaction avec le milieu en décide si sa réponse est juste ou fausse mais toujours sous la responsabilité du professeur (c'est qu'elle appelle la phase de validation). Dans le premier cas il y a jugement de la part du professeur sur le travail de l'élève tandis que dans le deuxième cas il n'y a pas. De plus le professeur tente de donner la responsabilité à l'élève.

Ces recherches portent bien sur la validation mais dans des contextes différents. Ainsi Margolinas se situe dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1989). Le maître et les élèves sont les acteurs des phases de validation. Coppé étudie les vérifications mises en œuvre pas les élèves dans le cas d'une autre situation de classe avec des contraintes fortes (le devoir surveillé) dans laquelle les élèves sont seuls et ont intérêt à savoir si leurs réponses sont justes mais ils doivent aussi travailler dans un temps limité et ne peuvent pas prendre tout leur temps pour vérifier. Comme on l'a vu ci-dessus, les vérifications ont un caractère privé.

Dans le cas du questionnaire "élèves", nous proposons des types de tâches classiques, nous fournissons aux élèves des réponses fictives d'autres élèves et nous leur demandons de se prononcer sur la validité des réponses.. Nous cherchons donc comment les élèves valident une réponse fournie par un autre élève, c'est pour cela que nous choisissons d'employer le terme de procédure de validation. Ceci constitue pour nous un élément méthodologique qui nous permet de penser que les élèves ont ou pas des procédures de validation disponibles qu'ils pourraient mobiliser à d'autres moments et notamment dans les phases de correction dans la classe quand il s'agit de se prononcer sur la réponse de l'élève qui est au tableau par exemple.

Nous complétons ce chapitre par l'analyse d'un questionnaire posé à 33 professeurs (16 français et 17 libanais) comportant une partie visant à étudier leurs connaissances des professeurs sur les erreurs des élèves, notamment en termes de description et d'interprétation. Nous pourrons ainsi faire quelques hypothèses sur leur prise en compte en classe et sur le moyens qu'on les professeurs pour les corriger.

Malgré un intérêt croissant pour l'étude de l'activité du professeur depuis quelques années, nous n'avons trouvé aucune trace d'analyse de l'interprétation des enseignants sur les erreurs des élèves en calcul littéral. Seule DeBlois, 2006 a étudié les interprétations, par les professeurs, des activités cognitives des élèves en arithmétique.

1. Le questionnaire "élèves"

1.1. Les questions

D'après les analyses des programmes et des manuels, les recherches en didactique de l'algèbre sur les erreurs et difficultés des élèves, les entretiens avec les professeurs, et une première analyse des vidéos nous avons choisi des tâches assez classiques qui se trouvent, par exemple, dans tous les manuels analysés. Dans le cas des questions à choix multiples et dans les exercices déjà résolus par les élèves fictifs, les erreurs sont des erreurs classiques liées soit à la distributivité ou à l'ordre des opérations soit à des erreurs de signe ou de calcul sur les puissances.

Pour les formes des expressions et leur rôle dans les erreurs des élèves, nous avons pris en considération l'apparition ou non de signe $\times$; le nombre des variables ; le degré de l'expression ; la nature des coefficients (nombres positifs, négatifs, naturels, décimaux, fractions) ; le fait que les élèves ont l'habitude d'effectuer les calculs de gauche à droite ; le fait que les élèves font des soustraction à la place des additions si cela aboutit à des nombres positifs (Payne & al., 1990, p. 459) ; la forme de la réponse, si elle contient une opération d'addition ou de soustraction parce que la conception du signe "+" ou "-" est associé à l'idée de réunion physique ; le signe "=" (Selon Kieran, 1981 l'égalité pour les élèves est un symbole "unidirectionnel" qui précède une réponse numérique).

Dans les énoncés, nous avons mis des termes semblables à ceux trouvés habituellement dans les manuels comme réduire ; développer ; simplifier ; supprimer les parenthèses. Les expressions choisies comportent une seule variable et sont de degré inférieur ou égal à 2 (sauf dans un exercice où on a mis le degré 3). Les nombres sont des nombres relatifs. Il n'y a pas des décimaux ni de fractions. Le signe $\times$ est caché dans toutes les expressions sauf une, où on demandait de "simplifier". Les expressions ont des formes classiques sauf trois : $(ax\pm b)^2$ (Dans les manuels de 4ème en France et 5ème au Liban l'apparition de cette forme n'est pas fréquente) ; $a\pm(bx\pm c)\times c$; polynôme de degré 3 et le calcul est à effectuer après le signe "=".

Enfin, nous avons choisi les types de tâches suivantes :

- "Réduire une expression littérale" avec un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et avec un produit de polynômes de degré 1.
- "Développer une expression littérale" et "développer et réduire une expression littérale" avec un produit de polynômes de degré 1.
- "Développer et réduire une expression littérale" avec un somme de produit de deux polynômes de degré inférieur ou égale à 1.
- "Calculer la valeur numérique d'une expression littérale" avec un polynôme de degré 2.

1.1.1. Questions à choix multiples

Il y en a trois. Nous avons élaboré plusieurs réponses possibles d'élèves. Dans les deux premières questions les réponses sont fausses. Dans la dernière, il y a des réponses justes et d'autres fausses. Voici les trois questions :

- Indiquez une forme réduite de l'expression 3x+5 : (*une case à cocher*)

❑ 8x	❑ 15x
❑ 8+x	❑ 3+5x
❑3+5+x	❑autre : laquelle

- Indiquez une forme développée de $(x+4)^2$: *(une case à cocher)*

  ❑ x^2+4^2 ❑ $x+4^2$

  ❑ $(x+4)\times 2$ ❑ autre : laquelle

- On considère $P=-9x^2$. Pour x=2. Choisissez parmi ces écritures celles qui sont correctes.

  ❑ -9×2^2 ❑ -92^2 ❑ 36 ❑ $(-92)^2$

  ❑ $-9^2\times 2^2$ ❑ -36 ❑ $-(92^2)$ ❑ autre, laquelle

1.1.2. Exercices à faire

Il y en a quatre tâches à effectuer. Les deux premières sont classiques. Les deux dernières ne le sont pas parce que la forme de l'expression, dans la troisième tâche, n'est pas familière : le signe × apparaît après la parenthèse. Dans la dernière tâche, le polynôme est de degré 3 et la réponse est devant le signe "=", ce qui est assez inhabituel dans les manuels.

- Développer l'expression : -2a(3a+6)
- Développer et réduire l'expression : 5x+4(2x-7)
- Simplifier l'expression : $7-(4d-3)\times 2$
- Compléter : $-12x^3=\ldots..-8x^3$

1.1.3. Exercices déjà résolues par des élèves fictifs

Ils correspondent à cinq tâches classiques de différents types proposées avec des solutions d'élèves fictifs, sur lesquelles les élèves doivent se prononcer :

- Développer et réduire si possible : (2x-3)(x+2). Fanny a écrit :$(2x-3)(x+2)=2x^2-6$
- Développer et réduire si possible : C=3(4+5a)-2(4+3a). Enzo a écrit : C=12+15a-8+6a=4+21a
- Supprimer les parenthèses de l'expression : -(2x+3). Leila a écrit : -(2x+3)=-2x+3
- Réduire l'expression : 7-2x+4x. Louis a écrit : 7-2x+4x=7-6x
- Simplifier si possible l'expression $3a\times(-5a)$. Un élève a répondu 15a.

1.2. Analyse a priori

1.2.1. Les questions à choix multiples

Pour élaborer les réponses fausses proposées, nous ne sommes servi des résultats de recherche que nous avons déjà cités dans la chapitre 4.

- Question numéro 5) Indiquez la forme réduite de 3x+5

Rappelons que la concaténation est une erreur classique dans la tâche réduire une expression littérale avec un polynôme. Ainsi, nous pensons que la majorité des élèves vont choisir 8x. De plus, 3+5x est une autre réponse, qui peut être choisie parce qu'il y a les mêmes éléments ostensifs écrits : 3 ; 5 ; x ; +. Enfin, parmi les réponses proposées, nous n'avons pas donné la bonne réponse. Donc il peut avoir un effet de contrat qui amène à donner une réponse malgré tout.

- Question numéro 6) Indiquez une forme développée de $(x+4)^2$

Nous pensons que la majorité des élèves va donner des réponses fausses, spécifiquement x^2+4^2 (cf. chapitre 4, §4) et $(x+4)\times2$. Pour la deuxième réponse, le signe $\times$ apparaît et les élèves ne seront pas obligé de regrouper des termes de degrés différents. De plus, nous ne sommes pas dans une situation d'oral. Donc nous considérons que le pourcentage des élèves qui vont effectuer la première erreur sera plus grand de celui concernant la deuxième. Enfin, le pourcentage d'échec des élèves libanais sera probablement plus élevé que de celui des élèves français parce que plus de la moitié des élèves français, qui ont répondu, sont en troisième et ont déjà développé des expressions de cette forme.

- Question numéro 7) On considère $P=-9x^2$ Pour x=2. Choisissez parmi ces écritures celles qui sont correctes.

Pour évaluer une expression littérale, Drouhard, 1992, montre que, quand l'ordre de composition des calculs est indiqué explicitement par des parenthèses, les élèves ne font pas des erreurs liée à l'ordre des opérations à effectuer. Par contre, quand l'ordre de composition des calculs est indiqué implicitement, par des conventions de priorité, il y a des erreurs liées à l'ordre des opérations à effectuer. Dans ce cas, la difficulté provient de l'absence de marque explicite indiquant que l'exposant " ^{2} " ne s'applique qu'à x et non à 9.

En ce qui concerne l'expression $-9x^2$, il n' y a pas un marqueur explicite $\times$ entre -9 et x^2 et il n' y a pas des parenthèses pour x^2. Cela pourra entraîner deux erreurs : le carré est pour le 9 et pour x ; le carré est pour -92. En revanche, l'argument "un carré est toujours positif", entraîne, à notre avis, les élèves à interpréter $-9x^2$ comme le carré d'un opposé. Donc, nous pensons que la majorité des élèves va choisir : $-9^2\times2^2$ ou -92^2 ou 36 comme réponse.

1.2.2. Les exercices à faire

- Partie a) Développer -2a(3a+6)

Même si le terme "développer" est utilisé la première fois dans les classes de quatrième en France et cinquième au Liban, les élèves ont déjà l'habitude d'utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition dans les classes précédentes. Nous pensons que presque tous les élèves vont appliquer la distributivité et que la majorité de réponses seront correctes. Les réponses fausses et les erreurs seront probablement les suivantes : -6a-12a ; $-6a^2-12$; $-6a^2+12a$; l'erreur de concaténation.

- Partie b) Développer et réduire l'expression : $5x+4(2x-7)$

C'est une tâche classique mais vue la forme de l'expression, il risque d'avoir des erreurs. Selon Drouhard, 1992, quand l'expression est de la forme $a+(b\times c)$, il y a une erreur classique effectué par les élèves $a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$. Il explique ce phénomène en disant que la forme $a \nabla (b \Delta c) = (a \nabla b) \Delta (a \nabla c)$ apparaît comme caractéristique de la distributivité, même si $(\nabla ; \Delta) = (+ ; \times)$ ou $(\times ; \times)$ ou $(+ ; +)$. Donc nous pensons que ce type d'erreur va apparaître majoritairement parmi les élèves qui vont se tromper. Une autre erreur sera probablement effectuée: d'une part, ajouter ou multiplier 5x et 2x et d'autre part, ajouter ou multiplier 4 et –7. D'après Grugeon, 1995, il y a des élèves qui ne respectent pas la priorité des opérations et dans cas ils regroupent les termes indépendamment des opérations. Enfin, il y a aussi l'erreur de concaténation.

- Partie c) Simplifier l'expression : $7-(4d-3)\times2$

La difficulté provient que le signe × est après la parenthèse et en même temps il y a un signe "-" devant la parenthèse. Donc, probablement, la plupart des réponses fausses consistera à multiplier 2 par –3 seulement ou de ne pas changer le signe de –3. Il y a aussi l'erreur qui consiste à distribuer le 7, sur 4d et sur –3. Enfin, il y a aussi la possibilité d'avoir l'erreur de concaténation.

- Partie d) Compléter : $-12x^3=\ldots..-8x^3$

Blando et al., 1989, ont trouvé certains types d'erreurs faites par la majorité des élèves, spécifiquement des erreurs liées à l'ordre des opérations. Ces erreurs n'apparaissent pas avec des expressions de la forme $a\times b+c$. Par contre, quand la forme de l'expression est $a+b\times c$, une majorité des élèves effectuent des erreurs de ce type. Les chercheurs expliquent ce phénomène en termes de règle : "exécuter les opérations du gauche à droite". Dans la tâche présentée ici, la forme de l'expression à compléter est $a+b\times c$ et il n'y a pas de marqueurs explicite pour les priorités des opérations (le signe × est caché). Il y a aussi la difficulté d'effectuer "le calcul en arrière", c'est-à-dire à la droite de signe "=", parce que, pour les élèves, le signe "=" n'est pas une relation d'équivalence et ils ont l'habitude de faire le calcul à gauche de signe "=". De plus, les professeurs, dans les entretiens, ont cité que les élèves ne maîtrisent pas le calcul avec des nombres relatifs. Cette conviction chez les professeurs et le fait que la réponse est négative nous incite à penser que les élèves vont faire des erreurs de signe (par exemple en mettant 20 comme coefficient).

Enfin, nous avons pu constater que, dans les classes libanaises et françaises, on peut utiliser les expressions "même partie littérale" ou "termes semblables" pour expliquer comment réduire une expression littérale. Selon Tirosh et al., 1998 ce langage peut amener les élèves à considérer que pour réduire une expression littérale, il suffit d'avoir la même lettre et pas nécessairement la même puissance. Pour cela, nous pensons que, malgré l'apparence simple de cette tâche, la majorité des élèves va se tromper, en ajoutant à $-8x^3$ une constante ou un monôme de degré inférieur ou égale à 2.

1.2.3. Les exercices déjà résolues par des élèves fictifs

Les procédures de validation des élèves

En nous inspirant de travaux de Coppé, 1993 qui définit des types de vérifications, de Lesley et al., 1989, qui étudient les processus de généralisation et de justification en algèbre et de Sackur et al., 1997 qui tentent de donner une explication, en termes de sens et de dénotation, aux erreurs des élèves en calcul littéral, nous avons élaboré cinq catégories de validation pouvant être mis en œuvre par les élèves :

- Appel à la solution : l'élève fait l'exercice et compare sa production à celle de l'élève fictif ce qui lui permet de décider de la validité de la solution.
- Localisation de l'erreur : l'élève ne refait pas l'exercice mais il indique que la solution est fausse en pointant l'erreur ; les arguments employés pouvant être précis (indication explicite de l'erreur) ou plus vagues (par exemple, "faux, oubli des étapes lors de la distributivité").
- Utilisation d'un exemple numérique : l'élève teste en remplaçant la (les) variable(s) par un (des) nombre(s). C'est un type de tâche qui apparaît explicitement dans les programmes en France et les professeurs, dans les deux pays, l'utilisent comme une technique pour montrer que deux expressions littérales ne sont pas égales.
- Référence à une règle générale : l'élève ne fait l'exercice, n'indique pas où est l'erreur, il se contente de citer explicitement ou de faire référence à une propriété mathématique ou une règle qui peut être vraie ou fausse. Dans le cas où elle est vraie, elle peut être pertinente ou pas pour la situation.
- Référence à un argument général ou pas de justification. : l'élève se prononce en reprenant la consigne et en disant "il a bien développé/ il n'a pas bien développé", "il a bien calculé". Dans ce cas on ne peut pas savoir si l'élève a vraiment examiné la réponse ou bien s'il répond sans critères.

Quand l'élève a lu la solution proposée par un élève fictif, il peut soit faire le calcul (dans sa tête ou sur le papier) et comparer les deux solutions, ce qui l'amènera à décider si la solution est juste ou fausse. Il peut aussi, grâce à un processus de vérification rapide (par exemple, portant sur le nombre de termes ou sur les signes "-" ou sur les puissances, test sur un exemple numérique) être amené à dire que c'est faux et, éventuellement à localiser l'erreur. Mais ce type de vérification, partiel, portant sur la vraisemblance, peut aussi le conduire à dire que c'est juste. Dans ce cas, il risque justifier son point de vue par une règle ou un argument général. Notons que dans les réponses au questionnaire, nous ne pouvons pas forcément voir ces cheminements, nous n'en avons que des traces.

- Partie a) Simplifier si possible $(2x-3)(x+2)$. Fanny a écrit $2x^2-6$. Pouvez-vous dire si c'est juste ou faux. Expliquer pourquoi. Dans le cas où vous considérez que la réponse est fausse, donner votre réponse.

L'erreur de Fanny est classique, c'est une généralisation des conditions d'application de la règle $(a+b)(a-d)=a^2-b^2$. Les élèves de 3ème en France et 4ème au Liban ont déjà travaillé des tâches concernant les identités remarquables. Donc ce sont plutôt eux qui vont dire que la réponse est juste. En revanche, pour justifier que la réponse est fausse, la majorité des élèves vont, probablement, faire le calcul de nouveau et puis comparer le résultat avec celui de Fanny. Certains élèves peuvent localiser l'erreur (par exemple en raisonnant sur le nombre de termes) ou peuvent citer des règles générales. Enfin, d'autres élèves peuvent tester en remplaçant x par un nombre. Pour donner une réponse, ils vont appliquer la double distributivité en faisant des erreurs quand ils développeront ou quand ils réduiront. Les erreurs possibles seront : $2x\times x \to 2x$ ou $4x$; $2x\times 2 \to 4$; des erreurs de concaténation.

- Partie b) Développer et réduire si possible : C=3(4+5a)-2(4+3a). Enzo a écrit : C=12+15a-8+6a=4+21a. Pouvez-vous dire si c'est juste ou faux. Expliquer pourquoi. Dans le cas où vous considérez que la réponse est fausse, donner votre réponse.

Pour justifier que la réponse est fausse, les élèves vont plutôt localiser l'erreur. Pour donner une réponse, ils vont appliquer la distributivité pour chaque terme et les erreurs possibles seront des erreurs liées à la priorité des opérations et des erreurs de concaténation.

- Partie c) Supprimer les parenthèses de l'expression : -(2x+3). Leila a écrit : -(2x+3)=-2x+3. Pouvez-vous dire si c'est juste ou faux. Expliquer pourquoi. Dans le cas où vous considérez que la réponse est fausse, donner votre réponse.

Selon, Croset, 2005, pour cette tâche et expression, les élèves suppriment les parenthèses et donc, ne changent que le signe du premier terme.

Pour justifier que la réponse de Leila est fausse, les élèves vont plutôt : faire appel à la propriété mathématique concernant la condition d'enlever la parenthèse ; localiser l'erreur ; tester par un nombre ; appel à la solution. Quand ces élèves vont donner leur réponse, ils peuvent se tromper en ajoutant à l'intérieur des parenthèses ou en faisons l'erreur de concaténation.

- Partie d) réduire l'expression : 7-2x+4x. Louis a écrit : 7-2x+4x=7-6x. Pouvez-vous dire si c'est juste ou faux. Expliquer pourquoi. Dans le cas où vous considérez que la réponse est fausse, donner votre réponse.

Croset, 2005, décrit que la triple utilisation de signe moins (l'annonciation de la nature d'un nombre ; un signe opératoire qui annonce l'opposé d'un nombre ; l'opération de soustraction) est créatrice de confusions et d'erreurs : la soustraction est perçue comme étant associative $a - b - c \to a - (b - c)$, parce que l'addition et la multiplication ont cette propriété ; le signe moins est pour toute l'expression qui suite : $-a + \ldots \to -(a+\ldots)$ parce qu'il est vu comme annonciation de la nature d'un nombre.

Pour justifier que la réponse de Louis est fausse, les élèves peuvent localiser l'erreur ou faire appel à la règle générale concernant la somme de deux nombres relatifs ayant signes différents. Ils peuvent aussi tester par un nombre. Quand ces élèves vont donner leur réponse, ils peuvent se tromper, en mettant 7-2x, ou en faisons des erreurs liées à l'ordre des opérations ou des erreurs de concaténation.

- Partie e) Simplifier si possible l'expression 3a×(-5a). Un élève a répondu 15a. Pouvez-vous dire si c'est juste ou faux. Expliquer pourquoi.

C'est la seule tâche où il y a deux erreurs dans la réponse : erreur de signe et erreur de puissance. Pour justifier que la réponse fournie est fausse, les élèves peuvent localiser l'erreur, citer des règles générales concernant des propriétés sur les nombres relatifs ou la notion de carré, tester par un nombre. Enfin, certains élèves peuvent ne déceler qu'une erreur.

1.3. Analyse a posteriori

1.3.1. Les questions à choix multiples

Dans les tableaux correspondant aux questions n° 5 et 6 les pourcentages sont calculés sur le nombre total d'élèves.

- Question n° 5 : Indiquez la forme réduite de 3x+5 : *(une case à cocher)*

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
réponse juste (3x+5)	100	47,2	51	31,1	151	40,2
8x	25	11,8	79	48,2	104	27,7
8+x	7	3,3	3	1,8	10	2,7
3+5+x	7	3,3	4	2,4	11	2,9
15x	11	5,2	4	2,4	15	4,0
3+5x	34	16,0	7	4,3	41	10,9
autre, avec réponse fausse	9	4,2	6	3,7	15	4,0
autre sans réponse	5	2,4	4	2,4	9	2,4
non réponse	14	6,6	6	3,7	20	5,3
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 1 : les types de réponses

Nous pouvons voir la variété des réponses produites sur une question assez simple. Moins de la moitié des élèves français et libanais ont donné la bonne réponse. Dans ce cas, un écart de 16% apparaît entre eux. Parmi les réponses fausses, celle qui apparaît le plus souvent correspond à l'erreur de concaténation et elle est très fréquente pour les élèves libanais (près de la moitié des réponses).

Chez les élèves français, l'erreur la plus fréquente est celle qui consiste à changer l'écriture en gardant les mêmes éléments (3+5x). Tout d'abord, nous l'expliquerons par le fait, que les élèves voulaient conserver les éléments ostensifs sans prendre en considération les propriétés des opérations, spécifiquement la priorité des opérations. Selon Pascal, 1980, plusieurs erreurs des élèves dans le traitement des écritures littérales témoigneraient d'une tendance à conserver les différences ostensives entre les écritures. Plus précisément, les élèves qui déclarent que l'ordre des lettres ne compte pas dans les expressions littérales, semblent se satisfaire d'une lecture ostensive des expressions (Cauzinille et al., 1987, Booth, 1989). Pour cela, Booth, 1989 déplore le retrait dans les programmes d'enseignement des items visant une compréhension structurale des mathématiques (lois des nombres, opérations inverses, associativité et commutativité, distributivité). Enfin, Bosch et al., 1999, parlent de stratégies didactiques d'ostension.

> "On désigne par ce terme la pratique d'enseignement où le professeur se limite à montrer aux élèves un objet ostensif en croyant qu'il se créera spontanément un rapport adéquat à cet ostensif et, surtout, aux non-ostensifs auxquels il est censé renvoyer." (p. 92)

Les résultats pour cette question nous amènent à nous demander si cet écart n'est pas un résultat des pratiques de classes où les professeurs en France s'appuient sur les ostensifs davantage que les professeurs libanais.

- Question n° 6 : Indiquez une forme développée de $(x+4)^2$: *(une case à cocher)*

Là encore, de nombreuses erreurs sur cette question (moins d'un quart des élèves ont donné une bonne réponse). Le pourcentage de réussite des élèves français est plus élevé que celui des élèves libanais avec un écart de 7%. La réponse la plus fréquente est tout d'abord x^2+4^2 (environ la moitié de l'ensemble des élèves) puis pour une moindre part, $(x+4)\times 2$ (davantage citée par les élèves français), ce qui est conforme aux études que nous avons citées. Nous notons, aussi, qu'il y a 16% des élèves libanais qui n'ont pas répondu, ce qui montre certainement une difficulté face à cette question.

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
autre, avec réponse juste	42	19,8	22	13,4	64	17,0
autre avec réponse (x+4)(x+4)	14	6,6	1	0,6	15	4,0
x^2+4^2	95	44,8	93	56,7	188	50,0
$(x+4)\times 2$	40	18,9	10	6,1	50	13,3
$x+4^2$	8	3,8	2	1,2	10	2,7
autre avec réponse fausse	9	4,2	8	4,9	17	4,5
autre sans réponse	1	0,5	2	1,2	3	0,8
non réponse	3	1,4	26	15,9	29	7,7
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 2 : le types de réponses

- Question n° 7 : On considère $P=-9x^2$ Pour x=2. Choisissez parmi ces écritures celles qui sont correctes.

Contrairement à ce que nous avions prévu, plus de la moitié des élèves ont donné la bonne réponse et moins de un cinquième des réponses correspondent à $-9^2\times 2^2$ ou 36 ou -92^2 avec le pourcentage le plus élevé de réponses fausses pour $-9^2\times 2^2$. Pour les pourcentages correspondant à une erreur spécifique, il n'y a pas d'écart remarquable[27] entre les pourcentage des réponses des élèves français et libanais. Finalement, les élèves ne font pas autant d'erreur que prévu.

Dans le tableau suivant, les effectifs correspondent aux nombres de réponses totales qui est plus élevé que le nombre d'élèves puisque ceux-ci avait le droit de choisir plusieurs réponses. En revanche, les pourcentages sont calculés sur le nombre d'élèves.

[27] On dit qu'un pourcentage n'est pas remarquable c'est-à-dire il ne dépasse pas 5%.

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
-9×2^2	115	58,4	109	72,2	224	64,4
-36	95	48,2	51	33,8	146	42,0
autre (juste)	7	3,6	2	1,3	9	2,6
$-9^2\times2^2$	23	11,7	14	9,3	37	10,6
-92^2	9	4,6	8	5,3	17	4,9
36	12	6,1	5	3,3	17	4,9
$-(92)^2$	2	1,0	3	2,0	5	1,4
$(-92)^2$	6	3,0	3	2,0	9	2,6
autre (fausse)	25	12,7	10	6,6	35	10,1
autre sans indication	2	1,0	1	0,7	3	0,9
Total	296	150,3	206	136,4	502	144,3

Tableau n° 3 : l'effectif et % de réponses

1.3.2. Les exercices à faire

- Partie a) Développer -2a(3a+6)

Cet exercice a été assez massivement réussi puisque environ deux tiers des élèves (67%) ont donné la bonne réponse avec une meilleure réussite des élèves français (écart de 11%). Ce résultat confirme que cette tâche est très classique et fortement travaillé dans les classes.

Parmi les élèves qui ont fait des erreurs, voici la répartition selon le type d'erreur. Dans le tableau suivant, les pourcentages des erreurs sont calculés sur les réponses effectives des élèves parce qu'ils peuvent avoir plusieurs erreurs. On peut voir que, la majorité a bien tenté d'appliquer la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition mais avec des erreurs (concernant le signe, la multiplication, la puissance de a, l'élève distribue en multipliant –2a avec le premier terme mais en l'ajoutant avec le deuxième). 14% des élèves libanais ont fait l'erreur de concaténation dans la réponse (quelques-uns avant de distribuer) tandis que presque aucun élève français n'a fait des erreurs de ce type.

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
Application de la distributivité	35	19,2	26	16,3	61	17,8
$k(a\pm b)\rightarrow ka\pm b$ ou $k\pm a\pm b$	6	3,3	12	7,5	18	5,3
Effectuer le calcul à l'intérieur de ( )	3	1,6	2	1,3	5	1,5
Concaténation	4	2,2	13	13,8	26	7,6
autre	11	2,7	22	11,9	30	8,7
Total	59	32,4	81	50,6	140	40,9

Tableau n° 4 : l'effectif et % des erreurs dans les réponses fausses

- Partie b) Développer et réduire l'expression : 5x+4(2x-7)

La grande majorité des élèves a répondu (91%). Cependant, moins de la moitié des élèves (45%) a donné la bonne réponse avec un écart de réussite net de 34% entre les élèves libanais et les français qui ont mieux réussi (61%). Cet écart important nous interroge. On peut penser que ce type d'expression n'est pas travaillé dans les classes du Liban ou bien que le travail important sur la double distributivité a un effet sur des types d'expressions assez semblables. D'ailleurs, on peut constater que c'est bien cette erreur qui est majoritaire notamment chez les élèves libanais. Enfin, il est probable que la forme $a\nabla b(c\Delta d)$ apparaît comme caractéristique de la double distributivité, parce que les élèves s'appuient sur les éléments ostensifs plus que les éléments théoriques.

		France		Liban		Total	
		effectif	%	effectif	%	effectif	%
Erreurs spécifique à la tâche développer une expression littérale et effectuer la multiplication	application de la distributivité	10	6,0	4	2,6	14	4,4
	application de la double distributivité	37	22,0	65	42,8	102	31,9
	$k(a\pm b)\rightarrow ka\pm b$ ou $k\pm a\pm b$	4	2,4	13	8,6	17	5,3
	Effectuer le calcul à l'intérieur de parenthèse ou à l'extérieur	6	3,6	13	8,6	19	5,9
Erreurs spécifique à la tâche réduire une somme	Concaténation ou erreur relative à l'ordre des opérations	6	3,6	3	2,0	9	2,8
	$ax\pm bx\rightarrow kx^2$	0	0	1	0,7	1	0,3
	Erreurs de signe	6	3,6	11	7,2	17	5,3
autre erreurs		8	4,8	10	6,6	18	5,6
Total		77	45,8	120	78,9	197	61,6

Tableau n°5 : l'effectif et % des erreurs dans les réponses fausses dans la question numéro 1

En revanche, les autres types d'erreurs sont minoritaires (pas plus de 6%.).

- Partie c) Simplifier l'expression : $7-(4d-3)\times 2$

Il n'y a que 68% des élèves qui ont répondu, ce qui confirme que cet exercice n'est pas classique. De plus, comme nous l'avions prévu moins d'un quart des élèves (26%) a donné la bonne réponse. Il n'y a pas un écart remarquable entre les pourcentages des élèves français et libanais.

		France		Liban		Total	
		effectif	%	effectif	%	effectif	%
Erreurs spécifique à la tâche développer une expression littérale	la distributivité de 2 seulement ou de –1 seulement	57	43,5	23	21,3	80	33,5
	la distributivité de 7 ou la multiplication de 7 par 2	8	6,1	25	23,1	33	13,8
	Effectuer le calcul à l'intérieur ou à l'extérieure de parenthèse	5	3,8	8	7,4	13	5,4
Erreurs spécifique à la tâche réduire un polynôme	erreur relative à l'ordre des opérations ou Concaténation	3	2,3	17	15,7	20	8,4
erreur relative au signe : commutativité de "-" ; additionner deux nombres de signes différents ; soustraire deux nombres de même signe		15	11,5	8	7,5	13	9,6
Autre		9	6,9	2	1,9	11	4,6
Total		97	74,0	91	84,3	188	78,7

Tableau n° 6 : l'effectif et % des erreurs dans les réponses fausses dans la question numéro 1

Parmi les élèves qui ont donné une réponse fausse, la majorité a fait des erreurs concernant l'application de la distributivité. Environ un tiers des élèves ont soit distribué le 2 seulement soit le –1 seulement avec un écart d'environ 22% entre le pourcentage des élèves français (plus élevé) et celui des libanais. En revanche, comme dans la tâche précédente, le pourcentage le plus élevé, concernant l'erreur de distribuer le 7, correspond aux élèves libanais avec un écart d'environ 17%. Enfin, on peut constater encore une fois que presque aucun élève français n'a fait l'erreur de concaténation tandis que 16% des élèves libanais ont fait ce type d'erreur.

- Partie d) Compléter : $-12x^3=\ldots\ldots-8x^3$

86% des élèves a répondu à cette question, donc un peu moins qu'aux autres ce qui confirme son caractère moins classique. De plus, seulement la moitié des réponses sont correctes avec un écart important de 29% entre le pourcentage des élèves français et libanais (un tiers des élèves libanais et deux tiers des élèves français a donné la bonne réponse). Cet écart important nous interroge. On peut penser que d'une part, les résultats des élèves libanais confirment l'analyse a priori et, d'autre part, les élèves français ne font pas autant d'erreur que prévu.

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
ax^3 telle que $a\neq-4$	30	19,2	25	17,4	55	18,3
ax ou ax^2 telle que $a = -4$ ou $\neq-4$	13	8,3	11	7,6	24	8,0
-4	2	1,3	18	12,5	20	6,7
a telle que $a\neq-4$	15	9,6	42	29,2	57	19,0
Total	60	38,5	96	66,7	156	52,0

Tableau n° 7 : l'effectif et % des erreurs dans les réponses fausses dans la question numéro 1

On peut constater encore une fois que ces sont plutôt les élèves libanais qui font l'erreur de concaténation (un cinquième des élèves français et la moitié des élèves libanais ont mis –4). Parmi les élèves qui ont donné une réponse fausse, la majorité a mis 20 ou 4 à la place de –4. Ce résultat correspond à l'analyse a priori, et plus spécifiquement à ce que les professeurs ont indiqué. Enfin, il est probable que, dans les pratiques de classes, la technique de factorisation n'est pas mis en avant pour faire des tâches de type réduire une expression littérale ayant la forme d'un polynôme ou d'une somme algébrique.

Pour conclure, nous constatons que les élèves libanais commettent l'erreur de concaténation plus que les élèves français. On peut y avoir plusieurs raisons. Pour la représentation des nombres rationnels en Arithmétique au Liban, comme dans les pays Anglophones, la juxtaposition d'un nombre et d'une fraction implique une addition : bp/q signifie b+p/q.

D'après les analyses de manuels, nous constatons que le nombre de tâches de type réduire des expressions littérales sous formes polynômes ou des sommes algébriques dans les manuels français est plus grand de celui dans les manuels libanais. Enfin, on peut constater qu'en France, dans les pratiques de classes, il y a investissement du temps pour le moment du travail de la technique autour des tâches de ce type plus que les pratiques de classes au Liban parce que dans les manuels français les formes des expressions littérale (des polynômes de degré inférieur ou égale à 2), sont plus simple de celles au Liban. Ainsi, les élèves français font plus de tâches de ce type.

1.3.3. Les exercices déjà résolues par des élèves fictifs

- Partie a) Simplifier si possible (2x-3)(x+2). Fanny a écrit $2x^2$-6. Pouvez-vous dire si c'est juste ou faux. Expliquer pourquoi.

