

Бомба А. Я., д.т.н., професор, Бойчура М. В., к.т.н., Мічута О. Р., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ОДИН ПІДХІД ДО ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ОБЛАСТЕЙ КОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦІАЛУ НА ФІЗИЧНІ ОБЛАСТІ

Запропоновано механізм підвищення точності конформних відображень у випадку застосування числових методів комплексного аналізу при дослідженні фізичних областей із порушеними умовами ортогональності в околах «ключових» точок ділянок прикладання потенціалів. Відповідний алгоритм реалізований за умови задання форми досліджуваного двовимірного об'єкта за допомогою бісплайнової кривої. Остання, до початку розв'язання задачі, апроксимується чотирма функціями того ж типу, але ортогональними між собою в околах «ключових» точок ділянок прикладання потенціалів. Хоч запропонована процедура вносить певні збурення у форму вихідної області, проте в цілому суттєво підвищує адекватність відповідної математичної постановки задачі. Наведено порівняльні таблиці, які демонструють переваги застосування такої процедури «фіктивної ортогоналізації».

Ключові слова: математичне моделювання; гідродинамічна сітка; конформні відображення; нелінійні задачі; числові методи.

Вступ. Математичне моделювання процесів руху частинок (зарядів, рідини) в областях часто здійснюється наближено, наприклад, із застосуванням числових методів комплексного аналізу [1–4]. При цьому, зазвичай, чим більш «хвилястою» є границя досліджуваного об'єкта, тим важче досягнути високої точності результату. Проте, теоретично, якщо нескінченно збільшувати дискретизацію області, то можливо досягнути розв'язку, що повністю відповідає математичній моделі [1; 5]. Виключенням із цього правила є, зокрема, випадки, при яких грубо порушуються умови конформності [1] на окремих ділянках границі; найчастіше тут має місце неортогональність у точках (називатимемо далі їх «ключовими») «стику» ліній течії та еквіпотенціальних ліній. Через це виникають нев'язки конформності у відповідних

околах.

Метою даної роботи є розробка процедури «фіктивної ортогоналізації» в околах «ключових» точок ділянок прикладання потенціалів гладких областей, що сприятиме зменшенню отримуваних величин нев'язок конформності. Це особливо важливо, наприклад, у випадках розв'язання задач електричної томографії [2–4], де порушення умов ортогональності у «ключових» точках, зазвичай, невеликих за розміром ділянок прикладання потенціалів (контактів електродів), привносить суттєві похибки у досить великий відповідний окіл.

Постановка задачі. Як відомо, рухи електричних зарядів у тілі, рідини у ґрунті тощо описуються за аналогічними законами: Ома та Дарсі $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ [1–4; 6]. Тут, у випадку дослідження фільтраційних процесів, $\varphi = \varphi(x, y)$ – це потенціал, а $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$ – вектор швидкості. Значного поширення набули задачі, для яких в усіх точках досліджуваної області припускається, що $\text{div } \vec{v} = 0$. Не зменшуючи загальності, границю такого двовимірного об'єкта (середовища) задаватимемо за допомогою бісплайнової кривої [7]

$$\partial G_z = ABCD = \{z = x + iy : \quad x = \tilde{x}(\tau) = \sum_{\xi=0}^{\tilde{m}-1} \tilde{x}_\xi b_{\xi,3}(\tau), \\ y = \tilde{y}(\tau) = \sum_{\xi=0}^{\tilde{m}-1} \tilde{y}_\xi b_{\xi,3}(\tau), \text{ де } \tau \in [0,1], \tilde{x}(1) = \tilde{x}(0), \tilde{y}(1) = \tilde{y}(0),$$

$$b_{\xi,0}(\tau) = \begin{cases} 1, \text{ при } \tau \in [\tau_\xi, \tau_{\xi+1}), \\ 0, \text{ при } \tau \notin [\tau_\xi, \tau_{\xi+1}) \end{cases}, \quad \tau_\xi = \tau_{\xi-1} + \frac{1}{\tilde{m}-3} \quad (\xi = \overline{4, \tilde{m}}), \quad \tau_\xi = 0$$

$$(\xi = \overline{0,3}), \quad b_{\xi,r}(\tau) = \frac{\tau - \tau_\xi}{\tau_{\xi+r} - \tau_\xi} b_{\xi,r-1}(\tau) + \frac{\tau_{\xi+r+1} - \tau}{\tau_{\xi+r+1} - \tau_{\xi+1}} b_{\xi+1,r-1}(\tau),$$

$\tau_{\tilde{m}+\xi} = 1$ ($\xi = \overline{1,4}$), $(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi)$ – контрольні точки, $\tilde{m} > 3$ – їх кількість} (рис. 1, а). Нехай на ∂G_z задаються пари ділянок AB ,

CD прикладання потенціалів φ_* , φ^* (за рахунок яких відбувається рух рідини) та відповідні непроникні граничні лінії течії AD , BC . Тоді математична постановка задачі моделювання переміщення частинок в G_z ($z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$) полягає у знаходженні гармонічних комплексно спряжених функцій $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) та $\psi = \psi(x, y)$ (течії) ($\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$) за наступних умов:

$$\varphi'_x = \psi'_y, \varphi'_y = -\psi'_x, (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \varphi|_{CD} = \varphi^*, \psi|_{AD} = 0, \psi|_{BC} = Q, \quad (2)$$

де $Q = \int_{AB} -\varphi'_y dx + \varphi'_x dy$ – невідомий параметр (повна фільтраційна витрата) [1], $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ (рис. 1, б).

