Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 11, No. 2 (2022), hal 319-328.

TRANSFORMASI LAPLACE UNTUK MENYELESAIKAN GENERALISASI INTEGRAL FRESNEL

Asmawati Wanazizah, Mariatul kiftiah, Fransiskus Fran

INTISARI

Integral Fresnel adalah integral dengan bentuk $S(u) = \int_0^u sin\,(x^2)\,dx$ *dan* $C(u) = \int_0^u cos\,(x^2)\,dx$ *dengan* $u \in \mathbb{R}$*. Kedua integral tersebut diperumum menjadi* $\int_0^\infty sin\,(tx^p)\,dx$ *dan* $\int_0^\infty cos\,(tx^p)\,dx$ *dengan* $p > 1$*, dan* $t \in \mathbb{R}^+$ *yang selanjutnya dinamakan generalisasi integral Fresnel. Dalam penelitian ini, dicari penyelesaian dari generalisasi integral Fresnel dengan menggunakan pendekatan transformasi Laplace. Penyelesaian generalisasi integral Fresnel diawali dengan memisalkan suatu fungsi* $f(t) = \int_0^\infty sin\,(tx^p)\,dx$ *dan* $g(t) = \int_0^\infty cos\,(tx^p)\,dx$*, sehingga dapat diubah kebentuk transformasi Laplace. Kemudian dilanjutkan dengan menggunakan definisi dan rumus-rumus transformasi Laplace, serta sifat-sifat fungsi Gamma dan Beta. Selanjutnya mentransformasikan kembali ke fungsi awal menggunakan invers transformasi Laplace. Hasil penelitian menunjukan bahwa transformasi Laplace dapat digunakan untuk mencari penyelesaian numerik generalisasi integral Fresnel dengan rumus* $\int_0^\infty sin\ (tx^p)\,dx = \frac{\pi}{2pt^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)} sec\left(\frac{\pi}{2p}\right)$ *dan* $\int_0^\infty \cos\,(tx^p)\,dx = \frac{\pi}{2pt^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)} \csc\left(\frac{\pi}{2p}\right)$.

Kata Kunci : *Integral Fresnel, Generalisasi Integral Fresnel, Transformasi Laplace.*

PENDAHULUAN

Salah satu kajian dalam Kalkulus adalah teori integral. Teori integral merupakan salah satu konsep ilmu dibidang matematika analisis yang terus berkembang dengan pesat, baik secara teori maupun aplikasi. Teori integral memiliki peranan yang penting didalam menyelesaikan berbagai permasalahan kehidupan. Sebagai contoh di bidang matematika/teknik, teori integral digunakan dalam menentukan luas bidang atau volume benda putar. Tentunya, masih banyak permasalahan dibidang lainnya yang dapat diselesaikan dengan teori integral.

Seorang fisikawan bernama Augustin-Jean Fresnel (1788-1827), mengungkapkan sebuah fenomena optik tentang teori difraksi [1]. Difraksi adalah suatu peristiwa pelenturan atau pembelokkan gelombang karena adanya halangan [2]. Dalam menganalisis teori difraksi, Fresnel memunculkan dua bentuk integral yang kemudian dikenal dengan integral Fresnel.

Integral Fresnel merupakan integral dengan bentuk $S(u) = \int_0^u \sin\ (x^2)\,dx$ dan $C(u) = \int_0^u \cos\ (x^2)\,dx$ dengan $u \in \mathbb{R}$ [3]. Integral Fresnel $S(u)$ dan $C(u)$ merupakan fungsi ganjil dari u, sehingga $S(-u) = -S(u)$ dan $C(-u) = -C(u)$ [4]. Integral Fresnel merupakan salah satu integral yang tidak dapat diselesaikan secara analitik, karena tidak memiliki antiturunan [5]. Oleh karena itu, digunakanlah metode numerik untuk memperoleh aproksimasinya atau nilai pendekatannya. Seperti pada penelitian [6] yang menggunakan aturan trapesium modifikasi untuk menghitung integral Fresnel.