Presque tous les élèves ont répondu à cette question et la grande majorité parmi eux (88%) ont considéré que la réponse fournie par Fanny est fausse. Ce pourcentage élevé montre que les élèves sont capables de mobiliser des procédures de validation dans le cas d'un exercice classique.

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
appel à la solution	58	31,2	74	45,1	132	37,7
localisation de l'erreur	43	23,1	41	25,0	84	24,0
règle générale	29	15,6	14	8,5	43	12,3
test avec un nombre	0	0,0	0	0,0	0	0,0
argument général ou aucune justification	46	24,7	20	12,2	66	18,9
pas de réponse	10	5,4	15	9,1	25	7,1
Total	186	100,0	164	100,0	350	100,0

Tableau n° 8 : les catégories des procédures de validation des élèves

Pour le montrer, la plupart ont refait le calcul (38%), cette procédure étant plus massivement utilisée par les élèves libanais. Un quart des élèves sont capables, sans refaire le calcul, de dire que la réponse est fausse, en utilisant des arguments portant sur la forme de l'expression ou sur le nombre de termes : "Fanny a oublié un x" ; "elle a oublié de développer deuxième calcul de chaque cas" ; "elle a 2 termes elle doit avoir 4 termes". Seulement 12% des élèves citent des règles générales qui correspondent à des propriétés mathématiques correctes et adaptées : "(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd" ; "multiplier chaque terme de la première parenthèse par les deux termes de la deuxième parenthèse" ; "quand il y a un produit de deux sommes (a+b)(c+d), on trouve 4 termes". Cet emploi de règles est plus fréquent chez les élèves français (7% d'écart). Enfin, aucun élève n'a fait le test avec un nombre. Nous pensons que la forme classique de cet exercice ne favorise pas le test par un nombre qui peut se révéler plus long qu'un contrôle sur la forme.

Parmi les élèves qui indiquent que la réponse fournie par Fanny est fausse, 85% ont donné une autre réponse dont environ un quart qui ont donné une réponse elle- aussi fausse. Environ un tiers des élèves libanais ont commis des erreurs (concaténation , distributivité partielle, calculer à l'intérieur de parenthèse avant de l'enlever, d'ajouter des termes en x^2 avec des termes en x, de multiplication , etc.). Pour les élèves français moins de un cinquième ont fait des erreurs de même type. Nous voyons donc là un résultat assez évident, qu'il ne suffit pas de reconnaître une erreur pour la corriger.

- Partie b) Développer et réduire si possible : C=3(4+5a)-2(4+3a). Enzo a écrit C=12+15a-8+6a=4+21a. Pouvez-vous dire si c'est juste ou faux. Expliquer pourquoi.

Seuls 42% des élèves ont considéré que la réponse fournie par Enzo est fausse. Il y a 9% d'écart entre les élèves français et libanais (plus élevé).

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
appel à la solution	36	19,4	40	24,4	76	21,7
localisation de l'erreur	39	21,0	26	15,9	65	18,6
règle générale	14	7,5	13	7,9	27	7,7
test avec un nombre	0	0,0	0	0,0	0	0,0
argument général ou aucune justification	82	44,1	69	42,1	151	43,1
non réponse	15	8,1	16	9,8	31	8,9
Total	186	100,0	164	100,0	350	100,0

Tableau n° 9 : les procédures de validation mise en œuvre par les élèves

Parmi les élèves qui indiquent que la réponse fournie par Enzo est juste, le pourcentage le plus élevé (43%) correspond aux élèves qui ne justifient pas ou qui citent des arguments généraux (par exemple "juste, car il a développé" ; "juste, il y a toute les étapes" ; "juste, il a développé puis réduit sans erreurs" ; etc.). Parmi ceux qui ont fait "appel à une règle générale", la majorité a cité des propriétés mathématiques correctes mais non adaptées (par exemple "juste, Enzo a fait entièrement la simple distributivité avec 5(4+5a) et 2(4+3a)" ; "juste, il a respecté les règles de priorité" ; "juste, il a additionné seulement les nombres ayant même partie littérale" ; etc.). Nous voyons là que les élèves utilisent des procédures de validation basées sur la forme de l'expression comme le nombre de termes, les puissances mais qu'ils ne contrôlent pas la validité des calculs.

En revanche, pour ceux qui ont dit que la réponse fournie par Enzo est fausse, 21% des élèves ont localisé l'erreur (Par exemple "faux, parce que -2×3a=-6a" ; "faux, ici c'est trompé avec les signes" ; etc.). Enfin, comme dans la tâche précédente, aucun élève n'a fait le test avec un nombre.

Dans le tableau suivant nous avons distingué le pourcentage des élèves qui indiquent que la réponse fournie par Enzo est juste de celui qui indiquent que c'est fausse. Les pourcentages sont calculés sur le nombre total d'élèves qui ont donné une réponse.

	% des élèves qui disent c'est juste		% des élèves qui disent c'est faux	
	effectif	%	effectif	%
appel à la solution	25	7,8	51	16,0
localisation de l'erreur	0	0,0	65	20,4
règle générale	19	6,0	8	2,5
argument général	82	25,7	2	0,6
aucune justification	56	17,6	11	3,4
Total	182	57,1	137	42,9

Tableau n° 10 : effectif et pourcentage des élèves qui disent juste et qui disent faux

Parmi les élèves qui ont considéré que la réponse fournie est fausse, 90% ont donné une autre réponse. Dans ce cas, moins de 10% ont donné des réponses fausses sans écart remarquable entre les pourcentages des élèves français et libanais, ce qui montre que ces élèves ont certainement pris des indices pour dire que la réponse est fausse et qu'ils savent donc la corriger.

- Partie c) Supprimer les parenthèses de l’expression : -(2x+3). Leila a écrit : -(2x+3)=-2x+3. Pouvez-vous dire si c’est juste ou faux. Expliquer pourquoi.

81% des élèves considèrent que la réponse de Leila est fausse. L’écart entre les pourcentages des élèves français et libanais ne dépasse pas 5%. Ainsi, il y a une grande différence de réussite entre cet exercice et le précédent qui peut s'expliquer par la forme de l'expression dans une moindre mesure, sûrement, par la consigne (ici il est indiqué "Supprimer les parenthèses" qui est un type de tâche institutionnelle avec une technique).

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
appel à la solution	28	15,1	38	23,2	66	18,9
localisation de l’erreur	37	19,9	38	23,2	75	21,4
règle générale	58	31,2	37	22,6	95	27,1
test avec un nombre	0	0,0	0	0,0	0	0,0
argument général ou aucune justification	43	23,1	27	16,5	70	20,0
non réponse	20	10,8	24	14,6	44	12,6
Total	186	100,0	164	100,0	350	100,0

Tableau n° 11 : les procédures de validation mise en œuvre par les élèves

Le pourcentage le plus élevé (31%) correspond aux élèves qui citent des règles générales. Dans ce cas, la grande majorité des élèves fait appel à des propriétés ou à des techniques mathématiques correctes et adaptées (par exemple : "lorsque il y a un signe – devant la parenthèse, on enlève les parenthèses et on inverse les signes dans la parenthèse, s'il n’y a pas de multiplication" ; "elle n’a pas appliqué la règle des signes" ; "après le moins, quand nous avons une parenthèse, c’est comme si nous appliquons la distributivité" ; "le – porte sur tous les nombres / sur toute la parenthèse" ; "le signe – devant la parenthèse signifie –1" ; etc.). D’autre part, 25% des élèves localisent l’erreur (par exemple : "Leila n’a appliqué le – qu’au 2x et non au 3x comme il fallait le faire à cause des parenthèses" ; "elle aurait dû aussi écrire –3 à la place 3" ; etc.). Ensuite, 22% des élèves refont l'exercice. Parmi les élèves qui indiquent que la réponse est juste, la majorité a cité des arguments généraux (par exemple "juste, car il y a suppression des parenthèses") ou n'a pas justifié. Enfin, on peut constater encore une fois que les élèves ne testent pas avec un nombre.

Parmi les élèves qui ont considéré que la réponse fournie est fausse, presque tous les élèves français et libanais ont donné une réponse qui est juste. Finalement, comme dans l’exercice précédent, les élèves ont certainement pris des indices pour dire que la réponse est fausse et ils savent donc la corriger.

- Partie d) réduire l’expression : 7-2x+4x. Louis a écrit : 7-2x+4x=7-6x. Pouvez-vous dire si c’est juste ou faux. Expliquer pourquoi.

La majorité des élèves ont répondu à cette question mais contrairement à ce que nous avons prévu environ la moitié disent que la réponse de Louis est juste. 23% des élèves citent des arguments généraux : "juste il a bien réduit au plus qu’il pouvait", "juste car il a bien calculé et ne s’est pas trompé dans les signes", "je dis que c’est juste par intuition", etc. 17% des élèves citent des règles générales dont la majorité sont des propriétés mathématiques correctes mais pas complètement adaptées : "juste, il a bien additionné les termes de la même partie littérale ensemble", "juste, dans une addition on peut commencer n'importe où". Dans ce cas les élèves considèrent que la réponse est juste. En revanche 27% des élèves localisent l'erreur (le pourcentage le plus élevé) : "faux, parce que il a additionné –2x+4x sans se prendre compte qu'il y avait un – devant 2x", "faux, car –2x+4x=2x", "faux, car -2+4=2". Ensuite, 20% des élèves font appel à la solution et un écart de 9% apparaît entre les élèves français et libanais (le plus élevé). Finalement, comme dans les tâches précédentes, aucun élève ne fait pas test par un nombre.

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
appel à la solution	30	16,1	41	25,0	71	20,3
localisation de l'erreur	59	31,7	37	22,6	96	27,4
règle générale	34	18,3	24	14,6	58	16,6
test avec un nombre	0	0,0	0	0,0	0	0,0
argument général ou aucune justification	43	23,1	37	22,6	80	22,9
non réponse	20	10,8	25	15,2	45	12,9
Total	186	100,0	164	100,0	350	100,0

Tableau n° 12 : les procédures de validation mise en œuvre par les élèves

Quand les élèves produisent leur propre réponse (le cas où les élèves considèrent que la réponse fournie par Louis est fausse), environ un quart ont eu la bonne réponse. L'erreur la plus fréquente correspond à la réponse 7-2x. Le pourcentage des élèves qui ont commis d'autres types d'erreurs (concernant la concaténation, l'ordre de priorité, de puissance, etc.) ne dépassent pas 5%, ce qui se révèle un faible pourcentage.

Dans le tableau suivant, nous avons distingué les pourcentages des élèves qui ont indiqué que la réponse fournie par Louis est juste ou fausse. Ainsi, les pourcentages sont calculés sur le nombre total d'élèves qui ont donné une réponse.

	% des élèves qui disent c'est juste		% des élèves qui disent c'est faux	
	effectif	%	effectif	%
appel à la solution	22	7,2	6	2,0
localisation de l'erreur	0	0,0	95	31,1
règle générale	25	8,2	46	15,1
argument général	49	16,1	9	3,0
aucune justification	35	11,5	18	5,9
Total	131	43,0	174	57,0

Tableau n° 13 : les procédures de validation mise en œuvre par les élèves

Comme dans les tâches précédentes et conformément à l'analyse a priori, parmi les élèves qui ont lu la solution proposé par Louis, la majorité qui décide que c'était juste se limite à justifier par un argument général ou à ne pas justifier. En revanche, la majorité des élèves qui citent que la réponse est fausse ont soit localisé l'erreur soit cité des règles générales.

Finalement, on voit donc que cet exercice, très classique, est peu réussi et que les élèves ont du mal à détecter l'erreur. Il semble que les procédures de validation employées se limitent à des critères de surface portant sur les ostensifs. Ainsi, les élèves vérifient la présence du terme en x et du terme constant et ne vérifient les calculs numériques. De plus, la forme de l'expression finale qui comporte moins de termes que l'expression initiale correspond à l'idée commune de "moins de termes possibles". Enfin, nous pensons que la technique de factorisation n'est pas mise en avant et les éléments technologiques basés sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ne sont pas utilisés pour réduire une somme algébrique

- Partie e) Simplifier si possible l'expression $3a\times(-5a)$. Un élève a répondu 15a. Pouvez vous dire si c'est juste ou faux. Expliquer pourquoi.

La grande majorité considère que la réponse fournie est fausse. Il n'y a pas un écart remarquable entre les élèves libanais et français.

Le pourcentage le plus élevé (33%) correspond aux élèves qui localisent l'erreur et parmi eux il y a environ la moitié des élèves français et deux tiers des élèves libanais qui indiquent deux erreurs (par exemple : "il y a le signe – donc le résultat sera négatif. Il y a $a\times a$ donc a^2") alors que les autres n'en mettent en avant qu'une seule concernant le signe ou la puissance (par exemple : "car il n'a pas multiplié les a entre eux" ; "$3\times(-5)=-15$"). Ainsi, seulement 15% citent des règles générales correctes et adaptées, mais la majorité d'eux ont pris en considération l'erreur concernant le signe, plutôt que celle portant sur l'exposants (par exemple "car si on multiplie un nombre positif par un nombre négatif il sera négatif" ; "le produit de deux nombres identiques est forcément un carré"). Puis, 32% des élèves font appel à la solution avec un écart de 9% entre les pourcentages des élèves français et libanais (le plus élevé). Enfin, encore une fois, aucun élève fait test avec un nombre.

	France		Liban		Total	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
appel à la solution	59	27,8	61	37,2	120	31,9
localisation de l'erreur	89	42,0	34	20,7	123	32,7
règle générale	27	12,7	22	13,4	49	13,0
test avec un nombre	0	0,0	0	0,0	0	0,0
argument général ou aucune justification	15	7,1	20	12,2	35	9,3
non réponse	22	10,4	27	16,5	49	13,0
Total	212	100,0	164	100,0	376	100,0

Tableau n° 14 : les procédures de validation mise en œuvre par les élèves

Parmi les élèves qui ont donné une réponse, il y a environ un quart des réponses fausses avec une erreur de signe ou une erreur de puissance. Enfin, il est probable que ces élèves ne distinguent pas le contexte de réduire une expression littérale avec un produit de polynômes de celui ayant la forme d'un polynôme ou d'une somme algébrique, où le langage : "on réduit en ajoutant des termes ayant même partie littérale", comme nous avons indiqué peut vivre dans les classes.

Pour conclure, les élèves utilisent toutes les procédures à l'exception du test par une valeur numérique, ce qui doit nous interroger sur les programmes français notamment, puisque ce type de tâches doit faire l'objet d'un enseignement. On peut donc penser que les professeurs dans les classes ne l'utilisent pas comme une procédure de vérification mais comme une tâche à part entière. Ainsi, ce type de tâche étant souvent réalisé sans finalité, les élèves ne le reconnaissent pas comme un outil de validation et, d'autre part, comme les expressions proposées dans le questionnaire étaient très classiques, on peut imaginer que les élèves utilisent alors d'autres types de validation plus rapides portant éventuellement sur la forme des expressions. Ce résultat est à mettre en lien avec d'autres recherches comme celles de Lee et al., 1989 ou de Davis et al., 1987 qui indiquent que les élèves n'utilisent pas spontanément le test par une valeur numérique pour prouver que deux expressions littérales ne sont pas égales.

Les élèves libanais refont davantage l'exercice alors que les élèves français qui font davantage référence à des règles générales. En plus, quand les élèves justifient que la réponse est fausse, ils utilisent majoritairement "appel à la solution" ou "localisation de l'erreur" ou "référence à des règles générales" alors pour justifier qu'une réponse est juste ils citent plutôt des arguments généraux ou ne justifient pas. Donc on peut se demander si c'est un élément révélateur des pratiques des professeurs dans chaque pays qui aurait des influences sur les procédures des élèves.

Enfin, on a demandé aux élèves qui considèrent que la réponse est fausse de donner leur réponse. Nous constatons que même s'ils disent que la réponse fournie par l'élève fictif est fausse et qu'ils localisent l'erreur, il peut y avoir des élèves qui donnent une autre réponse fausse. Dans ce cas, soit ils ont des critères de validations qui sont faux soit ils ont de bonnes critères de validation mais ils font des calculs faux.

2. Le questionnaire "professeurs"

2.1. Présentation du questionnaire

Tout d'abord, nous avons posé quelques questions ouvertes et générales qui visent à déterminer des éléments de connaissances des professeurs sur les difficultés principales des élèves en calcul littéral : Question 5 : *Quelles sont les difficultés principales des élèves en calcul littéral ?*

Ensuite, nous avons demandé, dans la question n°8, les erreurs possibles dans la tâche de type "calculer la valeur numérique d'une expression littérale" avec un polynôme de degré 2 : *Quelles erreurs peuvent faire les élèves quand on leur demande : Calculer $P=-9x^2$, pour $x=2$*. Nous avons ainsi repris l'exercice proposé aux élèves dont nous connaissions un certain nombre de réponses erronées : -9×2^2 ; -92^2 ; 36 ; (-92^2) ; $(-92)^2$; $(-18)^2$; -18^2. Nous avons également cherché quelques éléments d'interprétation *: Comment analysez-vous ces erreurs* ?

Pour avoir un lien avec le questionnaire "élèves", nous avons proposé les mêmes exercices avec les solutions d'élèves fictifs. Et nous avons demandé aux professeurs d'analyser ces erreurs en posant la question suivante : *Comment interprétez-vous cette erreur ?*

- Développer et réduire si possible : $(2x-3)(x+2)$. Fanny a écrit : $(2x-3)(x+2)=2x^2-6$
- Supprimer les parenthèses de l'expression : $-(2x+3)$. Denis a écrit : $-(2x+3)=-2x+3$
- Indiquez une forme réduite de l'expression $2x^2+3x+1-2x^2+4$. Parmi les réponses des élèves se trouvent $8x$; $8+x$. 50% des élèves de la classe ont répondu $8x$. 10% des élèves de la classe ont répondu $8+x$.

Nous rappelons que ces erreurs sont classiques et sont liées à la distributivité ; à l'ordre des opérations ; aux signes.

Enfin pour le dernier cas de ce questionnaire : *Indiquez une forme réduite de l'expression $2x^2+3x+1-2x^2+4$. Parmi les réponses des élèves se trouvent $8x$*, nous avons produit plusieurs arguments de correction et nous avons demandé aux professeurs d'en choisir un ou plusieurs qui leur conviennent pour aider les élèves à corriger leur erreur.

Notez de 0 à 4 la méthode que vous pourriez appliquer dans la classe, en cochant une case par ligne. (0 pas d'accord, 4 complètement d'accord)

	0	1	2	3	4
➢ 3x+5 n'est pas égale à 8x parce que la règle c'est « additionner les nombres ensemble et les lettres ensemble»…	☐	☐	☐	☐	☐
➢ On additionne seulement les termes semblables. « je n'ai le droit de faire la somme de deux monômes que lorsque les termes sont semblables. » Et ici 8 et x ne sont pas des termes semblables….	☐	☐	☐	☐	☐
➢ Je prends un contre-exemple numérique et je montre que, pour une valeur de x, l'égalité est fausse…	☐	☐	☐	☐	☐
➢ J'additionne séparément les nombres qui contiennent une variable x, et 8 n'a pas une variable x…	☐	☐	☐	☐	☐
➢ Je peux représenter les variables par des objets. Par exemple je peux dire : « On ne mélange pas les torchons et les serviettes, ou les pommes et les oranges »…	☐	☐	☐	☐	☐
➢ Je rappelle la règle de la distributivité. Par exemple pour 3x+5x.					
➢ Je fais réapparaître le signe de multiplication $3\times x+5$. Et je parle de la priorité des opérations…	☐	☐	☐	☐	☐
➢ Autre réponse ; laquelle ? ………………………………………………………	☐	☐	☐	☐	☐

Pour analyser les réponses des professeurs concernant leurs interprétations des erreurs des élèves, nous avons repris la typologie de DeBlois, 2006 qui définit cinq "milieux" auxquels les professeurs sont sensibles et se réfèrent quand ils doivent analyser ou corriger une production d'élève :

- M1 : L'enseignement offert : comparaison entre ce qu'ils font dans leur classe et exigent de leurs élèves et ce qui est fait par l'élève.
- M2 : La familiarité des élèves avec la tâche : comparaison de la tâche à l'ensemble de celles que l'élève fait habituellement qui amène quelques éléments d'interprétation. Ici, les professeurs

intègrent dans leur réponse une précision à l'égard d'un ensemble de composantes contribuant au développement du concept. Leur réponse va plus loin qu'une description.

- M3 : La compréhension des élèves : évaluation de cette compréhension par des indices présents dans les textes des élèves.
- M4 : Les caractéristiques de la tâche proposée aux élèves : identification de certaines caractéristiques de la tâche qui amènent des interprétations.
- M5 : Les savoirs liés aux programmes d'études : identification des opérations dans la démarche d'un élève pour résoudre la tâche et description des attitudes de l'élève. Ici, les professeurs positionnent d'abord l'élève, puis décrivent l'erreur de ce dernier :

> Dans ce cas, les professeurs ne se détachent pas de l'erreur de l'élève. Leurs réponses suivent la forme suivante : « l'élève ne comprend pas le problème posé ». La difficulté semble donc se situer « dans l'élève » plutôt que dans la « relation entre la situation et l'élève ». (DeBlois, 2006.)

DeBlois utilise cette catégorisation lors de stages de formation continue pour des enseignants qui apportent des productions d'élèves et qui les discutent pour améliorer leur enseignement. La classification produite se réfère à ce contexte. Notre étude n'est pas faite dans le même contexte puisque, pour nous les professeurs sont seuls quand ils remplissent le questionnaire et les erreurs produites n'ont pas été relevées par eux. Enfin les exercices proposés ne relèvent pas vraiment de la résolution de problèmes, ce sont plutôt des exercices de technique.

2.2. Analyse a posteriori

Les difficultés des élèves d'après les professeurs

Les professeurs indiquent que les élèves font des erreurs dans les types de tâches "réduire une expression littérale" (17 professeurs) et "développer une expression littérale" (8 professeurs).

Pour eux, cela concerne la difficulté à comprendre et à utiliser la notion de variable (14 professeurs) , les conventions d'écriture en algèbre (par exemple, cacher le signe $\times$), la non maîtrise du calcul numérique des nombres relatifs (5 professeurs), la confusion entre x^2 et x, le rôle des parenthèses et des puissances : $(-x)^2=x^2$ (7 professeurs).

Quelles erreurs peuvent faire les élèves de quatrième quand on leur demande : Calculer $P=-9x^2$, pour $x = 2$.

Environ la moitié des professeurs (8 français et 6 libanais) considèrent qu'il y a une possibilité d'avoir la réponse : $-9^2\times2^2$, $-(9\times2)^2$ ou -18^2. Plus de la moitié des professeurs (11 français et 7 libanais) considèrent qu'il y a une possibilité d'avoir la réponse : $(-9\times2)^2$ ou $(-18)^2$.

Alors, malgré que moins de un cinquième des élèves, qui ont répondu au questionnaire, ont fait des erreurs semblables (notamment $-9^2\times2^2$), on voit bien que les professeurs indiquent les mêmes erreurs qu'on a prévu. Ceci montre que ces sont des erreurs classiques.

* Comment analysez-vous ces erreurs ?

10 professeurs ne répondent pas (5 français et 5 libanais)

- Pour M2, plus de la moitié des professeurs (10 français et 7 libanais) essayent d'analyser les sources des erreurs. Une grande diversité de causes sont évoquées pour expliquer les réponses erronées : -92^2 ; $(-9\times2)^2$ ou $-(9\times2)^2$. Pour l'erreur concernant remplacement de signe $\times$ caché par + ou avoir -92^2, les professeurs parlent de difficulté liée au signe $\times$ cachée :

> « problème de signe $\times$ qui n'apparaît pas. », « le nombre qu'on met à la place de x est positif et ils ne savent pas encore qu'il y a une multiplication entre un nombre et une lettre » « ils oublient souvent le signe de multiplication existant $-9\times x^2$ quand il n'est pas écrit car en addition ou en division ou soustraction on préserve toujours le signe » (3 français, 1 libanais)

Pour avoir les réponses fausses $(-9\times2)^2$ ou $-(9\times2)^2$ cela revient, du point de vue des professeurs, à la mauvaise connaissance ou maîtrise de l'ordre des opérations, à la notation de carré, au rôle des parenthèses et à l'habitude d'effectuer le calcul de gauche à droite :

> « mauvaise connaissance des règles de priorité », « le sens ^{2} non compris (même sens que fois 2) » « la notation x^2 est mal comprise. Les élèves ont tendance à ajouter mentalement des parenthèses. Le fait qu'il y ait ou non des parenthèses n'a pas d'importance » « ils effectuent les calculs dans l'ordre : d'abord $-2\times x$ puis la puissance » (7 français, 7 libanais).

- Pour M1, 4 professeurs libanais montrent leurs façons de faire la correction :

> « $-9a^2=-9\times a^2$ mais $-9(2)^2$ ne signifie pas -92^2. Il faut séparer les nombres par le signe $\times$ ou la parenthèse » «you should follow the order of operations » « Il faut mettre 2 entre parenthèse et faire attention à la priorité de la puissance par rapport à la multiplication »

- Enfin, pour M5, 3 professeurs français se limitent à des arguments généraux portant sur les élèves et leur difficultés :

> « lacunes de 5^e et 4^e», « surcharge cognitif », « sens du calcul littéral qui n'est pas compris. »

Pour conclure, un tiers des professeurs ne répondent pas et trois utilisent des arguments généraux. Nous ne savons pas ce qui peut se passer dans la classe lors des phases de correction mais il y a un risque que celle-ci se limite à donner la bonne réponse dans le cas où une erreur semblable apparaît.

2.3. Interprétation des erreurs par les professeurs

Développer et réduire si possible : $(2x-3)(x+2)$. Fanny a écrit : $(2x-3)(x+2)= 2x^2-6$. Comment interprétez-vous cette erreur ?

Pour M2, plus d'un quart des professeurs (7 français et 3 libanais) essayent d'analyser l'erreur commise par Fanny. Deux causes sont évoquées pour l'expliquer :

- La confusion avec les règles pour effectuer la tâche "réduire une somme", on ajoute et soustrait des termes semblables

« la distributivité ne se fait que sur les termes semblables » ou « multiplier les x entre eux et les nombres sans x entre eux » (4 professeurs)

- La confusion avec la distributivité simple ou l'identité remarquable :

« confusion avec la distributivité simple (=2 termes à trouver) » ; « Pour eux la distributivité c'est 1 terme à l'extérieur seulement ex : -3(x+2) » (3 professeurs)

« faire seulement les produits extrêmes en référence à l'identité remarquable : (a-b)(a+b) » (2 professeurs)

Pour M1, un quart d'autres professeurs (1 français et 7 libanais) se limite à donner la technique de résolution et ainsi indiquer comment il faudrait faire. Nous retrouvons donc là un résultat semblable à celui trouvé pour la question précédente.

« Il faut utiliser la distributivité : (2x-3)(x+2)=2x(x+2)-3(x+2) » ; « Il faudrait lui rappeler qu'un tel calcul donne 4 termes et non 2 »

Les autres (8 français et 8 libanais) se limitent à la description de la procédure de l'élève :

« elle multiplie les 1ers nombres de chaque parenthèse entre eux, puis les 2ème entre eux » (6 professeurs)

ou à une description de l'attitude de Fanny, en termes de compréhension, ou de l'erreur mais sans aller plus loin :

« elle oublie la double distributivité » ou « elle n'a pas compris la double distributivité », « erreur sur la double distributivité ». (11 professeurs)

Ainsi leur réponses correspondent à M5.

Pour conclure, nous constatons qu'il y a des professeurs qui n'analysent pas l'erreur mais ils se limitent à donner la technique de résolution, à l'identification des démarches faits par l'élève ou à la description de l'erreur.

Supprimer les parenthèses de l'expression : -(2x+3). Denis a écrit :-(2x+3)= -2x+3. Comment interprétez-vous cette erreur ?

Pour M2, plus de la moitié des professeurs (9 français et 11 libanais) essayent d'analyser l'erreur commise par Denis avec différentes explications.

- La non compréhension du rôle des parenthèses ou de la signification du signe "–" devant une parenthèse :

« he is not considering the ( ) as a grouping symbol » ; « la parenthèse n'est pas perçue comme une priorité » (5 professeurs)

« ne sait pas que – signifie l'opposé de (2x+3) » ; « il n'a pas compris que le – est l'opposé d'une expression » ; (4 professeurs)

- L'erreur revient à la non application de la distributivité :

« toujours c'est la règle de distributivité qui leur manque car ils pensent du chiffre autrement du signe. Ils ne pensent que – c'est –1(2x+3) » ; « il enlève simplement les parenthèses, il ne reconnaît pas une situation de distributivité simple car le coefficient est caché » ; « erreur sur la distributivité » ; « il n'a pas compris le principe de développement » ; « il n'a pas compris que –(2x+3) signifie (-1)×(2x+3), et donc que le – se distribue aussi sur le 3 » (9 professeurs)

On note que, même si les professeurs essayent d'expliquer cette erreur, ils citent toujours que "l'élève n'a pas compris" ou "l'élève ne sait pas", etc.

Les réponses de plus d'un tiers des professeurs correspondent à M5. Ainsi ils se limitent à identifier des opérations dans la démarche de Denis et à décrire ses attitudes en termes "d'oubli" ou "de manque d'attention" :

«il pense à changer le 1er signe, mais pas le 2e » ; « manque d'attention sur le fait que le – affecte toute la parenthèse donc tous ses termes » ; « l'élève ne sait pas que le – doit multiplier tout les termes du facteur (2x+3) » ; « Denis a oublié de distribuer le – à chaque terme présent dans la parenthèse. Il s'est contenté de le donner seulement au premier » « non acquisition de la règle de suppression des parenthèses après un signe – » (7 professeurs français et 6 libanais)

Pour M1, 2 professeurs libanais donnent la bonne réponse :

« l'opposé de (2x+3) c'est l'opposé de 2x + l'opposé de 3 donc = -2x-3 » ; « -1×(2x+3)=-1×2x+3 ; il faut multiplier –1 par 2x et par +3 »

Pour conclure, malgré la simplicité de cette tâche on voit bien qu'il y a plusieurs points de vues pour l'analyser. Plus de deux tiers des professeurs ne parlent pas de la distributivité.

Indiquez une forme réduite de l'expression $2x^2+3x+1-2x^2+4$.

* 50% des élèves de la classe ont répondu 8x. Comment interprétez-vous cette erreur ?

Pour M2, deux tiers des professeurs (11 français et 11 libanais) essayent d'analyser la source de cette erreur. Deux causes sont principalement évoquées:

- confusion entre termes avec x et termes sans x, entre x^2 et x. La non distinction entre les termes semblables et les termes non semblables

« les élèves ont confondu 1x=x avec 1=1x » ; « ils effectuent 3x+1+4 comme 3x+x+4x », « mal compréhension des termes semblables », « pas de sens derrière le x et le x^2 pour faire la différence ». (16 professeurs)

« ne tiennent pas en compte les priorités opératoires, la distributivité et les propriétés des signes opératoires :« confusion 3x+5 et (3+5)x » ; « ne tient pas compte du produit 3x, des priorité opératoire et des règles de réduction » ; « connaissance partielle de ka+kb=k(a+b) » (5 professeurs)

Enfin, pour M5, un quart se contente à identifier des opérations dans la démarche des élèves sans aller plus loin :

« $2x^2-2x^2=0$; 3+1+4=8 ; 3x+1+4=8x » ; « ils ont additionné les variables avec les nombres » (7 professeurs)

Quatre professeurs libanais partent de ce qui est fait par l'élève et expliquent ce qu'il aurait fallu faire. La forme du discours (mise en garde, injonctions) nous incite à penser que ce sont certainement des traces de ce qu'ils diraient aux élèves dans la classe lors de la correction. On voit bien ici l'utilisation massive de l'expression "termes semblables".

> « $2x^2+2x^2=0$ (là c'est bien) ; $3x+1=4x$ or $3x$ et 1 ne sont pas semblables ; $4x+4=8x$ $4x$ et 4 ne sont pas semblables », « $3x+5=8x$? il faut faire attention à la priorité de la multiplication par rapport à l'addition. Ici on a fait le contraire », « il faut faire attention qu'on peut réduire les termes semblables. 2 termes semblables ont même variable et même exposant, n'ont pas de même coefficient $2x^2$ et $-2x^2$ sont 2 termes semblables. $+3x$ et 4 et 1 on ne peut pas les réduire », « voici un exemple drôle qui explique cette erreur : 2 tables + 3 chaises + 1 montre – 2 bouteilles +4 montres = 8 chaises. Ces élèves ont fait la somme algébrique de tous les coefficients »

Pour M1, quatre professeurs libanais parlent de la technique de correction :

> « $2x^2+2x^2=0$ (là c'est bien) ; $3x+1=4x$ or $3x$ et 1 ne sont pas semblables ; $4x+4=8x$ $4x$ et 4 ne sont pas semblables », « $3x+5=8x$? il faut faire attention à la priorité de la multiplication par rapport à l'addition. Ici on a fait le contraire », « il faut faire attention qu'on peut réduire les termes semblables. 2 termes semblables ont même variable et même exposant, n'ont pas de même coefficient $2x^2$ et $-2x^2$ sont 2 termes semblables. $+3x$ et 4 et 1 on ne peut pas les réduire », « voici un exemple drôle qui explique cette erreur : 2 tables + 3 chaises + 1 montre – 2 bouteilles +4 montres = 8 chaises. Ces élèves ont fait la somme algébrique de tous les coefficients »

Là aussi, les professeurs utilisent le vocabulaire "termes semblables", coefficient, variable, etc.

Enfin, dans l'analyse de cette erreur, on voit qu'on ne peut pas distinguer entre M1, M2 et M5 parce que dans les trois catégories il y a l'analyse de l'erreur.

* 10% des élèves de la classe ont répondu 8+x. Comment interprétez-vous cette erreur ?

Un tiers des professeurs (6 français et 5 libanais) ne répondent pas à cette question. On peut penser que cette erreur n'est pas aussi familière que la précédente.

