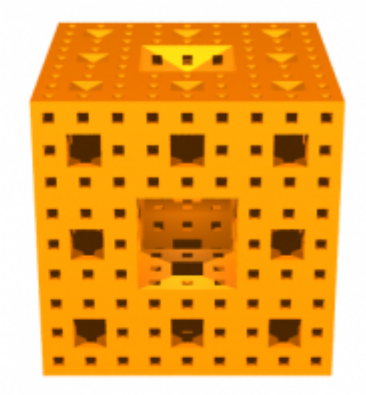
La courbe de Menger : un objet universel

Etienne Ghys, Jos Leys

La courbe de Menger

Un objet universel



Le 5 décembre 2008, par **Étienne Ghys** et **Jos Leys**

Les mathématiciens aiment l'universalité ! Un objet universel dans une théorie donnée est un objet dont la compréhension entraîne celle de tous les autres… Ambitieux, et parfois même un peu arrogant ?

ON parle de revêtement universel, de déformation universelle, d'algèbre universelle etc. La *courbe universelle de Menger* est un exemple très joli.

Qu'est-ce qu'une courbe en topologie ?

Il y a beaucoup de définitions possibles mais nous retiendrons celle qui utilise le concept de *dimension topologique*. Prenons l'exemple d'un cercle, qui est bien sûr le premier exemple de « courbe » auquel on pense.

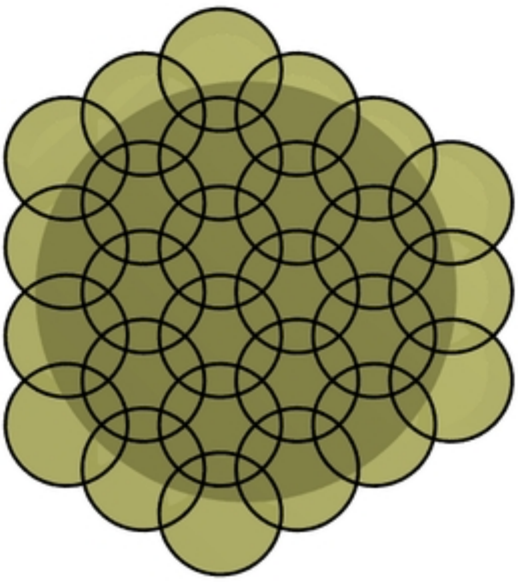
Question de langage

C'est peut-être l'occasion de rappeler une imprécision dans le langage courant lorsqu'on parle du cercle. Pour un mathématicien, un cercle est l'ensemble des points du plan dont la distance à un centre est donnée. Par contre, l'ensemble des points du plan dont la distance au centre est inférieure à un nombre donné est plutôt appelé un disque : intuitivement, un disque est une « surface », un « cercle plein » en quelque sorte, et un cercle est une « ligne ». En dimension supérieure, on parle de sphère et de boule.

Recouvrons le cercle par une collection de petits disques du plan, des petites « pastilles ».

Bien sûr, ces disques se recoupent, parfois deux à deux, parfois trois à trois ou même plus. Mais une propriété importante du cercle est qu'il est toujours possible de le recouvrir par des disques arbitrairement petits qui ne s'intersectent que deux à deux ! Un peu comme des perles mises bout à bout tout au long d'un collier.

Si on remplace maintenant le cercle par un grand disque, on voit que la situation est toute différente. Si l'on recouvre un disque par une collection de petits disques, on ne pourra jamais faire en sorte qu'ils ne se coupent que deux à deux et pas trois par trois.



Voici maintenant la définition d'une *courbe*... Considérons un ensemble de points C, disons contenu dans l'espace usuel de dimension 3 (mais on pourrait le faire dans un espace de n'importe quelle dimension).

Précisions

Nous supposerons ici que C *est borné, c'est-à-dire qu'il est contenu dans une grande boule, qu'il ne s'échappe pas vers l'infini en quelque sorte. Nous supposerons aussi qu'il est fermé : toute limite de points de* C *est un point de* C*.*

Nous dirons que C est une *courbe* s'il est possible de le recouvrir par des « pastilles » arbitrairement petites de telle sorte qu'un point de C appartient au plus à deux pastilles. Les pastilles sont petites mais elles n'ont pas nécessairement la forme d'une boule.