Обернена до (1), (2) задача (на відшукання гармонічних комплексно спряжених функцій $x = x(\varphi, \psi)$ і $y = y(\varphi, \psi)$) зводиться до вигляду [1]:

$$x''_{\varphi\varphi} + x''_{\psi\psi} = 0, y''_{\varphi\varphi} + y''_{\psi\psi} = 0, (x, y) \in G_z; \quad (3)$$

$$x(\varphi_*, \psi) = \tilde{x}(\tau_{AB}(\psi)), y(\varphi_*, \psi) = \tilde{y}(\tau_{AB}(\psi)),$$

$$x(\varphi^*, \psi) = \tilde{x}(\tau_{CD}(\psi)), y(\varphi^*, \psi) = \tilde{y}(\tau_{CD}(\psi)), 0 \leq \psi \leq Q, \quad (4)$$

$$x(\varphi, 0) = \tilde{x}(\tau_{DA}(\varphi)), y(\varphi, 0) = \tilde{y}(\tau_{DA}(\varphi)),$$

$$x(\varphi, Q) = \tilde{x}(\tau_{BC}(\varphi)), y(\varphi, Q) = \tilde{y}(\tau_{BC}(\varphi)), \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* ;$$

$$x'_\varphi(\varphi_*, \psi)x'_\psi(\varphi_*, \psi) + y'_\varphi(\varphi_*, \psi)y'_\psi(\varphi_*, \psi) = 0,$$

$$x'_\varphi(\varphi^*, \psi)x'_\psi(\varphi^*, \psi) + y'_\varphi(\varphi^*, \psi)y'_\psi(\varphi^*, \psi) = 0, 0 \leq \psi \leq Q, \quad (5)$$

$$x'_\varphi(\varphi, 0)x'_\psi(\varphi, 0) + y'_\varphi(\varphi, 0)y'_\psi(\varphi, 0) = 0,$$

$$x'_\varphi(\varphi, Q)x'_\psi(\varphi, Q) + y'_\varphi(\varphi, Q)y'_\psi(\varphi, Q) = 0, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* ,$$

де $\tau = \tau_{AB}(\psi)$, $\tau = \tau_{CD}(\psi)$, $\tau = \tau_{DA}(\varphi)$, $\tau = \tau_{BC}(\varphi)$ – розрахункові залежності параметрів задання граничних вузлів від значень функцій потенціалу та течії на ділянках AB , CD , AD , BC , відповідно.

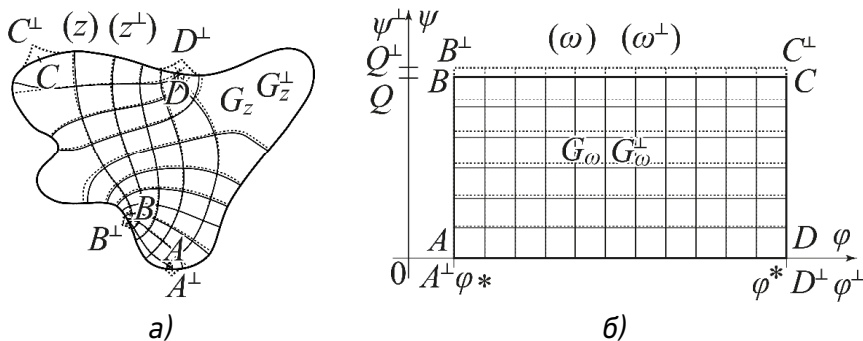


Рис. 1. Область фільтрації (а) та відповідна область комплексного потенціалу (б); штрихами схематично зображено збурення ліній сіток, спричинених «фіктивною ортогоналізацією» границі

Процедура «фіктивної ортогоналізації» у загальному алгоритмі [1–3] розв’язку. У задачах виду (1), (2) та (3)–(5) приймається, що перетини еквіпотенціалей і ліній течії у точках A, B, C, D відбуваються під прямими кутами. У випадку неможливості забезпечення виконання такої умови (див., напр., [2; 3]), вона, як правило, просто ігнорується. Це, очевидно, негативно впливає на точність розрахунків. Ми ж пропонуємо у таких задачах виконувати «фіктивну ортогоналізацію» стосовно точок A, B, C, D за описаним нижче алгоритмом. При цьому, для скорочення запису, вважатимемо, що його кроки 3–6 стосуються трійок $(L, R, K) \in \{(D, A, B), (A, B, C), (B, C, D), (C, D, A)\}$.

1. Для апроксимації графічного зображення межі досліджуваного тіла, будуємо за годинниковою стрілкою (в екранних координатах) замкнутий гладкий кубічний бісплайн $B(\tau) = (\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))$ ($\tau \in [0, 1]$), розміщуючи, при цьому, контрольні точки (x'_ξ, y'_ξ) ($\xi = \overline{0, \xi'_1}$) таким чином, щоб $\tilde{x}(0) = \tilde{x}(1), \tilde{x}'(0) = \tilde{x}'(1), \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1), \tilde{y}'(0) = \tilde{y}'(1)$.

2. Задаємо параметри розміщення «ключових» точок $\tau = \tau_A, \tau = \tau_B, \tau = \tau_C, \tau = \tau_D$ на $B(\tau)$.