Pour M2, plus d'un tiers des professeurs (7 français et 6 libanais) essayent d'analyser cette erreur selon trois causes :

- la confusion entre $\times$ et + :

> « ne sait pas 3x comme le produit 2 nombres, mais seulement comme 2 nombres « à côté » ; « confusion 3x et 3+x (c'est-à-dire $3\times x$ et 3+x) et donc 3x+5 et 3+x+5 » (9 professeurs)

- un malentendu entre les professeurs et leurs élèves :

> « *On ne mélange pas les torchons et les serviettes, ou les pommes et les oranges*, du coup l'élève sépare les nombres et les lettres » ; « ils calculent le coefficient et « rajoute le x ». Peut être qu'ils ont été confronté à des réponses où ils calculaient les coefficients (comme pour 2x-4x ou $3x+7x^2$) et ensuite on leur a dit : *« tu as oublié le x, rajoute-le* » ! » (2 professeurs)

- la non prise en compte des priorités opératoires (2 professeurs)

Pour M5, soit les professeurs décrivent des manques des élèves soit ils portent un jugement de valeur :

> « mal connaissance des termes semblables », « puisque 10% seulement ont répondu 8+x. Donc je considère que ces sont les élèves pas doués en mathématiques » (4 professeurs)

soit ils se limitent à l'identification des opérations dans les démarches des élèves :

> « ils ont pris le 3 avec 4 et 1 et un x qui doit rester » ; « 3+1+4=8 il faut bien faire quelque chose du x » (3 français et 6 libanais)

L'analyse de ce questionnaire montre que les réponses des professeurs peuvent être classées dans les milieux M1, M2 et M5. Ainsi, le nombre de réponses dans le questionnaire, correspondant à chaque catégorie, ne sont pas les mêmes.

Pour M1, moins d'un quart des professeurs (ce sont libanais) se limitent à donner la technique de résolution sans aller plus loin. Pour M2, entre un quart et deux tiers des professeurs (libanais et français) analysent l'erreur. Dans ce cas, il n'y a pas une seule explication mais plusieurs causes sont évoquées. Enfin, pour M5, entre un quart et la moitié des professeurs (libanais et français) identifient la démarche de l'élève et ils essayent de renvoient la source de l'erreur en termes d'incompréhension de la tâche mathématique.

Enfin, on peut penser que la propriété de la distributivité n'est pas toujours évoquée dans les phases de correction. De plus, il y a des professeurs qui indiquent la bonne réponse ou ils portent un jugement sur l'attitude de l'élève sans aller plus loin.

* Comment aidez-vous les élèves à corriger leurs erreurs ?

	pas d'accord			aucune idée			d'accord			aucune réponse		
	F	L	Total	F	L	Total	F	L	Total	F	L	Total
additionner les nombres ensembles et les lettres ensemble	5	8	13	1	3	4	8	4	12	2	2	4
termes semblables	10	3	13	0	1	1	6	12	18	0	1	1
contre-exemple numérique	0	2	2	7	5	12	8	9	17	1	1	2
8 n'a pas une variable x	6	5	11	0	3	3	6	7	13	3	2	5
représenter les variables par des objets	2	3	5	3	1	4	10	11	21	1	2	3
la règle de la distributivité	4	4	8	2	4	6	10	7	17	0	2	2
réapparaître le signe de multiplication $3\times x+5$ et parler de la priorité des opérations…	7	6	13	0	3	3	9	6	15	0	2	2

Comme nous avons prévu la technique la plus utilisée par les professeurs est de "représenter les variables par des objets" (21 professeurs : 11 libanais et 10 français). Tandis que, celle le moins utilisée est "additionner les nombres ensembles et les lettres ensemble" ou "8 n'a pas une variable x" (12 professeurs : 4 libanais et 8 français).

La majorité des professeurs libanais emploient le vocabulaire "termes semblables" qu'on a trouvé dans les manuels libanais. Dans ce cas, un tiers des français l'adoptent. D'ailleurs, la propriété de distributivité n'est pas rappelée par la moitié des professeurs.

3. Conclusion

D'après le questionnaire "élèves" nous avons pu établir que les élèves utilisent des procédures de validation différentes : localiser l'erreur ; écrire l'exercice de nouveau puis comparer la réponse avec celle fournie ; se référer à une règle générale mais qu'aucun n'utilise le test par un nombre. Nous constatons que les propriétés mathématiques ne sont pas toujours mobilisées par la majorité des élèves. Ils s'appuient plutôt, d'une part, sur la forme de l'expression littérale et sur les éléments ostensifs, et, d'autre part, sur des connaissances communes des mots dans la consigne. Par exemple dans une tâche où la consigne est "supprimer les parenthèses" avec l'expression littérale de la forme $-(ax+b)$, la majorité des élèves n'indiquent pas la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Ils se limitent à des ostensifs ou des procédures techniques reposant sur des verbes dont le sens dans le langage commun est peu opérationnel. Ils citent : "quand il y a un signe moins devant la parenthèse et quand on l'enlève on change le signe des termes à l'intérieur des parenthèses".

Ceci est une source de difficultés et d'erreurs chez les élèves. Par exemple, dans une tâche "réduire l'expression 7-2x+4x". Environ la moitié des élèves ont été d'accord pour la réponse proposée 7-6x. Parmi eux, il y avait ceux qui ont cité qu'on peut ajouter des termes en x. Ainsi, ils ont mis l'attention sur x en oubliant les règles d'opération.

Nous soulignons trois erreurs fréquentes : une qui est relative au type de tâche réduire une expression littérale, la concaténation, où nous marquons que les élèves libanais commettent davantage ce type d'erreur ; l'erreur classique $(x\pm b)^2 = x^2\pm b^2$ est commis par la moitié des élèves ; l'expression de la forme $a \nabla (b \Delta c)$ avec $(\nabla ; \Delta) =$ ("+" ; "+") apparaît comme caractéristique de la distributivité pour un groupe des élèves, qui considèrent que c'est égale $(a\nabla b)\Delta(a\nabla c)$.

En ce qui concerne le questionnaire professeurs, sur toutes les questions posées, nous constatons de façon régulière, qu'environ un tiers des professeurs, n'analysent pas l'erreur quand elle apparaît dans une réponse. Ils se limitent à donner la réponse attendue ou bien à sa localisation et éventuellement description.

Cela nous interroge sur les phases de correction dans la classe, puisque si les professeurs se contentent de dire ce qu'il aurait fallu faire, on peut penser que dans la classe ils n'auront pas d'autres arguments à proposer aux élèves pour les amener à rectifier.

Partie III

Chapitre 6
Pratiques de classes dans les phases de correction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les études que nous avons menées sur les phases de corrections dans des classes ordinaires, deux de 4ème en France et deux de 5ème au Liban durant l'enseignement du chapitre consacré au calcul littéral.

Les tâches portant sur développer et/ou réduire une expression littérale ont été choisies comme objet d'analyse. Plusieurs raisons nous ont conduit à ce choix ; tout d'abord la majorité des correction, dans les classes observées sont consacrées à ce type de tâches et les manuels privilégient ce type de tâche. A partir des analyses précédentes et notamment des questionnaires nous avons pu mettre en avant quelques résultats concernant les professeurs et les élèves et nous allons chercher dans les séances de classe si nous les retrouvons.

- D'une part, la technique "tester par un nombre" est rarement utilisée par les professeurs pour invalider une réponse fausse (cf. chapitre 3, §3). D'autre part, pour réduire une expression littérale, la technique institutionnelle de factorisation n'est pas toujours mise en avant par les professeurs. Des éléments du bloc technologico-théorique basés sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ne sont pas utilisés. Les professeurs utilisent plutôt des ostensifs "ajouter termes ou monômes semblables" (cf. chapitre 3, §3).
- Dans le questionnaire élève, nous avons repéré des procédures de validation qui sont donc disponibles chez les élèves : certains vont refaire l'exercice et comparer leur solution avec la solution proposée, d'autres sont capables de localiser l'erreur parce qu'ils disposent de critères de contrôle leur permettant de savoir où celle-ci peut être faite (calcul, parenthèses, etc) ou bien d'autres font explicitement référence à des propriétés qu'ils connaissent et dont ils vérifient l'application. En revanche, nous avons aussi constaté que certains élèves n'avaient pas de critères explicites pour décider de la validité d'une solution.

De plus, nous allons tenter de voir s'il est possible de déterminer des caractéristiques générales dans les techniques de correction des professeurs ou bien de distinguer ce que nous appellerons des profils pour chacun d'entre eux. L'attention a été portée sur les régularités et invariants dans les conduites des professeurs durant les phases de correction des tâches du même type, notamment la façon de valider une étape de calcul (ou une réponse) et de corriger une erreur et le moment de l'intervention. L'accent est mis, d'une part, sur les interactions dans la classe et, d'autre part, sur la gestion du savoir.

Pour cela nous avons filmé le déroulement d'une séquence entière portant sur le calcul littéral dans nos quatre classes de collège.

Nous présentons tout d'abord, dans le premier paragraphe, les données que nous nous avons recueillies et les méthodes d'analyse. Puis, dans le deuxième paragraphe et sur la base des entretiens menés avec les professeurs, nous formulons les définitions de "développer et réduire une expression littérale", ainsi que les points de vu de ces professeurs sur les difficultés et erreurs des élèves. Dans le troisième, nous décrivons le traitement des données vidéos et nous présentons les possibles catégories d'intervention du professeur durant les phases de correction, suivant deux niveaux – la gestion du savoir par le professeur et les interactions du professeur avec les élèves –

Au paragraphe 4, l'attention sera portée sur les résultats généraux concernant la séquence d'enseignement dans chaque classe. Enfin, nous identifions dans le cinquième des régularités et invariants observés dans les conduites de chaque professeur.

1. Méthodes de collecte des données et de leur analyse

Pour savoir comment le professeur organise les phases de correction et comment il gère les interactions avec l'élève qui fournit la réponse et avec la classe, nous avons choisi une méthode de cas afin de mieux comprendre le fonctionnement des corrections dans une situation effective de classe sans l'isoler du reste de l'enseignement (cf. chapitre 1 §2). Les données récoltées sont des enregistrements vidéo de classes dans les deux pays lors de l'enseignement du calcul littéral complétés par des entretiens avec les professeurs des classes filmées.

1.1. Entretiens

Ces entretiens portent sur les objectifs qu'ils donnent au chapitre, sur les définitions des tâches "développer" et "réduire" une expression littérale qu'ils institutionnalisent éventuellement dans la classe, sur les difficultés et les erreurs classiques des élèves qu'ils connaissent. Ils visent à pouvoir faire des hypothèses raisonnables sur la démarche de chacun des professeurs.

Ils ont été réalisés avec chaque professeur avant de commencer le chapitre concernant le calcul littéral. Ceux avec les professeurs libanais sont enregistrés en vidéo alors qu'avec les professeurs français nous avons utilisé un magnétophone. La durée approximative pour chaque entretien est d'une demi heure.

Des questions générales et d'autres plus particulières relatives à chaque professeur sont posées. Nous citons les plus générales :

- Pendant combien d'années vous avez enseigné ?
- Combien des chapitres vous consacrez au calcul littéral ? Quels en sont les objectifs ?
- Quelles sont les notions importantes que vous introduisez en calcul littéral ? Dans votre cours, est-ce que vous expliquez ce que signifie "développer une expression littérale" ? "réduire une expression littérale" ? Comment ?
- Quelles sont les difficultés des élèves que vous prévoyez ? Pourquoi pensez-vous qu'ils ont ce genre de difficultés ?

- Sur quels outils (livres, internet, etc.) vous appuyez-vous pour préparer les séances ? Quel manuel utilisez-vous ?

Nous avons transcrit tous ces entretiens (cf. annexe §5). Ces transcriptions était un des outils qui nous ont permis de faire notre analyse et d'approfondir nos études sur le profil de chaque enseignant (cf. § 2). Pour cela, nous avons relié leurs réponses avec les analyses du questionnaire professeur et les analyses des manuels.

1.2. Enregistrements vidéo dans les classes et documents écrits

* Choix des classes

Le nombre de classes choisies pour les enregistrements vidéo est de quatre, deux dans chaque pays. Nous rappelons que les quatre professeurs étaient des volontaires que nous n'avons pas choisis selon des critères particuliers. Cependant tous avaient une expérience professionnelle importante car nous ne voulions pas introduire un paramètre supplémentaire lié à l'expérience. On peut penser comme Le Boterf, 2007 que le professeur expérimenté (la durée de l'exercice de la profession) a stabilisé ses pratiques.

> "Dans la démarche d'intervention l'expert agit de façon spontanée. Dans la gestion du temps il peut agir très vite mais sait choisir les rythmes adéquats, etc. Tandis que le débutant a des difficultés à distinguer l'essentielle de l'accessoire". (p. 60-61)

Le choix de filmer toute la séquence sur le "Calcul littéral" nous permet d'étudier l'évolution au cours de la séquence des corrections des tâches de types développer et/ou réduire une expression littérale avec des expressions des formes différentes. Avec cette étude nous visons à mettre en évidence des régularités dans la conduite des professeurs.

* Choix des conditions d'enregistrement

Nous avons filmé dans les classes en utilisant deux caméras. L'une panoramique, localisé dans un coin en arrière de la classe, est tantôt centrée sur le professeur quand il explique ou quand il intervient pour faire la correction, tantôt sur l'élève qui fournit la solution, en ayant toujours une partie de la classe dans le champ quelle que soit le cas de figure. Nous avons également filmé la solution écrite au tableau. L'autre fixe, localisée derrière le bureau du professeur, permet de voir une partie des élèves de la classe

* Données recueillies

En France, la séquence d'enseignement dans la classe 1, qui s'étend de janvier à février 2005, est formée de 12 séances. Nous n'avons pas pu filmer les deux premières séances de la séquence où les activités de découverte pour introduire le chapitre ont été faites. Dans la classe 2 en France, nous avons filmé toute la séquence formée de 11 séances en février-mars 2006.

Au Liban, la séquence d'enseignement dans la classe 1, est formée de 11 séances, qui s'étend de février à mars 2005. Nous n'avons pas filmé la dernière séance qui porte sur la factorisation. Dans la classe 2, où nous avons filmé 10 séances en mars 2006, nous avons raté aussi trois séances concernant l'introduction du chapitre et l'explication de "réduire une expression littérale".

Nous avons photographié les cahiers de quatre élèves choisis par le professeur dans chaque classe. Nous avons photocopiés les devoirs écrits sur table que les élèves ont eus.

* Description des classes filmées et de leur environnement.

- En France, une des classes de 4$^{\text{ème}}$ est dans un collège public (classe 1) alors que l'autre est dans un collège privé (classe 2).
- Le collège de la classe 1 a 900 élèves ; les élèves sont en majorité d'un milieu socio-économique moyen ; elle se situe dans une zone urbaine. La classe 1 a 26 élèves. Dans ce collège, le niveau de la classe est considéré comme moyen par le professeur. Le professeur a une formation correspondant à 4 années d'université en mathématiques et des stages de formation professionnelle. Elle a 20 ans d'expérience ; elle est un membre d'un groupe de recherche développement animé par l'unité de recherche dans laquelle la thèse à été réalisée côté français (groupe SESAMES-algèbre). thèmes mathématiques en algèbre, traités avant le calcul littéral, sont le calcul numérique des nombres relatifs (produit, division, somme, etc.) avec des décimaux et des entiers.
- Le collège de la classe 2 a 720 élèves ; les élèves sont de niveaux socio-économique moyen ; elle se situe dans une zone péri-urbaine ; La classe 2 a 28 élèves. Cette classe est d'un bon niveau du point de vue du professeur. Le professeur a une formation correspondant à 4 années d'université en physique. Elle a 15 ans d'expérience ; elle, ne suit que rarement des séances de formation continue. Les sujets mathématiques en algèbre, traités avant le calcul littéral, sont les même que dans classe 1.
- Au Liban, une des classes de 5$^{\text{ème}}$ est dans une école privée (classe 1) alors que l'autre est dans une école publique (classe 2).
- Le collège de la classe 1 a 800 élèves ; les élèves sont d'un milieu socio-économique moyen ; l'école se situe dans une ville non loin de Beyrouth. La classe 1 a 32 élèves. Dans cette école le niveau de la classe est considéré comme moyen par le professeur. Le professeur a une formation correspondant à 5 années d'université en génie civil, 2 années d'université en mathématiques et une année en didactique ; il a 7 ans d'expérience ; il ne suit pas des formations continues ; Les sujets mathématiques en algèbre, traités avant le calcul littéral, sont aussi les calculs numériques des nombres relatifs (addition et soustraction, produit, puissances), fractions, nombres premiers et décomposition d'un entier naturel en un produit de facteurs premiers.
- Le collège de la classe 2 a 280 élèves ; Les élèves sont en majorité issus de milieux défavorisés mais ils parlent correctement la langue française. L'école se situe à Beyrouth. La classe 2 a 17 élèves. Ce collège est d'un bon niveau du point de vue des résultats aux examens officiels en 3$^{\text{ème}}$ et en Terminale. Le professeur a une formation correspondant à 4 années d'université en mathématiques et une formation professionnelle. Elle a 25 ans d'expérience ; elle suit régulièrement des séances de formation continue. Les sujets mathématiques en algèbre, traitées avant le calcul littéral, sont les calculs numériques des nombres relatifs (addition et soustraction, produit, puissances), fractions et nombres premiers.

Ainsi les quatre professeurs ont plusieurs points communs. Sur le plan académique, ils ont un diplôme supérieur ou égal à la maîtrise mais pas forcément en mathématiques. Sur le plan professionnel, deux des quatre professeurs, un en France et un au Liban bénéficient régulièrement des séances de formation continue. S'agissant de leur expérience professionnelle, elle est au minimum de 7 ans pour un des professeurs du Liban et pour les trois autres de 15 ans ou plus. Par la suite afin de faciliter la lecture nous appelons les deux professeurs des deux collèges français F1 et F2 et leurs collègues libanais L1 et L2.

* Les manuels utilisés

En France, les deux classes utilisent le même manuel, Triangle, 4^{e}, HATIER, 2002, dans lesquels les deux thèmes "calcul littéral" et "équations" sont traités dans deux chapitres différents. Bien que les deux professeurs considèrent que le développement et la réduction d'une expression littérale sont des outils qui aident à résoudre d'autres tâches[28], elles suivent la partition du manuel en traitant les deux thèmes séparément.

Au Liban, les professeurs utilisent deux manuels différents : Puissance, 5^{e}, AL-AHLIA DESCARTES, 1998 pour le professeur du premier collège ; et Construire les mathématiques, 5ème, CNRDP, 1998 (utilisé par toutes les écoles publiques) pour le professeur de second collège. Là aussi les deux thèmes sont traités dans deux chapitres différents par chaque manuel.

Le professeur L1 du premier collège introduit le calcul littéral dans deux chapitres successifs "Expressions algébriques" et "Développement-factorisation" en suivant en cela le découpage du manuel. Le professeur L2 introduit le calcul littéral à partir d'un chapitre intitulé "Expressions algébriques".

Tout comme leurs collègues français, les deux professeurs libanais travaillent séparément le calcul littéral et les équations.

2. Les points de vue des professeurs

L'analyse des entretiens nous a permis de situer ces points de vue sur chacune des tâches développer et réduire une expression littérale et sur les difficultés des élèves.

2.1. Les points de vue sur les tâches

2.1.1. Développer une expression littérale

Les quatre professeurs s'appuient sur la forme de l'expression pour définir "développer une expression littérale". En France, le professeur F1 définit "développer" en conformité avec un quart des réponses des professeurs français :

"Développer c'est trouver l'écriture sans parenthèse"

[28] "Résoudre des équations, utiliser réduire une somme ou produit en géométrie pour avoir la valeur exacte du périmètre et d'aire d'un secteur circulaire, par exemple". (professeur F1)

Dans son cours, elle ne donne ni des procédures ni des éléments technologiques/théoriques. Tandis que l'autre, F2, cite la propriété de la distributivité même si elle met en avant la forme de l'expression conformément au réponse de la majorité des professeurs français et libanais qui ont répondu au questionnaire :

> « Développer c'est transformer un produit en une somme de termes ».

Au Liban, le professeur L1 donne la même définition que F1. Tandis que le deuxième, L2, donne deux définitions compatibles :

> « développer, c'est transformer la multiplication en somme » ou « c'est effectuer le produit des facteurs »

2.1.2. Réduire une expression littérale

Aucun professeur ne s'appuie sur la factorisation pour définir "réduire une expression littérale". En France, le professeur F1 définit réduire en conformité avec la moitié des réponses des professeurs français en s'appuyant sur la forme de l'expression :

> « réduire c'est écrire plus simplement » ou « la rendre plus petite »

Dans son cours, elle ne donne pas ni la technique ni des éléments technologiques/théoriques. Tandis que l'autre parle de la technique "ajouter des termes ayant même partie littérale", sans les identifier :

> « En quatrième, on n'a pas la notion de factorisation donc on n'utilise pas le mot factoriser. Par contre, on peut, quand même, se baser sur la distributivité et utiliser l'égalité dans un sens et dans l'autre. Pour cela, quand on a une réduction moi je vais leur travailler parler en termes des nombres qui ont la même partie littérale et qu'on peut les regrouper entre eux : le x avec le x, y avec y ».

Au Liban, les deux enseignants s'appuient sur des éléments ostensifs, c'est-à-dire des termes semblables, en conformité avec la majorité des manuels libanais et la définition donnée dans les questionnaires par les professeurs libanais :

> "réduire des termes semblables c'est les remplacer par un terme semblable à eux tel que le coefficient est la somme algébrique des 1^{ers} coefficients" (L1)

> "réduire, c'est faire la somme des termes semblables pour la rendre plus petite". (L2)

Nous voyons donc à travers ces définitions qui sont institutionnalisées que d'une part les professeurs donnent des définitions semblables à celles des manuels. Les suivent-ils ou bien choisissent-ils des manuels qui sont conformes à ce qu'ils souhaitent faire ? Nous ne le savons pas. D'autre part, nous avons déjà montré que ces définitions s'appuient largement sur des ostensifs voire sur le sens commun et qu'elles ne donnent que peu de moyens de contrôle aux élèves, ce que les professeurs ne semblent pas pointer. Enfin la question de la place de la factorisation dans les programmes est seulement évoquée par F1 qui semble se résigner à ne pas avoir d'éléments technologico-théoriques à sa disposition.

2.2. Les connaissances des professeurs sur les difficultés et erreurs des élèves

Les quatre professeurs indiquent que les élèves ont des difficultés en calcul littéral. Nous allons décrire leur explications des erreurs relatives aux types de tâche "développer" puis "réduire une expression littérale".

Erreurs relatives au type de tâches développer une expression littérale

En France, le professeur F1 parle de la confusion de la "distributivité de la multiplication sur l'addition" avec une "distributivité de la multiplication sur une multiplication", ceci a été pointé par Drouhard, 1992. Ce même professeur se réfère à un autre type d'erreurs lié cette fois-ci aux signes. Par contre, son collègue, F2, n'a pas indiqué les difficultés des élèves relatives à ce type de tâche.

Au Liban, le professeur L1, au moment de l'entretien s'attend à ce que les élèves, au début, prennent un même terme dans la première expression et le multiplier deux fois par les termes de la deuxième expression. Nous n'avons pas trouvé ce type d'erreur dans d'autres recherches. Dans le collège 2, l'enseignant souligne qu'il y a un manque de théorèmes relatifs au calcul littéral dans les programmes et dans les manuels et que cela est l'un des facteurs principaux des difficultés des élèves.

> "On utilise des notions sans des théorèmes derrière. Dans le programme ancien, il y avait tout les théorèmes : l'associativité, la commutativité. Mais maintenant les élèves ont des confusions : ils ne savent pas si x plus y est égale à y plus x ou si xy est égale à yx".

Elle explique que d'autres difficultés sont liées à la non maîtrise des calculs des nombres relatifs et des puissances, à la non compréhension du rôle des parenthèses, c'est-à-dire qu'une expression dans une parenthèse est une seule entité. De plus, d'après ce même professeur, les élèves ne voient pas qu'une expression sous forme soit développée soit factorisée représentent la même expression mais elles sont écrites de façon différente : la première est une somme de termes tandis que la deuxième est le produit de facteurs. D'ailleurs, elle cite que les élèves n'arrivent pas distinguer facilement entre terme et facteur.

Erreurs relatives au type de tâches réduire une expression littérale

En France, les deux professeurs indiquent que les élèves font des erreurs dans la priorité des opérations en effectuant la réduction d'une expression littérale. De plus, les élèves ont une tendance à avoir une réponse formée d'un seul terme :

> "Si on a deux x plus trois y, les élèves vont au début dire cinq xy. Après, petit à petit, ils comprennent que le x et le y ne sont pas la même chose. Or, si on mélange des x avec des xy, par exemple deux x plus cinq xy, dans xy il y a x dedans on a le droit de le remettre. Ils vont avoir aussi des difficultés avec le respect de priorité. Par exemple si on écrit deux plus deux x. Pour nous c'est terminé, la multiplication est prioritaire, on ne peut pas réduire d'avantage : deux x je ne peux pas l'additionner au deux parce que ils n'ont pas la même partie littérale. Mais eux, ils ont envie d'ajouter et d'avoir quatre x". (F2)

Le professeur F1 explique que cela revient à la disparition du signe multiplier et à la confusion dans les opérations entre addition et multiplication. Elle cite d'autres difficultés : confusion entre x au carré et deux x ; quand les élèves réduisent des expressions sommes ayant des termes au carré ; lorsqu'ils effectuent une expression au carré ; des erreurs de signes puisqu'ils ont du mal avec les nombres relatifs ; et des difficultés au niveau de la notation (par exemple, la disparition de signe multiplier).

Au Liban, les deux professeurs soulignent aussi que les élèves ont des difficultés mais les explications qu'ils donnent ne sont pas les mêmes que celles citées par leurs collègues français. D'après le professeur L1, ces erreurs viennent des pratiques précédentes des élèves en arithmétique.

> "Deux x à la puissance cinq plus trois x à la puissance quatre les élèves vont donner cinq x à la puissance neuf, par exemple. Pour eux il y a addition donc ils ajoutent les exposants. Ils sont aussi habitués à avoir une réponse formée d'un seul nombre. C'est pour cela ils ont un peu des difficultés de voir des réponses du type x quatre plus x cinq. Pour eux il y a toujours un plus donc il y a toujours quelque chose à faire".

Tandis que, son collègue L2 considère que ces erreurs sont liées au passage à l'abstraction :

> "Si on leur donne un exemple de la vie courante, par exemple deux pommes et un pomme, les élèves savent facilement que la réponse est trois pommes. Or, quand on représente par une expression littérale, il y a une confusion. Ils sont convaincus qu'on ne peut pas additionner deux pommes et une poire. Or, quand on parle de deux x et y, ils donnent immédiatement deux xy". (L2)

De plus, elle explique que le mélange de plusieurs lettres dans la même expression dans les manuels libanais provoque des difficultés pour les élèves. Elle pense qu'il est plus facile d'introduire et de pratiquer développer et/ou réduire avec des expressions ayant une seule lettre avant de travailler sur des expressions avec de degré de complexité plus élevé.

On voit à travers ces déclarations que les professeurs ont une certaine connaissance des erreurs possibles de leur élèves. On retrouve notamment ici des erreurs classiques qui on été repérées dans les recherches (par exemple, la concaténation, les erreurs sur les puissances, etc).

3. Analyse des enregistrements vidéo

Après avoir observé l'ensemble des séances, nous avons procédé par une reconstruction de chacune des séances afin d'en obtenir un synopsis pour simplifier notre analyse. Nous allons présenter par la suite les principes de notre synopsis et montrer comment cette reconstruction de séances nous a permis d'accéder facilement, à l'aide du logiciel Transana (dont nous parlerons au paragraphe 3.2) à certaines phases de correction caractérisées par les types de tâches qui nous intéressent.

3.1. Le tableau d'analyse : Synopsis

Le synopsis correspond à la première analyse que fait le chercheur quand il travaille avec les enregistrements sur l'ensemble d'une séquence. Il sert ensuite de repère lors des analyses plus approfondies. Dans cette première analyse, le chercheur se situe en observateur extérieur ; il prend le point de vue global de la classe et est ainsi plus proche du professeur que de chaque élève. Ce synopsis doit permettre d'avoir une idée de ce qui se passe en classe et de suivre le contenu des séances, afin de comparer, d'une part, les séances d'une séquence et, d'autre part, des séquences de classes différentes.

Pour élaborer les critères du synopsis, nous avons repris ceux de Tiberghien et al. (2007), qui présentent une méthode d'analyse de situations de classe au cours d'un enseignement de physique. Ensuite, nous avons modifié, en ajoutant ou en supprimant des rubriques, selon nos besoins et intérêts.

Au début du synopsis, nous marquons le nombre de séances, la date, le nombre des élèves, le niveau de la classe, la durée de la séance, le manuel mathématique utilisé et les types de tâches repérés durant la séance. Puis nous découpons en sept rubriques :

- 1ère colonne : Temps : nous avons segmenté l'échelle du temps toutes les deux minutes ; cette échelle sert de repère temporel pour les descriptions données dans les autres colonnes.
- 2ème colonne : Organisation de la classe : dans cette colonne on codera les modes de regroupement de la classe, nous considérons 5 cas : quand toute la classe travaille ensemble (appelé classe entière, C-E), quand les élèves travaillent en petits groupes (appelé groupe, Gr), quand les élèves travaillent individuellement (appelé travail individuel, In), quand les élèves travaillent en petits groupes et que le professeur et/ou des élèves interviennent au niveau de la classe entière (appelé groupe-mixte Gr, Gr-M) ou en groupes, ou quand les élèves travaillent individuellement et que le professeur et/ou les élèves interviennent au niveau de la classe entière (appelé groupe-mixte In, In-M)
- 3ème colonne : Tâches mathématiques : nous avons utilisé la théorie Anthropologique de didactique pour repérer les différentes tâches et les types de tâches.
- 4ème colonne : Phases didactiques : nous repérons les différentes phases de la séance que nous listons ici : introduction de la séance, exposition du cours, résolution et correction d'exercices (énoncés de différentes exercices et activités avec le nombre du page et de l'exercice dans le manuel utilisé), clôture de la séance. On ajoute aussi des catégories concernant la gestion du savoir rappels ou synthèse, institutionnalisation comme, nous l'avons précisé dans le chapitre 2, nous n'utilisons pas les six moments de l'organisation didactique définis par Chevallard car nous devons avoir un découpage plus précis pour repérer des phases de correction.
- 5ème colonne : Actions du professeur et des élèves : actions observables du professeur et des élèves, traduites par des verbes et spécifiées. (un élève ou les élèves posent question ; répond aux questions du professeur ; écrit au tableau ; écrit sur son cahier ; corrige l'erreur ; explique; parle : par exemple, cite une règle générale, etc.) (le professeur pose une question ; répond aux questions de l'élève ou des élèves ; invite un élève au tableau, écrit au tableau ; corrige l'erreur cite une propriété mathématique ; expose ; donne une consigne ; indique l'expression littérale ou le terme ou le facteur ; etc.). Si le participant fait deux actions simultanées, on met la deuxième en utilisant le participe présent, par exemple, expose en écrivant. Nous divisons donc cette colonne en deux : une pour le professeur et l'autre pour les élèves (si nécessaire on identifie l'élève, notamment celui qui fournit la réponse). Pour distinguer l'élève qui écrit la réponse au tableau des autres élèves, la colonne "élèves" est divisé en deux ou plus selon le nombre d'élèves invités au tableau ou à parler.
- Description du contenu : dans cette colonne nous marquons en vert tout ce qui est écrit au tableau et nous présentons les principales paroles qui ont été dites par les professeurs et les élèves sous une

forme réduite. Ainsi, quand il s'agit de questions et de réponses brèves, on peut mettre la transcription en omettant toutes les répétitions ou les reformulations très proches de la répétition. Les caractères sont mis en normal. Quand le professeur expose ou questionne les élèves en formulant un contenu de mathématique standard, connu universellement et formulé de manière standard (par exemple, la multiplication est commutative), les caractères sont mis en gras tandis que, quand le professeur expose ou questionne les élèves en formulant à sa manière le savoir (par exemple, pour réduire il faut ajouter les termes ayant même partie littérale), les caractères sont mis en italique.

- Les types d'erreurs commises par les élèves. (par exemple erreur relative au type de tâche réduire une expression littérale, erreur relative au type de tâche développer une expression littérale, erreur de concaténation, erreur dans le puissance $x+x \rightarrow x^2$, etc.)

Voici un exemple.

Tps	Org	tâche mathématique	étape didactique	Actions			Description contenu	Type d'erreur
				Pr	Es			
0-2			introduction de la séance	donne une consigne			***vous sortez les exercices que vous avez pour aujourd'hui***	
	C-E	réduire si possible les expressions suivantes. $M= 4x-8x+5$	correction Activité 1 p.107 partie(c) déjà fait à la maison	invite Elo au T				
2-4						Elo écrit	$M= 4x-8x+5= -4x+5$	
				pose Qs à Elo			4x moins 8x ça fait quoi	
						répond	moins 4x	
				pose Qs	répondent			
4-6				parle			ces x elle les avait écrit comme des signes de multiplication et quand on fait ça Elodie on risque de voir une confusion entre l'opération et la lettre	
					Dri donne une autre R		entre parenthèse quatre moins huit x plus 5	
				écrit au T la R de Dri			$M= (4-8)x+5=-4x+5$	
				pose Qs	Es répondent			
6-8								
				donne une consigne à Dri			ton étape elle est correcte c'est ce que on fait dans sa tête mais on va apprendre à ne pas écrire cette étape et passer directement à cette ligne	
				invite Joé au T				
		$N= -3x+7x+10x$				Joé écrit	$N= -3x+7x+10x=14x$	
				pose Qs	Es répondent			
				pose Qs en exposant	Es répondent		qu'est-ce qu'on fait comme calcul	
8-10								
		$O=7-2x+4x$		invite Emi au T				
						Emi écrit	$O = 7-2x+4x = 7-6x$	erreur spécifique à la tâche réduire
				pose Q			vous êtes d'accord	
					Es répondent		non	
					Aur répond		moins deux x plus quatre x ça fait deux x	
10-12						Emi écrit R	$O=7-2x+4x =\cancel{7-6x}=7+2x$	
				pose Qs	Es répondent			

Figure 1 : Synopsis de la Séance 1 (filmé) le 10 Janvier 2005 ; établissement : Collège 1 France ; Niveau de la classe : quatrième ; Nombres d'élèves : 26

Enfin, les critères de nos synopsis nous permettent d'avoir un tableau récapitulatif des séances durant toute la séquence pour chaque classe. Ce qui rendra visible certains types de tâches, leur fréquence d'apparition ainsi que les erreurs des élèves dans les phases de corrections. Nous allons alors pouvoir choisir les phases qui nous intéressent pour les sélectionner en Transana et faire des analyses des cas ultérieures.