Integral Fresnel memiliki nilai $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ketika $u = \infty$. Hal ini telah dibuktikan oleh beberapa peneliti, yaitu pada penelitian [7,8,9]. Integral Fresnel juga dapat diperumum menjadi $\int_0^\infty \sin\,x^p\,dx$ dan $\int_0^\infty \cos\,x^p\,dx$ dengan $p > 1$. Bentuk ini disebut dengan generalisasi integral Fresnel. Pada penelitian [10] , penyelesaian generalisasi integral Fresnel diperoleh dari fungsi hipergeometrik dan fungsi Gamma tidak lengkap. pada penelitian ini, integral Fresnel digeneralisasikan dalam bentuk

$\int_0^\infty \sin(tx^p)\,dx$ dan $\int_0^\infty \cos(tx^p)\,dx$, dengan $t \in \mathbb{R}^+$. Adapun penyelesaian dari $\int_0^\infty \sin(tx^p)\,dx$ dan $\int_0^\infty \cos(tx^p)\,dx$ dicari dengan menggunakan transformasi Laplace.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini dimulai dengan memisalkan $f(t) = \int_0^\infty \sin(tx^p)\,dx,\ g(t) = \int_0^\infty \cos(tx^p)\,dx,$ sehingga dapat ditransformasikan kedalam transformasi Laplace. Selanjutnya, integral dalam transformasi Laplace disederhanakan dengan menggunakan beberapa sifat fungsi gamma dan beta, sehingga diperoleh hasil akhir transformasi Laplace nya. Kemudian, hasil akhir tersebut di transformasikan ke fungsi awal menggunakan konsep invers transformasi Laplace sehingga diperolehlah penyelesaian generalisasi integral Fresnel.

FUNGSI GAMMA

Fungsi gamma didefinisikan oleh integral tak wajar, yang dituliskan sebagai

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx \tag{1}$$

yang konvergen untuk setiap $n > 0$ [11]. Fungsi gamma memiliki formula berulang

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{2}$$

dengan $\Gamma(1) = 1$. Dari Persamaan (2) dapat ditentukan suatu persamaan untuk n bilangan bulat positif, yaitu

$$\Gamma(n+1) = n!$$

FUNGSI BETA

Fungsi beta dinotasikan dengan $B(m,n)$, dan didefinisikan sebagai

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \tag{3}$$

yang konvergen untuk $m > 0$ dan $n > 0$ [11].

Adapun sifat fungsi gamma dan beta yang digunakan dalam penelitian ini, dituliskan pada Persamaan-persamaan berikut:

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} sin^{2m-1}\,\theta\; cos^{2n-1}\,\theta\; d\theta \tag{4}$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{5}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \tag{6}$$

TRANSFORMASI LAPLACE

Secara umum transformasi laplace digunakan untuk menstransformasikan sinyal atau sistem dari kawasan waktu ke kawasan frekuensi [12]. Misalkan $f(t)$ adalah suatu fungsi dari t, dengan $t > 0$, maka transformasi Laplace dari $f(t)$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt \tag{7}$$

dengan e^{-st} merupakan fungsi kernel transformasi dan s merupakan variabel transformasi dalam $\mathbb{R}^+$ [13,14,15]. Berdasarkan Persamaan (7), transformasi Laplace dapat mentransformasikan beberapa fungsi berikut

1. $f(t) = t^n$, dengan $n > -1$, maka

$$\mathcal{L}\{t^n\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt$$

Dengan memisalkan $u = st$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n d\left(\frac{u}{s}\right) \\
\mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^n du \\
\mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad (8)
\end{aligned}$$

2. $f(t) = \sin at$, dengan a merupakan bilangan real konstan, maka

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt$$

Dengan menggunakan integrasi parsial,

$$u = \sin at$$
$$dv = e^{-st} dt$$

Diperoleh

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin at \Big]_0^\infty + \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos at$$

$$= 0 + \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos at$$

Misal $u = \cos at$ dan $dv = e^{-st}\, dt$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin at\} &= \frac{a}{s}\left(-\frac{1}{s}\cos at\Big]_0^\infty - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt\right) \\
\mathcal{L}\{\sin at\} &= \frac{a}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{a}{s}\right) \mathcal{L}\{\sin at\} \\
\mathcal{L}\{\sin at\}\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) &= \frac{a}{s^2} \\
\mathcal{L}\{\sin at\} &= \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad (9)
\end{aligned}$$

3. $f(t) = \cos at$, dengan a merupakan bilangan real konstan, maka

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos at \, dt$$

Dengan menggunakan integrasi parsial,

$$u = \cos at$$
$$dv = e^{-st} dt$$

Diperoleh

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = -\frac{1}{s}\cos at\Big]_0^\infty - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt$$

Misal $u = \sin at$ dan $dv = e^{-st}dt$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\sin at\Big]_0^\infty + \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\right)$$
$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\left(\frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\right)$$
$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2}\mathcal{L}\{\cos at\}$$
$$\mathcal{L}\{\cos at\}\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s}$$
$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \tag{10}$$

Transformasi Laplace juga berlaku kebalikan. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut suatu invers transformasi Laplace dari $F(s)$. Secara simbolis ditulis $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, dimana $\mathcal{L}^{-1}$ disebut operator invers transformasi Laplace [12]. Invers transformasi Laplace dari Persamaan (8) dituliskan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \tag{11}$$

dengan $n > -1$.