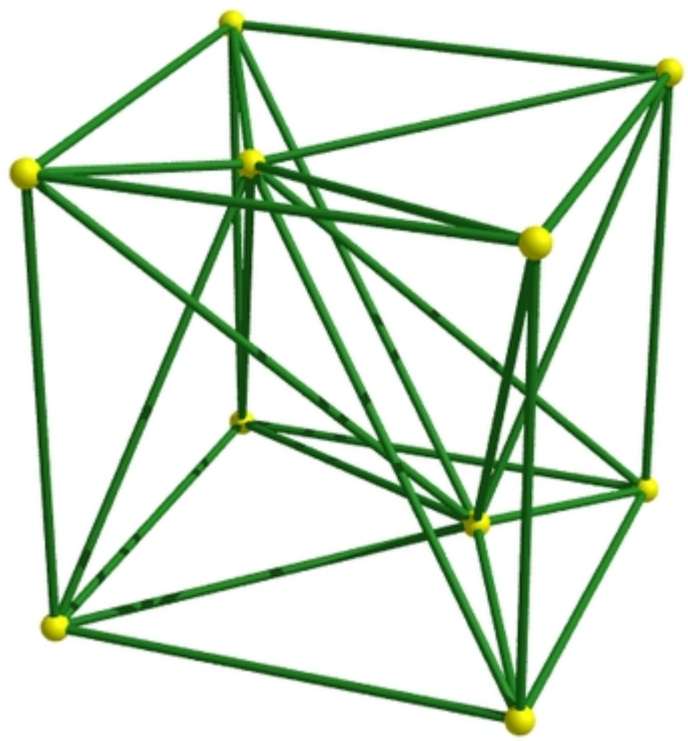
Précisions

Soyons un peu plus précis, pour les puristes ! Les pastilles que nous considérons doivent être ouvertes, au sens de la topologie : si un point est dans une pastille, tous les points qui en sont assez proches le sont également. On impose cette condition pour que les pastilles s'intersectent « vraiment », et pas sur point ou une « ligne » par exemple.

On dit qu'une pastille est « petite » si deux de ses points sont à petite distance ; en clair une petite pastille est contenue dans une boule de petit rayon.

En termes mathématiques, on dit que ces ensembles sont de *dimension topologique 1*.

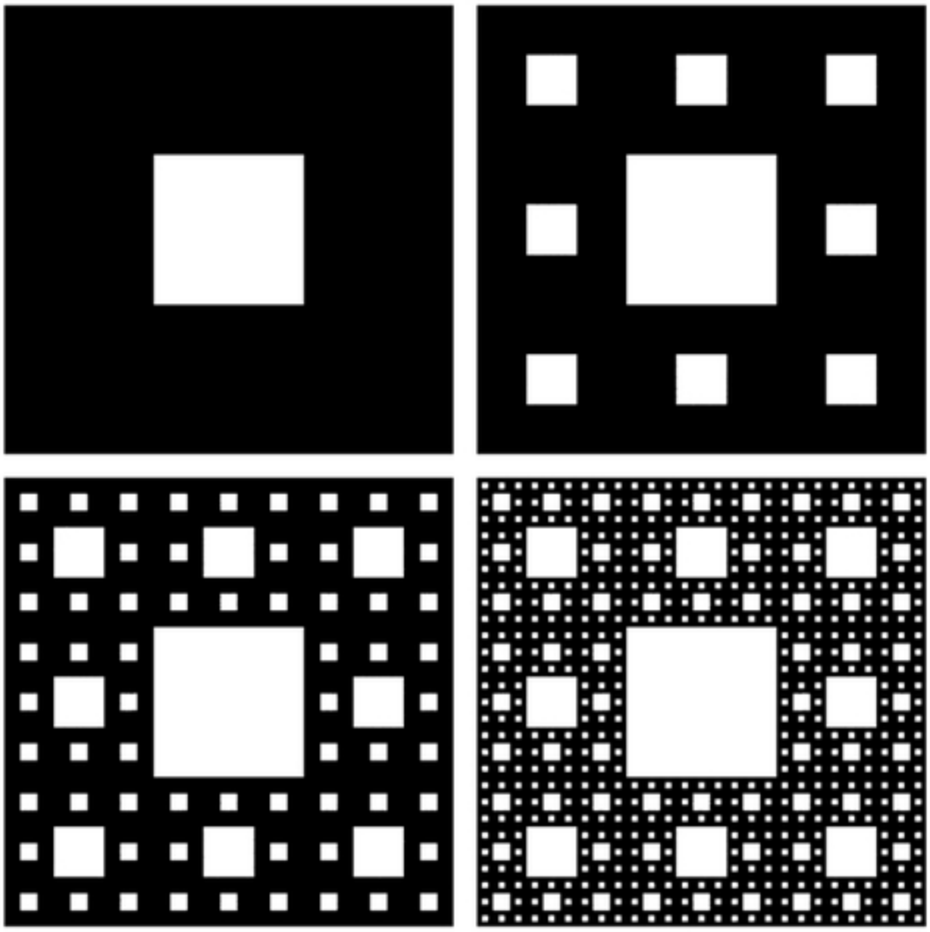
Des exemples ? Nous avons vu le cercle mais n'importe quel graphe fait l'affaire. Prenez un nombre fini de points dans l'espace, et connectez certains d'entre eux par des arêtes rectilignes...