Le lecteur trouvera les synopsis de chaque séance pour chaque classe en annexe.

3.2. Le logiciel d'analyse vidéo : TRANSANA

Le logiciel Transana est un outil d'analyses qualitatives et quantitatives d'enregistrements vidéo. Ce logiciel nous permet de mettre en relation les données vidéo et leurs transcriptions. Ainsi sur l'écran apparaissent quatre sous-fenêtres qui peuvent être mises en lien : "vidéo", "transcription", "base de données" et "son".

La fenêtre "base de données" comprend quatre onglets [29] :

- Les "Séries" : contenant les fichiers vidéo appelés "Épisodes" avec les transcriptions jointes ;
- Les "Collections" et "Collections imbriqués" : Une collection regroupe des extraits vidéo qui s'appellent "clips" et qui ont des caractéristiques communes du point de vue du chercheur qui mène l'analyse. Le chercheur peut ainsi coder les clips selon un ensemble de catégories. Nous présentons dans le paragraphe suivant nos catégories. Il peut y avoir des collections imbriquées. Par exemple, nous avons un collection par type de tâche qui inclut d'autres catégories (réduire une expression littérale contient réduire une somme et réduire un produit). Nous avons utilisé les synopsis pour choisir et créer des clips correspondant à des tâches dans des phases de correction ;
- Les "Mots-clés" : Ces mots permettent de caractériser un clip. A chaque clip peut être attaché une série de mots clés qui, dans notre cas, correspondent à nos catégories d'analyse définies que nous présentons dans le paragraphe suivant. Nos premiers mots-clés comprend le collège, le numéro de séance et les types de tâches : développer et/ou réduire une expression littérale en considérant la forme de l'expression.
- Le rubrique "Rechercher" qui permet de faire une recherche simple (data-mining) des mots-clés ou pour tester des hypothèses en faisant des recherches multiples et complexes en même temps.

Nous présentons ici les quatre fenêtres "base de données" du logiciel Transana de notre hiérarchie des collections.

[29] "base de données", "Séries", "Collections" et "Collections imbriqués", "clips" sont des termes pris du logiciel Transana.

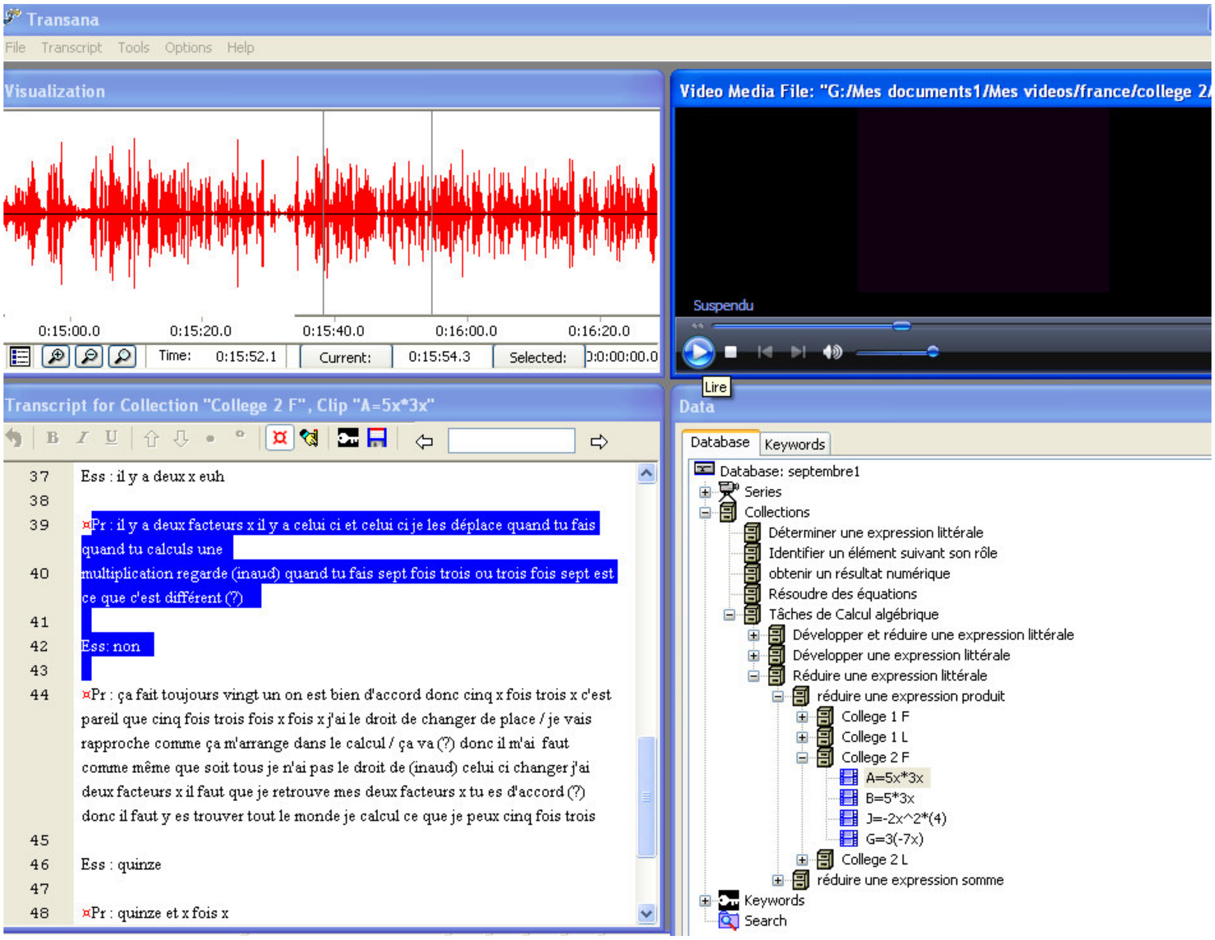


Figure 2 : les quatres onglets dans le logiciel Transana

Une fois terminée l'indexation des clips par les mots-clés et à partir de la fonction "clip data export" fournie par Transana, on peut exporter cette indexation en Excel sous format 1 et 0. (le 1 présence – le 0 absence)

3.3. Catégories d'analyse

Tout d'abord nous présentons dans ce paragraphe les collections et les sous collections. Ensuite, nous introduisons des catégories concernant les interventions possibles du professeur ; qu'elles soient destinées à créer des interactions avec les élèves ou à la gestion du savoir. Ainsi, ces catégories seront introduites en Transana comme mot-clés pour qu'on puisse identifier les différents clips.

3.3.1. Les collections parallèles

Nous distinguons les principales collections ainsi que les sous collections (collections imbriquées). Pour les premières, nous avons la même catégorisation que nous avons introduit dans le chapitre 2 d'après les analyses des manuels : Tâches de calcul algébrique (développer ; réduire ; factoriser une expression littérale) ; Obtenir un résultat numérique ; Traduire par une expression littérale/Associer diverses expressions dans des registres différents/ Indiquer un ou des éléments caractéristiques ; Déterminer et utiliser une expression littérale ; Résoudre des équations.

Nous rappelons que nous nous intéressons seulement aux phases de correction dans la première catégorie : "Tâches de calcul algébrique" qui contient des sous-catégories : "réduire une expression littérale" ; "développer une expression littérale" ; "développer et réduire une expression littérale".

Nous présentons ici la fenêtre "base de données" du logiciel Transana.

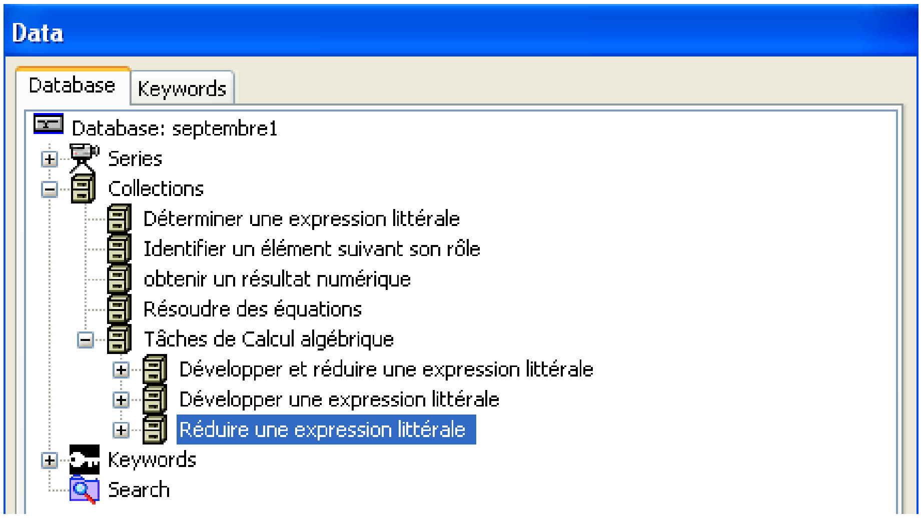


Figure 3 : les collections principales dans le base de données en Transana

3.3.2. Les collections/sous collections

La hiérarchie des collections /sous collections correspond aux différents types de tâches en prenant compte de la forme de l'expression littérale. A l'intérieur de la collection "réduire une expression littérale" il y a deux collections imbriquées : "réduire une expression somme" et "réduire une expression produit". Dans "développer et réduire une expression littérale", nous avons mis trois collections imbriquées correspondant à des expressions littérales ayant des formes différentes : la première correspond aux phases de correction de tâches de type développer et réduire une expression littérale – somme des polynômes ou des sommes à plusieurs variables à l'intérieur des parenthèses : $(a \pm b) \pm (c \pm d)$ – ; la deuxième est relative aux expressions littérales – produit de deux polynômes ou deux sommes – ; la troisième englobe des expressions ayant la forme d'une somme de deux ou trois termes – polynômes et produit –.

Pour distinguer les quatres classes nous avons introduit, de nouveau, dans chacune de ces collections imbriquées des sous-collections relatives à chaque classe. Par exemple, dans la sous-collection réduire une expression – produit – on introduit les collections imbriquées : classe 1 France ; classe 2 France ; classe 1 Liban ; classe 2 Liban.

Nous présentons ici la fenêtre "base de données" du logiciel Transana de notre hiérarchie des collections.

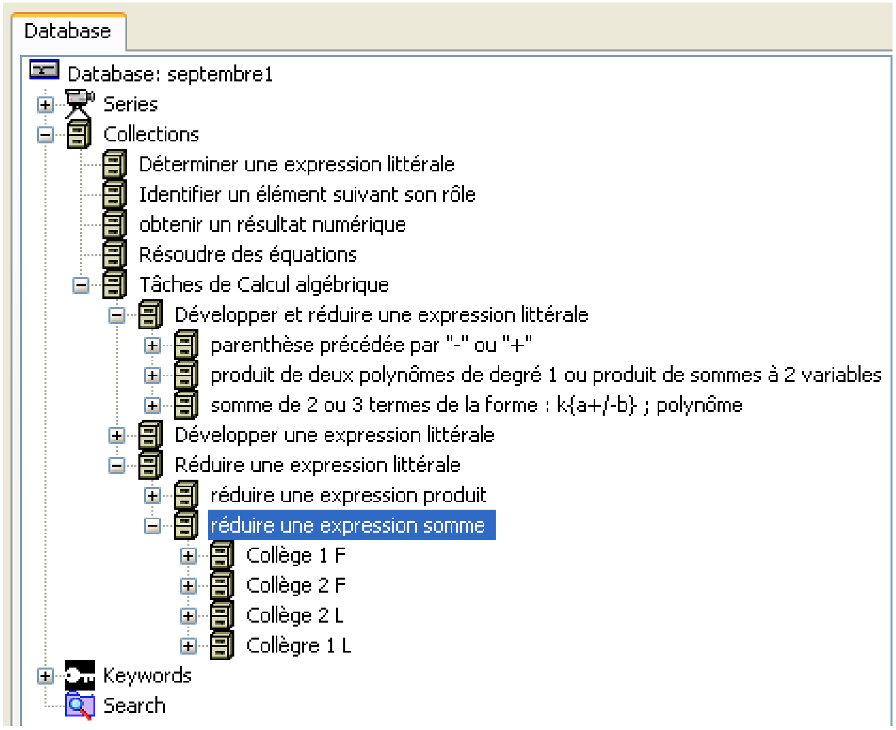


Figure 4 : les collections et sous collections dans le base de données en Transana

Les clips relatifs aux phases de correction que nous analysons se trouvent dans les dernières collections imbriquées.

3.3.3. Les catégories d'intervention du professeur

A partir de ces catégories, nous tentons de faire émerger des régularités dans les démarches des professeurs que nous avons filmés.

Les interventions qui nous intéressent sont celles qui sont en lien direct avec le savoir et qui sont faites à haute voix. C'est-à-dire, nous excluons de notre analyse aussi bien les interventions privées (à voix basse) avec un élève que les interventions pour assurer la discipline.

Toutefois, il y a deux types d'interventions en lien avec le savoir. Un des types est quand le professeur se donne la responsabilité de valider ou non une réponse produite ; dans ce cas il n'y a pas d'interaction avec les élèves. L'autre type est quand le professeur négocie la réponse produite soit avec l'élève qui l'a fournie soit avec toute la classe ; dans ce cas il y a des interactions avec les élèves.

Nous faisons la distinction entre réponse et solution. Nous appellerons réponse, ce qui donne seulement la réponse à la question posée (ou à l'injonction comme réduire, etc). Nous considérons qu'une solution est à la fois la réponse et la procédure suivie c'est –à-dire tout le raisonnement ou le calcul qui a amené à la réponse.

Dans notre catégorisation, nous nous intéressons aussi au traitement de l'erreur et aux procédures de validation. Dans ces cas, les catégories rejoignent sensiblement celles faites dans le chapitre 5 pour les productions des élèves et leurs procédures de validation.

Nous ferons également porter notre analyse sur les explicitations et les explications des professeurs des techniques de résolution.

Nous avons découpé la phase de correction d'un exercice en trois sous-phases successives :

- Le début de la correction : l'exercice a été fait soit à la maison, soit en classe et le professeur décide de donner la réponse ou la solution. Il indique donc explicitement que la classe va passer à une phase de correction.. Soit le professeur donne la réponse ou la solution lui –même, ce qui est peu fréquent puisqu'en général, il choisit un élève pour donner la réponse ou la solution ; celui-cil peut expliciter qu'il n'a pas su résoudre l'exercice . De plus, il y a la possibilité que le professeur donne des explications ou des indices de solution avant que l'élève ne fournisse la réponse.
- Pendant la correction : c'est la phase où la réponse ou la solution est donnée éventuellement après avoir été discutée par le professeur et/ou les élèves.
- Après la correction de l'exercice : La réponse a été fournie et validée. On peut envisager que le professeur poursuive en questionnant les élèves, en prolongeant l'exercice par d'autres questions ou bien en faisant des rappels ou des institutionnalisations partielles. On peut aussi penser que des élèves posent des questions supplémentaires ou indiquent qu'ils n'ont pas compris.

Nos catégorisations tiennent compte aussi des possibilités suivantes en ce qui concerne la façon de fournir la réponse ou la solution :

- Le professeur donne seulement la réponse oralement ou l'écrit au tableau ou demande à un élève de la citer ou de l'écrire au tableau ou sur d'autres supports (rétroprojecteur ou vidéoprojecteur).
- Le professeur donne la solution complète de l'exercice. Il l'écrit lui-même au tableau (ou sur une autre support) ou bien il choisit un élève pour le faire ou bien c'est lui qui écrit la solution sous la dictée d'un élève.
- Le professeur et les élèves collaborent pour construire la solution.
- Le professeur distribue une feuille sur laquelle est écrite la solution et, éventuellement commente.

Au début de la correction :le professeur peut ou non intervenir avant de fournir/demander la solution ou la réponse

Dans cette phase nous sommes intéressés aux aspects suivants :

*Les interactions avec les élèves

Le professeur peut chercher à avoir des informations sur les élèves : ceux qui ont fait juste ; ceux qui ont fait faux et / ou les types d'erreurs ; ceux qui n'ont pas su faire. Le professeur peut choisir un élève pour donner la solution sans avoir vérifié si cet élève a fait l'exercice ou non, s'il y a des erreurs dans sa réponse ou non. Son choix de l'élève peut dépendre de plusieurs facteurs : en fonction du temps, de la difficulté de l'exercice, etc.… Par exemple il choisit plutôt un bon élève si l'exercice est difficile ou s'il ne veut pas que le moment de correction soit trop long.

*L’exposition du savoir mathématique

Le professeur peut donner des indications telles que : rappeler des propriétés, expliquer l’énoncé en insistant sur le sens d’une mot (tel le mot "simplifier"), faire des liens avec d’autre exercices, d’autres thèmes et d’autres notions (par exemple la forme de l’expression et le degré du polynôme).

Pendant la correction : si le professeur demande la réponse ou la solution à un élève ou à la classe, il peut ou non intervenir durant la production de la solution

Dans cette phase nous pouvons voir comment le professeur traite les difficultés et les erreurs des élèves. Plus spécifiquement, comment il valide une réponse ou une étape de calcul et dans le cas où il y a une erreur, comment il la corrige (comment il repère l’erreur et comment il la corrige). Pour cela nous regardons, d’une part, les interactions avec l’élève qui a fourni la solution et avec les autres élèves et, d’autre part, les moments de ses interventions.

*Les interactions avec l’élève qui fournit la réponse

Le professeur peut intervenir avant une étape de calcul, pour demander à l’élève d’expliquer ou de justifier ce qu’il faut faire ou ce qu’il va faire, ou pour guider l’élève en lui indiquant ce qu’il faut faire ou en posant des questions.

Par ailleurs, il peut intervenir après une étape de calcul ou à la fin du calcul, suite à une erreur, pour demander à l’élève d’expliquer ce qu’il a fait, pour guider l’élève, pour demander à l’élève de repérer l’erreur et de la corriger ou pour demander à l’élève de refaire l’exercice. De plus, il peut répondre à des questions posées par l’élève.

*Les interactions avec les autres élèves

Le professeur peut intervenir avant une étape de calcul, pour demander aux élèves d’expliquer ou de justifier ce qu’il faut faire, ou pour guider les élèves en indiquant ce qu’il faut faire ou en posant des questions.

En outre, il peut intervenir après une étape de calcul ou à la fin du calcul ou suite à une erreur, pour demander aux élèves d’évaluer une réponse donnée, de valider avec ou sans justification, de repérer une erreur dans la solution proposée et de la corriger, pour aider l’élève au tableau. De plus, il peut répondre à des questions posées par les élèves. Il peut aussi accepter l’intervention d’un élève pour corriger une erreur.

Si c’est la professeur qui corrige il peut demander aux élèves d’expliquer, d’indiquer si ils sont d’accord avec la réponse fournie, de dire s’ils ont trouvé la même réponse.

*L’exposition du savoir mathématique

Le professeur peut intervenir avant la proposition de l’élève pour expliquer ce qu’il faut faire. Il peut intervenir suite à une erreur ou suite à une étape ou à la fin du calcul, pour expliquer ce qui a été fait, pour repérer l'erreur et la corriger ou demander à l'élève ou aux élèves de la corriger, pour valider avec ou sans justification, etc...

Après la correction : le professeur intervient après la production et la validation de la bonne réponse

*Les interactions avec la classe (les autres élèves)

Le professeur peut vérifier si tous les élèves ont la bonne réponse. Il peut demander aux élèves qui n'ont pas eu la bonne réponse de citer leur erreur, ou s'ils ont des questions. Il peut corriger une erreur effectuée par un élève ou lui donner des indications.

*L'exposition du savoir mathématique

Le professeur peut tirer des conclusions plus générales et faire des liens avec d'autres exercices, notions ou chapitres. Il peut rappeler des propriétés mathématiques. On peut donc repérer ici des phases d'institutionnalisations partielles.

3.3.4. Les mots-clés

Ces catégories d'interventions possibles du professeur que nous avons déterminées a priori, les types de tâches nous ont permis de définir des mots clefs dans TRANSANA qui nous permettent d'identifier des clips relativement courts portant sur une tâche et sa correction et sur les interventions du professeur.

Dans chaque clip ainsi identifié, nous pouvons donc à la fois voir comment le professeur organise la correction à la fois du point de vue du savoir et des interactions. Par exemple et plus particulièrement, pour les types de tâches qui concerne "réduire une expression littérale", nous pouvons mettre en évidence la technique mise en avant par le professeur ou quelquefois les élèves.

Nous présentons, dans la fenêtre "base de données" ci-dessous du logiciel Transana, des groupes de Mots-clés.

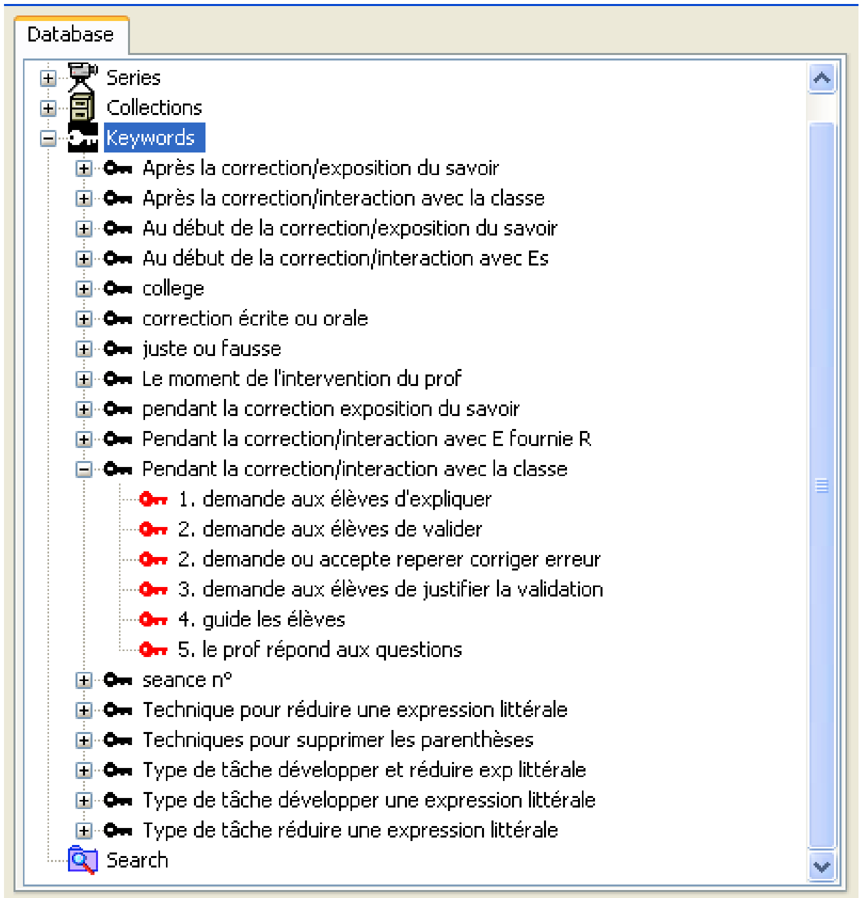


Figure 5 : Les mots-clés dans le base de données en Transana

Ce logiciel nous permet d'accéder facilement à la vidéo et au texte décrypté, d'étudier plusieurs clips semblables relativement à certains critères (tâches de même types, des erreurs semblables, l'intervention du professeur, etc.). Enfin, il nous aide à trier nos données vidéos, à avoir des clips significatifs pour nos questions de recherche et à tester nos hypothèses.

4. Résultats généraux sur la séquence d'enseignement

Dans cette partie de notre travail nous décrivons l'ensemble des séances filmées dans chaque classe à l'aide d'un tableau qui comporte quatre colonnes. La première correspond aux numéros des séances.

La deuxième indique les phases de correction. Nous avons repéré le nombre de tâches relevant de chaque type de tâches. Nous précisons si les exercices ont été faits en classe ou à la maison.

La troisième colonne indique les phases de réalisation des exercices dans la classe. Comme précédemment, nous repérons le nombre de tâches relevant de chaque type de tâches. Il se peut qu'un exercice soit fait, en général au tableau, sans que les élèves aient eu le temps de le chercher avant. Dans ce cas, la correction a lieu en même temps que l'exécution de la tâche. Nous n'avons pas étudié ces phases, comme la correction n'a pas eu lieu après que l'élève a au moins commencé à faire l'exercice. Nous indiquons le mode de regroupement de la classe, c'est-à-dire s'il s'agit d'un travail de la classe entière, en groupes ou de façon individuelle.

Dans la quatrième colonne nous indiquons les institutionnalisations et les rappels faits pendant la séance, durant les corrections des exercices. Lorsqu'il s'agit d'une véritable institutionnalisation, c'est-à-dire lorsque en France les élèves notent le texte du savoir dans leur cahier de cours, et au Liban les enseignants se contentent du contenu du manuel (dans les classes observées au Liban, les élèves suivent les explications du cours sans rien noter sur leur cahier), nous utilisons des caractères gras. Quand le professeur expose ou questionne les élèves en formulant des rappels ou ne faisant des institutionnalisations partielles, les caractères sont mis en italique.

4.1. Classe 1, France

Rappelons que séquence d'enseignement dans la classe 1 en France, est formée de 12 séances. Les deux premières séances de la séquence dans lesquelles il y avait réalisation des activités de découverte pour introduire le chapitre n'ont pas été filmées pour des raisons techniques. C'est pourquoi, dans la séance 1, il y a correction des exercices déjà faits à la maison. Le tableau 1 présente le découpage de la séquence dans collège 1 en France.

séance	correction (classe entière)	réalisation	Institutionnalisation et rappel
Séance 1	9 tâches de type réduire une somme (polynômes de degré 1 ou 2) exercices faits à la maison	3 tâches de type réduire une somme (polynômes de degré 1 ou somme à deux variables) classe entière	**le calcul littéral est un calcul avec des lettres qui sert à établit une preuve**
			$1\times x=x$, $-1\times x=-x$, $x\times x=x^2$, $2\times x=2x$, $a\times b=ab$ **je cache le signe de multiplication entre un nombre et une lettre entre deux lettres et quand la multiplication est devant la parenthèse**
			moins x est l'opposé de x
			on peut y avoir deux types de réductions **- les réductions qu'on peut faire avec les additions ou les soustractions** **- des réductions qu'on peut faire avec des produits**
			réduire c'est avoir écrire une somme avec le moins de termes possibles
Séance 2	7 tâches de type réduire une somme (polynômes de degré 1 ou 2) exercices faits à la maison	10 tâches de type réduire un produit (deux monômes de degré 1 ou 2) classe entière	**quand on a un produit de facteurs on a le droit de changer l'ordre des facteurs**
			quand on avait un nombre ou bien lettre et une parenthèse si on écrivait rien c'était la multiplication
	11 tâches de type réduire un produit (deux monômes de degré 1 ou 2) exercices faits dans la classe	11 tâches type réduire un produit (deux monômes de degré 1 ou 2) individuelle ces exercices sont corrigés dans la même séance	**dans les notations x multiplié par x est noté x au carré $x\times x=x^2$; $a\times a=a^2$**
		2 tâches développer une expression littérale classe entière	**réduire un produit c'est l'écrire avec le moins de facteurs possibles**

Séance 3	6 tâches de type réduire une somme exercices faits à la maison	3 tâches de type développer une expression littérale (produit d'un monôme par un polynôme) classe entière	**la multiplication se distribue sur l'addition ou la soustraction** **k(a+b)=ka+kb ; k(a-b)=ka-kb** **on va d'une expression produit à une expression somme dans l'autre sens on factorise**
	7 tâches de type réduire un produit exercices faits à la maison	2 taches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale classe entière	**(a+b)×k k(a+b) k(a-b) expression produit** **a×k+b×k ak+bk ak-bk expression somme**
		2 tâches calcul mental classe entière	**quand on distribue il y a un autre verbe qu'on utilise développer**
		1 tâche de type factoriser une expression littérale classe entière	
Séance 4	8 tâches de type développer une expression littérale (produit d'un monôme par un polynôme) exercices faits à la maison		*quand on dit développement ça sous-entend les réduits vous réduisez directement dans votre tête*
	5 tâches de type développer et réduire une expression littérale (somme d'un produit d'un monôme et polynôme de degré égale à 1) exercices faits à la maison		*développer veut dire distribuer la multiplication*
Séance 5	4 tâches de type développer et réduire une expression littérale (somme d'un produit d'un monôme et polynôme de degré inférieur ou égale à 2) exercices faits à la maison	3 tâches de type développer un produit d'un monôme par un polynôme classe entière	*on a bien le droit de permuter les termes quand on garde bien les signes qui les précédent*
	5 tâches de type supprimer les parenthèses puis réduire exercices fait à la maison	1 tâche de type supprimer les parenthèses et réduire classe entière	*si on multiplie deux nombres négatifs le résultat est positif*
	1 tâches de type développer et réduire une expression exercices faits dans la classe	1 tâche de type développer et réduire une expression individuelle cette tâches est corrigée dans la même séance	*-1a ou bien -a ; a ou bien 1a c'est la même chose*
			quand il y a un - devant la parenthèse ça veut dire moins une fois ce qui est dans la parenthèse
	6 tâches de type supprimer les parenthèses puis réduire exercices faits dans la classe	6 tâches de type supprimer les parenthèses et réduire individuelle ces tâches sont corrigées dans la même séance	**k(a+b)=ka+kb ; k(a-b)=ka-kb** **de gauche à droite on distribue et de droite à gauche on factorise quand k égale - 1 il va falloir distribuer la multiplication sur chaque terme qui est entre parenthèse**
Séance 6	5 tâches de type supprimer les parenthèses et réduire exercices faits à la maison	2 tâches de type réduire une somme classe entière	*la factorisation est la propriété qui nous permet de passer de 5y+1y à (5+1)×y* *la distributivité est la même propriété qu'on utilise dans deux sens différents*
	2 tâches de type développer et réduire une expression exercices faits à la maison	2 tâches de type développer un produit d'un monôme par un polynôme classe entière	*on peut utiliser la distributivité pour factoriser et donc réduire le nombre du termes*
		2 tâches de type supprimer les parenthèses et réduire classe entière	*quand on a un produit ça s'appelle des facteurs*
			réduire on appelle aussi simplifier l'écriture

			quand on passe de cette écriture $5(-4c+2)-(3c-4)\times 2$ *à cela* $-20c+10-6c+8$ *on appelle développer les produits on n'a pas écrit explicitement les produits on les a réduit de tête*
Séance 7	correction d'un contrôle	1 tâche de type écrire une expression littéral (l'aire d'un rectangle) classe entière	**(2+x)(3+x) on distribue x et on distribue 2 sur chacun des termes x et 3 on appelle ça la double distributivité**
	1 tâche de type développer et réduire un produit de deux polynômes	2 tâches de type développer et réduire un produit de deux polynômes classe entière	
		1 tâche de type développer et réduire un produit de deux polynômes individuelle cette tâche est corrigée dans la même séance	
séance 8	6 tâches de type développer et réduire un produit de deux polynômes exercices faits dans la classe	3 tâches de type développer et réduire un produit de deux polynômes classe entière	**double distributivité pour tout nombre a b c et d $(a+b)(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$**
	1 tâches de type développer et réduire un somme (un polynôme et un produit) exercices faits dans la classe	6 tâches de type développer et réduire un produit de deux polynômes individuelle ces tâches sont corrigées dans la même séance	
		1 tâche de type développer et réduire un somme (un polynôme et un produit) individuelle cette tâche est corrigée dans la même séance	

Tableau 1 : la séquence d'enseignement du calcul littéral dans classe 1, en France

Presque tous les exercices réalisés ou corrigés ou sont tirés du manuel. Le découpage des séances correspond à celui du manuel dans le même chapitre : réduire, puis développer ensuite développer et réduire une expression littérale. Selon l'ordre des séances, il y a réalisation et corrections d'exercices comportant des tâches du même type de façon répétitive. Par exemple, dans les trois premières séances, il y a réalisation et correction de 40 tâches de type réduire une expression littérale (une somme et un produit) dont 29 ont été faites à la maison. Ensuite, à partir de la séance 4, il y a correction de 8 tâches de type développer une expression littérale. Dans les séances 4, 5 et 6, il y a correction de 28 tâches (21 faites à la maison et 7 réalisées dans la classe) de type développer et réduire une expression (somme d'un produit d'un monôme et polynôme de degré inférieur ou égale à 2 ; supprimer les parenthèses). Dans les deux dernières séances, il y a correction de 7 tâches de type développer et réduire une expression littérale (produit de deux polynômes). Nous soulignons que des tâches de ce type calculer la valeur numérique d'une expression littérale n'ont été ni préparées ni corrigées dans cette classe.

En ce qui concerne les institutionnalisations dans la phase du cours, nous avons constaté que les élèves écrivent le "cours" sur un cahier différent de celui des exercices et nous donnons ci-dessous des extraits des cahiers de cours.

Le professeur institutionnalise, durant la séance 3, la propriété de la distributivité sur l'addition ou la soustraction sur l'ensemble de nombres réels en donnant un exemple numérique, et puis la formule générale de simple distributivité comme nous pouvons le constater dans figure 2 :

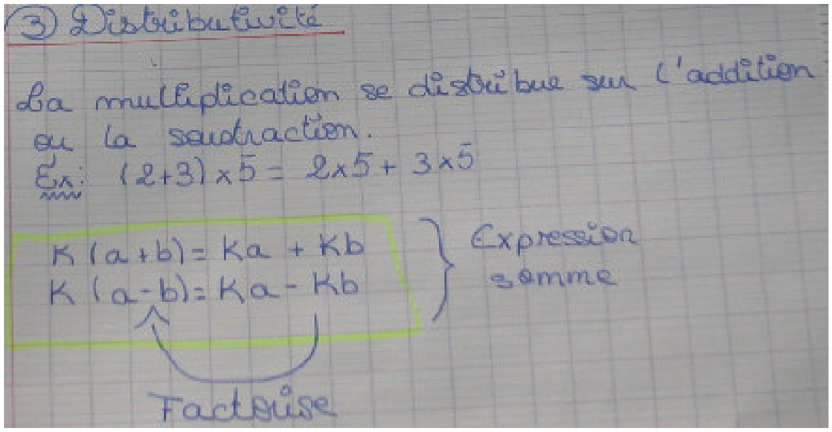


Figure 6 : extrait du cahier de cours de Clémence

Le professeur définit développer en faisant référence à la distributivité, puis il indique explicitement la factorisation. Il souligne que la forme de l'expression développée est une somme. Nous pouvons voir sur le cahier de l'élève que la propriété est entourée par des traits de couleur, ce qui a pour but de souligner son importance. Seul "factorise" est indiqué et pas "développe". Il a également une référence forte à la forme de l'expression ("somme")

Pour institutionnaliser "réduire une somme puis un produit" le professeur donne la définition classique qui relève du sens commun et que nous avons trouvée dans certains manuels :

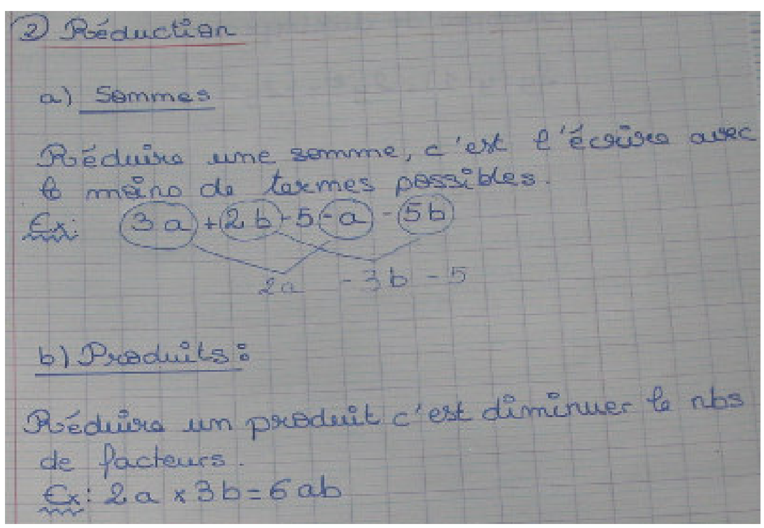


Figure 7 : extrait du cahier de cours de Clémence

On voit là encore l'utilisation des ostensifs (termes entourés, flèches etc.) dans cet exemple pour indiquer aux élèves ce qu'il faut faire.