INTEGRAL FRESNEL

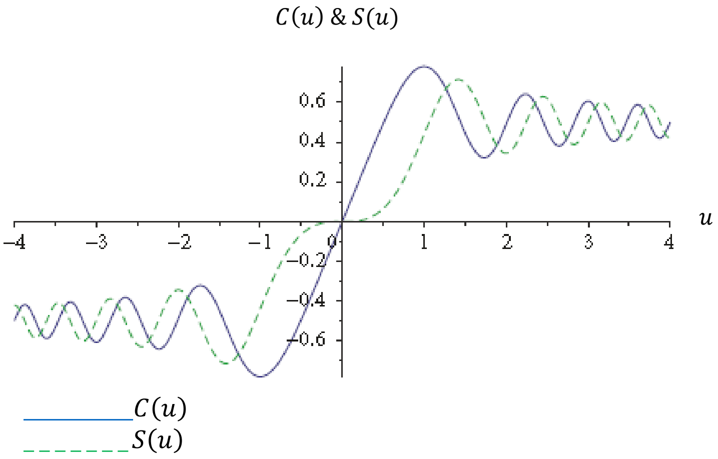
Integral Fresnel adalah dua fungsi transenden $S(u)$ dan $C(u)$ yang dikemukakan oleh Augustin-Jean Fresnel dalam teori difraksi [16]. Integral Fresnel dituliskan dalam bentuk:

$$S(u) = \int_0^u \sin(x^2)\,dx \tag{12}$$
$$C(u) = \int_0^u \cos(x^2)\,dx \tag{13}$$

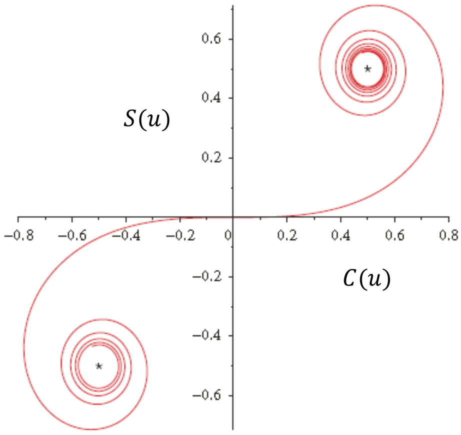
dengan $u \in \mathbb{R}$.

Integral Fresnel $S(u)$ dan $C(u)$ memiliki beberapa nilai sederhana, yaitu $S(0) = C(0) = 0$ dan $S(\infty) = C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$. Adapun kurva integral Fresnel $S(u)$ dan $C(u)$ dapat dilihat pada Gambar 1.

Integral Fresnel menghasilkan suatu kurva parametrik yang disebut dengan cornu spiral atau spiral Euler. Cornu spiral adalah kurva yang kelengkungannya berubah secara linear dengan panjang busur [17]. Di bidang optik, cornu spiral digunakan untuk mendapatkan gambar kuantitatif dari pola difraksi [16]. Cornu spiral atau spiral Euler dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 1. Kurva $S(u)$ dan $C(u)$ [16]



Gambar 2. Cornu Spiral [16]

Integral Fresnel $S(u)$ dan $C(u)$ memiliki ekspansi deret pangkat yang diberikan oleh deret Maclaurin berikut:

$$\begin{aligned}\int_0^u \sin(x^2)\,dx &= \int_0^u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{4n+2}}{(2n+1)!}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^u x^{4n+2}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left.\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]_0^u \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, u^{4n+3}}{(2n+1)!\, 4n+3}\end{aligned}$$

$$\int_0^u \cos(x^2)dx = \int_0^u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^u x^{4n}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\bigg]_0^u$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, u^{4n+1}}{(2n)!\, 4n+1}$$

GENERALISASI INTEGRAL FRESNEL

Dalam penelitian ini, generalisasi integral Fresnel diperumum dengan menambahkan koefisien dari variabel x dan dituliskan dalam bentuk:

$$F(p) = \int_0^{\infty} \sin\ (tx^p)\, dx \tag{14}$$

$$G(p) = \int_0^{\infty} \cos\ (tx^p)\, dx \tag{15}$$

dengan $p > 1$.