On peut mettre une petite boule au voisinage de chaque sommet et recouvrir les arêtes par des cylindres très petits mis bout à bout, tout cela de manière qu'un point du graphe n'est au plus que dans deux de ces objets.

Mais voici une courbe bien plus compliquée, qu'on appelle la *courbe de Sierpinski*.

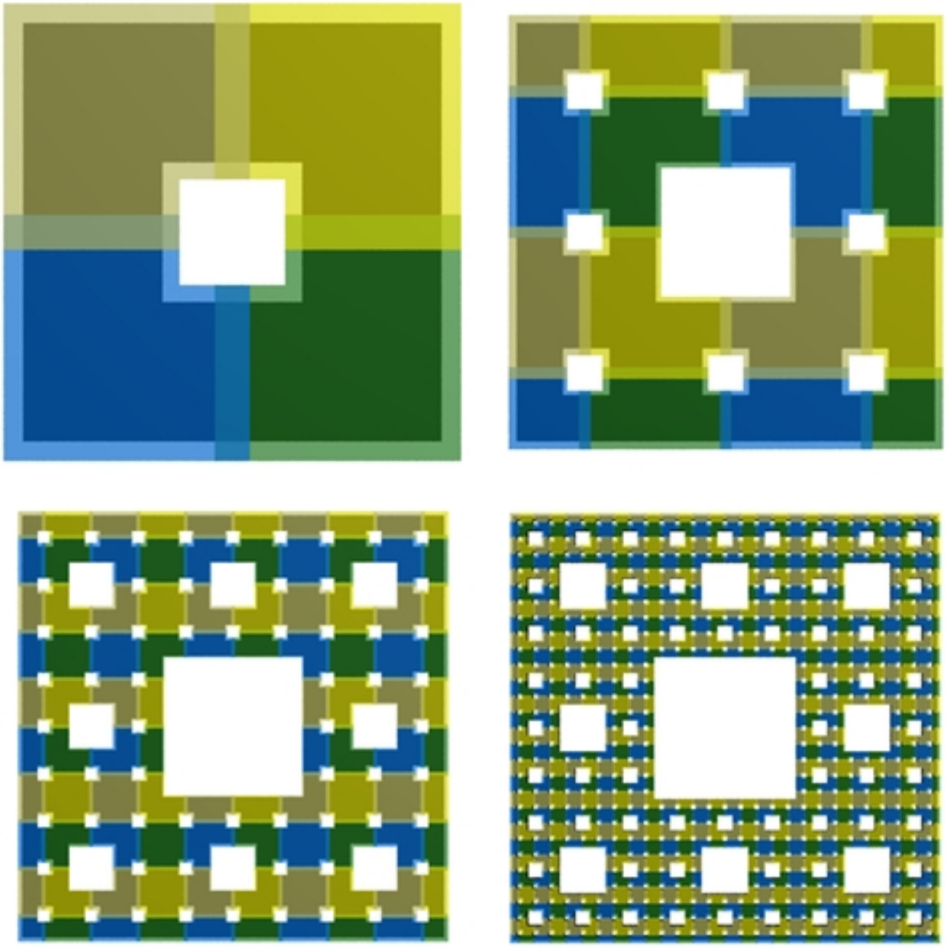
Prenez un carré, de côté 1. Coupez-le en neuf morceaux. Retirez le carré du milieu. Il vous reste une espèce d'anneau formé de 8 petits carrés. Et faites subir le même sort aux huit carrés. Il vous reste 64 très petits carrés... et recommencez à l'infini.



Bien sûr la figure ci-dessus ne montre que les quatre premières étapes de la construction mais il faut imaginer que si l'on continue à l'infini il reste effectivement quelque chose. Ce « quelque chose » ressemble beaucoup à la quatrième figure en fait, sauf si le lecteur a une vue excellente (et même ! il ne pourra pas voir au delà des pixels de l'écran). Si on faisait une figure d'une résolution plus grande et si on observait avec une loupe, il faudrait peut-être aller jusqu'à la dixième étape pour avoir une meilleure image de l'objet limite. Il faut un peu d'imagination pour « passer à la limite ».

Ce qui reste quand vous avez retiré cette infinité de petits carrés, de plus en plus petits, est une courbe !