Il n'y a pas définition ou explications dans le cours de "simplifier une expression littérale".

Par rapport à cette classe, nous pouvons remarquer que la plupart des tâches sont de type "développer puis réduire" et "réduire" une expression littérale. Il n'y a pas de lien avec d'autres thèmes, c'est-à-dire on n'utilise pas ces tâches comme outils pour résoudre par exemple des équations, des exercices en géométrie ou des problèmes en algèbre. Dans toutes les séances, il y a correction et le professeur n'invite qu'un seul élève au tableau. Les exercices effectués en classe sont souvent en classe entière. Il n'y a pas de travail en groupe. Il y a beaucoup d'exercices faits et corrigés (88 tâches). Bien sûr ces exercices sont très courts.

4.2. Classe 2, France

Rappelons que dans la classe 2 en France, nous avons filmé toute la séquence formée de 11 séances. Le tableau 2 montre le découpage de la séquence.

séance	correction (classe entière)	réalisation	Institutionnalisation et rappel
Séance 1	1 tâche de type tester l'égalité de deux expressions littérale <u>exercices faits dans la classe</u>	4 tâches de type tester une égalité <u>classe entière</u> 1 tâche de type tester une égalité <u>individuelle</u> cette tâche est corrigée dans la même séance	*calcul littéral veut dire calcul avec des lettres vous avez rencontré des calculs avec des lettres dans les équations calcul d'aire par exemple A=l×L on avait des nombres inconnue on avait écrit sous forme de lettre donc on écrivait grand A pour l'aire il y a le longueur fois largeur et après on utilisait cette formule pour n'importe quel valeur de la largeur n'importe quel valeur de la longueur et à partir de là on pouvait trouver l'aire*
		5 tâches de type associer diverses expressions dans des registres différentes <u>classe entière</u>	x+6×4 *le premier terme c'est x ici et le deuxième terme c'est un produit de six par quatre je vais effectuer en premier la multiplication en dernier je vais effectuer l'addition donc j'ai à faire à une somme de termes*
			variable est le nombre qu'on peut remplacer par une valeur donnée
			ak+bk =(a+b)k c'était la propriété de la distributivité vous savez qu'une égalité si elle est vraie dans un sens elle est vraie aussi dans l'autre
Séance 2	1 tâche de type tester l'égalité de deux expressions littérale <u>exercices faits à la maison</u>	23 tâches de type tester l'égalité de deux expressions littérale <u>classe entière</u>	*réduire c'est assembler tout ceux qui ont la même partie littérale*
	3 tâches de type développer et réduire une expression littérale (somme d'un produit d'un monôme et polynôme de degré égale à 1) <u>exercices faits à la maison</u>	15 tâches de type réduire une expression littérale (polynôme de degré 1 ou 2) <u>individuelle</u> ces tâches sont corrigées dans la même séance	*la distributivité pour supprimer les parenthèses*
	15 tâches de type réduire une expression littérale (polynôme de degré 1 ou 2) <u>exercices faits à la maison</u>	1 tâche de type réduire une expression littérale (produit de monômes de degré 1) <u>classe entière</u>	
Séance 3	12 tâches de type réduire une expression littérale (polynôme de degré 1 ou 2) <u>exercices faits à la maison</u>	4 tâches de type réduire une expression somme <u>individuelle</u> ces tâches sont corrigées dans la même séance	*dans un produit si l'un des facteurs est nul le produit est nul*

	4 tâches de type réduire une expression littérale (polynôme de degré 1 ou 2) exercices faits dans la classe	4 tâches de type réduire un produit individuelle ces tâches sont corrigés dans la même séance	**pour multiplier des facteurs on peut changer l'ordre des facteurs sans changer le produit a×b=b×a quelque soient les nombres relatifs a et b**
	12 tâches de type réduire une expression littérale (produit de monômes de degré 1 ou 2) exercices faits à la maison		**0×a=0 ; 1×a =a ; -1×a=-a ; 0(a+b)=0 ; -1(a+b)= -(a+b) ; -1(a+b)=-a-b**
	4 tâches de type réduire une expression littérale (produit de monômes de degré 1 ou 2) exercices faits dans la classe		
Séance 4	16 tâches de type réduire une expression littérale (somme ou produit de monômes de degré 1 ou 2 ou somme des produits) exercices faits à la maison	4 tâches de type développe un produit d'un monôme par un polynôme individuelle ces tâches sont corrigées dans la même séance	**k(a+b)= ka+kb ; k(a-b)= ka-kb la multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction**
	4 tâches de type développe un produit d'un monôme par un polynôme exercices faits dans la classe	1 tâche de type développe un produit d'un monôme par un polynôme classe entière	**la distributivité permet de développer un produit de facteurs, c'est-à-dire de transformer un produit de facteurs en une somme de termes**
		6 tâches de type indiquer un ou des éléments caractéristiques classe entière	
Séance 5	11 tâches de type développer et réduire une expression littérale (somme d'un produit d'un monôme et polynôme de degré inférieur ou égale à 2) exercices faits à la maison	5 tâches de type supprimer les parenthèses puis réduire classe entière	*dans un produit de facteurs si l'un de facteurs est nul le produit est nul*
	8 tâches de type développer une expression littérale (produit d'un monôme par un polynôme) exercices faits à la maison		
Séance 6	5 tâches de type supprimer les parenthèses et réduire exercices faits à la maison	1 tâche de type réduire une expression littérale (somme à deux variables) classe entière	*réduire une somme algébrique c'est additionner tout les termes qui ont la même partie littérale*
		5 tâches de type supprimer les parenthèses et réduire	**suppression des parenthèses dans une somme algébrique : le but est de supprimer des parenthèses qui ne sont pas suivi du signe multiplier ou du signe diviser pour supprimer des parenthèses précédées d'un signe moins on supprime les parenthèses et le signe moins et on met l'opposé des nombres pour supprimer des parenthèses précédées d'un signe plus première étape on supprime les parenthèses et le signe plus qui le précède après on laisse les termes quelle contenait B=3x+(-7+2x)=3x-7+2x**

			dans une somme algébrique lorsqu'elle était précédée d'un signe moins ou d'un signe plus et qu'elle n'était pas suivi d'un signe multiplié ou d'un signe divisé donc dans ces cas on supprime les parenthèses et le signe moins et on inverse les termes qui sont à l'intérieure des parenthèses pour les parenthèses précédées d'un signe plus on supprime le signe plus et on enlève les parenthèses et on réécrit les termes qu'elle contenait
			simplifier une expression un je supprime les parenthèses et puis il faut réduire quelque fois
			réduire une somme algébrique c'est additionner tout les termes qui ont la même partie littérale
Séance 7	5 tâches de type supprimer les parenthèses puis réduire exercices faits à la maison	1 tâche développer et réduire une expression (produit de deux polynômes de degré 1) classe entière	
	2 tâches de type développer et réduire somme d'un produit d'un monôme par un polynôme exercices faits à la maison		*développer c'est passer d'un produit de facteur à une somme de termes*
	1 tâches de type prouver que deux expressions littérales sont égales exercices faits à la maison		
séance 8	5 tâches de type développer et réduire un produit de deux polynômes de degré 1 exercices faits à la maison	8 tâches de type développer et réduire une somme d'un polynôme et produit de deux polynômes de degré 1 individuelle 4 tâches sont corrigées dans la même séance et 4 autres dans la séance 9	**Quels que soient les nombres relatifs a b c et d on a (a+b)(c+d)= ac+ad+bc+bd**
	4 tâches de type développer et réduire une somme d'un polynôme et produit de deux polynômes de degré 1 exercice fait dans la classe	3 tâches de type écrire une expression littérale classe entière	
séance 9	correction contrôle		*réduire la somme algébrique additionner ensemble tous les termes qui ont la même partie littérale*
	4 tâches de type développer et réduire une somme d'un polynôme et produit de deux polynômes de degré 1 exercices faits dans la classe durant la séance précédente		*deux nombres opposées lorsque je les additionne leur somme est égale à zéro*
séance 10	3 tâches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale exercices fait à la maison	1 tâche écrire une expression littérale (l'aire d'un rectangle) classe entière	*simplifier l'écriture enlever le signe multiplier quand c'est possible par exemple entre deux lettres entre un nombre et une lettre de supprimer les parenthèses*
		1 tâche calculer la valeur numérique d'une expression littérale classe entière	*réduire c'est regrouper additionner les termes qui ont la même partie littérale*
Séance 11	1 tâche de type écrire une		

	expression littérale à partir d'une situation donnée (volume d'un figure) <u>exercices fait à la maison</u>		

Tableau 2 : la séquence d'enseignement du calcul littéral dans classe 2, en France

Comme dans la classe 1, presque tous les exercices corrigés ou réalisés sont tirés du manuel dont les séances correspondent au même découpage dans le même chapitre. Là aussi, on trouve qu'il y a réalisations et corrections d'exercices comportant des tâches de même type de façon répétitive. Dans les deux premières séances, il y a réalisation et correction de 29 tâches de type "tester l'égalité de deux expressions littérales" et il y a réalisation de 5 tâches de type "associer diverses expressions dans des registres différents". Dans les séances 2, 3 et 4, il y a réalisation et correction de 58 tâches de type "réduire une expression littérale (somme ou produit)". Les séances 4 et 5 contiennent des corrections de 12 tâches de type "développer une expression littérale". A partir de la séance 5 jusqu'à la séance 9, il y a correction de 36 tâches de type "développer et réduire une expression littérale" (somme d'un produit d'un monôme et polynôme de degré inférieur ou égale à 2 ; supprimer les parenthèses et réduire ; somme d'un polynôme et produit de deux polynômes de degré 1). Dans les deux dernières séances, il y a réalisation et correction de 3 tâches de type "calculer la valeur numérique d'une expression littérale" et 1 tâche de type "écrire une expression littérale".

Comme dans la classe précédente, les élèves écrivent le "cours" sur un cahier différent de celui des exercices. Durant la séance 4, le professeur institutionnalise "développer une expression littérale"

> "k(a+b)= ka+kb ;k(a-b)= ka-kb la multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction"

> "la distributivité permet de développer un produit de facteurs, c'est-à-dire de transformer un produit de facteurs en une somme de termes"

Cependant, le professeur explique que l'égalité a deux sens :

> "ak+bk=(a+b)k c'était la propriété de la distributivité vous savez qu'une égalité si elle est vraie dans un sens elle est vraie aussi dans l'autre"

Il introduit réduire et simplifier, en notant dans le "Cours" durant les phases de correction des exercices de la façon suivante :

> "réduire c'est assembler tout ceux qui ont la même partie littérale"

> "simplifier l'écriture enlever le signe multiplier quand c'est possible par exemple entre deux lettres entre un nombre et une lettre de supprimer les parenthèses"

Comme dans la classe 1, la majorité des tâches sont de type "réduire une expression littérale" et "développer et réduire une expression littérale" où le professeur en demande aux élèves d'ajouter les termes semblables pour effectuer la réduction. Dans toutes les séances, il y a correction des exercices qui sont assez nombreux (121 tâches). Il n'y a pas de lien entre ce chapitre et les autres et il n'y pas de liens entre les types de tâches proposées dans la première séance et celles proposées à partir de la séance 2. Le professeur ne donne pas de travail de groupe. Parfois, pour gagner du temps, elle envoie deux ou trois élèves en même temps au tableau pour corriger des tâches de même type.

4.3. Classe 1, Liban

Dans le tableau 3, nous montrons le découpage de la séquence dans collège 1 au Liban.

séance	correction (classe entière)	réalisation	Institutionnalisation et rappel
Séance 1	1 tâche de type calculer la valeur numérique (l'aire d'un rectangle) <u>exercice fait dans la classe</u>	1 tâche de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale <u>individuelle</u> corrigée dans la même séance	**faire l'algèbre il s'agit de lettres avec des nombres**
	1 tâche de type écrire une expression littérale (l'aire d'un rectangle) <u>exercice fait dans la classe</u>	1 tâche de type écrire une expression littérale (l'aire d'un rectangle) <u>individuelle</u> corrigée dans la même séance	**quand je dis grand A égale grand L fois petit l c'est dans le cas générale dans le but de simplifier et de généraliser les questions que l'on peut proposer sur les nombres on représente souvent ceux-ci par des lettres on appelle expression algébrique un ensemble de nombres et des lettres réunis par les signes des opérations + - fois diviser**
		2 tâches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale <u>classe entière</u>	**la valeur numérique d'une expression algébrique est le résultat obtenue en remplaçant la lettre par des nombres donnés et en effectuant les opérations indiquées**
			un seul terme s'appelle un monôme deux monômes on va l'appeler un binôme. Si on a plusieurs monômes on va appeler un polynôme même le monôme c'est le polynôme
			$6x^2$ la variable est x le coefficient est 6 et l'exposant est 2 le coefficient est le nombre qui est multiplier par cette variable avec son exposant
			on appelle termes semblables des termes qui ne diffèrent que par leurs coefficients
Séance 2	30 tâches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale <u>exercice fait dans la classe</u>	36 tâches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale <u>individuelle</u> ces tâches sont corrigées dans la même séance	*trouver la valeur numérique d'un monôme d'une expression algébrique c'est mettre à la place de x sa valeur*
	2 tâches de type réduire une somme (somme à 2 variables) <u>exercice fait dans la classe</u>	6 tâches de type réduire une expression littérale <u>classe entière</u>	**je n'ai pas le droit de faire la somme et la différence de 2 monômes que lorsque les termes sont semblables et la réponse sera un terme qui est semblable à eux**
		2 tâches de type réduire une expression littérale <u>individuelle</u> ces tâches sont corrigées dans la même séance	**réduire des termes semblables revient à les remplacer par un terme unique semblable à chacun d'eux et ayant pour coefficient la somme algébrique de leurs coefficients**

		2 tâches de type développer et réduire une expression littérale (supprimer les parenthèses) classe entière	**pour additionner plusieurs expressions algébriques on les écrit les unes à la suite des autres en conservant les signes de leurs termes et on réduit s'il y a lieu les termes semblables**
			quand on a un plus devant la parenthèse les signes restent des tels qu'ils sont
Séance 3	1 tâche de type développer et réduire une expression littérale (supprimer les parenthèses) exercice fait à la maison	1 tâche de type développer et réduire une expression littérale (supprimer les parenthèses) individuelle cette tâche est corrigée dans la même séance	*plus devant la parenthèse les signes restent des qu'ils sont parce que quand je dis plus donc c'est plus un fois …*
	1 tâche de type développer et réduire une expression littérale (supprimer les parenthèses) exercice fait dans la classe		
	3 tâches de type développer et réduire une expression littérale (produit de 2 polynômes ou produit d'un monôme et un polynôme) exercice fait dans la classe	2 tâches de type réduire un produit (de 2 ou 3 monômes) classe entière	**pour faire la différence de deux expressions algébriques par exemple C moins D je lis moins fois …**
		3 tâches de type développer et réduire une expression littérale (produit de 2 polynômes ou produit d'un monôme et un polynôme) classe entière	**a(b+c)=ab+ac ; a(b-c)=ab-ac c'est la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la différence dans ce sens ça s'appelle le développement dans ce sens si on a ça je donne ceci s'appelle la factorisation**
		3 tâches développer et réduire une expression littérale (produit de 2 sommes ou produit d'un monôme et un polynôme) individuelle	
Séance 4	20 tâches de type indiquer des éléments caractéristiques (indiquer si deux expressions sont égales ; indiquer la variable, exposant, coefficient ; grouper les termes semblables) exercice fait à la maison	1 tâche de type réduire un produit (de 2 monômes) classe entière	*la somme de deux termes semblables est un terme qui est semblable*
	4 tâches de type réduire une somme (polynômes de degré 2 et somme à 2 variables) exercice fait dans la classe	4 tâches de type réduire une somme (polynômes de degré 2 et somme à 2 variables) individuelle Ces tâches sont corrigées dans la même séance	
	3 tâches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale exercice fait dans la classe	3 tâches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale individuelle Ces tâches sont corrigées dans la même séance	

Séance 5	9 tâches de type développer et réduire une expression littérale (produit de deux polynômes de degré 1 ou d'un monôme et un polynôme de degré 1) <u>exercice fait à la maison</u>	1 tâche de type développer et réduire une expression littérale (supprimer les parenthèses) <u>classe entière</u>	*chaque fois vous avez un terme son signe est avant lui il est soit positive soit négative*
	4 tâches de type écrire une expression littérale à partir d'une situation donnée (aire et périmètre d'un figure) <u>exercice fait à la maison</u>	2 tâches de type développer et réduire une expression littérale (somme de deux termes chacun produit d'un nombre par un polynôme) <u>classe entière</u>	*des termes semblables il faut avoir les mêmes exposants*
			a fois cinq c'est cinq fois a par convention quand je dis a cinq c'est a exposant cinq
			chaque fois que vous avez un terme ou bien un nombre le signe est juste avant lui
			un moins devant toute la parenthèse il est multiplier par tout les termes tandis que le plus les signes restent des qu'ils sont
Séance 6	4 tâches de type développer et réduire une expression littérale (supprimer les parenthèses ; somme des produits d'un monôme et un polynôme) <u>exercice fait à la maison</u>		*chaque fois que vous avez des termes semblables il faut les calculer*
	1 tâche de type écrire une expression littérale à partir d'une situation donnée (périmètre d'un figure) <u>exercice fait à la maison</u>		*seulement pour le produit des monômes je fait le produit des coefficients pour les exposants je les ajoute quand c'est la même base*
	1 tâche de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale (périmètre d'un figure) <u>exercice fait à la maison</u>		
Séance 7	4 tâches de type développer et réduire une expression littérale (supprimer les parenthèses) <u>exercice fait à la maison</u>		*le coefficient est le nombre qui est avant par exemple deux x deux le coefficient c'est deux et l'exposant deux*
	4 tâches de type développer et réduire une expression littérale (produits de deux sommes à deux variables) <u>exercice fait à la maison</u>		*la somme est commutative moins cinq plus trois ou plus trois moins cinq c'est exactement pareil*
séance 8	5 tâches de type tester l'égalité de deux expressions littérale <u>exercice fait à la maison</u>		*x+y facteur de x+y c'est-à-dire x+y au carré quand je dis je lève un nombre au carré c'est le produit de ce nombre par lui-même deux fois*
	4 tâches de type développer et réduire le produit de deux sommes à 2 variables ou somme d'un polynôme et d'un produit d'un monôme par un polynôme <u>exercice fait à la maison</u>		*yx c'est-à-dire xy*
	2 tâches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale <u>exercice fait à la maison</u>		*par convention le coefficient se place avant la lettre*
			chaque fois que vous avez un terme ou bien un nombre son signe est avant lui
séance 9	correction contrôle		

séance 10	10 tâches de type vérifier l'égalité de deux expressions littérale exercice fait à la maison	2 tâches de type factoriser une expression littérale classe entière	
	6 tâches de type développer un produit d'un monôme par un polynôme exercice fait à la maison	4 tâches calcul mental (en factorisant ou en développant) classe entière	
	4 tâches de type développer et réduire une expression littérale (somme des polynômes et des produit d'un monôme par un polynôme) exercice fait à la maison		

Tableau 3 : la séquence d'enseignement du calcul littéral dans classe 1, au Liban

Dans cette classe, comme dans les deux classes en France, presque tous les exercices corrigés ou réalisés sont ceux du manuel de même que le découpage dans les deux chapitres correspondant au calcul littéral. Le professeur propose souvent (environ chaque jour) des exercices à faire à la maison et qui sont corrigés le lendemain. Là aussi, on trouve qu'il y a réalisation et correction d'exercices comportant des tâches de même type de façon répétitive. Dans les deux premières séances et à la séance 4, il y a réalisation et correction de 42 tâches de type "calculer la valeur numérique d'une expression littérale". On trouve des tâches de réalisation et/ou de correction parmi lesquelles 36 tâches de type "réduire une expression littérale (somme ou produit)" dans séances 2, 3 et 4. A partir de la séance 5, il y a réalisation et/ou correction des exercices contenant 32 tâches de type "développer et réduire une expression littérale". D'ailleurs, au cours des séances 5 et 6 il y a correction de 5 tâches de type "écrire une expression littérale". La réalisation des exercices dans la classe est toujours individuelle ou alors elle se fait en classe entière. Comme dans les deux classes en France, jamais le professeur n'a organisé de travail en groupe. Pour la correction des exercices, il envoie, parfois, un ou plusieurs élèves au tableau en même temps.

Pour les institutionnalisations dans la phase de cours, le professeur s'appuie sur le manuel en exposant et en lisant ce qui a été écrit (dans cette classe, les élèves n'utilisent qu'un seul cahier qui est celui des exercices). Il définit "réduire" en utilisant la technique "ajouter les monômes semblables" en faisant référence implicitement à la théorie des polynômes. A noter qu'il a définit "monôme" dans la première séance :

"un seul terme s'appelle un monôme"

Après qu'il a identifié la variable, l'exposant et la coefficient, il introduit les monômes semblables ou termes semblables :

"on appelle termes semblables des termes qui ne diffèrent que par leurs coefficients"

Ensuite, pour définir le développement il fait appel à la distributivité et fait un lien avec la factorisation.

Comme dans les deux classes en France, il y a beaucoup d'exercices faits et corrigés. Or, en plus de la majorité des tâches : "développer puis réduire" et "réduire" une expression littérale, il y a aussi "calculer la valeur numérique d'une expression littérale". Il n'y a pas de lien entre ce chapitre et les autres. Il n'y a pas de travail en groupe.

4.4. Classe 2, Liban

Dans le tableau 4 nous montrons le découpage de la séquence dans collège 2 au Liban. Rappelons que le professeur a déjà commencé le chapitre avant qu'on ne le filme. Nous avons donc raté trois séances où il a déjà introduit réduire une expression littérale.

séance	correction (classe entière)	réalisation	Institutionnalisation et rappel
Séance 1	3 tâches de type supprimer les parenthèses et réduire <u>exercices faits à la maison</u>	2 tâches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale <u>classe entière</u>	*$3x^2y$ est un monôme le produit d'un nombre avec une partie littérale le nombre on l'appelle le coefficient du monôme et la partie qui contient des lettres c'est la partie littérale*
		1 tâche de type réduire une expression littérale (somme) <u>classe entière</u>	*$3x^2y+y$ est une somme qui s'appelle expression algébrique*
			deux monômes qui ont la même partie littérale $5x^2y$ et $3x^2y$ on ne peut additionner que de monômes
			la multiplication est prioritaire sur l'addition
			chaque monôme est appelé un terme dans une addition dans une multiplication on dit les facteurs de la multiplication est ce que tu peux enlever les parenthèses
			quand il n'y a pas de signe devant la parenthèse c'est comme si cette parenthèse est précédée de signe plus c'est comme il y a plus un et quand vous multipliez par plus un rien ne change
Séance 2		3 tâches de type réduire un produit <u>classe entière</u>	*la réduire la rendre plus simple*
		4 tâches de type développer (un produit d'un monôme par un polynôme) <u>classe entière</u>	**multiplier deux monômes je multiplie le coefficient avec le coefficient et la variable avec la variable** **pour multiplier les variables on ajoute les exposantes**
		2 tâches de type développer et réduire (produit d'un monôme par un polynôme ou somme à plusieurs variables) <u>classe entière</u>	*la multiplication a priorité sur l'addition*
		2 tâches de type développer et réduire (produit de deux polynômes) <u>classe entière</u>	**$3x(2x^2y+3y)$ le fait d'effectuer la multiplication veut dire on a développé cette expression quand je multiplie trois x par cette somme j'ai une multiplication je l'ai transformée en somme**
Séance 3	1 tâche de type supprimer les parenthèses et réduire <u>exercice fait à la maison</u>	2 tâches de type réduire un produit <u>classe entière</u>	*$x\times x^2=x\times x\times x$ x au carré c'est x multiplier deux fois par lui même*
	6 tâches de type réduire un produit <u>exercice fait à la maison</u>	2 tâches de type développer et réduire une expression littérale (supprimer les parenthèses) <u>classe entière</u>	

	1 tâche de type développer et réduire (produit de deux polynômes de degré inférieur ou égale à 3) exercice fait à la maison		
Séance 4	8 tâches de type développer et réduire (produit de deux polynômes de degré inférieur ou égale à 3 ou de deux sommes à deux variables) exercice fait à la maison		*pour calculer un produit alors multiplier chaque terme de la première parenthèse par tous les termes de la deuxième*
			réduire si tu as une grande expression tu la rends plus petite en groupant les termes semblables et en la remplaçant par leur somme
			réduire cette réponse si je peux la rendre plus petite
Séance 5	4 tâches de type développer et réduire (produit de deux ou trois polynômes de degré inférieur ou égale à 3 ou de deux sommes à deux variables) exercice fait à la maison	4 tâches de type développer et réduire une expression (produit de deux polynômes ou produit de deux sommes à plusieurs variables) classe entière	
Séance 6	3 tâches de type développer et réduire (produit de deux ou trois sommes à deux variables) exercice fait à la maison	1 tâche de type développer une expression (produit d'un monôme par un polynôme) classe entière	*développer le produit de deux facteurs c'est le transformer en une somme c'est effecteur la multiplication*
	10 tâches de type factoriser une expression littérale exercice fait à la maison	1 tâche factoriser une expression (ou met en facteur) classe entière et 11 tâches de même type individuelle ces tâches sont corrigées dans la même séance	*tout nombre multiplié par zéro est zéro ; zéro est appelé un élément absorbant*
	11 tâches de type factoriser une expression littérale exercices faits dans la classe		**j'ai une somme et je vais la transformer en produit c'est l'inverse de développement et qu'on appelle factorisation**
Séance 7	2 tâches de type écrire une expression littérale à partir d'une situation donnée (aire d'un figure)		
	3 tâches de type développer et réduire (produit de deux ou trois sommes à deux variables)		
séance 8	correction d'un contrôle		
séance 9	2 tâches de type écrire une expression littérale (l'aire d'un figure, par exemple carré) exercices faits à la maison		
	2 tâches de type développer et réduire une expression littérale exercice fait à la maison		
séance 10	4 tâches de type vérifier l'égalité de deux expressions littérales exercices faits à la maison		*on multiplie le coefficient avec le coefficient et les variables entre eux en ajoutant les exposants*
	2 tâches de type calculer la valeur numérique d'une expression littérale exercice fait à la maison		*dans une multiplication chaque nombre je l'appelle un facteur de produit, dans une somme je dit les termes de la somme*
	1 tâche réduire une expression littérale (somme) fait à la maison		*deux signes qui se suivent on doit les séparer par une parenthèse*

	3 tâches de type réduire un produit exercice fait à la maison		
	3 tâches de type développer une expression littérale exercice fait à la maison		
	4 tâches de type développer et réduire une expression littérale (produit de deux polynômes, somme des produits et des monômes) exercice fait à la maison		
	5 tâches de type factoriser une expression exercice fait à la maison		

Tableau 4 : la séquence d'enseignement du calcul littéral dans classe 2, au Liban

La réalisation et la correction des tâches de même type d'une façon répétitive apparaît aussi dans cette classe comme dans les autres. En effet, le professeur suit le découpage du manuel en tâches de même type dans le même chapitre. En général dans cette classe, nous n'avons pas observé de phases de préparation des exercices (une seule fois un exercice contenant 11 tâches de type factoriser une expression littérale a été fait individuellement durant la séance 6). En revanche, les corrections se font systématiquement en classe entière. A la différence des autres classes, dans toutes les corrections, on trouve des tâches de type "développer et réduire une expression littérale" dans chaque séance (39 tâches sont réalisées et/ou corrigées durant la séquence). La différence que l'on peut observer par rapport au nombre de tâches de type "réduire une somme" est qu'il semble plus réduit dans cette classe (2 tâches). Cette différence pourrait s'expliquer par le fait que nous avons raté les trois premières séances. Or, comme nous l'avons pu le constater, c'est en début de la séquence que le professeur organise ce type de tâche. Il y a correction des exercices contenant 13 tâches "réduire un produit" durant les séances 1, 2, 3 et 10. Dans séances 6 et 10, il y a réalisation et/ou correction des exercices avec 27 tâches de type "factoriser une expression littérale". Enfin, comme dans les autres classes, nous notons que la tâche de type "écrire une expression littérale" a été rarement travaillé : seulement 2 tâches de ce type ont été faits durant une même séance.

Pour institutionnaliser, nous observons que le professeur fait des rappels concernant la tâche réduire en faisant référence au vocabulaire de l'algèbre des polynômes (coefficients, monômes, variable, etc.) qu'on trouve dans le manuel utilisé. De plus, de temps en temps, il s'appuie sur la forme de l'expression et sur le sens commun du terme :

> "réduire une expression c'est rendre plus petit" ou "réduire une expression c'est simplifier"

Pour définir développer une expression littérale, il donne un exemple $3x(2x^2y+3y)$ en effectuant la multiplication :

> "le fait d'effectuer la multiplication veut dire on a développé cette expression quand je multiplie trois x par cette somme j'ai une multiplication je l'ai transformé en somme"

Comme dans les autres classes, il y a correction des exercices contenant des tâches de même type d'une façon répétitive. Il n'y a pas de travail en groupe.

Conclusion sur l'ensemble des classes

Nous constatons que la séquence se déroule pendant environ 9 à 12 séances selon le professeur. Le nombre de phases de correction, très souvent faites au tableau et en classe entière, est relativement élevé dans chaque séance. En effectuant la moyenne des tâches pour chaque classe, nous obtenons les résultats suivants : 12 tâches dans classe 1, France ; 18 tâches dans classe 2, France ; 14 tâches dans classe 1, Liban ; 9 tâches dans classe 2, Liban. Les tâches, préparées ou corrigées, sont nombreuses et de types différents : réduire une expression littérale (une somme ou un produit), développer une expression littérale, développer puis réduire une expression littérale, factoriser une expression littérale, calculer la valeur numérique d'une expression littérale, vérifier l'égalité de deux expressions littérales, écrire une expression littérale. Cependant, nous nous intéressons aux tâches développer et/ou réduire une expression littérale qui constituent la majorité des exercices corrigés dans les quatre classes. A ce sujet, on observe que ces tâches suivent généralement un ordre bien défini et gradué : d'abord, réduire une expression littérale, ensuite, développer, après développer et réduire. Sur l'ensemble de ces trois types de tâches, nous avons pu constater que les tâches "réduire une expression littérale" et celles "développer et réduire une expression littérale" sont plus fréquentes que les tâches de type "développer une expression littérale".

Notre analyse sur ces séquence d'enseignement, nous permettent de valider notre hypothèse à savoir que la finalité de ce chapitre est de maîtriser la "manipulation des expressions littérales". Il n'y a pas de lien avec les chapitres relatifs à la résolution des équations et des problèmes en algèbre ou en géométrie qui sont traités après. Il semble donc que, pour ces professeurs, la manipulation et le calcul d'expressions littérales soient, d'une part considérées comme une partie importante du programme (puisqu'elle constitue un chapitre à part entière) et d'autre part comme un préalable à d'autres types de tâches comme la mise en équation et la résolution de problèmes.

Par ailleurs, les professeurs n'organisent pas du travail en groupes, ce qui conduit à ne pas avoir des d'échanges entre les élèves autrement que médiatisés par les professeur.

A la fin du chapitre de calcul littéral, les professeurs proposent un devoir surveillé. F1 et F2 en France et L1 au Liban, vérifient souvent les cahiers des élèves, c'est-à-dire ils regardent s'ils ont fait les exercices donnés à faire à la maison, si les élèves corrigent les exercices. Les professeurs F2 et L1 invitent, parfois, 2 ou 3 élèves en même temps au tableau pour corriger des exercices contenant des tâches de même type.

Il n'y a pas beaucoup d'institutionnalisations écrites par les élèves dans leur cahier de cours mais il y a souvent des rappels qui sont faits pendant la correction. Nous pouvons donc mettre évidence que les phases de correction ont une fonction autre que seulement viser à donner les réponses (ou les solutions) des exercices puisqu'elle servent aussi à l'institutionnalisation.

Il me semble qu'on peut classer ces rappels :

- des formulations semblables à celles institutionnalisées dans le cours : par exemple

  « développer veut dire distribuer la multiplication » (classe 1 F, séance 4)

« réduire une somme algébrique c'est additionner tout les termes qui ont la même partie littérale » (classe 2 F, séance 6)

- des formulations qui précisent, complètent celles institutionnalisées dans le cours :

« la distributivité pour supprimer les parenthèses » (classe 2F, séance 2)

- des rappels sur des notions déjà vues dans d'autres chapitres ou d'autres années, par ex sur les nombres :

« si on multiplie deux nombres négatifs le résultat est positif » (classe 1L, séance 4)

« la multiplication elle a priorité sur l'addition » (classe 2 L, séance 2)

- des définitions d'objets ou d'ostensifs ex variable, signe x, etc.