Menentukan Penyelesaian $F(p)$

Dari Persamaan (14), misalkan ada fungsi $f(t) = \int_0^{\infty} \sin\ (tx^p)\, dx$. Dengan menggunakan konsep transformasi Laplace pada Persamaan (9) diperoleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} \frac{x^p}{s^2 + x^{2p}}\, dx \tag{16}$$

Dari Persamaan (16), dapat dimisalkan $x^p = s \tan \theta$, sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{ps^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^{\pi/2} sin^{\frac{1}{p}}\, \theta\, cos^{-\frac{1}{p}}\, \theta\, d\theta \tag{17}$$

Bentuk integral pada Persamaan (17), dapat diubah kedalam fungsi beta dengan menggunakan Persamaan (4), dengan nilai m dan n sebagai berikut:

$$m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}$$

$$n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$$

Sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2ps^{1-\frac{1}{p}}} \cdot B\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right)\right) \tag{18}$$

Berdasarkan Persamaan (5) dan (6), maka Persamaan (18) menjadi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2ps^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right)$$

$$= \frac{1}{2ps^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right)\pi}$$

$$= \frac{1}{2ps^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2p}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{2ps^{1-\frac{1}{p}}} \sec\left(\frac{\pi}{2p}\right)$$

Selanjutnya mencari hasil untuk $f(t)$ dengan menggunakan definisi invers transformasi Laplace.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\}$$

Diperoleh

$$f(t) = \frac{\pi}{2p} \sec\left(\frac{\pi}{2p}\right) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1-\frac{1}{p}}}\right\}$$

Berdasarkan Persamaan (11), diperoleh

$$f(t) = \frac{\pi}{2pt^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \sec\left(\frac{\pi}{2p}\right)$$

Karena, $f(t) = \int_0^\infty \sin(tx^p)\, dx$ maka penyelesaian dari $F(p)$ yaitu:

$$\int_0^\infty \sin(tx^p)\, dx = \frac{\pi}{2pt^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \sec\left(\frac{\pi}{2p}\right) \tag{19}$$

Menentukan Penyelesaian $G(p)$

Adapun proses penyelesaian untuk $G(p)$ sama seperti proses penyelesian $F(p)$, yaitu dengan memisalkan fungsi $g(t) = \int_0^\infty \cos(tx^p)\, dx$. Kemudian dengan menggunakan konsep transformasi Laplace pada Persamaan (10). Diperoleh

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty \frac{s}{s^2 + x^{2p}}\, dx \tag{20}$$

Dari Persamaan (20), dimisalkan $x^p = s\tan\theta$, sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{ps^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{p}-1}\theta \cos^{1-\frac{1}{p}}\theta\, d\theta \tag{21}$$

Bentuk integral pada Persamaan (21), diubah kedalam fungsi beta dengan menggunakan Persamaan (4), dengan nilai m dan n sebagai berikut:

$$m = \frac{1}{2p}$$

$$n = 1 - \frac{1}{2p}$$

Sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{2ps^{1-\frac{1}{p}}} \cdot B\left(\frac{1}{2p}, 1 - \frac{1}{2p}\right) \tag{22}$$

Berdasarkan Persamaan (5) dan (6), maka Persamaan (22) menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g(t)\} &= \frac{1}{2ps^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2p}\right)\\ &= \frac{1}{2ps^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2p}\right)}\\ &= \frac{\pi}{2ps^{1-\frac{1}{p}}}\csc\left(\frac{\pi}{2p}\right)\end{aligned}$$

Selanjutnya mencari hasil untuk $g(t)$ dengan menggunakan definisi invers transformasi laplace. Diperoleh

$$g(t) = \frac{\pi}{2p}\csc\left(\frac{\pi}{2p}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1-\frac{1}{p}}}\right\}$$

Dengan menggunakan Persamaan (11), diperoleh

$$g(t) = \frac{\pi}{2pt^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\csc\left(\frac{\pi}{2p}\right)$$

Karena, $g(t) = \int_0^\infty \cos\,(tx^p)\,dx$ maka diperoleh penyelesaian dari $G(p)$ sebagai berikut:

$$\int_0^\infty \cos\,(tx^p)\,dx = \frac{\pi}{2pt^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\csc\left(\frac{\pi}{2p}\right) \tag{23}$$

Contoh 1 Diberikan suatu generalisasi integral Fresnel $\int_0^\infty \sin\,(x^{10})\,dx$.

Dengan menggunakan penyelesaian yang telah diperoleh, yaitu pada Persamaan (19), maka

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin\,(x^{10})\,dx &= \frac{\pi}{2.10\Gamma\left(1-\frac{1}{10}\right)}\sec\left(\frac{\pi}{2.10}\right)\\ &= \frac{\pi}{20\Gamma(0{,}9)}\sec\left(\frac{\pi}{20}\right)\\ &\approx 0.1488240487\end{aligned}$$

Contoh 2 Diberikan suatu generalisasi integral Fresnel $\int_0^\infty \cos\,(3x^6)\,dx$.