Pas trop difficile à voir puisque l'objet limite est assez bien approché par un objet à une étape finie, qui est formé de petits carrés qu'on peut recouvrir par de petites pastilles qui ne se coupent que deux à deux. Regardez bien les figures qui suivent pour comprendre comment recouvrir cet ensemble par de petites pastilles qui ne se recoupent que deux par deux.



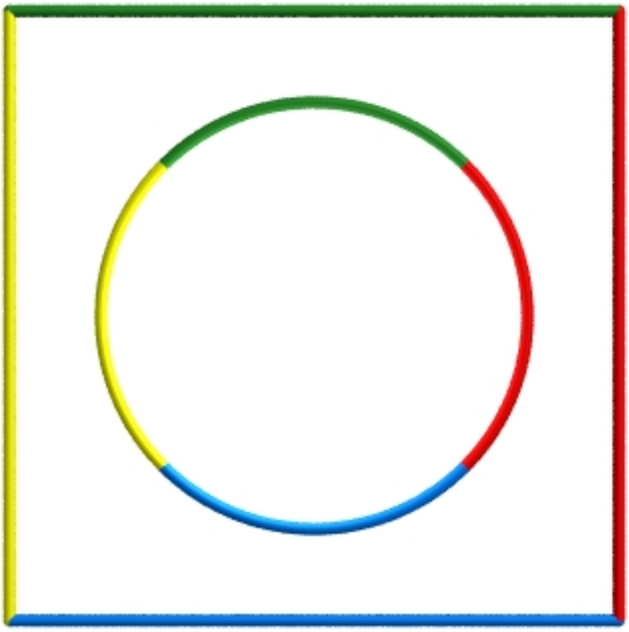
La courbe de Sierpinski est-elle universelle ?

D'abord une mise en garde : la *topologie* est parfois appelée la géométrie du caoutchouc... Cela signifie que le topologue ne fait aucune différence entre deux objets qui peuvent se déformer l'un en l'autre.

Plus formellement,

si on a deux parties A et B du plan ou de l'espace par exemple, on dit qu'elles sont homéomorphes (elles ont « la même forme ») s'il existe une application f qui transforme les points de A en les points de B bijectivement (à chaque point de A correspond un seul point de B et réciproquement) et continûment (lorsqu'un point de A se déplace peu son image se déplace peu et réciproquement : il n'y a pas de déchirure).

Par exemple, on peut très simplement transformer le bord d'un carré en un cercle. Il suffit d'envoyer chaque côté du carré dans un quart de cercle par une transformation convenable. Pour le topologue, il n'y a aucune différence entre un cercle, une ellipse ou le bord d'un carré !

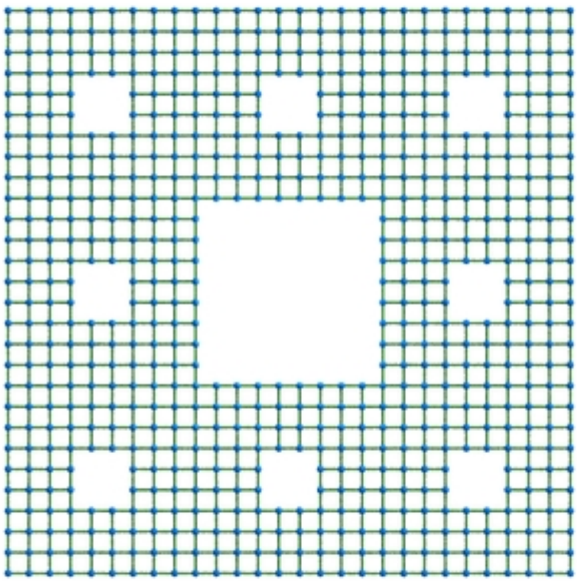


Encore une définition : on dira qu'une courbe disons C_{univ} est *universelle* si toute autre courbe C peut être considérée comme une partie de C_{univ}. Plus précisément, cela signifie qu'il y a plongement, une application continue injective, de C dans C_{univ}. La courbe universelle est assez « grosse » et « assez compliquée » pour contenir toutes les courbes !

Précisions

Une application de C_1 vers C_2 est injective si deux points différents de C_1 ont des images différentes dans C_2.