« -1a ou bien -a ; a ou bien 1a c'est la même chose » (classe 1 F, séance 5)

« variable est le nombre qu'on peut remplacer par une valeur donnée » (classe 2 F, séance 1)

- des rappels sur des procédures, par exemple :

« tout nombre multiplié par zéro est zéro » (classe 2L, séance 6)

Du point de vue de l'activité des élèves, ils sont assez peu actifs pendant les phases de correction, notamment durant la production de la solution. La majorité du temps dans ces phases de correction, ils écoutent et regardent l'élève qui donne la réponse soit oralement soit, le plus souvent, par écrit au tableau.

D'une classe à une autre, les moments et types d'échanges entre les élèves de la classe et le professeur diffèrent. En général, les élèves en France posent des questions après la correction. Plus spécifiquement, le professeur F1 fait davantage d'échanges avec les élèves de la classe que F2.

Au Liban la correction d'un exercice prend plus du temps. Ceci est dû au degré de complexité des expressions qui sont, en général, formées de plusieurs variables et dont les polynômes sont de degré plus élevé, contenant des termes plus nombreuses que ceux étudiés en France. Ainsi, les élèves libanais posent des questions pendant la production de la réponse avant et après la validation, d'où les échanges entre les professeurs libanais et ces élèves sont plus denses qu'en France.

A contrario, nous constatons que pour une durée identique, le nombre d'exercices corrigés en France est plus élevé qu'au Liban. Le travail de la technique, pour des tâches de même type, est plus dense en France qu'au Liban. Ces différences dans les formes d'enseignement conduisent probablement à des acquisitions différentes chez les élèves. Comme nous avons déjà indiqué d'après les résultats du questionnaire, les élèves libanais font plus fréquemment l'erreur de concaténation. Pour valider une réponse les élèves libanais font davantage appel à la solution alors que les élèves français font plus de références à des règles générales.

Nous détaillons dans le paragraphe qui suit les interventions de chacun des quatre professeurs pour mieux présenter les interactions dans la classe.

5. Etude générale des phases de correction : Les régularités dans les conduites des professeurs

Transana a été utilisé pour chercher les régularités et invariants en exportant les mots clés attribués aux catégories d'intervention du professeur. Nous allons donc montrer des colonnes d'un tableau Excel pour chaque professeur en sélectionnant un ensemble de rubriques qui nous semble intéressantes pour faire apparaître le profil de l'enseignant. Le choix de chaque rubrique présentée dans les tableaux ci-dessous est relatif aux régularités des moments d'intervention du professeur pour valider la réponse, corriger l'erreur, en distinguant les interactions avec l'élève, qui donne la réponse, et avec les élèves de la classe.

L'intégralité des tableaux se trouve en annexe.

5.1. Classe 1, France

	réponse fausse ou étape de calcul fausse	réponse juste	le prof n'intervient qu'à la fin du calcul	le prof demande aux élèves de valider la réponse	le prof demande (ou accepte) aux élèves de justifier la validation	le prof demande (ou accepte) aux élèves de repérer et corriger l'erreur	le prof demande à l'élève, qui donne la solution, d'expliquer ce qu'il a fait ou ce qu'il voulait faire	le prof guide l'élève ou les élèves
séance 1								
$M=4x-8x+5$	0	1	1	1	0	0	1	0
$N=-3x+7x+10x$	0	1	1	1	0/1	0	0	0
$O=7-2x+4x$ / $7-6x$	1	0	1	1	1	1	0	1
$P=-5x^2-7x^2+3x^2$ / $x^2=2x$	0/1	1	0	1	1	1	0	0
$Q=3x+5+4x^2$ / ajouter termes en x et x^2	1	0	1	1	1	1	0	0
$R=-10x-3x-4x$ /erreur sur l'énoncé $10x$	1	0	1	1	1	0	0	0
$S=5x+3+2x+6$ / impossible	0/1	1	1	1	0	0	1	0
$T=-5x^2+3+8x^2-9$	0	1	1	1	0	0	1	0
$U=-4x-2-8x-3$	1	0	1	0	0	0	0	1
séance 2								
$A=5a+2+9a$	0	1	1	1	0	0	0	0
$D=6a^2+8a^2+3a^2$ / élève dit qu'il n'a pas su faire	0	1	0	1	0	0	0	1
$F=5a+4a^2+5a^2$	0	1	0	1	0	0	0	0
$M=2n^2+5n-4+6n^2+2+7$/ élève dit qu'il n'a pas su faire	1	0	0	1	0	0	0	1
$N=-8n^2+7-3n+4n^2-2n-5$ / $-4n^2+5n+5$	1	0	1	1	0	0	1	0
$R=-9n^2-5+4-7n^2+2n-8n$	0	1	1	1	0	0	1	0
$S=5+3n-4n^2+8n^2+4n-5$	0	1	1	1	0	0	1	0
séance 3								
$A=7+3x$	0	1	1	1	0	0	0	0
$D=7x+3x$ / $11x$	1	0	1	1	0	1	0	0
$F=-6x-2x$ / x^2	0/1	1	1	1	0	0	0	0
$5x+...=9x$	0	1	1	1	0	0	0	0

H=-8+2x / -6x	1	0	1	1	0	1	0	1
...-4x=7x	0	1	1	1	0	0	0	0
-...-8x=-12x / -4-8x=-12x	0/1	1	1	1	0	1	0	0
séance 4								
A=7(a+4)-3a élève dit qu'il n'a pas su faire	1	0	0	1	0	1	0	1
B=-8a+2(3a-5) élève en difficulté	1	0	0	1	1	1	1	0
C=3(4+5a)-2(4+3a)	1	0	1	1	0	0	1	1
D=-6(-2a+4)+3(5a-1)	0	1	1	1	0	0	1	0
E=2b+3b(4+8b) / 3b×8b→24b	0/1	1	1	1	0	0	0	0
séance 5								
F=6b(-2b+4)+2b^2	1	0	0	1	1	1	0	0
séance 8								
D=(-3x+5)(2x+4)	0	1	1	1	0	0	0	0
E=(3x+5)(2x-4)	0	1	1	1	0	0	0	0
(1-2y)^2	0	1	0	1	0	0	1	0

Tableau 5 : les interventions du professeur dans classe 1, en France

Tout d'abord, nous notons que le professeur F1 demande toute la solution et pas seulement la réponse finale. En effet, la correction de la plupart des exercices est faite au tableau par un élève sans l'intervention du professeur jusqu'à la fin du calcul. A ce moment, il demande aux autres élèves de valider la réponse en posant la question à toute la classe : "est-ce que vous êtes d'accord ?". Quand la réponse est juste, il ne demande pas une justification de la classe mais se limite à l'accord des élèves bien qu'il demande parfois à celui qui est au tableau d'expliquer ce qu'il a fait. Par contre, quand la réponse est fausse, il demande souvent aux élèves de justifier leur réponse et ainsi de repérer et de corriger l'erreur.

La correction d'une réponse fausse n'est jamais faite en citant des propriétés mathématiques pour justifier et le professeur demande aux élèves de corriger. La technique "tester par un nombre" pour décider de l'égalité de deux expressions littérales apparaît dans un cas seulement alors que cette technique est explicitement au programme et devrait trouver là une occasion d'emploi. Nous remarquons aussi qu'il guide rarement l'élève ou même les autres élèves pour repérer et corriger l'erreur. Ce guidage apparaît plutôt avec un élève en difficulté.

Une fois la correction est faite, le professeur vérifie le nombre des élèves qui ont la bonne réponse pour avoir un repère de gestion de la classe. Puis il interroge quelques élèves (2 ou 3) qui ont une mauvaise réponse pour faire apparaître les erreurs et les corriger. On peut penser que ce questionnement, qui va au delà de la correction de l'exercice particulier est une façon pour le professeur d'avoir des éléments d'évaluation de la classe et même des chaque élève.

Nous mettons en avant, à travers l'exemple de F1, une autre fonction des phases de correction qui est de participer à l'évaluation en donnant au professeur des éléments qui lui permettent d'avoir une meilleure connaissance des apprentissages des élèves.

Enfin, nous soulignons que dans cette classe, le professeur fait des interactions d'une façon régulière avec les élèves de la classe en leur donnant la responsabilité de valider une réponse et corriger l'erreur.

* La technique régulièrement utilisée pour réduire une expression littérale

Dans le tableau ci-dessous nous montrons la technique du professeur utilisée pour réduire une expression littérale.

	utiliser la factorisation comme technique	Ajouter/grouper les monômes semblables	Donner la réponse sans explication
M=4x-8x+5	1	0	0
N=-3x+7x+10x	1	0	0
O=7-2x+4x	1	0	0
P=$-5x^2-7x^2+3x^2$	1	0	0
Q=$3x+5+4x^2$	1	0	0
R=-10x-3x-4x	0	0	1
S=5x+3+2x+6	0	0	1
T=$-5x^2+3+8x^2-9$	0	0	1
U=-4x-2-8x-3	0	0	1
A=5a+2+9a	0	0	1
D=$6a^2+8a^2+3a^2$	1	0	0
F=-6x-2x	1	0	0
M=$2n^2+5n-4+6n^2+2+7$	1	0	0
N=$-8n^2+7-3n+4n^2-2n-5$	0	0	1
R=$-9n^2-5+4 -7n^2+2n-8n$	0	0	1
S=$5+3n-4n^2+8n^2+4n-5$	0	0	1
A=7+3x	0	0	1
F=$5a+4a^2+5a^2$	1	0	0
D=7x+3x	0	0	1
5x+...=9x	0	0	1
H=-8+2x	1	0	0
...-4x=7x	0	0	1
-...-8x=-12x	0	0	1

Tableau 6 : la technique utilisée pour réduire une expression littérale dans classe 1, France

Nous avons déjà vu que le professeur définit réduire en s'appuyant sur le sens commun "réduire une somme, c'est avoir moins de termes possibles". En revanche, nous remarquons d'après ce tableau, que dans les phases de correction des tâches de ce type, le professeur s'appuie sur la technique de la factorisation surtout quand il y a une erreur (cf. chapitre 8, §1). Alors pour repérer une erreur de concaténation ou une erreur relative à la priorité des opérations, on peut y avoir la justification, de la part du professeur ou des élèves, suivante : "on n'a pas des facteurs en commun".

A noter que dans cette classe, les élèves font rarement des erreurs de concaténation ou relatives à la priorité des opérations. Ne peut-on penser que l'utilisation de la technique de factorisation a permis aux élèves d'éviter ce type d'erreur ? Cela reste une hypothèse à vérifier. Nous allons voir dans les autres classes s'il y a utilisation de la même technique ou non et si la fréquence des erreurs de même type n'est pas élevé.

5.2. Classe 2, France

	réponse fausse	réponse juste	le prof intervient quand il y a une erreur	le prof intervient plusieurs fois après des étapes de	le prof n'intervient qu'à la fin du calcul	le prof demande à l'élève d'expliquer	le prof guide l'élève	Le prof valide la réponse ou l'étape de calcul	Le prof localise l'erreur	le prof demande aux élèves de valider

				calcul						
séance 2										
A=5x+3x	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
B=5+3x	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$C=5x^2+3x^2$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$D=5x+3x^2$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
F=-6x-2x	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
G=5x+x	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$I=-2x^2+6x^2$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$J=5x^2-3x$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$K=-2x^2-5x^2$/ $7x^2$	0/1	1	0	0	1	0/ demande de localiser l'erreur	0	0	0	1
$L=4+6x^2$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
M =4x-8x+5	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
N=-3x+7x+10x	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
O=7-2x+4x/ 7-6x	1	0	0	0	1	0/ demande aux élèves de corriger l'erreur	0	0	0	1
séance 3										
H=7x-x	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$T=-5x^2+3+8x^2-9$	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
$W=-3x^2-7x^2+2x^2$ / $10x^2+2x^2$	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
Y=-5x+3-1x-2 / -6x-1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
$Z=6x^2+2x-x+x^2+0x^2-4x^2$ / il y a $4x^2$	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0
séance 4										
B=5x*2+4*3x / 5x*3x+2*4	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
$N=-3x*2x+4(-2x^2)$ / $x*x\rightarrow 2x$ / $4(-2x^2)\rightarrow 4x^2$ élève en difficulté	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
P=5(-4x)+2(3x)	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
M=2*3x-5*2x	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
D=-4*5x-2*6x /4*5→21 / les x avec les x : 5x*6x	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
F=-8*4x+2*8x-4*2x / -32x+16x →24x-8x	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0
séance 5										
I=3(2x+4)+4x	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
J=4(2x+5)+3(4x+2)	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
K=5x+(3x+5)×2	1	0	0	0	1	0/ demande aux élèves de localier et corriger l'erreur	0	0	0	1
L=2x(3x+4)+4x(2+5x)	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
I=5(x+4)+2(3+x)	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
J=3(x-5)-4(5+x)	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
L=2(5+x)+0(x+3)	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
K=4(x+6)-1(4-x)	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
M=3x(2x+4)+2x(3+4x)	0	1	0	0	0	0	0	1/ intervient après	0	0

								étape de calcul		
N=-x(5+4x)-3(-2x+5)	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
séance 6										
A=(5x+2)-(6x+4)	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
B=(5x+3)+(4x-5)	1	0	0	0	1	0/ demande aux élèves de corriger erreur	0			
C=(-3x-4)-(-8x+3)	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
séance 7										
D=(3x+9)-(2x+3)×4	1	0	1	1	0	0/ demande aux élèves de corriger erreur	1	1	1	1
E=(4x+7)-(3x-2)×5	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
séance 8										
A=(5x+2)(6x+4)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	à la fin du calcul
C= (2x-5)(-5x+3)	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
E=(-5x+2)(5+4x)	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0

Tableau 7 : les interventions du professeur dans classe 2, en France

Nous notons que le professeur F2, comme F1, demande toute la solution et pas seulement la réponse finale. Nous remarquons, en se référant à ce tableau, que F2 intervient souvent à la fin du calcul pour valider lui même le travail de l'élève contrairement au professeur F1. Rarement le professeur demande à l'élève ce qu'il a fait ; il ne prend pas de renseignements sur la façon dont l'élève est arrivé à la réponse. De plus, les élèves ne posent des questions qu'à la fin de la correction.

Quand la réponse est juste la validation est limitée, soit elle lit ou répète la réponse soit elle dit "très bien" à l'élève. Quand la réponse est fausse, F2 guide l'élève au tableau en découpant la tâche en micro tâches et en lui posant des questions fermées pour l'amener à la bonne réponse. On voit donc là un fonctionnement différent de F1 puisque F2 a davantage d'interaction avec l'élève au tableau alors que F1 s'adresse plutôt à la classe.

Contrairement à la classe 1, la correction de l'erreur est faite en la localisant par le professeur et il n'y a pas de mention de propriétés mathématiques. De plus, la technique de vérification "tester par un nombre" n'est pas employée. Ce résultat est à mettre en lien avec celui du professeur de la classe 1 en France et celui du questionnaire (aucun élève n'a pas utilisé cette technique).

* La technique régulièrement utilisée pour réduire une expression littérale

	utiliser la factorisation comme technique	Ajouter/grouper les monômes semblables	sans explication
A=5x+3x	0	0	1
B=5+3x	0	0	1
$C=5x^2+3x^2$	0	0	1
$D=5x+3x^2$	0	0	1
F = -6x-2x	0	0	1
G=5x+x	0	0	1
$I=-2x^2+6x^2$	0	0	1
$J=5x^2-3x$	0	0	1
$K=-2x^2-5x^2$	0	0	1

$L=4+6x^2$	0	0	1
M =4x-8x+5	0	0	1
N =-3x+7x+10x	0	0	1
O=7-2x+4x	0	0	1
H=7x-x	0	0	1
T = -5x^2+3+8x^2-9	0	1	0
$W=-3x^2-7x^2+2x^2$	0	0	1
Y=-5x+3-1x-2	0	0	1
$Z=6x^2+2x-x+x^2+0x^2-4x^2$	0	0	1
B=5x*2+4*3x	0	0	1
N=-3x*2x+4(-2x^2)	0	0	1
P=5(-4x)+2(3x)	0	0	1
M=2*3x-5*2x	0	0	1
D=-4*5x-2*6x	0	0	1
F=-8*4x+2*8x-4*2x	0	0	1

Tableau 8 : la technique utilisée pour réduire une expression littérale dans classe 2, France

Dans cette classe le professeur ou les élèves réduisent une expression littérale en donnant immédiatement la réponse sans montrer s'il s'agit de factoriser ou de grouper les monômes semblables. Parmi les vingt quatre tâches on trouve qu'un tiers des réponses sont fausses. Ce qui montre la difficulté des élèves qui semblent pouvoir être mise en lien avec cette absence d'éléments techniques et technologiques.

La majorité des exercices de réduction sont cités oralement par les élèves. Dans le cas où il y a une erreur, le professeur écrit au tableau la réponse pour ensuite la corriger. Dans ce cas, il utilise "ajouter les termes ayant la même partie littérale" comme technique mathématique. Voici, dans la troisième séance, une correction d'un exercice fait à la maison, contenant des tâches de type réduire un polynôme de degré inférieur ou égale à 2.

Le professeur écrit au tableau l'expression $T=-5x^2+3+8x^2-9$ et demande à Adrien, un élève qui explicite sa difficulté à résoudre l'exercice, de donner oralement la réponse en lui posant des questions sur ce que signifie "les termes ayant la même partie littérale"[30] :

32. Pr : alors est-ce que tu vois dans cette expression des termes qui ont la même partie littérale (?)
33. Adr : moins neuf et moins cinq x au carré
34. Pr : alors attend l'expression c'est ça d'accord (?) même partie littérale ça veut dire quoi (?)
35. Adr : x au carré
36. Pr : oui c'est x au carré même partie littérale donc
37. Adr : cinq x au carré plus huit x au carré
38. Pr : d'accord (?) donc ceci c'est combien au total (?)
39. Adr : trois x euh trois x au carré

Le professeur donc écrit au tableau $3x^2$ et puis il lui demande de continuer à calculer la suite de l'expression.

40. Pr : trois x au carré et puis
41. Adr : euh ben moins six

[30] Tour de parole 32 jusqu'à 43 dans la transcription de la séance 3, dans l'annexe du classe 2 en France.

42. Pr : moins six d'accord (?) donc tout simplement on te demande de réduire les expressions donc tu rassembles tous les termes de la même partie littérale et puis cela tu sais le calcul hein (?) d'accord (?) tu termines comme ça par une expression réduite au maximum là maintenant tu ne peux plus rien faire d'accord (?) celui ci il est en x au carré celui-ci il n'a pas une partie littérale on a terminé ça va Adrien (?)
43. Adr : oui

Ce discours nous a permis de voir la technique mathématique utilisée par ce professeur pour réduire une expression littérale. En effet, la synthèse et les questions posées sont autour "des termes ayant la même partie littérale". L'élève, en difficulté, répond bien aux questions ce qui montre que cette technique est reconnue par les élèves de cette classe. Cependant on peut penser, à propos de l'intervention 2 que pour Adrien même partie littérale signifiait "même signe devant l'expression" puisqu'il associait "moins neuf et moins cinq x au carré". Enfin on voit ici que le professeur ne prend pas la peine de définir ce qu'il entend par "partie littérale" elle se contente de mettre en avant la réponse de l'élève qui dit " x au carré" sans aller plus loin sur l'explicitation des critères de reconnaissance

5.3. Classe 1, Liban

	le prof intervient qu'à la fin du calcul	le prof demande à l'élève d'expliquer	le prof guide l'élève ou les élèves	le prof demande à l'élève de repérer l'erreur et de la corriger	le prof demande à l'élève de refaire l'exercice	le prof demande (ou accepte) aux élèves de valider	le prof valide la réponse ou l'étape de calcul	le prof repère l'erreur / localise l'erreur	le prof corrige l'erreur / il donne la bonne réponse	Le prof explique ce que l'élève a fait
séance 2										
$-4a^2b+3xy^2+8+2a^2b-xy^2-4$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$3x^2+4y^2-5x^2+y^2+x^2-5-2y^2$/$3-5=2$	0/1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
séance 3										
C+D= $(2x^2y-5y^2-3x^2+2)+(4y^2+3x^2-x^2y+4)$ (première correction)	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
C+D= $(2x^2y-5y^2-3x^2+2)+(4y^2+3x^2-x^2y+4)$ (deuxième correction) / $(-3+3)x^2$ $(-5+4)y^2$ …	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
C-D= $(2x^2y-5y^2-3x^2+2)-(4y^2+3x^2-x^2y+4)$ / $2x^2y-5y^2$ $-3x^2+2-(4y^2-3x^2+x^2y-4)$ $3xy^3-xy^3=2xy^3$; $5x^2-2x^2=3x^2$; $8y$ $-2y=6y$; $7-8=-1$	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
séance 4										
$3x^5-8y^4+6a^2b-7+2x^5+3y^4-2a^2b+6$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$x^2y-3y^2+5y^3x^2-3x^2y$ + 1,5y2-$0{,}2y^3x^2-4$ (première correction) / manque $-3x^2y$	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
$x^2y-3y^2+5y^3x^2-3x^2y+1{,}5y^2-0{,}2y^3x^2-4$ (deuxième correction)	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$4a^2bc^3-8t+5a^2bc^3-4at$ $+10t-5y$ $+2at$ /$4a^2bc^3+5a^2bc^3-8t+10t$ $-4at+2at5y$/ $-8t+10t\rightarrow-2t$	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$1/3x^2y^3+3/5xy^2-1/3xy-2/3x^2y^3-1/15x^2y+4/3xy+7/29$ / $+1/3xy+4/3xy$	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
séance 6										
P+Q= $(3x^2y-2xy^2+7xy-3)+(-2x^2y-6xy+5+4xy^2)$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
séance 7										

$A+B-C=(x^4+2x^3-5x^2+2x-5)$ $+(2x^4-3x^2+x+3)-(3x^4+2x^3-x+5)$ / $-5-5+3 \rightarrow +3$ / $4x^3-4x^3 \rightarrow x^3$	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$A-B+C=(x^4+2x^3-5x^2+2x-5)$ $-(2x^4-3x^2+x+3)+(3x^4+2x^3-x+5)$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$A+B+C=x^4+2x^3-5x^2+2x-5+2x^4$ $-3x^2+ x+3+3x^4+2x^3-x+5$ / manque le +2x	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Tableau 9 : les interventions du professeur dans classe 1, au Liban

De même que les autres professeurs, L1 demande toute la solution et pas seulement la réponse. Nous constatons de ce tableau que L1 n'intervient qu'à la fin du calcul pour lire l'énoncé et toute la procédure de l'élève en l'expliquant à la classe et en validant. Ainsi, quand il y a une erreur, il la corrige en donnant la bonne réponse. Il n'interroge pas les élèves, c'est lui qui corrige et valide. Il ne demande pas de renseignements à l'élève pour savoir comment il a fait pour avoir la réponse et l'erreur. Donc il interprète la procédure et les erreurs éventuelles de l'élève. Parfois il arrête la validation et l'explication pour répondre aux questions des élèves. Les interactions du professeur avec les élèves de la classe se limite à répondre à leurs questions.

Comme dans les deux classes en France, la correction de l'erreur est faite par le professeur qui la localise, il n'y a pas de mention des propriétés mathématiques et la technique "tester par un nombre" n'est pas employée.

On peut donc dire que le professeur L1 prend la responsabilité de validation et de l'explication de la réponse de l'élève. Nous voyons là que L1 se distingue assez nettement des deux autres professeurs sur la question des interactions. Cependant on ne peut pas dire qu'il n'y a pas d'interactions mais celles-ci sont initiées par les élèves qui posent volontiers des questions.

* La technique régulièrement utilisée pour réduire une expression littérale

	utiliser la factorisation comme technique	Ajouter/grouper les monômes semblables	sans explication
$-4a^2b+3xy^2+8+2a^2b-xy^2-4$	0	1	0
$3x^2+4y2-5x^2+y^2+x^2-5-2y^2$	0	0	1
$3x^5-8y^4+6a^2b-7+2x^5+3y^4-2a^2b+6$	0	1	0
$x^2y-3y^2+5y^3x^2-3x^2y+1,5y^2-0,2y3x^2-4$	0	1	0
$4a^2bc^3-8t+5a2bc^3-4at+10t-5y+2at$	0	1	0
$1/3x^2y^3+3/5xy^2-1/3xy-2/3x^2y^3-1/15x^2y+4/3xy+7/29$	0	1	0
$C+D=(2x^2y-5y^2-3x^2+2)+(4y^2+3x^2-x^2y+4)$	1	0	0
$C-D=(2x^2y-5y^2-3x^2+2)-(4y^2+3x^2-x^2y+4)$	0	0	0
$P+Q=(3x^2y-2xy^2+7xy-3)+(-2x^2y-6xy+5+4xy^2)$	0	1	0
$P=(x^4+2x^3-5x^2+2x-5)+(2x^4-3x^2+x+3)-(3x^4+2x^3-x+5)$	0	0	1
$Q=(x^4+2x^3-5x^2+2x-5)-(2x^4-3x^2+x+3)+(3x^4+2x^3-x+5)$	0	0	0

Tableau 10 : la technique utilisée pour réduire une expression littérale dans classe 1, Liban

Nous soulignons que dans cette classe et conformément aux manuels libanais et à la définition de réduire, la technique mathématique utilisée pour réduire est "d'ajouter les monômes semblables". La technique de factorisation n'est pas utilisée.

Nous montrons quelques extraits dans la phase de correction l'exercice "réduire $-4a^2b+3xy^2+8+2a^2b-xy^2-4$" durant la deuxième séance. Oula écrit : "$=-4a^2b+2x^2b+3xy^2-xy^2+8-4=-2x^2b+2xy^2+4$". Le professeur s'approche d'elle pour lire la réponse puis la valider et la corriger [31] :

> "bon donc première étape faites attention donc on a toute cette expression algébrique regardez ici première étape je vais grouper les termes semblables ensemble"
>
> "d'accord (?) donc je regarde on a a deux b x y deux on a un terme constant a deux b x y deux et des termes constants donc tous ce qui est a deux b voilà on les a groupé ensemble donc moins quatre a deux b plus deux a deux b voilà moins quatre a deux b et ça c'est plus a deux b c'est à dire jusqu'à maintenant il rien fait comme calcul"
>
> "donc également elle a groupé ces deux termes en xy deux ensemble parce que ces sont des termes semblables pour les termes constants les voilà plus huit et [moins quatre d'accord (?)"
>
> "c'est plus quatre et j'arrête c'est fini parce que il n'y a plus des termes semblables je n'ai plus le droit de faire quoi ce soit c'est clair (?)"
>
> " [d'accord (?) donc je reprend toujours il faut faire attention je n'ai le droit de réduire que les termes semblables c'est à dire première chose devait repérer les termes semblables et travailler les termes semblables ensemble [d'accord (?)"

Finalement nous distinguons une différence entre cette classe et les deux autres en France : elle se manifeste au niveau de l'expression littérale qui est plus compliquée au Liban (plusieurs variables) qu'en France, comme nous avons déjà indiqué d'après l'étude des manuels.

5.4. Classe 2, Liban

	réponse fausse	réponse juste	le prof intervient quand il y a une erreur	le prof intervient plusieurs fois après des étapes de calcul	le prof intervient plusieurs fois avant des étapes de calcul	le prof demande à l'élève d'expliquer	le prof guide l'élève ou les élèves	Le prof valide la réponse ou l'étape de calcul	Le prof localise et/ou corrige l'erreur	demande aux élèves de valider
séance 1										
$(6z+2xz+1-3z^2)+(2z^2+3xz+z+5)$ / additionner 6 et Z^2	0/1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
$(-2x^2+3x^4-2x^3)-(-5x^4+9-5x+13x^2)$ / la première parenthèse précédée d'un - / $-2-13\rightarrow-11$	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
$(2x-y^2-2xy)-(xy-x-3y^2-3x-8y^2)$ / devant le xy il y a signe – donc elle sera + quand enlever parenthèse/ soustraire 2x-2xy	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
séance 3										
$(2x-y^2-2xy)-(xy-x-3y^2-3x-8y^2)$ (Bis) / +xy	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
$2x^2 \times x^3$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$(-2y)^2$	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0

[31] Les paragraphes correspondent aux tours de parole entre 547 et 577 dans la transcription de la deuxième séance, dans l'annexe du classe 1 au Liban.

$3x^6 \times 5xy$	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
$C=(-2ax)(-3abx^2y)$	1		1	1	1	0	1	1	1	0
$(2x-7x^2)(3x-9x^3)$	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
séance 4										
$(3x-6)(9x^2-10)$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
$(3x-6)(9x^2-10)$ (bis)	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
$(2x^3-7)(6+5x)$	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0

Tableau 11 : les interventions du professeur dans classe 2, au Liban

Nous remarquons encore une fois que ce professeur demande toute la solution et pas la réponse finale. Il intervient plusieurs fois pendant le calcul, soit avant que l'élève donne la réponse soit à la fin. C'est lui qui valide souvent l'étape de calcul, qu'elle soit juste ou fausse. Elle localise l'erreur. Nous constatons aussi qu'il guide l'élève en posant des questions simples et courtes pour que l'élève ou les élèves puissent répondre.

De même nous remarquons qu'il n'y a pas de mention des propriétés mathématiques. La technique "tester par un nombre" n'apparaît pas.

* La technique régulièrement utilisée pour réduire une expression littérale

Nous soulignons que la technique de réduction d'une expression littérale est la même utilisée par professeur L1 : "réduire les termes semblables".

6. Conclusion

Nous concluons que le choix, tout d'abord, de filmer toute la séquence sur le calcul littéral, puis d'utiliser le synopsis comme tableau d'analyse, avec le logiciel Transana nous a permis de déterminer un profil pour chacun des quatre professeurs filmés et d'avoir ainsi des résultats sur toute la séquence d'enseignement. Nous voulons souligner ici le problème méthodologique du traitement d'un grand nombre de données comme nous en avions.

Le résultat important de cette analyse est que nous avons pu montrer des régularités fortes chez chaque professeur tant sur le plan du savoir que sur le plan des interactions. Cette question des régularités est à rapprocher du travail de Roditi, 2001. En effet celui-ci a conduit une étude chez 4 professeurs pour le thème mathématique de la multiplication des décimaux en classe en classe de 6$^{\text{ème}}$. Il a enregistré toutes les séances relatives à cet enseignement. Il a ainsi obtenu des régularités indépendantes des professeurs observés fortement lien avec l'institution dans laquelle ces professeurs travaillent. "Les régularités constatées, constantes indépendantes des professeurs observés, montrent que l'institution scolaire, en fixant le contenu à enseigner et la durée de l'enseignement contraint les pratiques enseignantes, depuis la préparation du cours jusqu'à leur déroulement en classe avec les élèves." Roditi, 2003.

C'est ce que nous avons trouvé aussi par exemple sur l'utilisation du cahier de cours en France et du manuel au Liban, sur la place isolée, sans lien avec les autres, du chapitre dans les deux pays, sur les types de tâches proposées et sur la place des institutionnalisations partielles dans les phases de correction.

En revanche il a aussi défini des variabilité d'un professeur à l'autre "les professeurs investissent des marges de manœuvre qui existent par delà les contraintes" Roditi, 2003. Les profils obtenus pour ces quatre professeurs nous permettent de déduire ces distinctions dans leur conduite. Nous avons vu qu'il y a une différence importante entre F1 et les autres professeurs dans la prise en compte de la factorisation. Au niveau des interactions dans la classe, il y a également une variabilité qui porte sur la place et la responsabilité donnée aux élèves dans la production, la validation et la correction des exercices. Nous avons également montré que F1 profitait des phases de correction pour prendre de l'information sur les élèves de la classe.

Enfin, les quatres professeurs n'utilisent pas la technique "tester par un nombre". Ce résultat correspond à celui du questionnaire "élèves". Nous constatons alors notre hypothèse, qu'on a élaboré en se basant sur les analyses du questionnaire "élèves", et qui est : bien que ce type de tâche apparaisse explicitement dans les programmes en France et cette technique soit utilisée par les professeurs, nous pensons que ce type de tâche est souvent réalisé avec une finalité de maîtrise de la technique de résolution. Mais, il n'y a pas une finalité de compréhension de la technique d'utilisation. Pour cela les élèves ne reconnaissent pas "tester par un nombre" comme un outil de validation.

Chapitre 7
Analyse de cas durant les phases de corrections

Dans le chapitre précédent, nous avons montré, d'une manière assez générale, les profils des professeurs filmés, notamment leur interventions pour valider une réponse et corriger une erreur. Nous avons également montré les types de tâches corrigés dans la classe durant la séquence portant sur le calcul littéral.

Dans ce chapitre, nous allons approfondir cette étude pour mettre en relief des techniques didactiques pour chaque enseignant filmé durant les phases de corrections collectives. Nous avons choisi, 'une part, des situations prototypes correspondant aux conduites régulières de chacun et, d'autre part, des moments de correction des erreurs classiques.

Dans le premier paragraphe nous décrivons des épisodes modèles, dans le deuxième nous analysons les phases de corrections relatives aux erreurs qui sont apparues massivement semblables dans le questionnaire élève.

1. Etude de cas prototypiques d'intervention de chaque professeur

Dans le chapitre 7, nous avons montré des régularités lors des interventions de chacun des quatre professeurs, qu'elles soient destinées à rectifier des erreurs ou à créer des interactions avec les élèves notamment pour valider la réponse et/ou corriger une erreur.

Dans le présent paragraphe, nous introduisons des cas qui montrent la ou les techniques de correction de l'enseignant.

1.1. Classe 1, France

Comme nous l'avons déjà indiqué, le professeur F1 intervient souvent quand l'élève donne la réponse (ou après l'étape de calcul concernant le développement), en demandant aux autres élèves de la classe s'ils sont d'accord ou non. Nous avons également montré qu'il n'agit pas de la même façon dans le cas d'une réponse erronée (dans ce cas, il demande aux élèves de la classe de justifier et/ou repérer l'erreur et la corriger), et dans le cas d'une réponse juste il demande parfois à l'élève, qui est au tableau, d'expliquer comment il a fait ou pensé.

Nous avons montré qu'il utilise la technique de factorisation pour corriger une erreur relative à la tâche "réduire une expression littérale", pour cela nous allons présenter une phase de correction qui correspond à sa méthode de correction.

Dans ce paragraphe, nous présentons deux cas : le premier consiste à montrer les interactions du professeur avec l'élève au tableau et avec les élèves de la classe, le deuxième illustre la technique mathématique (factoriser une expression littérale) utilisée par l'enseignant pour réduire une expression littérale et les interactions avec les élèves de la classe.