3. Формуємо масиви $x_{LR\xi} = \tilde{x}(\tau_L^\angle + \xi \Delta\tau_{LR} - [\tau_L^\angle + \xi \Delta\tau_{LR}])$, $y_{LR\xi} = \tilde{y}(\tau_L^\angle + \xi \Delta\tau_{LR} - [\tau_L^\angle + \xi \Delta\tau_{LR}])$ ($\xi = \overline{1, \xi_{LR}}$) з кількостями елементів $\xi_{LR} = 10 \lceil s'_{LR} (\tau_R^\angle - \tau_L^\angle + |\tau_R^\angle - \tau_L^\angle - 1|) + 0.5 \rceil$ кожен, де $\Delta\tau_{LR} = (\tau_R^\angle - \tau_L^\angle + |\tau_R^\angle - \tau_L^\angle - 1|) / (\xi_{LR} + 1)$; $\tau_L^\angle, \tau_R^\angle$ – параметри, що отримуються з умов (при $\tau_L^\angle > \tau_L, \tau_R^\angle < \tau_R + |\tau_R^\angle - \tau_L^\angle - 1|$):

$$\sqrt{(\tilde{x}(\tau_L^\angle) - \tilde{x}(\tau_L))^2 + (\tilde{y}(\tau_L^\angle) - \tilde{y}(\tau_L))^2} \approx \begin{cases} d_{AB}^\angle, & \text{якщо } L \in \{A, B\}, \\ d_{CD}^\angle, & \text{якщо } L \in \{C, D\}, \end{cases}$$

$$\sqrt{(\tilde{x}(\tau_R^\angle) - \tilde{x}(\tau_R))^2 + (\tilde{y}(\tau_R^\angle) - \tilde{y}(\tau_R))^2} \approx \begin{cases} d_{AB}^\angle, & \text{якщо } L \in \{A, B\}, \\ d_{CD}^\angle, & \text{якщо } L \in \{C, D\}; \end{cases}$$

s'_{LR} – масштабуючий множник; d'_{AB}, d'_{CD} – задані довжини (околи) фрагментів кривих, які підлягають «фіктивній ортогоналізації».

4. Застосовуючи метод найменших квадратів до масиву $(x_{LR\xi}, y_{LR\xi})$ ($\xi = \overline{1, \xi_{LR}}$) будуємо кубічний бісплайн $B_{LR}(\tau) = (\tilde{x}_{LR}(\tau), \tilde{y}_{LR}(\tau))$ із кількістю $\xi'_{LR} = \xi_{LR} / s''_{LR}$ контрольних точок $(x'_{LR\xi}, y'_{LR\xi})$, де s''_{LR} – масштабуючий коефіцієнт ($\xi_{LR} : s''_{LR}$); при необхідності «вручну» корегуємо координати $(x'_{LR\xi}, y'_{LR\xi})$ або повторюємо побудову $B_{LR}(\tau)$ при інших (змінених) значеннях параметрів $d'_{LR}, s'_{LR}, s''_{LR}$.

5. Перевизначаємо крайні контрольні точки бісплайна $B_{LR}(\tau)$ так:

$$(x'_{LR_1}, y'_{LR_1}) = B(0.5(\tau'_L + \tau_L)) \quad \text{і}$$

$$(x'_{LR_{\xi_{LR}}}, y'_{LR_{\xi_{LR}}}) = B(0.5(\tau'_R + \tau_R)).$$

6. Доповнюємо бісплайн $B_{LR}(\tau)$ точками

$$(x'_{RK_0}, y'_{RK_0}) = (x'_R + (y'_R - y'_{LR_{\xi_{LR}}}) / d_{R\perp}, y'_R - (x'_R - x'_{LR_{\xi_{LR}}}) / d_{R\perp}),$$

$$(x'_{LR_{\xi_{LR}+1}}, y'_{LR_{\xi_{LR}+1}}) = (x'_{RK_0}, y'_{RK_0}),$$

такими щоб виконувались умова ортогональності $\tilde{x}'_{RK}(0)\tilde{x}'_{LR}(1) + \tilde{y}'_{RK}(0)\tilde{y}'_{LR}(1) = 0$, де $d_{R\perp} > 0$ підбираються, наприклад, ітераційно, $x'_R = x'_{LR_{\xi_{LR}}} + (x'_{RK_1} - x'_{LR_{\xi_{LR}}})\tau'_R$,

$$y'_R = y'_{LR_{\xi_{LR}}} + (y'_{RK_1} - y'_{LR_{\xi_{LR}}})\tau'_R,$$

$$\tau'_R = \left((x'_{RK_1} - x'_{LR_{\xi_{LR}}}) \left(\tilde{x}'(\tau'_R) - x'_{LR_{\xi_{LR}}} \right) + (y'_{RK_1} - y'_{LR_{\xi_{LR}}}) \left(\tilde{y}'(\tau'_R) - y'_{LR_{\xi_{LR}}} \right) \right) / \left((x'_{RK_1} - x'_{LR_{\xi_{LR}}})^2 + (y'_{RK_1} - y'_{LR_{\xi_{LR}}})^2 \right).$$

Зауважимо, що замість описаного алгоритму «фіктивної ортогоналізації» можна одразу будувати четвірки бісплайнів (аналогічно до пункту 1). Це дозволило б суттєво зменшити загальну кількість контрольних точок. Проте, наприклад, у випадку розв'язання задач елек-

тричної томографії, досліднику доводилось би «вручну» апроксимувати сотні або й тисячі кривих [2; 3].