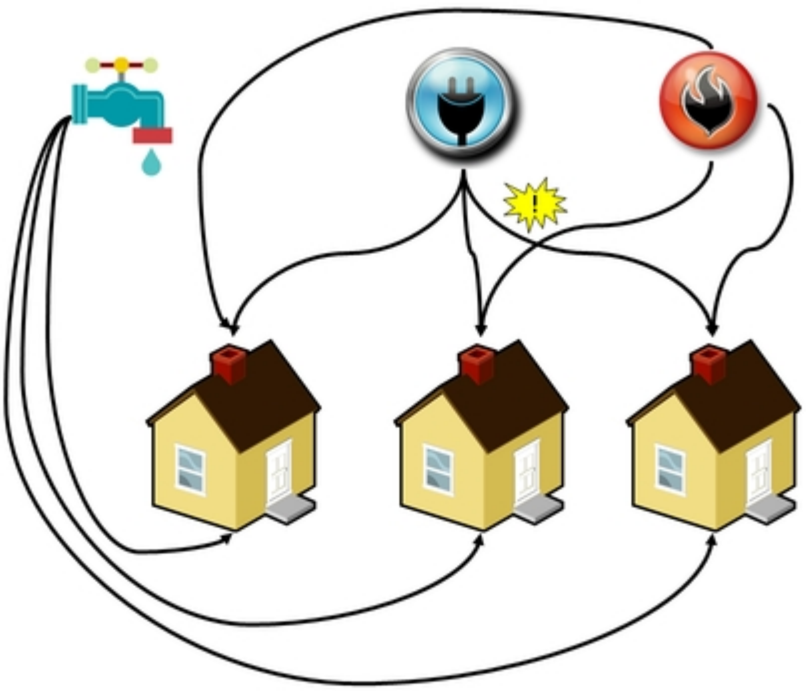
La courbe de Sierpinski contient beaucoup de courbes. Par exemple, voici un graphe qui est évidemment contenu dans cette courbe.



Hélas, la courbe de Sierpinski n'est pas universelle ! Pourquoi ? Si elle était universelle, elle contiendrait toutes les courbes et en particulier tous les graphes. Mais comme la courbe de Sierpinski est une partie du plan, tous les graphes pourraient être plongés dans le plan, ils seraient *planaires* comme on dit. Et une petite énigme bien connue montre qu'il n'en est rien. Le *graphe eau-gaz-électricité*, constitué de trois usines et de trois maisons, dans lequel chaque maison est reliée à chaque usine, ne peut pas se dessiner dans un plan. Essayez de le faire et ensuite, essayez de montrer que ce n'est pas possible.

Précisions

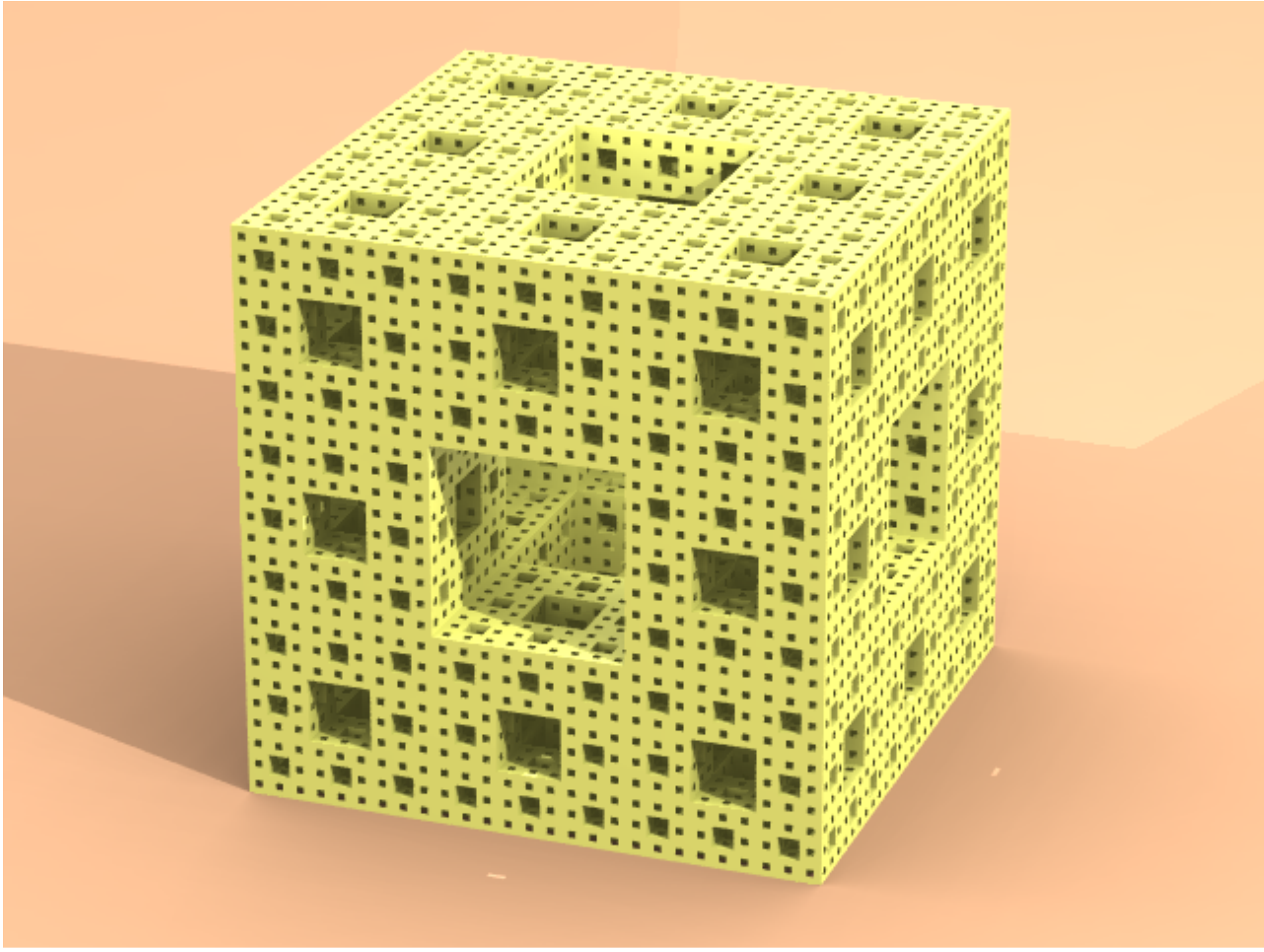
Soyons un tout petit peu plus précis. Montrer qu'il n'est pas possible de placer 6 points dans le plan, les trois maisons et les trois usines, et de les relier par des segments qui ne se coupent pas, ce n'est pas trop difficile (mais montrez-le quand même pour vous exercer !). Par contre, dans la phrase « on ne peut pas plonger ce graphe dans le plan » on est plus exigeant, puisqu'on demande de montrer qu'il n'existe pas d'application continue et injective de ce graphe dans le plan. Une telle application pourrait tout à fait envoyer une arête du graphe sur une courbe non rectiligne qui connecte une maison et une usine ! Si vous trouvez l'exercice difficile, c'est normal !