1.1.1. Interactions du professeur avec l'élève au tableau et la classe : cas d'un réponse juste

Pour montrer ces interactions nous avons choisi une phase de correction dans laquelle le professeur F1 demande d'abord à l'élève au tableau d'expliquer son raisonnement puis à la classe, de valider sa technique et sa réponse.

Dans la séance 4, le professeur invite Alice au tableau pour faire la correction de l'exercice "développer et réduire : D=-6(-2a+4)+3(5a-1)" préparé à la maison.

Pendant qu'Alice écrit au tableau, le professeur vérifie les cahiers des élèves et donne des consignes. Une fois qu'elle a fini d'écrire sa solution : "D=12a-24+15a-3=27a-27", il vient lui demander d'expliquer[32]:

870. Pr : est-ce que tu peux expliquer Alice ce que tu as fais (?)
871. Ali : ben j'ai fait euh moins six fois moins deux a ça donne douze a j'ai fait moins six fois plus quatre ça donne moins vingt quatre
872. Pr : oui
873. Ali : j'ai fait plus trois fois cinq a ça donne plus quinze a et j'ai fait plus trois fois moins un c'est moins trois
874. Pr : et ensuite (?)
875. Ali : j'ai fait douze a plus quinze a ça donne vingt cinq a et moins vingt quatre moins trois ça donne moins vingt sept

Il demande alors aux élèves de la classe de valider :

876. Pr : est-ce que vous êtes d'accord avec le résultat [[33] d'Alice (?)
877. Es : [oui

Après, il repère le nombre des élèves qui ont donné la bonne réponse :

878. Pr : qu'est-ce qui avait trouvé la même chose (?)
879. Pr : Clémence c'était juste ou pas ton calcul (?)
880. Clé : non

Cet exemple nous permet d'illustrer l'une des techniques de correction relative à ce professeur. Ainsi, dans le cas d'une réponse correcte on peut constater que le professeur demande une explication à l'élève qui est au tableau et qui a produit la réponse publiquement, puis qu'il demande une validation aux autres élèves et enfin qu'il prend de l'information sur la classe.

[32] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole 870 jusqu'à 880 dans la transcription de la séance 4, dans l'annexe du classe 1 en France.

[33] Ces crochets superposés dans deux tours de parole successifs veulent dire que la deuxième intervention a coupé la première au crochet.

1.1.2. Interactions avec la classe : cas d'une réponse fausse

Nous avons choisi la tâche "réduire $Q=3x+5+4x^2$" qui nous semble intéressante à étudier parce qu'il peut y avoir un effet de contrat qui amène les élèves à donner une réponse fausse.

Nous avons proposé dans le questionnaire élève une tâche semblable : "Indiquez la forme réduite de 3x+5" où moins de la moitié des élèves français et libanais ont donné la bonne réponse avec un écart de 16% entre eux (le pourcentage des élèves français est plus élevé). Parmi les réponses fausses, celle qui apparaît le plus souvent correspond à l'erreur de concaténation et elle est très fréquente pour les élèves libanais (près de la moitié des réponses).

Durant la première séance, il y a une correction d'un exercice, fait à la maison, contenant des tâches de type réduire un polynôme de degré inférieur ou égale à 2. Le professeur écrit au tableau l'expression $Q=3x+5+4x^2$ et demande à Najeh de la réduire.

Cet élève cite qu'il voulait regrouper trois x et quatre x au carré pour avoir un seul terme. Donc, le professeur demande aux élèves de la classe de donner leur réponse et ils répondent [34] :

445. Es : pareil
446. Pr : pareil vous avez fait la même chose vous avez regroupé (?)
447. Es : oui
448. Pr : donc vous avez écrit cinq plus trois x
449. Es : plus quatre x [au carré
450. Pr : [plus quatre x au carré et de là vous vouliez faire un seul terme
451. Es : on ne peut pas
452. Pr : alors est-ce qu'on peut (?)
453. Es : non
454. Pr : ben non

Parmi les élèves qui n'acceptent pas d'ajouter trois x et quatre x au carré, il y a un qui valide en justifiant qu'il n'y a pas des facteurs en commun.

455. E : on ne peut pas mettre en facteur parce qu'il y a un carré et un où il y a un
456. Pr : voilà qu'est-ce qu'y se passe cette fois ci (?) c'est qu'un autre facteur ici c'est x et ici c'est (?)
457. E : x au carré
458. Pr : x au carré est-ce que je peux mettre en facteur deux choses différents comme ça (?)
459. Es : non
460. Pr : ben non donc est-ce qu'on peut simplifier l'écriture (?)
461. Es : ben non
462. Pr : ben non donc quelle est la réponse (?)
463. Es : pareil
464. Pr : ben ça reste (?)
465. E : pareil
465. Pr : voilà pareil c'est déjà réduit on ne peut pas réduire plus donc Q ne se réduit pas

[34] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tour de parole 445 jusqu'à 465 dans la transcription de la séance 1, dans l'annexe du classe 1 en France.

Ainsi, le professeur s'appuie sur la technique de factorisation pour montrer aux élèves qu'ils ne peuvent pas ajouter des termes en x avec des termes en x au carré :

Ce discours nous a permis de voir une intervention d'un élève pour corriger une erreur classique, relative à réduire une expression littérale, en utilisant la factorisation ce qui montre que cette technique est reconnue auprès des élèves de cette classe.

Enfin, on constate que souvent quand la réponse est juste, le professeur se limite à l'accord des élèves tandis que quand il y a une erreur il les sollicite pour la repérer l'erreur. Mais dans les deux cas il donne la responsabilité à la classe de valider.

1.2. Classe 2, France

Rappelons le profil du professeur F2 : elle intervient une ou plusieurs fois pendant le calcul, elle pose essentiellement des questions fermées à l'élève au tableau dans le cas où celui-ci a fait une erreur.

Dans ce paragraphe nous allons décrire deux cas concernant les interactions entre les élèves et le professeur en montrant la technique de validation et de correction de ce dernier.

1.2.1. Interactions avec un élève qui a commis une erreur

Nous avons choisi une phase de correction de la cinquième séance dans laquelle le professeur F2 intervient, lorsqu'un élève a commis une erreur, et lui pose des questions fermées pour l'aider à trouver la bonne réponse.

Le professeur invite Anaïs au tableau et lui demande de corriger l'exercice "développer et réduire N=-x(5+4x)-3(-2x+5)".

Quand Anaïs développe en écrivant : "= -5x+-5x+6x-15", le professeur intervient[35] :

> 401. Pr : alors moins cinq x alors euh moins cinq x je suis d'accord et le deuxième moins cinq x tu le sors d'où (?)

Ici le professeur ne demande pas l'avis de la classe, il indique à l'élève qui est au tableau et à lui seul tout de suite ce qui est juste ("je suis d'accord") et ce qui ne semble pas correct en émettant un doute marqué par la question "tu le sors d'où ?".

L'élève explique ce qu'elle a fait et le professeur réagit à la réponse de l'élève:

> 402. Ana : ben quatre moins x [ça fait moins cinq x
> 403. Pr : [moins x pense à la question de Kenza tout à l'heure on dit comment (?) moins x(?)
> 404. E : fois
> 405. Ana : fois quatre x
> 406. Pr : alors moins x fois quatre x ça fait quoi ça Anaïs

[35] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole 401 jusqu'à 445 dans la transcription de la séance 5, dans l'annexe du classe 2 en France.

Un autre élève, intervient en donnant une autre réponse (moins quatre x) mais le professeur l'empêche de prendre la parole en s'adressant toujours à Anaïs :

411. Pr : alors (?)
412. Ana : ça fait moins quatre x
413. Pr : ça fait moins quatre x tu es sûre(?) écris moi en dessous moins x fois quatre x en dessous au milieu de tableau là moins x fois quatre x Anaïs
414. E : ça fait moins quatre x au carré
415. Ana : ça fait moins quatre x
416. E : au carré (chuchoté)
417. Ana : au carré
418. Pr : moins quatre x au carré très bien

On voit ici que ce professeur instaure un dialogue avec l'élève qui est au tableau et qui a fait l'erreur et n'accepte pas les réponses d'autres élèves. En fait elle veut qu'Anaïs arrive à donner la bonne réponse. Pour cela, il fait travailler Anaïs sur une partie du calcul qui est isolée sur le tableau et elle l'amène à la bonne réponse par des interventions qui donnent des indications sur la validité de la réponse "alors ?" ou "tu es sûre ?". Cette technique de correction est différente de celle du professeur F1 qui se concentre plutôt sur l'ensemble de la classe. A noter aussi une autre différence : le travail sur une partie de l'expression qui aboutit à une décomposition de la tâche en une tâche plus partielle : que vaut "$-x\times4x$" détachée de toute l'expression : "$-x(5+4x)-3(-2x+5)$". Cependant, il n'est pas sûr que pour l'élève ceci soit signifiant : en fait il se peut que cette élève soit capable de multiplier $-x$ par $4x$ mais qu'elle ne reconnaisse plus cette opération dans un calcul plus complexe. Ici le professeur fait a priori des hypothèses fortes sur la nature et l'origine de l'erreur. Il se peut que ce soit la complexité de la tâche qui soit en jeu plutôt que seule la multiplication.

Après, le professeur lit le reste de l'expression et valide :

418. Pr : alors ensuite plus six x plus six et après ton signe il est hésitant je ne vois pas ce qu'il c'est (?)
419. Ana : c'est un moins
420. Pr : c'est un moins alors je suis d'accord

Une fois le développement validé, le professeur s'adresse à toute la classe pour amorcer l'étape de réduction (nous rappelons que la technique utilisée dans cette classe pour réduire une expression littérale est de compter les termes qui ont la même partie littérale) :

423. Pr : donc là on a combien des parties littérales différentes (?)
424. Es : trois
425. Pr : alors oui
426. Es : deux
427. Pr : véritablement deux on a les x on a les x au carré puis ceux qui n'ont pas une partie littérale

Dans cette intervention 26 nous notons la remarque du professeur sur les parties littérales qu'il semble avoir définies suivant le sens commun comme des monômes de degré au moins égal à 1, c'est-à-dire des expressions où figurent vraiment une lettre. Anaïs écrit encore une réponse fausse : "$=-15-1x-4x^2$" et à ce moment, le professeur, encore une fois, valide la bonne étape et ensuite elle pose des questions fermées (tour de parole 27, 29, 32) autour l'erreur : -1x.

> 428. Pr : donc moins quinze okay alors ensuite pour le trouver moins un x comment tu as fait (?) qu'est ce que tu as rassemblé
> 429. Ana : euh ben moins cinq x / plus six x
> 430. Pr : moins cinq x plus six x
> 431. E : ça fait un
> 432. Ana : ça fait moins x
> 433. Pr : moins cinq plus six (?)
> 434. E : un / plus un
> 435. Ana : ça fait un plus
> 436. E : un plus
> 437. Pr : sh
> 438. Pr : oui et alors un x comment tu vas l'écrire Anaïs (?)
> 439. Ana : x

On retrouve le professeur isole successivement des parties de l'expression où il y a une erreur et finalement fait calculer -5x +6x, puis –5+6. Dans ce dialogue, interrompu par un autre élève qui donne la bonne réponse et vient en aide à Anaïs, on ne sait pas si cette dernière a vraiment compris ou bien si elle se contente de répondre aux questions fermées du professeur qui, en plus, n'admettent que deux réponse possibles plus ou moins. De plus, grâce aux deux erreurs successives produites par Anaïs, on peut en faire une autre analyse. Ainsi, pour calculer des sommes algébriques il se peut qu'Anaïs utilise une règle erronée qui consiste à garder le signe du premier nombre rencontré dans le sens de la lecture (ici le moins) et à l'attribuer au produit ou à la somme.

1.2.2. La validation du professeur à la fin du calcul

Nous avons choisi maintenant deux phases de correction dans laquelle le professeur F2 intervient, une fois que l'élève au tableau a écrit sa réponse, soit pour demander à la classe la validation, soit pour valider lui-même.

Dans la cinquième séance le professeur invite deux élèves, Alison et Grégory, en même temps au tableau, pour faire la correction de deux tâches de même type : "développer et réduire une expression littérale". Nous présentons la phase de correction relative au travail d'Alison.

Elle fait l'exercice "développer et réduire I=3(2x+4)+4x" en donnant la bonne réponse I= 6x+12+4x=10x+12. Ensuite, le professeur intervient pour demander la validation des élèves de la classe [36]:

> 22. Pr : alors on regarde est-ce que vous êtes d'accord avec le travail d'Alison (?)
> 23. E : oui

[36] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole 22 jusqu'à 27 dans la transcription de la séance 5, dans l'annexe du classe 2 en France.

24. Pr : oui (?) non (?)
25. Es : oui
26. Pr : oui c'est bon
27. Pr : merci Alison

Nous voyons que le professeur se limite à l'accord des élèves en quelques interactions, sans leur demander de justification, et c'est lui qui finalement conclut.

Dans la phase suivante elle intervient, après que l'élève a écrit sa réponse, mais cette fois-ci c'est elle qui lit et valide sans demander l'avis de la classe. Cela se passe durant la sixième séance, l'exercice est "développer et réduire C=(-3x-4)-(-8x+3)", le professeur invite deux élèves, Marie et Adrien, en même temps au tableau, nous présentons la phase de correction concernant le travail de Marie où le professeur n'intervient qu'à la fin du calcul pour valider sa réponse. En même temps il lui explique de barrer la parenthèse avec le signe "-" juste devant [37] :

95. Pr : donc les signes que tu as réécrit très bien donc hop là pareil hein n'hésitez pas le faire pour bien visualiser comme ça donc on l'enlève

(…)

98. Pr: alors on regarde ensemble Marie je vais te dire donc effectivement l'opposé de huit x c'est bien de moins huit x pardon c'est bien plus huit x et l'opposé de plus trois c'est bien moins trois alors après tu réduis et tu fais attention à tes signes bravo c'est bien

Ici le professeur explique et conclut lui-même.

Il nous semble que ces différents extraits nous montre des régularités fortes chez ce professeur à la fois au niveau du savoir quand il réduit la complexité et quand il découpe les tâches en micro tâches et au niveau des interactions quand elle pose des questions très fermées n'admettant que peu de réponses possibles ou quand elle se contente d'une partie de la réponse d'un élève pour avancer dans le calcul. Elle explique et ne demande pas l'avis des élèves.

1.3. Classe 1, Liban

Nous rappelons que le professeur a un profil caractérisé par le fait de laisser l'élève travailler tout seul au tableau et d'intervenir à la fin pour expliquer et valider ce que l'élève a fait, et, dans le cas d' une erreur pour corriger.

Dans ce paragraphe nous avons sélectionné un cas qui concerne l'exposition du savoir, essentiellement l'explication d'une réponse au tableau.

[37] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole 95 jusqu'à 98 dans la transcription de la séance 6, dans l'annexe du classe 2 en France.

1.3.1. Intervention du professeur à la fin du calcul pour expliquer et valider la réponse de l'élève au tableau, corriger l'erreur si elle existe

Nous présentons une situation de la troisième séance, où le professeur invite Léna au tableau et lui demande de corriger l'exercice "Calculer C-D si $C=3xy^3+5x^2-8y+7$ et $D=2x^2-xy^3+2y-8$" fait à la maison.

Léna écrit sa réponse au tableau sans l'intervention du professeur :

$C-D=3xy^3+5x^2-8y+7-(2x^2-xy^3+2y-8)$
$C-D=3xy^3+5x^2-8y+7-(2x^2+xy^3-2y+8)$ $3xy^3-xy^3=2xy^3$; $5x^2-2x^2=3x^2$; $8y-2y=6y$; $7-8=-1$
$C-D=2xy^3+3x^2+6y-1$

Léna a fait plusieurs erreurs : elle a changé les signes des termes à l'intérieur des parenthèses (sauf le premier terme) sans les enlever. Ensuite, elle change de nouveau les signes quand elle additionne.

Voici un extrait qui montre la technique du professeur pour valider les procédures de calcul ainsi que la réponse de l'élève. Il fait un rappel de la tâche en expliquant ce que l'élève a fait et il corrige les erreurs [38] :

> 173. Pr : bon donc on revient ici C moins D on a dit ça c'est le C moins tout le D donc le problème ici c'est qu'il faut changer tous les signes de D d'accord (?) parce qu'il y a un moins devant donc ça me donne trois xy trois plus cinq x deux moins huit y plus sept moins deux x deux d'accord mais quand on change c'est fini on enlève les parenthèses d'accord (?) quand on a changé le signe j'enlève les parenthèses autrement je n'enlève pas les paren- c'est-à-dire si j'ai changé les signes c'est faux de laisser les parenthèses d'accord (?) donc moins deux x deux moins fois moins c'est plus xy trois et moins fois plus c'est moins deux y et plus huit c'est claire (?) maintenant qu'est-ce qu'il reste à faire (?) je réduis les termes semblables je regarde bon regardez elle les a écrit bon avant de dit C moins D égal à combien elle a écrit chaque terme ensemble à part donc elle les a fait ensemble on a trois xy trois et plus xy trois là voilà plus
>
> 174. Es : plus

Enfin, il répond aux questions des élèves :

> 185. Pr : oui Fadi (?)
>
> 186. Fad : on a ben en haut euh plus sept moins deux x deux euh euh elle ne pas être plus sept moins moins deux x deux moins fois plus (?)
>
> 187. E : moins
>
> 188. Pr : oui c'est moins on a mis moins fois plus c'est moins donc c'est moins deux x deux d'accord (?)
>
> 189. Pr : mais ici le signe de huit y Léna c'est moins huit y donc moins huit y et moins deux y moins deux y ça me donne combien (?) moins dix y c'est claire (?)
>
> 190. Pr : après les termes constants on a sept plus huit sept plus huit c'est égale à quinze donc finalement la réponse sera C moins D égale à quatre xy trois
>
> 191. E : oui
>
> 192. Pr : plus [trois xy deux moins dix y plus quinze
>
> 193. E : [trois xy deux moins dix y plus quinze
>
> 194. Pr : c'est clair (?)
>
> 195. Es : oui

[38] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tour de parole de 173 jusqu'à 195 dans la transcription de la troisième séance au classe 1au Liban.

Pour conclure nous voyons que le professeur L1 prend à sa charge la validation, la correction des erreurs et les réponses aux questions des élèves. On pourrait dire qu'il laisse travailler l'élève au tableau puis il procède comme si il corrigeait une copie en indiquant ce qui est juste et faux. Il explique et ne demande pas l'avis des élèves, contrairement à la technique du professeur F1.

1.4. Classe 2, Liban

Nous allons maintenant observer l'autre professeur libanais L2, qui intervient plusieurs fois pendant le calcul, notamment après que l'élève a effectué chaque étape du calcul, en validant et en posant des questions fermées.

Dans ce paragraphe, nous exposons deux cas concernant la façon dont le professeur L2 intervient en posant des questions fermées.

1.4.1. Intervention répétitive du professeur en posant des questions fermées

Dans la quatrième séance, le professeur invite Joseph au tableau pour corriger l'exercice : "Développer et réduire $(2x^3-7)(6+5x)$" fait à la maison.

Joseph écrit : "= $12x^3$ $10x^4$ ", et avant qu'il mette le signe "+" entre les deux termes le professeur intervient[39] :

303. Pr : quel est le signe que tu vas placer avant le dix x quatre
304. Jos : ici (?) plus
305. Pr : pourquoi plus (?)

Un élève de la classe donne une réponse fausse sur laquelle le professeur demande une explication :

306. E : moins
307. Jos : plus parce que on a
308. Pr : qui a dit moins (?)
309. Pr : pourquoi moins (?)
310. Joe : (inaud)
311. E : c'est plus
312. Pr : pourquoi plus ou pourquoi moins (?)
313. E : plus
314. Jos : on change le on change le [
315. Pr : [tu as multiplié deux x trois par six n'est-ce pas (?) bon quel est le signe de deux x trois (?)

Le professeur n'attend pas que l'élève explique, mais elle pose des questions beaucoup plus courtes :

316. Es : plus
317. Jos : plus
318. Pr : quel est le signe de cinq x (?)

[39] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole de 303 jusqu'à 302 dans la transcription de la quatrième séance, dans l'annexe du classe 2 au Liban.

319. Es : plus
320. Pr : plus
321. Pr : plus par plus [c'est quoi (?)
322. Jos : [moins
323. Es : plus
324. Pr : plus par plus (?)
325. Jos : plu- moins
326. E : plus
327. Pr : alors c'est plus douze x trois maintenant deux x trois multiplier par cinq x quel est le signe de deux x trois (?)
328. Jos : plus
329. Pr : et le signe de cinq x (?)
330. Jos : plus
331. Pr : et plus par plus (?)
332. Jos : plus
333. Pr : donc (?)
334. Jos : plus dix x quatre

Le professeur continue à poser des questions fermées auxquelles Joseph répond. Il écrit donc "$=12x^3+10x^4-42-35x$".

Ainsi, le professeur pose une question sur la réduction :

358. Pr : alors on a développé combien de termes on a obtenu (?)
359. Es : quatre
360. Pr : quatre termes voilà j'ai effectué la multiplication j'ai développé maintenant je vais essayer si je peux réduire c'est-à-dire cette réponse je peux la rendre plus petite c'est-à-dire additionner les termes semblables
361. Pr : est-ce qu'il y a des termes semblables (?)
362. Jos : non
363. Es : non
364. Pr : on n'a pas donc c'est la réponse

Nous remarquons que ce professeur intervient plusieurs fois soit pour valider soit pour faciliter la tâche en la découpant en micro tâches. Dans le cas où l'élève au tableau hésite à écrire une étape de calcul ou quand il effectue une erreur elle l'interroge avec des questions courtes et fermées. Ainsi sa technique, qui ressemble un peu à celle du professeur F2, consiste à guider l'élève pour faciliter la tâche mathématique.

2. Les techniques des professeurs pour corriger les erreurs classiques

Nous caractérisons les erreurs classiques en nous référant aux recherches en didactique de mathématiques. Cela nous permettra de voir les techniques des professeurs durant les phases de correction collective.

Nous étudions les démarches des quatre professeurs en analysant des tâches de mêmes types avec des erreurs classiques : essentiellement des tâches de type réduire une expression littérale ; développer et réduire une expression littérale. Le choix de ces erreurs correspondent d'une part, au fort taux d'échec des élèves dans le questionnaire et, d'autre part, à ce que les professeurs ont mentionné dans le questionnaire et dans les entretiens.

2.1. Erreurs relatives au type de tâche "réduire une expression littérale"

Dans l'apprentissage des nombres relatifs les élèves commettent souvent des erreurs de signe, comme le montre Vergnaud, 1989 qui indique que les élèves ont des difficultés conceptuelles et qu'il existe des obstacles épistémologiques relatifs à cet objet mathématique.

Nos analyses du questionnaire élève, nous permettent de constater que les élèves font aussi des erreurs de signe dans les calculs littéraux. Or, nous pensons que ces erreurs ne relèvent pas exclusivement de la non maîtrise des nombres relatifs mais d'autres raisons peuvent être à la base des erreurs relatif au type de tâche "réduire une expression littérale".

Nous avons donc choisi la tâche : "réduire A=7-2x+4x" avec la réponse fausse A=7-6x qui apparaît dans trois phases de corrections, collectives et individuelles, pour les deux classes en France. La même erreur, d'un élève fictif, figure dans le questionnaire "élève" et "professeur". Nous avons déjà indiqué qu'environ la moitié des élèves, qui ont répondu au questionnaire, ont noté que la réponse de Louis, l'élève fictif, est juste.

Nous voyons deux explications à cette erreur : On peut penser soit que le x est pris en facteur "7–(2+4)x" soit que l'élève interprète le moins, en se référant à ces expériences antérieurs, comme s'il s'agit d'une opération de soustraction semblable à celles "7-5" ou "7-6". Or, depuis la classe de 6ème au Liban ou 5ème en France les élèves peuvent voir le signe "–" parfois comme l'opération soustraction parfois comme signe du nombre.

D'ailleurs, les pratiques des professeurs, en découpant l'expression en sous-expressions indépendantes, peuvent inciter les élèves à penser qu'il faut effectuer une opération entre chacun des termes. C'est pourquoi on voit qu'on peut découper l'expression littérale en deux : "7" et "2x+4x". D'où l'importance de voir la méthode de correction du professeur pour un tel type d'erreur.

Dans le questionnaire élèves, ceux libanais ont fait des erreurs relatives à la priorité des opérations, essentiellement des erreurs de concaténation. Alors nous étudions des erreurs de ce type dans des phases de correction relative à des tâches de type "développer et/ou réduire une expression littérale".

2.1.1. La technique du professeur dans classe 1, France

Dans la première séance filmée, le professeur choisit Emilie pour corriger la tâche : "réduire A=7-2x+4x" préparée à la maison. Nous rappelons que dans cette classe la technique pour réduire une expression littérale est d'utiliser la factorisation mais sans l'écrire.

Emilie écrit sa réponse au tableau : A= 7-6x. Le professeur demande aux élèves de la classe de valider [40] :

99. Pr : alors est-ce que vous êtes d'accord avec la proposition d'Emilie (?)
100. Es : non

[40] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole de 99 jusqu'à 117 dans la transcription de la première séance au classe 1 en France.

101. Pr : non (?) alors pourquoi (?)
102. Pr : alors le sept on le retrouve ici donc ensuite tu as fait moins deux x plus quatre x et ta proposition c'est moins six x

L'intervention 4 ci-dessus montre que le professeur pense que l'élève a effectué : –2x+4x. Ainsi, il se focalise sur une partie de l'expression initiale et choisit Aurélien pour la calculer :

103. Pr : est-ce que c'est ou est-ce que vous n'êtes pas d'accord (?)
104. E : ben
105. Pr : Aurélien
106. A : moins deux x plus quatre x ça ne fait pas moins six x
107. Pr : ça fait quoi (?)
108. A : ça fait deux x
109. Pr : alors hein (?) moins deux plus quatre c'est-ce qu'on va faire dans sa tête tu es d'accord (?) et ça fait combien moins deux plus quatre (?)

Nous signalons que le professeur découpe la tâche en micro tâches selon son interprétation de l'erreur. De plus, dans l'intervention 10, il reprend le calcul de –2x+4x et ne considère que les valeurs numériques. On peut dire qu'il factorise cette expression mais sans le dire aux élèves. Ensuite, Emilie corrige et le professeur, comme d'habitude, demande la validation des élèves

A travers cet exemple, nous avons montré que ce professeur, dès le début de la phase, fait une hypothèse sur l'erreur de l'élève. Les questions qu'il pose, courtes et fermées, sont donc en lien avec cette interprétation. Nous pensons que, dans ce cas, il considère que l'élève comprend et rectifie son erreur, alors que l'ensemble du calcul ignoré. Enfin, nous constatons que le professeur ne demande jamais à l'élève ce qu'il a fait et comment il a répondu alors qu'il pourrait prendre plus de renseignements pour valider son hypothèse sur l'erreur.

2.1.2. La technique du professeur dans classe 2, France

Ici, nous choisissons la correction du même exercice: "réduire A=7-2x+4x", fait dans la classe durant la deuxième séance. Le professeur choisi l'élève, Julianne, pour donner oralement sa réponse.

Julianne fait une erreur semblable à celle d'Emilie dans classe 1 en France : "=7-6x"[41] :

275. J : sept moins deux x plus quatre x est égale à sept moins six x

Ensuite, le professeur F2 demande la validation des élèves de la classe :

276. Pr : sept moins six x vous êtes d'accord (?)
277. Es : non

Nous signalons une différence avec le professeur F1 : on voit bien qu'ici F2 demande la validation des élèves de la classe, mais il ne repère par l'erreur comme a fait F1. En effet, il demande aux élèves de la classe de justifier leur désaccord :

[41] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole de 275 jusqu'à 292 dans la transcription de la deuxième séance au classe 2 en France.

278. Pr : non alors on écrit allez qu'est ce qu'il explique à Julianne pourquoi elle a fait une erreur qu'est ce qu'il faut faire (?) comment on fait (?) comment on raisonne (?)
279. Pr : Walide
280. W : en fait c'est moins deux x et plus quatre x donc ça fait deux x

Comme F1, les interventions 7, 9 et 14 de F2 montrent qu'il pense que l'erreur vient du calcul "-2x-4x".

281. Pr : toi tu as fait moins deux x moins quatre x pour sept moins six x c'est-à-dire que le signe moins tu l'appliques pour tout ça deux x plus quatre x six x avec un signe moins devant moins six x
282. Pr : est-ce qu'on a le droit de faire ça (?)
283. Es : non

Il pose une question fermée avant de corriger :

284. Pr : ce signe moins il s'adresse que deux ici et pas tout ce qui est derrière lui et puis le quatre lui il est précédé par un signe plus d'accord (?) donc moins deux x plus quatre x il va nous rester (?)
285. Es : deux x
286. Pr : deux x
287. Pr : donc qu'est-ce que je vais écrire Julianne finalement (?)
288. J : euh sept plus deux- plus deux x
289. Pr : plus deux x tu es sûr hein (?) cette fois tu fais attention
290. Pr : donc le signe moins il s'adresse pas à tout ce qui est derrière hein (?) il s'adresse juste à ce qui est toute suite à sa droite donc c'est deux x qui est à sa droite après on passe à un autre signe pour un autre nombre ça va (?)
291. J : oui

Là aussi, F2 réfère à une technique de soustraction des nombres relatifs :

292. Pr : encore encore une somme algébrique Julianne sept plus moins deux x plus quatre x tu vois (?)

Nous déduisons que F2 agit de la même façon que F1 : essentiellement, il ne demande pas des explications à l'élève au tableau.

Or, nous remarquons aussi des différences entre les techniques de corrections de ces deux professeurs : F2 ne pose pas des questions autour de l'addition et de la soustraction des nombres relatifs bien qu'il parle d'une somme algébrique. La deuxième différence est que F2 ne rappelle pas la technique de factorisation.

2.1.3. Un exemple de correction individuelle dans classe 2, France

En prenant la même tâche, nous montrons une phase de correction individuelle qui a eu lieu dans la classe avant la correction collective qu'on a traité ci-haut.

Les élèves travaillent individuellement. Le professeur vient auprès d'Adrien et voit qu'il a écrit "A=5x", il va dialoguer avec Adrien qui pense que sa réponse est fausse. L'intervention 3 ci-dessous nous incite à penser que l'élève a fait une erreur de concaténation et que le résultat 5x est le résultat intermédiaire de 7-2x. Quand au professeur ses interventions 1, 2, etc. montrent qu'il pense certainement que l'erreur vient du calcul de -2x+4x. Voici le dialogue qui s'instaure entre les deux[42] :

163. A : deux x plus quatre x
164. Pr : toi tu as deux x plus quatre x
165. A : non sept moins deux x en fait
166. Pr : est-ce que tu est-ce qu'il y a deux x
167. A : ben oui
168. Pr : oui il y a seulement deux x qu'est-ce que j'ai marqué au tableau quelles petites flèches qu'est-ce qui va avec le deux x qu'est ce qu'il y a devant
169. A : moins deux

Ici on voit bien que le professeur ne prend en compte qu'une partie de l'expression (celle où est l'erreur) alors que l'élève redonne la réponse entière puisqu'il n'a pas forcément localisé l'erreur. Au tour de parole 4, le professeur restreint encore la question en demandant s'il y a deux x, puis, en 6, il évoque les flèches qu'il a dû tracer au tableau pour montrer la distributivité. On voit donc dans ce court échange un exemple d'utilisation forte des ostensifs qui a du sens pour le professeur mais certainement peu pour l'élève. En effet, ce dernier peut bien penser qu'il y a deux x ce qui correspond bien à une partie de ce qui est écrit.

L'extrait suivant montre que le professeur va détacher une partie de l'expression (-2x+4x) pour la faire calculer de façon indépendante par l'élève, ce qu'Adrien arrive à faire après quelques essais.

170. Pr : c'est moins deux x plus quatre x alors moins deux x plus quatre x
171. Adr : moins deux x ….
172. Pr : moins deux x plus quatre x
173. Adr : moins quatre x
174. Pr : tu dis au pif réfléchis
175. Adr : moins quatre x
176. Pr : comment tu fais pour obtenir moins quatre x avec moins deux x plus quatre x si je te dis
177. Adr : non non ça fait moins deux x

Enfin, dans les interventions suivantes de 16 à 19, le professeur va reprendre le calcul de -2x+4x en ne considérant que les valeurs numériques. Ainsi on peut dire qu'il factorise cette expression mais sans le dire à l'élève ou bien qu'il veut refaire le calcul numérique de –2+4. A partir de ce moment le dialogue entre les deux se résume à un jeu de questions /réponses, piloté par le professeur et basé sur des ostensifs détachés de l'expression générale et donc de tout sens. On voit également à la fin combien les réponses de l'élève sont courtes. Enfin, notons que l'intervention 30 donne la confirmation de l'hypothèse que nous avons faite sur l'interprétation de l'erreur qui proviendrait d'une non-maîtrise du calcul sur les nombres relatifs.

178. Pr : si je te dis moins deux plus quatre ça fait quoi le résultat moins deux plus quatre
179. Adr : ben deux
180. Pr : alors maintenant moins deux x plus quatre x
181. Adr : ça fait deux x deux x

[42] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole de 163 jusqu'à 192 dans la transcription de la séance 2 , dans l'annexe du classe 2 en France.

182. Pr : ça fait deux x donc il y a déjà c'est réglé et puis ça est-ce que on peut se occuper
183. Adr : non
184. Pr : donc qu'est-ce qu'on va écrire
185. Adr : sept moins deux x
186. Pr : pourquoi moins deux x alors tu m'as dit deux x deux x ça c'est sous entend quoi quel signe devant
187. Adr : moins
188. Pr : quand tu écris deux x c'est la simplification de moins deux x on a le droit de faire ça qu'est-ce qu'on sous entend quand on écrit deux x quel est le signe qui est devant
189. Adr : plus
190. Pr : c'est plus deux x
191. Adr : sept plus deux x
192. Pr : donc sept plus deux x ouf attention à tes nombres relatifs hein

Nous remarquons que dans la phase de correction individuelle le professeur F2 fait plus d'échange avec l'élève que dans celle collective. De plus dans cette phase, F2 pose des questions autour de l'addition des nombres relatifs.