Таким чином, у випадку «фіктивної ортогоналізації», дослідження проводитимемо в областях $G_{\omega}^{\perp} = \{ \omega^{\perp} = \varphi^{\perp} + i\psi^{\perp} : \varphi_* < \varphi^{\perp} < \varphi^*, 0 < \psi^{\perp} < Q^{\perp} \}$ (рис. 1, б) та G_z^{\perp} (рис. 1, а); границя останньої визначається наступним чином: $\partial G_z^{\perp} = B_{AB} \cup B_{BC} \cup B_{CD} \cup B_{DA}$. Тут Q^{\perp} – невідома повна витрата, $\psi^{\perp} = \psi^{\perp}(x^{\perp}, y^{\perp})$ – функція течії, комплексно спряжена до $\varphi^{\perp} = \varphi^{\perp}(x^{\perp}, y^{\perp})$. За «ключові» точки ділянок прикладання потенціалів прийматимемо наступні: $A^{\perp} = B_{AB}(0)$, $B^{\perp} = B_{BC}(0)$, $C^{\perp} = B_{CD}(0)$, $D^{\perp} = B_{DA}(0)$. Задачу (3) – (5) замінимо на

$$\frac{\partial^2 x^{\perp}}{\partial \varphi^{\perp 2}} + \frac{\partial^2 x^{\perp}}{\partial \psi^{\perp 2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 y^{\perp}}{\partial \varphi^{\perp 2}} + \frac{\partial^2 y^{\perp}}{\partial \psi^{\perp 2}} = 0, \quad (x^{\perp}, y^{\perp}) \in G_z^{\perp}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x^{\perp}(\varphi_*, \psi^{\perp}) &= \tilde{x}_{AB}(\tau_{AB}^{\perp}(\psi^{\perp})), \quad y^{\perp}(\varphi_*, \psi^{\perp}) = \tilde{y}_{AB}(\tau_{AB}^{\perp}(\psi^{\perp})), \\ x^{\perp}(\varphi^*, \psi^{\perp}) &= \tilde{x}_{CD}(\tau_{CD}^{\perp}(\psi^{\perp})), \quad y^{\perp}(\varphi^*, \psi^{\perp}) = \tilde{y}_{CD}(\tau_{CD}^{\perp}(\psi^{\perp})), \\ x^{\perp}(\varphi^{\perp}, 0) &= \tilde{x}_{DA}(\tau_{DA}^{\perp}(\varphi^{\perp})), \quad y^{\perp}(\varphi^{\perp}, 0) = \tilde{y}_{DA}(\tau_{DA}^{\perp}(\varphi^{\perp})), \\ x^{\perp}(\varphi^{\perp}, Q^{\perp}) &= \tilde{x}_{BC}(\tau_{BC}^{\perp}(\varphi^{\perp})), \quad y^{\perp}(\varphi^{\perp}, Q^{\perp}) = \tilde{y}_{BC}(\tau_{BC}^{\perp}(\varphi^{\perp})), \\ \varphi^{\perp} &\in [\varphi_*, \varphi^*], \quad \psi^{\perp} \in [0, Q^{\perp}] \end{aligned} \quad (7)$$

за умов ортогональності [1]

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial x^\perp(\varphi_*, \psi^\perp)}{\partial \varphi^\perp} \frac{\partial x^\perp(\varphi_*, \psi^\perp)}{\partial \psi^\perp} + \frac{\partial y^\perp(\varphi_*, \psi^\perp)}{\partial \varphi^\perp} \frac{\partial y^\perp(\varphi_*, \psi^\perp)}{\partial \psi^\perp} = 0, \\
 & \frac{\partial x^\perp(\varphi^*, \psi^\perp)}{\partial \varphi^\perp} \frac{\partial x^\perp(\varphi^*, \psi^\perp)}{\partial \psi^\perp} + \frac{\partial y^\perp(\varphi^*, \psi^\perp)}{\partial \varphi^\perp} \frac{\partial y^\perp(\varphi^*, \psi^\perp)}{\partial \psi^\perp} = 0, \\
 & \frac{\partial x^\perp(\varphi^\perp, 0)}{\partial \varphi^\perp} \frac{\partial x^\perp(\varphi^\perp, 0)}{\partial \psi^\perp} + \frac{\partial y^\perp(\varphi^\perp, 0)}{\partial \varphi^\perp} \frac{\partial y^\perp(\varphi^\perp, 0)}{\partial \psi^\perp} = 0, \\
 & \frac{\partial x^\perp(\varphi^\perp, Q^\perp)}{\partial \varphi^\perp} \frac{\partial x^\perp(\varphi^\perp, Q^\perp)}{\partial \psi^\perp} + \frac{\partial y^\perp(\varphi^\perp, Q^\perp)}{\partial \varphi^\perp} \frac{\partial y^\perp(\varphi^\perp, Q^\perp)}{\partial \psi^\perp} = 0,
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\varphi^\perp \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad \psi^\perp \in [0, Q^\perp]$$