Ainsi, ce graphe qui, comme tous les graphes, est une courbe, ne peut pas être placé à l'intérieur de la courbe de Sierpinski. Il faut une nouvelle idée...

La courbe de Menger

Au lieu d'un carré, on part d'un cube. On le découpe en 27 petits cubes et on retire le cube central ainsi que les six cubes aux centres des faces. Il en reste 20. Et on recommence, et on recommence à l'infini...



Et voilà, la courbe de Menger ! Pour la voir dans toutes ses formes, prenez donc des lunettes stéréoscopiques

et regardez ce film....

Le film en 3D. **Le film normal.**

Si vous avez des lunettes 3D, regardez ce film-ci :

La courbe de Menger (en relief)

Cette fois, c'est vrai, c'est un théorème : **la courbe de Menger est universelle**. Elle contient toutes les courbes.

Voici une esquisse du début d'une preuve...

On commence par montrer que la courbe de Menger contient tous les graphes finis. Pour cela, on regarde les sommets des 20^N *cubes qui restent à la* N*-ème étape et on les joint par toutes les arêtes de tous ces cubes. Cela fournit un graphe compliqué, de plus en plus compliqué quand* N *tend vers l'infini. Il s'agit alors de montrer que tout graphe peut être placé dans l'un de ces graphes explicites, pour une certaine valeur de* N*, et donc dans la courbe de Menger. Mais il y a bien d'autres courbes que les graphes... Alors, on considère une courbe* C*. Par hypothèse, quelque soit le rayon* r*, on peut la recouvrir par des pastilles de rayons inférieurs à* r *qui ne se coupent que deux à deux. Alors, on construit un graphe en plaçant un sommet dans chaque pastille et en joignant deux sommets si les pastilles correspondantes se coupent. Si* r *est très petit, on peut penser à ce graphe comme une bonne approximation de* C*. Alors, on peut placer ce graphe dans la courbe de Menger, pour une valeur de* r*, puis pour une autre valeur de* r *plus petite etc. De cette manière, on place des graphes qui ressemblent de plus en plus à la courbe* C *à l'intérieur de la courbe de Menger. Ensuite, il faut passer à la limite... Il reste encore du travail à faire bien sûr mais les mathématiciens travaillent !*