Berdasarkan Persamaan (23), maka penyelesaian dari $\int_0^\infty \cos\,(3x^6)\,dx$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos\,(3x^6)\,dx &= \frac{\pi}{2.\,3^{\frac{1}{6}}.\,6\Gamma\left(1-\frac{1}{6}\right)}\csc\left(\frac{\pi}{2.6}\right)\\ &= \frac{\pi}{12.\,3^{\frac{1}{6}}\Gamma(0{,}84)}\csc\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &\approx 0.7461741101\end{aligned}$$

Contoh 3 Diberikan suatu generalisasi integral Fresnel $\int_0^\infty \cos\,(2x^5)\,dx$.

Dengan menggunakan Persamaan (23), diperoleh

$$\int_0^\infty \cos(2x^5)\,dx = \frac{\pi}{2.2^{\frac{1}{5}}.5\Gamma\left(1-\frac{1}{5}\right)}\csc\left(\frac{\pi}{2.5}\right)$$
$$= \frac{\pi}{10.2^{\frac{1}{5}}\Gamma(0,8)}\csc\left(\frac{\pi}{10}\right)$$
$$\approx 0.7601911864$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa transformasi Laplace dapat digunakan untuk mencari penyelesaian generalisasi integral Fresnel. Adapun penyelesaian yang didapatkan yaitu:

$$\int_0^\infty \sin(tx^p)\,dx = \frac{\pi}{2t^{\frac{1}{p}}p\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\sec\left(\frac{\pi}{2p}\right)$$

dan

$$\int_0^\infty \cos(tx^p)\,dx = \frac{\pi}{2t^{\frac{1}{p}}p\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}\csc\left(\frac{\pi}{2p}\right)$$

dengan $t > 0,\ p > 1$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Suzuki, M. S. dan Suzuki, I. S. Lecture Note on Senior Laboratory Fresnel-Kirchhoff Diffraction. *ResearchGate*. 2013;

[2] Halliday, D., Robert, R. dan Walker, J. *Fisika Dasar Edisi Ke Tujuh*. Erlangga: Jakarta; 2005.

[3] Kreyszig, Erwin. On The Zeros of Fresnel Integrals. *National Research Counsil of Canada*. 1956; 118-131.

[4] Press, W. H. dan Toukolsky, S. A. Fresnel Integrals, Cosine and Sine Integrals. *American Institute of Physics*. 1992; 1-4.

[5] Smith, T. R. dan Minton, R. B. *Calculus Thrid Edition: Early Transcendental Functions*. McGraw-Hill Science/Engineering/math:United States; 2007.

[6] Alazah, M., Chandler, S. N., dan Porte, S. L. Computing Fresnel Integrals via Modivied Trapezium Rules. *Central Archive at the University of Reading*. 2013; 1-28.

[7] Flanders, H. On The Fresnel Integrals. *Amer Math Monthly*. 1982; 264-266.

[8] Chen, Hongwei. The Fresnel Integrals Revisited. *The College Mathematics Journal*. 2009; 40(4), 259-262.

[9] Leonard, I. E. More on Fresnel Integrals. *Amer Math Monthly*. 1988;

[10] Mathar, R. J. Series Expansion of Generalized Fresnel Integrals. *Mathematics Subject Classification.* 2012; 1-27.

[11] Prayudi. *Kalkulus Lanjut: Fungsi Banyak Variabel dan Penerapannya*. Graha Ilmu: Yogyakarta; 2008.

[12] Spiegel, M. R. *Transformasi Laplace*. Erlangga: Jakarta; 1984.

[13] Debnath, L. dan Bhatta, D. *Integral Transform and Their Application Second Edition*. Taylor and Francis Group: New York; 2007.

[14] Boyce W. E. dan DiPrima R. C. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems Seven Edition*. Wiley and Sons: New York; 2001.

[15] Ross, L. S. *Differential Equation Third Edition*. Wiley and Sons: New York; 1984.

[16] Hernandez, M. S., dkk. Approximation of Fresnel Integrals with Aplications to Diffraction Problems. *Hindawi*. 2018; 1-13.

[17] Levian, Raph. The Euler Spiral: A Mathematical History. *Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley*. 2008; No. UCB/EECS-111, 1-16.

ASMAWATI WANAZIZAH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, asmawati.wamzizah@student.untan.ac.id

MARIATUL KIFTIAH : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak, fransiskusfran@math.untan.ac.id