або

$$\begin{aligned}
 & \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial x^\perp(\varphi_*, \psi^\perp)}{\partial \varphi^\perp} + \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial y^\perp(\varphi_*, \psi^\perp)}{\partial \varphi^\perp} = 0, \\
 & \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial x^\perp(\varphi^*, \psi^\perp)}{\partial \varphi^\perp} + \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial y^\perp(\varphi^*, \psi^\perp)}{\partial \varphi^\perp} = 0, \quad \psi^\perp \in [0, Q^\perp], \\
 & \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial x^\perp(\varphi^\perp, 0)}{\partial \psi^\perp} + \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial y^\perp(\varphi^\perp, 0)}{\partial \psi^\perp} = 0, \\
 & \tilde{x}'(\tau) \frac{\partial x^\perp(\varphi^\perp, Q^\perp)}{\partial \psi^\perp} + \tilde{y}'(\tau) \frac{\partial y^\perp(\varphi^\perp, Q^\perp)}{\partial \psi^\perp} = 0, \quad \varphi^\perp \in [\varphi_*, \varphi^*],
 \end{aligned} \tag{9}$$

де $\tau = \tau_{AB}^\perp(\psi^\perp)$, $\tau = \tau_{CD}^\perp(\psi^\perp)$, $\tau = \tau_{DA}^\perp(\varphi^\perp)$, $\tau = \tau_{BC}^\perp(\varphi^\perp)$ – розрахункові залежності параметрів задання граничних вузлів від значень $\varphi^\perp = \varphi^\perp(x^\perp, y^\perp)$ та $\psi^\perp = \psi^\perp(x^\perp, y^\perp)$ на ділянках $A^\perp B^\perp$, $C^\perp D^\perp$, $A^\perp D^\perp$, $B^\perp C^\perp$, відповідно; $x^\perp = x^\perp(\varphi^\perp, \psi^\perp)$, $y^\perp = y^\perp(\varphi^\perp, \psi^\perp)$ – шукані комплексно спряжені функції ($z^\perp = x^\perp + i y^\perp$).

Різницеві аналоги. Як правило, задачі виду (6), (7) за умов ортогональності (8) або (9) розв'язують наближено. Згідно числового методу конформних відображень, виконаємо дискретизацію області

G_ω^\perp рівномірною сіткою у вигляді [1]: $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = j\Delta\psi, j = \overline{0, n+1}; \Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1), \Delta\psi = Q^\perp / (n+1), \gamma = \Delta\varphi / \Delta\psi, m, n \in \mathbb{N}\}$. При такому розбитті різниці аналогі рівнянь Лапласа (6) запишуться наступним чином [5]:

$$\begin{cases} x_{i,j} = (x_{i+1,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1})) / (2(1 + \gamma^2)), \\ y_{i,j} = (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2(y_{i,j-1} + y_{i,j+1})) / (2(1 + \gamma^2)), \end{cases} \quad (10)$$

де $x_{i,j} = x^\perp(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y^\perp(\varphi_i, \psi_j)$, конформний інваріант γ визначається з умови «конформної подібності в малому» відповідних чотирикутників (прямокутників) областей G_ω^γ і

$G_z^\gamma = \{z_{i,j} = x_{i,j} + iy_{i,j} : z_{i,j} \in G_z^\perp, i = \overline{0, m+1}, j = \overline{0, n+1}\}$ [1]:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{a_{i+0.5,j}^2 + b_{i+0.5,j}^2} + \sqrt{a_{i+0.5,j+1}^2 + b_{i+0.5,j+1}^2}}{\sqrt{a_{i,j+0.5}^2 + b_{i,j+0.5}^2} + \sqrt{a_{i+1,j+0.5}^2 + b_{i+1,j+0.5}^2}}, \quad (11)$$

$a_{i+0.5,j} = x_{i+1,j} - x_{i,j}$, $a_{i,j+0.5} = x_{i,j+1} - x_{i,j}$, $b_{i+0.5,j} = y_{i+1,j} - y_{i,j}$, $b_{i,j+0.5} = y_{i,j+1} - y_{i,j}$. Крайові умови (7) замінимо наступними [1–3]:

$$\begin{aligned} x_{0,j} &= \tilde{x}_{AB}(\tau_{AB_j}), \quad y_{0,j} = \tilde{y}_{AB}(\tau_{AB_j}), \quad j = \overline{0, n+1}, \\ x_{m+1,j} &= \tilde{x}_{CD}(\tau_{CD_j}), \quad y_{m+1,j} = \tilde{y}_{CD}(\tau_{CD_j}), \quad j = \overline{0, n+1}, \\ x_{i,0} &= \tilde{x}_{DA}(\tau_{DA_i}), \quad y_{i,0} = \tilde{y}_{DA}(\tau_{DA_i}), \quad i = \overline{0, m+1}, \\ x_{i,n+1} &= \tilde{x}_{BC}(\tau_{BC_i}), \quad y_{i,n+1} = \tilde{y}_{BC}(\tau_{BC_i}), \quad i = \overline{0, m+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\tau_{AB_j} = \tau_{AB}^\perp(\psi_j)$, $\tau_{CD_j} = \tau_{CD}^\perp(\psi_j)$, $\tau_{DA_i} = \tau_{DA}^\perp(\varphi_i)$, $\tau_{BC_i} = \tau_{BC}^\perp(\varphi_i)$. Формули ортогональності на ∂G_z (8) і (9) перепишемо так [1; 2]:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}'_{AB}(\tau)a_{0.5,j} + \tilde{y}'_{AB}(\tau)b_{0.5,j} &= 0, \\
 \tilde{x}'_{CD}(\tau)a_{m+0.5,j} + \tilde{y}'_{CD}(\tau)b_{m+0.5,j} &= 0, \\
 \tilde{x}'_{BC}(\tau)a_{i,n+0.5} + \tilde{y}'_{BC}(\tau)b_{i,n+0.5} &= 0, \\
 \tilde{x}'_{DA}(\tau)a_{i,0.5} + \tilde{y}'_{DA}(\tau)b_{i,0.5} &= 0 \\
 (\tau \in (0,1), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n); &
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 &(3x_{i,n+1} + x_{i,n-1} - 4x_{i,n})(x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1}) + \\
 &+ (3y_{i,n+1} + y_{i,n-1} - 4y_{i,n})(y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1}) = 0 \quad (i = \overline{1,m}), \\
 &(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + \\
 &+ (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0 \quad (j = \overline{1,n}), \\
 &(3x_{m+1,j} + x_{m-1,j} - 4x_{m,j})(x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j-1}) + \\
 &+ (3y_{m+1,j} + y_{m-1,j} - 4y_{m,j})(y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j-1}) = 0 \quad (j = \overline{1,n}), \\
 &(4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + \\
 &+ (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0 \quad (i = \overline{1,m}).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Підхід до розв'язання задачі та відповідні числові експерименти. Наближене розв'язання різницевої задачі (10) – (12) із застосуванням умов ортогональності (13) чи (14) ґрунтується на почерговому ітераційному уточненні граничних і внутрішніх вузлів, конформних інваріантів [1] та використанні ідей методу блочної ітерації [8]. Відповідний алгоритм описаний, наприклад, у роботах [1; 2]. Точність отриманого таким чином розв'язку обернено пропорційна величині нев'язки конформності ε^* . Варіанти формул для її обчислення наводяться, наприклад, у роботі [1]. Відповідні вирази тут, в основному, базуються на розрахунках нев'язок умов Коші-Рімана (1). Проте у випадку, коли досліджувана область є більш складної конфігурації, ніж у [1], застосування різницевих аналогів (1) до нерівномірних (у сенсі густини розміщення вузлів) гідродинамічних сіток не відтворює реальної картини виконання умов (1). Тому пропонуємо замість ε^* шукати пару величин: сумарні нев'язки ортогональності $\varepsilon_{\perp}^* = \sum_{i,j=0}^{m,n} \varepsilon_{\perp,i,j}^*$ і рівності довжин суміжних відрізків

$\varepsilon_{\pm}^* = \sum_{i,j=0}^{m,n} \varepsilon_{\pm i,j}^*$ в малому, а також їх середні значення $\varepsilon_{\perp}^{*c} = \varepsilon_{\perp}^* / ((m+1)(n+1))$, $\varepsilon_{\pm}^{*c} = \varepsilon_{\pm}^* / ((m+1)(n+1))$, де

$$\varepsilon_{\pm i,j}^* = \max \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\sqrt{a_{i+0.5,j}^2 + b_{i+0.5,j}^2}}{\sqrt{a_{i,j+0.5}^2 + b_{i,j+0.5}^2}}, \gamma \frac{\sqrt{a_{i,j+0.5}^2 + b_{i,j+0.5}^2}}{\sqrt{a_{i+0.5,j}^2 + b_{i+0.5,j}^2}} \right) - 1,$$

$$\varepsilon_{\perp i,j}^* = \left| \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{a_{i+0.5,j} a_{i,j+0.5} + b_{i+0.5,j} b_{i,j+0.5}}{\sqrt{a_{i+0.5,j}^2 + b_{i+0.5,j}^2} \sqrt{a_{i,j+0.5}^2 + b_{i,j+0.5}^2}} \right|.$$

У випадку, коли величини $\varepsilon_{\pm i,j}^*$ та $\varepsilon_{\perp i,j}^*$ ($i = \overline{0, m+1}$, $j = \overline{0, n+1}$) прямують до нуля, конформне відображення вважаємо точним (тобто, що виконуються умови (1) і (2)) [1].

Проведемо порівняння нев'язок конформності, обчислених у результаті моделювання руху частинок як в області, що задається масивом з $\tilde{m} = 9$ контрольних точок $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (\tilde{x}_8, \tilde{y}_8) = (184, 368)$, $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (80, 347)$, $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = (202, 294)$, $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) = (318, 263)$, $(\tilde{x}_4, \tilde{y}_4) = (498, 271)$, $(\tilde{x}_5, \tilde{y}_5) = (575, 316)$, $(\tilde{x}_6, \tilde{y}_6) = (481, 347)$, $(\tilde{x}_7, \tilde{y}_7) = (323, 388)$ (задача виду (3) – (5)) при параметрах $\tau_A = 0.0658$, $\tau_B = 0.0678$, $\tau_C = 0.6$, $\tau_D = 0.7$, так і у відповідній «фіктивно ортогоналізованій» (при $s'_{AB} = 3225.727768$, $s'_{BC} = 708.603493$, $s'_{CD} = 1194.106674$, $s'_{DA} = 782.74621$, $s''_{AB} = s''_{CD} = 5$, $s''_{DA} = s''_{BC} = 10$, $d'_{AB} = 0.773447$, $d'_{CD} = 17.719641$) області (задача (6), (7) з умовами (8) чи (9)). За даними $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon = 10^{-10}$ (параметр точності) і при різних розбиттях $m \times n$, обчислено нев'язки рівності довжин суміжних відрізків ε_{\pm}^* , ε_{\pm}^{*c} та ортогональності ε_{\perp}^* , ε_{\perp}^{*c} в малому (табл. 1, табл. 2). Тут, для спрощення аналізу застосування процедури «фіктивної ортогоналізації» та формул (13) і (14), із обчислень виключені вузли із суттєвими особливостями (для яких $\varepsilon_{\pm i,j}^* > 10^6$), але пораховано їх кількість.