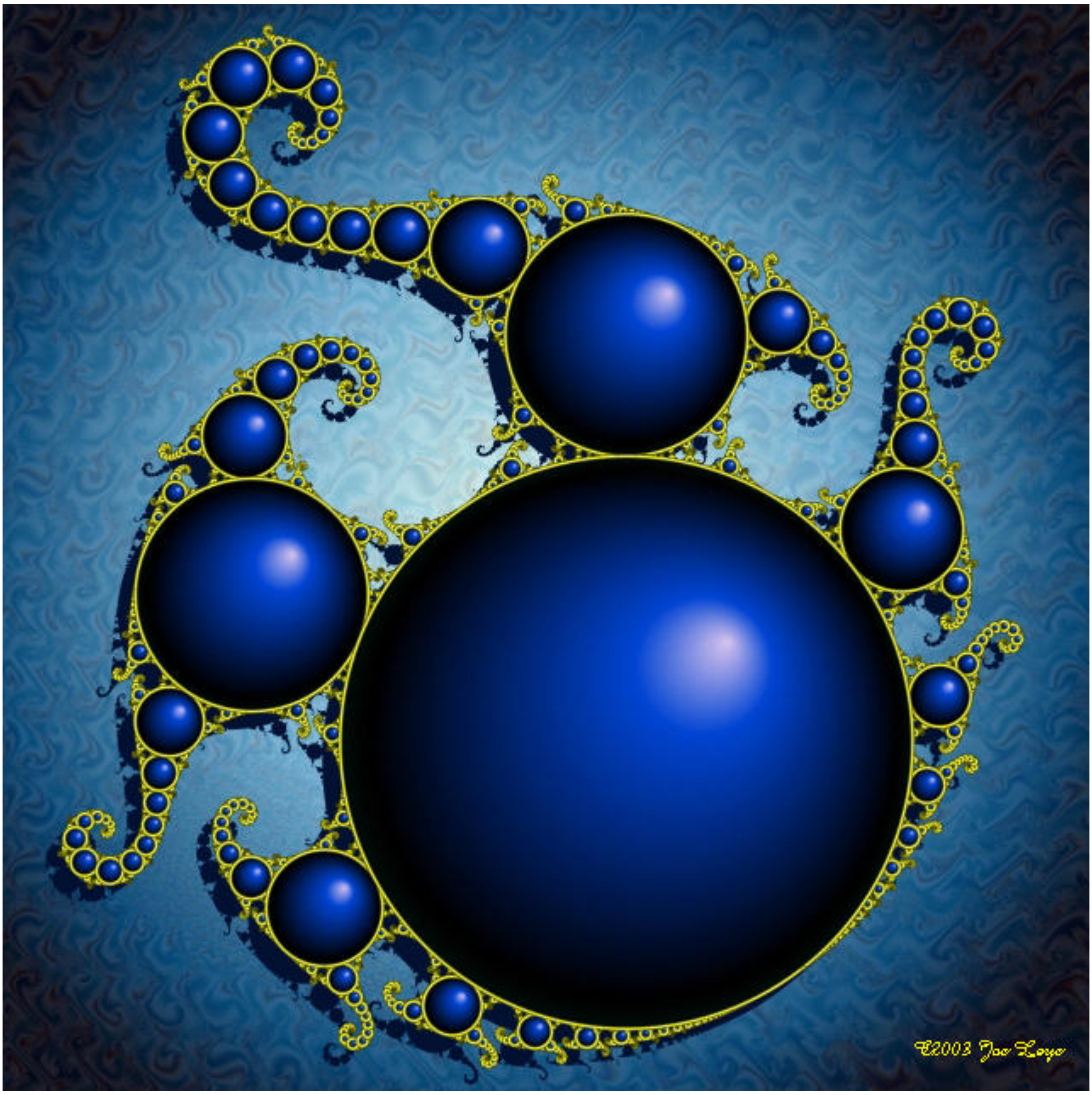
Comme la courbe de Menger est universelle, elle doit contenir la courbe de Sierpinski ! Mais c'est évident : la courbe de Sierpinski apparaît comme la partie de la courbe de Menger qui est sur l'une des faces du cube initial. D'ailleurs la courbe de Sierpinski n'est pas en reste : même si elle n'est pas universelle, elle est quand même la courbe planaire universelle !

Un ensemble fractal...