Pour conclure, nous avons pu montrer, à travers ces exemples, que les deux professeurs F1 et F2 font une hypothèse sur l'erreur de l'élève ce qui leur conduisent à amener les questions vers la technique d'addition des relatives.

2.1.4. La technique du professeur dans classe 1 au Liban pour corriger des erreurs relatives à la priorité des opérations

Dans la cinquième séance, les élèves ont fait l'exercice : "développer et réduire (5-2y)(5-2y)" dans la classe 1 au Liban. Ensuite, le professeur L1 invite Fadi au tableau pour la corriger. Nous allons étudier cette phase de correction, essentiellement celle concernant l'étape de réduction.

Fadi écrit l'étape du développement : "$=25-10y-10y+4y^2$". L1 intervient, valide et explique cette réponse, en s'adressant à toute la classe. Ensuite, il demande à Fadi : "réduire les termes semblables". Fadi écrit : "$25-10y-10y+4y^2=25-20y^2+4y^2$". Les élèves manifestent que la réponse est fausse, le professeur L1 ne demande ni une justification de la part des élèves ni des explications de l'élève au tableau mais il se limite à corriger l'erreur en donnant la bonne réponse et en rappelant la technique de réduction d'une expression littérale[43].

88. Pr : bon regardez ici donc ici on a dit on a développé il faut réduire les termes semblables vingt là voilà
89. E : oui
90. Pr : maintenant moins dix y moins dix y c'est moins vingt y on a dit toujours quand je calcule quand je réduis les termes semblables le résultat doit être un terme qui est semblable à eux donc moins dix y moins dix y c'est moins vingt y
91. Pr : pas moins vingt y deux

[43] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole de 88 jusqu'à 104 dans la transcription de la séance 5 , dans l'annexe du classe 1 au Liban.

92. F : oui
93. Pr : d'accord (?) et plus quatre y deux ça reste

Il y a un élève qui signale qu'il y a encore des termes semblables :

97. E : monsieur il y a des termes semblables
98. Pr : pardon (?)
99. E : il y a des termes semblables
100. Pr : où (?)
101. E : moins vingt plus quatre

Le professeur donc fait un rappel autour des termes semblables

102. Pr : non ça c'est moins vingt y et ça c'est plus quatre y deux ces ne sont pas des termes semblables ça ce n'est pas moins vingt donc ça ce n'est pas moins vingt à-part et plus quatre à-part des termes constant ça c'est moins vingt y d'accord (?) donc tout ça c'est le monôme moins vingt c'est le coefficient de cette variable
103. E : oui mais il y et il y a y deux (inaud)
104. Pr : non on a dit des termes semblables il faut avoir les mêmes exposants ça on a dit d'accord (?) toujours les termes semblables il faut avoir le même exposant c'est-à-dire y deux et y ces ne sont pas des termes semblables ça reste y deux à part et y à part okay (?)

Enfin, la signification des "termes semblables" n'est pas la même pour le professeur et pour l'élève. Nous voyons, une situation semblable au cas précédents dans les deux classes en France où le professeur ne demande pas des explications de l'élève au tableau. Il intervient en corrigeant l'erreur selon son interprétation. Nous remarquons que les interactions, relatives à la validation et à la correction de l'erreur, ne ressemblent pas à celles dans les classes en France.

2.1.5. La technique du professeur dans classe 2 au Liban pour corriger l'erreur de concaténation

La phase de correction que nous présentons dans ce paragraphe porte sur l'erreur de concaténation. Nous avons montré avant que la technique mathématique, ajouter des termes semblables, utilisée pour "réduire une expression littérale" est pareil dans les deux classes au Liban :

Dans la première séance filmée, dans classe 2 au Liban, les élèves ont fait l'exercice : "supprimer les parenthèses et réduire $(6z+2xz+1-3z^2)+(2z^2+3xz+z+5)$" à la maison. Nous étudions une partie de la phase de correction.

Pour corriger cet exercice, le professeur L2 invite un élève au tableau. Celui-ci répond avec l'aide de L2 qui, à chaque étape, intervient pour valider ou demander à la classe de corriger. Voilà la solution :

$=6z+2xz+1-3z^2+2z^2+3xz+z+5$

$=6z+z+2xz+3xz+1+5-3z^2+2z^2$

$=(6+1)z+(2+3)xz+(1+5)+(-3+2)z^2$

$=7z+5xz+6+(-1)z^2$

$=7z+5xz+6-z^2$

Nous soulignons que pour réduire, l'élève met en facteurs z, xz et z^2. Voici le dialogue qui s'instaure entre L2 et la classe avant de réduire[44] :

98. Pr : donc on a groupé les termes semblables maintenant on va les additionner pour réduire les expressions pour la rendre plus petite (?)
99. Pr : vas y
100. A : six plus un
101. Pr : comment on additionne les termes semblables (?)
102. Es : on additionne leurs coefficients
103. Pr : on additionne les coefficients

Nous remarquons que L2 identifie "réduire" selon la signification de la vie courante.

En arrivant à la dernière étape"7z+5xz+6", L2 valide l'expression et puis elle provoque l'erreur classique de concaténation :

153. Pr : est-ce que je peux continuer mon calcul
154. Es : non
155. Pr : et additionner sept plus cinq plus six (?)
156. Es : non
157. Pr : et z avec xz (?)
158. Es : non
159. Pr : pourquoi (?)
160. Es : parce qu'ils ne sont pas des termes semblables
161. Pr : ils ne sont pas (?)
162. Es : des monômes semblables
163. Pr : ils ne sont pas des monômes semblables on va continuer mais d'abord est-ce qu'il y a des questions (?)
164. Es : non

On voit bien que la propriété de la distributivité n'est pas rappelée et il y a un appui sur la notion de les termes semblables qui est prise dans la sens courant "les x avec les x et pas avec les y".

Après, un élève pose une question liée à l'erreur de concaténation :

176. E : madame on ne peut pas additionner six plus z deux (?)
177. Pr : non six quelle est est- attends quelle est la partie littérale de six (?)
178. E : z
179. Pr : non
180. Pr : quelle est la partie- regardez regardez Etienne m'a posé la question suivante est-ce que je ne peux pas additionner six plus z deux (?)
181. Es : non
182. Pr : okay attend un peu six est un monôme quelle est sa partie littérale (?)
183. Es : (inaud)
184. Pr : z (?)
185. E : à la puissance zéro

[44] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole de 98 jusqu'à 191 dans la transcription de la première séance au classe 2 au Liban.

186. Pr : ah voilà six je peux lui ajouter z à la puissance zéro n'est-ce pas (?)
187. Es : oui
188. Pr : six c'est six par z à la puissance zéro plus z deux donc quelle est la partie littérale ici (?)
189. Es : z zéro
190. Pr : quelle est la partie littérale
191. Es : z deux

Ensuite, le professeur continuer à poser des questions fermées, si les termes ont la même partie littérale et si on peut les ajouter. Les réponses des élèves sont de type oui/non.

De cet exemple, la seule technique du professeur L2 pour corriger l'erreur de concaténation est de chercher les termes semblables qui parfois les comprend différemment de ces élèves.

2.2. Erreurs relatives au type de tâche "développer et réduire une expression littérale"

Dans ce paragraphe, nous choisissons deux erreurs classiques relatives à ce type de tâche : La première erreur est $(a+b)^2 \rightarrow a^2+b^2$ et la deuxième se manifeste dans l'expression $a \pm b(cx+d)$ où l'élève multiplie "a" avec les deux termes de la parenthèse.

Notons que nous avons obtenu un taux d'échec fort des élèves dans le questionnaire. Pour la première erreur, 50% des élèves français et libanais ont choisi "x^2+4^2" comme forme développée de $(x+4)^2$. En ce qui concerne l'autre erreur, 32% des élèves ont effectué la double distributivité dans la tâche "développer et réduire 5x+4(2x-7)". A mentionner qu'on a détecté un écart d'échec de 21% entre le pourcentage des élèves français et libanais (le taux des élèves libanais est plus élevé). Pour montrer la technique de correction du professeur relative à ces deux types d'erreurs nous avons sélectionné deux phases de corrections : la première est étudiée dans la classe 2 au Liban et la deuxième dans la classe 2 en France.

2.2.1. Le professeur L2 appuie sur des éléments d'ostensifs pour invalider la réponse fausse $(a+b)^2 \rightarrow a^2+b^2$

Dans la quatrième séance le professeur L2 demande à un élève de faire au tableau, l'exercice suivant : "développer et réduire $(a+b)^2$". L'élève donne la réponse "a^2+b^2" sans l'intervention du professeur.

Ensuite, L2 demande à un autre élève s'il est d'accord ou non. Plusieurs élèves répondent en même temps que la réponse est juste. Or, il y a un élève (Etienne) qui répond qu'il n'est pas d'accord. Le professeur demande à Etienne de venir au tableau pour écrire sa réponse. Etienne écrit : $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$. Puis L2 intervient pour valider la réponse et la comparer avec la précédente[45].

792. Eti : madame c'est ça
793. Pr : oui

[45] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole de 792 jusqu'à 800 dans la transcription de la quatrième séance au classe 2 au Liban.

794. Pr : voilà c'est a plus b par a plus b a plus b au carré c'est le produit de a plus b deux fois par lui même ici combien j'ai de termes (?)
795. Es : deux
796. Pr : et ici deux et deux fois deux vous avez combien (?)
797. Es : quatre
798. Pr : donc dans ma réponse je dois obtenir quatre termes donc ce qui veut dire que cette réponse est (?)
799. Es : faux
800. Pr : fausse d'accord (?)

Nous constatons que, pour valider la bonne réponse et montrer que la première est fausse, L2 appuie sur les éléments ostensifs quand elle a cité l'obtention de quatre termes à la fin du développement. Ce qui n'est pas en accord avec les expressions obtenues à la fin d'un tel type de calcul où nous obtenons trois termes.

2.2.2. Le professeur F2 accentue sur la technique de développement du terme "b" dans une tâche de type développer et réduire une expression : $a\pm(cx+d)\times b$

Tout d'abord, la forme $a\pm b(cx+d)$ n'apparaît pas, durant toute la séquence, dans les deux classes au Liban alors qu'en France elle apparaît seulement 3 fois, dans chaque classe. Cela peut expliquer le taux d'échec fort des élèves dans le questionnaire.

Dans la classe 2 en France, durant la cinquième séance, le professeur F2 invite Romain au tableau pour faire la correction de l'exercice "développer et réduire : $K=5x+(3x+5)\times 2$".

Romain écrit la réponse suivante : $=15x^2+25x\times 2=15x^2+50x$: il multiplie 5x avec 3x puis avec 5.

F2 intervient pour demander aux élèves de valider[46].

57. Pr : alors on regarde le calcul de Romain est-ce que vous avez des choses à dire sur le calcul de Romain (?)
58. Es : il est trompé

Donc, F2 demande la justification d'un élève :

59. Pr : il y a des choses à dire alors qui prend la parole (?) pas tous en même temps sh
60. Pr : aller Sabri d'accord
61. Sab : elle n'a pas appliqué la distributivité
62. Pr : où est ce qu'elle n'a pas appliqué la distributivité (?) alors tu ne peux pas venir me faire voir au tableau essaye de nous expliquer où est ce que où est ce que il on devrait appliquer la distributivité tout d'abord ici
63. Sab : avec le fois deux
64. Pr : voilà ici on a un produit de facteurs effectivement et on veut le développer
65. Pr : comment tu le développerais toi ce produit de facteurs (?)
66. Sab : deux fois cinq

[46] Les paragraphes numérotés ici correspondent aux tours de parole de 57 jusqu'à 76 dans la transcription de la cinquième séance au classe 2 en France.

67. Pr : oui
68. Sab : est dix et plus deux fois trois x

Ensuite, F2 donne une technique pour distribuer le 2 :

69. Pr : d'accord alors moi je te conseil Sabri quand c'est comme ça de commencer toujours par la gauche en faite plutôt de faire deux fois cinq et ensuite deux fois trois x fait attention commence bien par le premier qui est dans le parenthèse parce que ça je suis d'accord c'est pareil que deux fois trois x plus cinq tu es d'accord (?) parce qu'il fait deux fois x plus deux fois cinq okay parce que si tu as un signe moins ici et que tu commences par la droite tu prends bien compte que tu vas inverser après les termes

Le professeur F2 sait bien que les élèves se trompent souvent dans le signe donc il signale l'erreur relative à la commutativité de la soustraction :

70. Pr : et est-ce que c'est important l'ordre des termes pour une soustraction
71. Es : oui
72. Pr : est-ce que trois moins sept c'est pareil que sept moins trois (?)
73. Es : non
74. Pr : non d'accord donc ça fait ici très d'attention hein (?) donc effectivement on va faire deux fois trois x plus deux fois cinq et ça c'est ma prioritaire on le laisse à sa place pour l'instant Romain cinq x cinq x on peut rien faire pour x tu es d'accord (?)
75. Pr : donc finalement
76. Pr : Sabri dicte moi ce que j'écrit

Nous montrons, de cet exemple, que le professeur donne l'importance à commencer le développement par le premier terme dans la parenthèse pour éviter des erreurs relatives au signe. Par contre il a négligé de signaler l'autre type d'erreur relié à la distributivité du terme "a" dans la l'expression a±b(cx+d). Nous constatons que le professeur ne mentionne pas aux élèves qu'on fait la distributivité de la multiplication et pas celle de l'addition.

3. Conclusion

Chaque professeur a des interactions avec l'élève au tableau et les autres élèves en classe différemment : un localise l'erreur avant en demandant à l'élève de la corriger, un autre demande une justification et une localisation de l'erreur, un troisième intervient après que l'élève écrit la solution pour valider et corriger lui même, et le dernier intervient plusieurs fois pendant le calcul en posant des questions fermées et courtes.

Nous avons validé notre hypothèse à savoir que le professeur interprète parfois l'erreur de l'élève sans s'assurer de la procédure du calcul mise en oeuvre. Il intervient pour faire la correction en découpant la tâche en micro tâches. D'ailleurs, même si le professeur a verbalisé ce qu'il pense autour l'erreur de l'élève, on ne peut pas être sûr de notre conclusion que par rencontrer le professeur et lui montrer la vidéo.

Enfin, nous soulignons les difficultés, d'une part, des élèves pour effectuer ces tâches, et, d'autre part, des professeurs pour interpréter ce que l'élève a fait. Ce chapitre permet d'exposer les divers techniques de corrections relatives à chaque professeur ce qui nous a permis de voir qu'il y a un appuie sur les éléments d’ostensifs et manque de rappel de la propriété de distributivité de la multiplication sur l’addition ou la soustraction.

Conclusions et Perspectives

1. Conclusions

Nous faisons porter cette conclusion générale sur certains points qui nous paraissent importants maintenant que notre travail se termine, pour faire une synthèse générale ainsi que pour poser de nouvelles questions et ouvrir des pistes de recherches.

Dans cette thèse, nous avons étudié les pratiques de plusieurs professeurs de collège, dans les deux pays : la France et le Liban, dans le cas de l'introduction du calcul littéral au collège. Nos données sont constitués de quatre ensembles : les textes institutionnels (programmes officiels et manuels mathématiques du collège) ; un questionnaire et d'entretiens avec les professeurs filmés, deux questionnaires pour les élèves, et d'enregistrements vidéo dans deux classes au Liban et deux classes en France durant toute la séquence portant sur le chapitre "Calcul littéral".

Nous notons que l'échantillon des professeurs, sur lequel nous avons effectué notre étude, n'est pas représentatif pour établir des conclusions générales, mais tout de même nous pouvons penser que ces professeurs sont assez classiques et représentent un bon échantillon.

Le savoir relatif au calcul littéral

Nous avons étudié les programmes officiels du collège en France et au Liban où les types de tâches développer, réduire, et factoriser sont placés différemment : les deux premiers apparaissent en quatrième, en France, et cinquième, au Liban, tandis que factoriser est enseignée dans les classes de troisième en France et dans celles de cinquième au Liban. Ce découpage alors peut empêcher les élèves de voir le lien entre ces différents types de tâches qui se base sur la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction.

L'étude faite, sur le chapitre calcul littéral dans les manuels mathématiques, nous a permis de montrer que ce thème est centré sur deux types de tâches : "développer et/ou réduire une expression littérale" qui sont définis différemment d'un manuel à un autre. Ce chapitre est introduit et travaillé comme un objet en soi, nous avons aussi remarqué qu'il conduit essentiellement à une seule finalité qui est la maîtrise de la résolution de ces deux tâches et qui est séparé du chapitre traitant les équations.

Ainsi, cet étude nous a amené à nous poser beaucoup des questions sur le savoir en jeu notamment sur les termes : développer, réduire, simplifier, supprimer les parenthèses, utilisés en calcul littéral. On a découvert que le même type de tâche est référé par des mots différents et l'utilisation de ces termes et d'autres, dans la consigne, est liée à la forme de l'expression littérale.

Nous avons élaboré des catégories qui nous ont permis d'étudier l'identification de ces termes par les élèves et les professeurs. Nous avons pu conclure qu'il y a des élèves qui se référent à la signification de la vie courante de ces termes, essentiellement sur la forme de l'expression littérale, pour les définir, à noter qu'un pourcentage important des élèves n'ont même pas défini ces termes. D'où la difficulté des élèves pour connaître et identifier ces types de tâches en se basant sur la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction. Nous avons aussi découvert que les professeurs et les élèves utilisent différents termes selon la forme de l'expression littérale. Suivant notre point de vue, cela revient au fait que la propriété de distributivité de la multiplication, sur l'addition dans l'ensemble des réels, n'est pas suffisamment mis en avant dans les manuels (de plus il y a variété de formulations) et dans les pratiques des professeurs.

Enfin, à noter que les questions sur les vocabulaires en calcul littéral était imposer par l'analyse des manuels et cela nous à amener à faire un détour sur notre projet de recherche en étudiant l'utilisation de ces termes dans la vie courante et dans les dictionnaires mathématique ainsi leur utilisations dans les manuels mathématiques et par les professeurs et les élèves.

Les procédures de validation des élèves et analyses des erreurs par les professeurs

Une de nos questions de recherche était sur les éléments que les élèves peuvent mettre en œuvre pour montrer la validité d'une réponse. Nous remarquons que les élèves utilisent différents types de validation : nouvelle résolution de l'exercice, ensuite comparaison des réponses ; localisation de l'erreur ; références à des règles générales, mais ils n'ont pas toujours les moyens de les exprimer, plutôt il y a localisation des erreurs dans la classe. Notons que la technique "tester par un nombre" est recommandée par le programme français bien qu'elle n'est jamais utilisée par les élèves.

Une autre question de recherche était sur les connaissances par les professeurs des erreurs des élèves. Dans les entretiens nous avons remarqué que les professeurs ont des idées autour des erreurs classiques des élèves surtout celles relatives au type de tâche réduire une expression littérale. Dans les questionnaires quand les professeurs analysent les erreurs, certains comparent la technique utilisée par l'élève à celle qu'il l'a enseignée ; d'autres essayent de spécifier la ou les source(s) d'erreur ; enfin il y a des enseignants qui se limitent à l'identification des opérations dans la démarche de résolution de l'élève. Parfois les professeurs interprètent l'erreur suivant leur propre hypothèse, sur laquelle ils se basent pour corriger, sans interroger l'élève comment il a réellement travaillé. Cette hypothèse peut ne pas correspondre à la réflexion de ce dernier.

Analyses des pratiques des classes

Une de nos questions de recherche était sur l'organisation des phases de correction, à la fois des points de vue du savoir mathématique et des interactions avec les élèves, ainsi la façon que le professeur gère les interactions avec l'élève qui fournit la réponse et avec la classe. Afin de caractériser les pratiques des professeurs, du point de vu des interactions et gestion du savoir, dans les phases de correction, nous avons essayé de montrer le profil de chaque professeur filmé.

A noter que l'analyse des séances de la classe est un objet assez nouveau dans la recherche en didactique des mathématiques mais les cadres théoriques dans ce discipline ne sont pas encore satisfaisantes pour ce type d'étude. En effet, durant la séance il y a énormément des événements éphémères qu'il faut reconstruire et pour cela il faut trier les données et les indexer afin de les étudier et catégoriser plus tard.

Pour traiter les données vidéos nous avons utilisé le logiciel "Transana", un outil d'analyses qualitatives et quantitatives d'enregistrements vidéo, et le tableau d'analyse "Synopsis". L'aller-retour entre eux nous a aidé à avoir, à la fois, une vision de la séquence et de chaque séance, ainsi qu'une distinction des phases de correction assez facilement. Transana nous a permis de découper les séances en extraits vidéo correspondant aux phases de correction classifiées selon les types de tâches, les formes des expressions, la classe et la séance. C'est à travers ce logiciel que nous avons montré les régularités chez les quatre professeurs.

Nous constatons que la phase de correction est un moment important dans l'activité du professeur dans la classe. En effet, nous avons déduit dans la séquence d'enseignement du calcul littéral, que la période relative aux phases de correction s'étale sur l'échelle du temps le plus grand. A noter que cette période est plus grande au Liban qu'en France vu la complexité des expressions littérales traitées au Liban. De plus, le nombre des exercices corrigés est plus grand que celui préparé dans toutes les classes filmées. (par exemple dans la classe 1 en France, 88 tâches sont corrigées tandis que 65 sont préparées, dans la maison ou dans la classe, durant la séquence). Nous avons montrer que les phases de corrections sont importantes. En effet, nous constatons que les phases de correction ne se limitent pas à donner la bonne réponse mais on peut avoir beaucoup des rappels.

Nous avons pu alors établir des régularités pour chacun des professeurs ainsi que leur organisation pour la séquence d'enseignement relative au calcul littéral. Ces deux indices nous permettre de construire un profil pour chaque professeur.

Nous rappelons brièvement le profil de chaque professeur : le professeur F1 en France laisse l'élève travailler tout seul au tableau avant d'intervenir et demander aux élèves de la classe de valider ; le professeur F2 en France présente trois régularités d'interactions : la première est avec l'élève au tableau ; la deuxième plutôt avec les élèves de la classe ; alors que la troisième régularité apparaît surtout lors de la validation où il y a zéro interaction avec les élèves, c'est lui qui valide ; le professeur L1 au Liban intervient à la fin du calcul, lit et explique la résolution de l'élève et valide ; le professeur L2 au Liban se distingue des autres professeurs par son intervention répétitive à différents moments de calcul, il guide beaucoup l'élève en posant des questions fermées ou en imposant la technique de résolution avant d'effectuer le calcul.

Nous constatons que certaines interactions sont des questions courtes, parfois fermées qui visent à guider l'élève, alors que les réponses des élèves sont oui/non. Ainsi les types d'aide que le professeur peut fournire quand il interagit avec ses élèves, dépendent de chaque classe et de type de questions posées par le professeur, des questions fermées ou ouvertes, le moment d'intervention et le demande de la participation d'autres élèves de la classe.

D'ailleurs, les quatres professeurs demandent la technique de résolution et ne se limitent pas à voir la réponse finale.

Enfin, nous avons remarqué que des éléments technologico-théoriques sont soit relativement absents, soit non enseignés pour le type de tâche "réduire une expression littérale". En effet, trois professeurs parmi les quatres filmés utilisent rarement "factoriser" comme une technique pour réduire une expression littérale ; ils utilisent plutôt la technique de "réduire les monômes semblables".

D'après ce projet, nous ne pouvons dire qu'on peut généraliser des résultats sur les différences entre les classes libanais et français. C'est quelque chose ambitieux. D'ailleurs, sur le plan mathématique nous pouvons dire bien que la factorisation, comme le développement, est enseigné en $5^{ème}$ au Liban, comme nous avons déjà indiqué, on ne l'utilise pas pour réduire une expression littérale. Sur le plan des interactions, nous marquons que les élèves libanais interviennent plus que les élèves français pendant qu'un élève donne la solution, notamment ils posent des questions. Nous avons deux explications possibles et compatibles soit parce que l'expression littérale est plus compliquées et prend plus du temps soit parce que c'est dans la culture ou pratiques, les élèves libanais osent plus que ceux français de poser des questions.

2. Perspectives

Comme notre échantillon de professeurs n'est pas représentatif, nous pourrons établir des hypothèses, sur lesquelles des études comparatives peuvent être faites ultérieurement entre la France et le Liban, en se basant sur nos analyses dans les quatre classes filmés.

Les données que nous avons obtenue, en filmant environ 40 séances, constituent un corpus très riche pour poursuivre des analyses surtout sur le profil des professeurs : par exemple étudier l'évolution de leurs régularités en fonction du temps et les expliquer, pour cela nous suggérons la rencontre et la confrontation entre les deux professeurs français et les deux libanais ou les quatre ensembles. De plus, nous n'avons pas analysé toutes les phases de ces séquences filmées sur lesquelles il y a plein des questions : la place et le moment des institutionnalisations. Les cas où la correction a lieu en même temps que l'exécution de la tâche, etc.

Nous pourrions aussi s'intéresser à voir la variété de leurs hypothèses, relatives aux erreurs, et leurs interventions. La poursuite de la catégorisation des erreurs peut être aussi utile pour faire des analyses ultérieures plus fines ce qui nous permettra d'établir une liste des erreurs récurrents et une autre pour celles qui apparaissent une seule fois. Nous pourrions aussi pousser l'étude plus loin pour comprendre la raison du choix du professeur pour son hypothèse et pas d'autre.

D'ailleurs, notre considération sur le fait que le professeur établit une hypothèse, relative à l'erreur de l'élève, ne peut être considérée pertinente que si il la valide lui même, en regardant l'extrait vidéo correspondant.

Comme nous avons limité notre étude sur les phases de correction dans le chapitre du calcul littéral, il sera intéressant d'effectuer un lien entre les pratiques des professeurs et les apprentissages des élèves, durant ces phases, mais dans des moments où le calcul littéral est un outil, et pas un objet, qui sert à résoudre d'autres thèmes. Aussi, des études sur des phases de correction individuelle peuvent être faites pour ensuite les comparer à celles collectives.

Enfin, nous pourrions également se servir de certains extraits vidéos comme objectif de formation des professeurs. En effet, nous visons la production effective de ces données vidéo, que nous mettons à la disposition des chercheurs, pour avoir des éléments documents utilisés en formation de maîtres. De telles données analysées constituent de nouveaux moyens pour la formation de formateurs.

Références Bibliographiques

ABOU RAAD N. (2006). *Le calcul algébrique en France et au Liban. Etude comparée de l'enseignement de la factorisation et des erreurs des élèves*. Thèse de doctorat en Sciences de l'Education de l'Université Aix-Marseille I.

BACHELARD G. (1983). La formation de l'esprit scientifique. Paris : Vrin. (douzième édition)

BEDNARZ N., JANVIER C. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool : continuities and discontinuities with arithmetic. In : Sutherland R. (ed.) Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

BEHR M., ERLWANGER S., NICHOLS E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, Vol 92, pp. 13-15.

BLANDO J. A., KELLY A. E., SCHNEIDER B. R., SLEEMAN D. (1989). "Analyzing and Modeling Arithmetic Errors", *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, n°3, pp. 301-308.

BOOTH L. (1985). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, n°5, 5-17.

BOOTH L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.) *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook*. Reston, VA: NTCM.

BOOTH L. (1989). Grade 8 students' understanding of structural properties in mathematics. Actes de la 13e Conférence Internationale *Psychology of Mathematics Education* .

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19/1, pp. 77-124

BROUSSEAU G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , Vol. 4/2 pp. 165- 198.

BROUSSEAU G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7/2. Grenoble : La Pensée sauvage. pp.33- 116.

CAUZINILLE-MARMECHE E., MATHIEU J., RESNICK L. (1987). L'intégration de nouvelles connaissances : entre arithmétique et algèbre, *Journal européen de psychologie de l'éducation*, Vol 2, n°1, pp. 41-57.

CHEVALLARD Y., CONNE F. (1984). Jalons à propos de l'algèbre. *Interactions didactiques 3*. Universités de Genève et Neufchatel. pp. 1-54.

CHEVALLARD, Y. (1985). La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1985a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège- première partie : l'évolution de transposition didactique. *Petit x,* n°5, pp. 51-94. IREM de Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège- Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation . *Petit x*, n° 19, pp. 43-72. IREM de Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège-Troisième partie. *Petit x* , n° 23, pp. 5-38. IREM de Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques, Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle* :, pp. 119-140.

CHEVALLARD Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 19, n°2, pp. 221-266.

COPPÉ S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse de doctorat en Didactique des Mathématiques de l'Université de Lyon 1.

COULANGES L. (2000). *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième.* Thèse de doctorat en Didactique des Mathématiques l'Université de Grenoble.

CROSET M-C. (2005). *Modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves en algèbre. Cas de développement et de réduction en algèbre*. Mémoire de master 2 recherche environnements informatique d'apprentissage humain et didactique.

DAVIS R.B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, Vol 1/3.

DAVIS R. B., JOKUSCH E., MCKNIGHT, C. (1987). Cognitive processes in learning algebra, *Journal of children's Mathematical Behavior*, Vol. 2, n°1, pp. 10-320.

DEBLOIS L., DE CONTRET S. R. (2005). Et si les erreurs des élèves étaient le fruit d'une extension de leurs connaissances ? *La réussite scolaire. Comprendre et mieux intervenir* CRRES. Les Presses de l'université Laval, pp. 135-144.

DEBLOIS L. (2006). Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'interventions en classe de mathématiques. *Educational studies in mathematics*, Vol. 62, n°3, pp. 307-329.

DOUADY R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 7/2 p. 5-31. La pensée sauvage. Grenoble.

DOUADY R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères-Irem*, n°15, pp. 38-61.

DROUHARD J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université de Paris VII.

DUVAL, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives (*IREM de Strasbourg). 5. 37-65.

GASCON, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternance à "l'arithmétique généralisée". Grenoble : *Petit x* n° 37.

GRUGEON B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Thèse de doctorat en didactique des Mathématiques, IREM PARIS VII.

KIERAN C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 12, pp. 317-326.

KIERAN C (1991). Cognitive processes involved in learning school algebra, Learning algebra. In Mathematics and cognition, J. Killpatrick (ed.), Cambridge University press.

KIERAN C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning. Douglas A. Grouws (ed.) pp. 390-419, New York Macmillan.

KIERAN C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra - Some pros and cons. *proc. PME XVIII*, Vol. 1, 157-176.

KIRSHNER D., AWTRY T. (2004). Visual Salience of algebraic transformations. *Journal for research in mathematics Education*, Vol 35/4, pp. 224-257.

LE BORTEF G. (2007). *Professionnaliser, Le modèle de la navigation professionnelle*. Collection Ressources humaines. EYROLLES.

LEE L., WHEELER D. (1989). The arithmetic connection. *Educational studies in mathematics*, Vol 20. 41-45 Kluwer Academic Publishers.

LEMOYNE G., CONNE F., BRUN J. (1993). Du traitement des formes à celui des contenues d'écritures littérales : Une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 13/3, pp. 333-384.

LENFANT, A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de l'université de Paris 7.

MARGOLINAS C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Editions La pensée Sauvage.

MATZ M. (1980) Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, Vol (3), n°1, pp. 93-166.

Pascal D. (1980). *Le problème du zéro. L'économie de l'échec dans la classe et production de l'erreur*. Mémoire de DEA, Université d'Aix-Marseille II et Université de Bordeaux I.

PAYNE S., SQUIBB H. (1990). Algebra Mal-Rules and cognitive accounts of error. *Cognitive Science*, n°14, pp. 445-481.

ROBERT A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 21/1.2, pp. 57-80.

RODITI, E. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23/2

SACKUR C., DROUHARD J.-P., MAUREL M., PÉCAL M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?. *Repères-Irem*, n°28, p. 37-68.

SCHMIDT S., BEDNARZ N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : Difficultés rencontrées par les futures enseignants. *Educational studies in mathematics*, Vol 32/2, pp. 127-155.

SFARD A. (1991). On the nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, n°22, pp. 1-36.

SLEEMAN D. (1984). An attempt to understand students' understanding of basic algebra. *Cognitive Science*, n°8, pp. 387-412.

STACEY K., MACGREGOR M.(1994). Algebraic sums and products : Student's concepts and symbolism. In J.P. da Pond and J.F. Matos (eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Lisbon, Portugal, Vol. 43, pp. 289-296.

STIGLER J., GONZALES P., KAWANAKA T. KNOLL S., SERRANO A. (1999). The TIMSS Video Tape Classroom Study. Methods and Findings from and Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instructions in Germany, Japan and the United States. National Center for Education Statistics. A research and Development Report. Chapter 2. Methods.

TIBERGHIEN A., MALKOUN L, BUTY C., SOUASSY N., MORTIMER E. (2007). Analyse des savoirs en jeu en classe de physique à différentes échelles de temps. AGIR ENSEMBLE. *L'action didactique conjointe du professeur et des élèves. Presses Universitaire de Rennes.*

TIROSH D., EVEN R., ROBINSON N. (1998). Simplifying algebraic expressions : Teacher awareness and teaching approaches. *Educational studies in mathematics*, Vol. 35, n° 26, pp. 51-64

TONNELLE, J. (1980). *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, D.E.A., Université de Bordeaux 1 et Marseille II.

VERGNAUD G., CORTES A., FAVRE-ARTIGUE P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologique et didactiques. *Colloque de la société française de Psychologie. Les apprentissages-Perspectives actuelles, Saint-Denis.*

VERGNAUD G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique. Textes réunis par C. Laborde. Grenoble : La Pensée Sauvage.

VERGNAUD G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. N. Bednarz et C. Garnier (Eds) .CIRADE.

Dictionnaires

Bouvier A., George M, Le Lionnais F., (2005) Le dictionnaire des mathématiques, Presses universitaire de France-PUF.

Hauchecorne B. (2003) Les Mots & les Maths: Dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique. Ellipses Marketing

Le Petit Robert (1993)

Le Grand Robert (2001)

Manuels scolaires Français

Cinq sur Cinq, HACHETTE, $4^{\text{ème}}$, 2002

Transmath, NATHAN, $4^{\text{ème}}$, 2002

Triangle, HATIER, $4^{\text{ème}}$, 2002

Math, MAGNARD, $4^{\text{ème}}$, 2002

Manuels scolaires Libanais

Construire les Mathématiques, CNRDP, $5^{\text{ème}}$, 1998

Puissance, AL-AHLIA DESCARTES, $5^{\text{ème}}$, 1998

Euclide, DAR ALMOUFID, $5^{\text{ème}}$, 1998

L'art Des Maths, $5^{\text{ème}}$, CENTRE DES SCIENCES DIDACTIQUES, $5^{\text{ème}}$, 1998