Із аналізу результатів, наведених у табл. 1 і табл. 2, можемо зробити наступні висновки:

1) введення процедури «фіктивної ортогоналізації» в околах «ключових» точок гладких границь областей вирішує проблему наявності ділянок сингулярності, в яких $\varepsilon_{\pm i,j}^*$ набуває особливо великих значень;

2) точність конформних відображень при застосуванні формул (14) є суттєво вищою, ніж при (13), особливо стосовно величин $\varepsilon_{\pm i,j}^*$; це пов'язано хоча б з тим, що вираз (14), на відміну від (13), враховує розміщення ще й двох сусідніх вузлів на границі області;

3) формули (13) дуже чутливі до порушення умов ортогональності в «ключових» точках границі області;

4) ефективність виразів (13), у порівнянні з (14), є особливо низькою при малому розбитті сітки.

Отже, безумовно найкращим з точки зору виконання умов конформності є випадок застосування процедури «фіктивної ортогоналізації», а також формул (14) для уточнення координат граничних вузлів.

Таблиця 1

Величини нев'язок конформності в залежності від густини розбиття гідродинамічних сіток в областях G_z і G_z^\perp при використанні формули (13)

$m \times n$	випадок $(x, y) \in G_z$					випадок $(x^\perp, y^\perp) \in G_z^\perp$				
	ε_\perp^*	ε_\pm^*	ε_\perp^{*c}	ε_\pm^{*c}	кількість вузлів, в яких $\varepsilon_{\pm i,j}^* > 10^6$	ε_\perp^*	ε_\pm^*	ε_\perp^{*c}	ε_\pm^{*c}	кількість вузлів, в яких $\varepsilon_{\pm i,j}^* > 10^6$
51×6	38	213	0.1043	0.5857	48	33.2	5567	0.0912	15.294	18
103×13	69.7	290	0.0479	0.1991	53	60.9	2002	0.0418	1.3747	8
207×27	132	497	0.0228	0.0854	62	117	330	0.0201	0.0566	0
415×55	266	963	0.0114	0.0413	76	230	543	0.0099	0.0233	0
831×111	554	1985	0.0059	0.0213	96	457	960	0.0049	0.0103	0

Таблиця 2

Величини нев'язок конформності в залежності від густини розбиття гідродинамічних сіток в областях G_z і G_z^\perp при використанні формули (14)

$m \times n$	випадок $(x, y) \in G_z$					випадок $(x^\perp, y^\perp) \in G_z^\perp$				
	ε_\perp^*	ε_\pm^*	ε_\perp^{*c}	ε_\pm^{*c}	кількість вузлів, в яких $\varepsilon_{\pm i, j}^* > 10^6$	ε_\perp^*	ε_\pm^*	ε_\perp^{*c}	ε_\pm^{*c}	кількість вузлів, в яких $\varepsilon_{\pm i, j}^* > 10^6$
51×6	26.9	27.8	0.0739	0.0763	9	23.2	27	0.0637	0.074	0
103×13	52.9	55.2	0.0364	0.0379	9	47.4	50.6	0.0325	0.0347	0
207×27	108	111	0.0185	0.0189	9	95.4	98.2	0.0164	0.0169	0
415×55	218	220	0.0093	0.0094	9	191	194	0.0082	0.0083	0
831×111	438	439	0.0047	0.0047	9	382	386	0.0041	0.0041	0

Висновки. Запропоновано механізм підвищення точності конформних відображень, який ґрунтується на застосуванні розробленої у роботі процедури «фіктивної ортогоналізації» в околах «ключових» точок ділянок прикладання потенціалів гладкої границі фізичної області. Контур останньої задається за допомогою бісплайнової кривої, після чого апроксимується парами кривих того ж типу (лініями течії та еквіпотенціальними лініями), які «стикуються» під прямими кутами.

Користуючись числовими методами комплексного аналізу розв'язано задачу моделювання руху частинок як за умови застосування процедури «фіктивної ортогоналізації», так і без неї. Проведено відповідні порівняння та аналіз отриманих результатів. Розв'язки різницевої задачі при різних параметрах очікувано показали, що «фіктивна ортогоналізація» в околах «ключових» точок ділянок прикладання потенціалів суттєво підвищує точність конформних відображень, хоча й вносить певні збурення у форму вихідної області.

Також проведено порівняння деяких двоточкової та чотириточкової схем забезпечення виконання умов ортогональності на границі. Остання з них показала більшу ефективність.

У перспективі: перенесення алгоритму «фіктивної ортогоналізації» на випадки наявності тонких включень [6], розв'язання задач електричної томографії як на площині [2; 3], так і в просторі [4]; розроблення процедури, яка сприятиме зменшенню величин нев'язок конформності у, так званих, «застійних» зонах [1] тощо.

1. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу: монографія. Рівне : НУВГП, 2013. 415 с. 2. Бомба А. Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації: монографія. Рівне : НУВГП, 2020. 188 с. 3. Bomba A., Boichura M., Sydorчук B. Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5 (4). P. 45–54. 4. Bomba A., Boichura M. Spatial analogues of numerical quasiconformal mapping methods for solving identification problems. *Zeszyty Naukowe. Telekomunikacja i Elektronika series*. 2018. Vol. 21 (268). P. 25–34. 5. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва : Наука, 1977. 656 с. 6. Ulyanchuk-Martyniuk O., Michuta O., Ivanchuk N. Biocolmation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 4 (10). P. 18–26. 7. Prautzsch H., Boehm W., Paluszny M. Bézier and B-Spline Techniques. Heidelberg : Springer, 2002. 304 p. 8. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва : Мир, 1975. 558 с.

REFERENCES:

1. Bomba A. Ya., Kashtan S. S., Pryhornytskyi D. O., Yaroshchak S. V. Metody kompleksnoho analizu: monohrafiia. Rivne : NUVHP, 2013. 415 s. 2. Bomba A. Ya., Boichura M. V. Metody kompleksnoho analizu v zadachakh identyfikatsii: monohrafiia. Rivne : NUVHP, 2020. 188 s. 3. Bomba A., Boichura M., Sydorчук B. Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5 (4). P. 45–54. 4. Bomba A., Boichura M. Spatial analogues of numerical quasiconformal mapping methods for solving identification problems. *Zeszyty Naukowe. Telekomunikacja i Elektronika series*. 2018. Vol. 21 (268). P. 25–34. 5. Samarskiy A. A. Teoriya raznostnyih shem. Moskva : Nauka, 1977. 656 s. 6. Ulyanchuk-Martyniuk O., Michuta O., Ivanchuk N. Biocolmation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 4 (10). P. 18–26. 7. Prautzsch H., Boehm W., Paluszny M. Bézier and B-Spline Techniques. Heidelberg : Springer, 2002. 304 p. 8. Ortega Dj., Reynboldt V. Iteratsionnyie metodyi resheniya nelineynyih sistem uravneniy so mnogimi neizvestnyimi. Moskva : Mir, 1975. 558 s.

**Bomba A. Ya., Doctor of Engineering, Professor, Boichura M. V.,
Candidate of Engineering (Ph.D.), Michuta O. R., Candidate of
Engineering (Ph.D.), Associate Professor (National University of Water
and Environmental Engineering, Rivne)**

AN APPROACH TO INCREASE THE ACCURACY OF CONFORMAL MAPPING OF COMPLEX POTENTIAL DOMAINS INTO PHYSICAL DOMAINS

The statement of filtration problem in a single-connected curvilinear domain bounded by a smooth B-spline curve is formulated from the point of view of complex analysis. In order to significantly simplify further calculations, the initial problem is replaced by the inverse, namely: on conformal mapping of the complex potential domain to the corresponding rectangular physical domain. In this paper, we focus, in particular, on two common variants of orthogonality conditions at the boundary. They, obviously, in this problem statement, cannot be fulfilled precisely at four “key” points of the potential application areas. Therefore, in order to avoid this problem, some automated mechanism for increase the accuracy of the corresponding conformal mappings is proposed. It consists in replacing the original B-spline curve (which approximates the boundary of the studied domain) with pairs of streamlines and equipotential lines which intersect at right angles at the vicinity of the “key” points of the potential application areas. The corresponding difference problem and the approach to its solving are written for the cases of application of some two-point and four-point schemes for approximation of orthogonality conditions at the boundary. Using the numerical conformal mapping method, the modeling problem is solved both in the case of a smooth boundary (with a clear violation of accuracy at the vicinity of “key” points of potential application areas) and in the case of the corresponding “fictitious orthogonalization” (for perturbed domain). Comparative tables, which demonstrate the advantages of using such a procedure of “fictitious orthogonalization” are presented from the point of view of degree of fulfillment of the conformity conditions (orthogonality and equality of lengths of adjacent segments in small). Certainly, the proposed “fictitious orthogonalization” procedure introduces some perturbations into the shape of the original domain. However, this negative impact is generally offset by a significant increase in adequacy of the corre-

sponding mathematical formulation of the problem, greater “transparency” of the algorithm, and, consequently, the accuracy of conformal mappings (as evidenced by the results of numerical experiments).

Keywords: mathematical modeling; hydrodynamic mesh; conformal mappings; nonlinear problems; numerical methods.

Бомба А. Я., д.т.н., профессор, Бойчура М. В., к.т.н., Мичута О. Р., к.т.н., доцент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

ОДИН ПОДХОД К УВЕЛИЧЕНИЮ ТОЧНОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТБРАЖЕНИЙ ОБЛАСТЕЙ КОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦИАЛА НА ФИЗИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ

Предложен механизм повышения точности конформных отображений в случае применения численных методов комплексного анализа при исследовании физических областей с нарушенными условиями ортогональности в окрестностях «ключевых» точек участков приложения потенциалов. Соответствующий алгоритм реализован при условии задания формы исследуемого двумерного объекта при помощи бисплайновой кривой. Последняя, до начала решения задачи, аппроксимируется четырьмя функциями того же типа, но ортогональными между собой в окрестностях «ключевых» точек участков приложения потенциалов. Хотя предложенная процедура вносит определенные возмущения в форму исходной области, однако в целом существенно повышает адекватность соответствующей математической постановки задачи. Приведены сравнительные таблицы, демонстрирующие преимущества применения такой процедуры «фиктивной ортогонализации».

Ключевые слова: математическое моделирование; гидродинамическая сетка; конформные отображения; нелинейные задачи; численные методы.