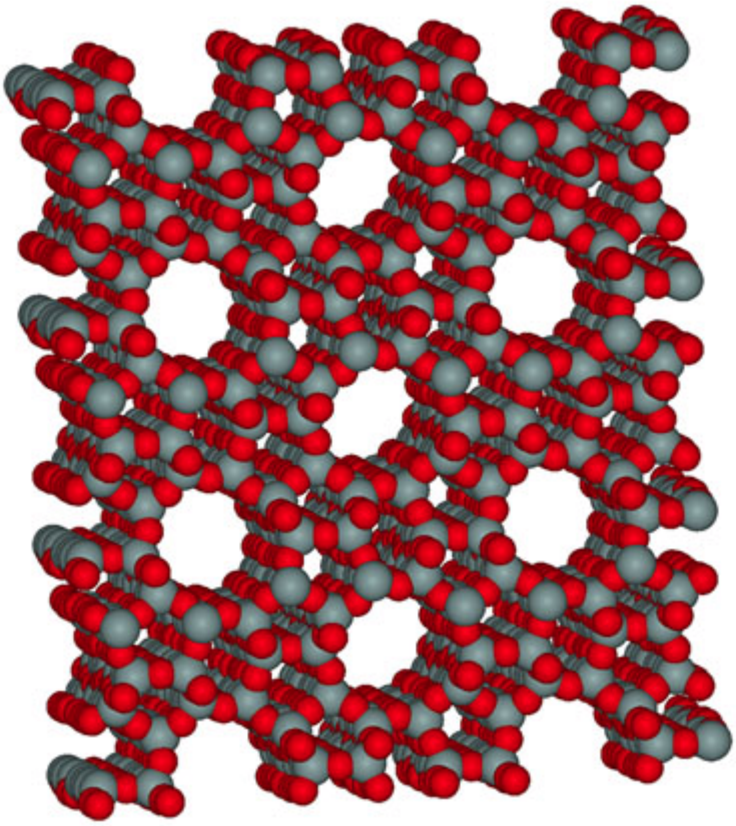
Bien sûr, la courbe de Menger n'est qu'un objet fractal parmi tant d'autres mais son caractère universel lui donne quelques privilèges dans la galerie des objets mathématiques... Le lecteur ne sera pas dupe : de la même manière qu'il existe une courbe universelle, il existe une surface universelle (on parle d'un tapis) ! Et il existe même un objet de dimension zéro qui est universel... et qui est déjà apparu dans ce site : l'ensemble de Cantor.

Jadis, la plupart des mathématiciens considéraient ces objets comme des choses pour le moins bizarres, tout juste bonnes pour donner des contre-exemples ! Mais aujourd'hui, ils ont compris que ces objets interviennent naturellement dans de nombreux contextes. Par exemple dans l'étude des systèmes dynamiques, mais aussi en théorie des nombres.

Voici une image d'un ensemble limite d'un groupe kleinéen, très proche d'être une courbe de Sierpinski...



Les physiciens eux-mêmes n'hésitent pas à modéliser certains matériaux, par ce genre de fractale. Regardez par exemple un **zéolithe** dont on dit que la nature microporeuse le rend intéressant comme tamis moléculaire (en passant on constate qu'il n'y a pas que les mathématiciens qui utilisent des mots compliqués : ce zéolithe s'appelle ZSM-5). Ne vous rappelle-t-il pas la courbe de Sierpinski ?



Karl Menger a vécu entre 1902 et 1985. Après des études à Vienne, il émigre aux États-unis en 1936. La courbe de Menger fait partie de son travail fondateur en topologie, à une époque où les concepts mêmes devaient être développés. Qu'est-ce qu'une courbe ? Qu'est-ce qu'une surface ? Qu'est-ce que la distance ? Que veut-on dire quand on dit que deux points sont voisins etc. La topologie a une longue histoire qui remonte au dix-neuvième siècle et elle a été érigée en discipline autonome au début du vingtième siècle. Mais à cette époque, les objets manipulés étaient très réguliers : des courbes et des surfaces lisses pour l'essentiel. C'est grâce au travail de mathématiciens comme Menger que ce type d'objets « exotiques » ont commencé à devenir fondamentaux. Ceci préparait le chemin pour la théorie des ensembles fractals qui est devenue si populaire aujourd'hui.

Pour en savoir plus

Sur Menger :

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Menger.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger

Karl Menger, General Spaces and Cartesian Spaces, (1926) Communications to the Amsterdam Academy of Sciences. English translation reprinted in Classics on Fractals, Gerald A.Edgar, editor, Addison-Wesley (1993) ISBN 0-201-58701-7

Karl Menger, Dimensionstheorie, (1928) B.G Teubner Publishers, Leipzig.

Karl Menger : Selecta Mathematica By Karl Menger, Berthold Schweizer Published by Springer, accessible sur googlebooks.

Pour en savoir plus sur la dimension :

http://www.wzw.tum.de/ane/dimensions/dimensions.html (en anglais)

Un cours de topologie (en anglais)

Pour en savoir un peu plus sur la théorie des graphes :

Théorie des graphes

Théorie des graphes

Graphe planaire

Crédits images