Modélisation mathématique de phénomènes variables, dans l'enseignement, à l'aide de la géométrie dynamique

Sophie Soury-Lavergne

Rapport de recherche

Modélisation mathématique de phénomènes variables, dans l'enseignement, à l'aide de la géométrie dynamique

Sophie Soury-Lavergne

Conventions MIRA 08 034152 01 et 08 034154 01

Sommaire

Préambule

Ce rapport présente les objectifs, le déroulement et les résultats du projet MIRA intitulé « Modélisation mathématique de phénomènes variables dans l'enseignement à l'aide de la géométrie dynamique » réalisé en collaboration entre l'équipe DIAM du Laboratoire d'Informatique de Grenoble de l'Université Joseph Fourier et l'équipe DDM de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville au Viêt Nam. Ce projet MIRA s'est déroulé de décembre 2009 à décembre 2010 avec le soutien financier de la région Rhône Alpes. Il constitue la première année d'un projet plus ample de même nom qui continuera de se dérouler sur deux ans.

Le temps limité d'une année nous a amenés à nous centrer sur l'aspect majeur du projet qui consiste en la production de situations didactiques pour l'enseignement. Ainsi, à partir d'une étude de la place de la modélisation fonctionnelle (en particulier des phénomènes périodiques) dans les curricula des deux pays France et Viêt-Nam, nous avons conçu une ingénierie constituée de quatre situations qui conduisent un processus de modélisation de grandeurs covariantes et de phénomènes périodiques. L'ingénierie a été expérimentée à trois reprises, en France et au Viêt Nam. Les résultats obtenus permettent à la fois de valider les choix faits pour l'ingénierie et proposent de nouvelles pistes pour la recherche sur l'enseignement des processus de modélisation en mathématique.

Le 17 décembre 2010

Sophie Soury-Lavergne

avec la collaboration de

Annie Bessot, Alain Birebent, Claude Comiti, Bernard Genevès, Colette Laborde, Lê Thai Bao Thien Trung et Nguyen Thi Nga

Partie 1

Problématique

---

1 Quelle est la place de la modélisation dans l'enseignement scolaire ?

La modélisation a pris une place de plus en plus importante dans les programmes de mathématiques dans de nombreux pays. La modélisation permet de montrer l'utilité des mathématiques, de développer chez les jeunes des capacités critiques par rapport à la résolution des situations de la vie réelle, de préparer les jeunes à diverses activités professionnelles et de relier les mathématiques à d'autres disciplines (Blum et Niss 1991, Kaiser 1991).

L'étude internationale PISA a choisi, pour évaluer les élèves sur leurs connaissances mathématiques, de les confronter essentiellement à des problèmes dans lesquels les mathématiques sont outils de modélisation.

> *« … l'enquête PISA soumet essentiellement aux élèves des problèmes qui s'inscrivent dans des situations s'inspirant du monde réel. Ces situations sont conçues pour que des aspects mathématiques soient véritablement utiles à la résolution des problèmes. L'objectif de l'enquête PISA est de déterminer dans quelle mesure les élèves sont capables d'exploiter leurs savoirs et savoir-faire mathématiques pour résoudre des problèmes qui leur sont soumis. » (OCDE 2003, p. 40).*

Cette étude met en évidence, ainsi que d'autres recherches, l'intérêt récurrent dans tous les systèmes éducatifs pour la modélisation mathématique. Or il apparaît que la modélisation est le plus souvent donnée toute faite dans les exercices sans être problématisée (Rodriguez 2007).

Comme l'écrit Coulange (1998), on peut distinguer deux directions possibles pour l'enseignement des mathématiques en rapport avec la modélisation mathématique :

- la modélisation comme un moyen d'introduire des concepts mathématiques
- l'enseignement même de la modélisation.

Ces deux directions, enseignement de la modélisation et enseignement de concepts mathématiques par la modélisation, interagissent de façon dialectique. Nous adopterons ce point de vue dans notre projet.

Parmi les concepts mathématiques outils de modélisation, les fonctions ont une place importante car elles permettent de modéliser les phénomènes variables ou évolutifs qui sont à la fois très présents dans réalité quotidienne et objets d'étude des disciplines scientifiques (finance, biologie, physique, économie, et.).

Dans le cadre de ce projet :

- nous nous centrerons sur la modélisation de phénomènes de variations et d'évolution, qui privilégie le champ conceptuel des fonctions ;
- nous associerons à ces situations un logiciel de géométrie dynamique qui permet de modéliser des phénomènes de variation et d'évolution ;

- nous considérerons deux systèmes éducatifs, l'enseignement secondaire en France et au Viêt-Nam.

Quelle pertinence scientifique y a-t-il à considérer ces deux systèmes éducatifs ?

Au Viêt-Nam, la notion de fonction est introduite en classe 7 (équivalent de la classe de cinquième française). Même si les situations introduisant les fonctions peuvent être interprétées comme donnant lieu à modélisation, cette dernière en tant que telle est absente des programmes et des livres pour les enseignants et les élèves. Par la suite, l'enseignement est fortement algébrisé, en particulier dans le domaine de l'analyse et des fonctions, ce qui pose le problème de la signification donnée par les élèves au concept de fonction. Bien que la modélisation ne soit pas abordée explicitement dans l'enseignement, la noosphère a nettement la volonté d'augmenter le nombre des problèmes issus du monde réel dans l'enseignement.

De plus toute mention à un logiciel de géométrie dynamique est hors programme et leurs usages dépendent de la seule volonté des enseignants. Cependant des initiations à l'usage de tels logiciels ont été mises en place dans les institutions de formation, ce qui est un indice de la volonté qu'ils soient présents dans l'enseignement. Un autre indice est que l'année scolaire 2008 - 2009 a été déclarée par le ministère de l'éducation et de la formation vietnamienne année informatique dans l'intention de renforcer l'utilisation de l'informatique dans l'enseignement de l'école à l'université.

En France, les programmes d'enseignement introduisent officiellement le concept de fonction dès la classe de Troisième à partir de situations de la vie courante ou issues de la géométrie. Il s'agit en fait de faire vivre, de façon cachée, un questionnement lié à la modélisation. Par la suite, au lycée, la notion de modélisation est formulée explicitement en relation avec des concepts mathématiques tels que fonction et équation différentielle.

Au delà de l'intérêt de toute étude comparative (Bessot, Comiti 2008), cette première comparaison rapide entre France et Viêt-Nam montre d'importantes différences relativement à la modélisation et à la présence de logiciels de géométrie dynamique dans l'enseignement des mathématiques. Ces différences seront matières à des analyses épistémologiques.

Cependant dans les deux pays, le concept mathématique de fonction comme modèle est privilégié par rapport au processus même de modélisation qui s'efface, alors qu'il est la source du sens du concept. Une raison tient à ce que les enseignants sont démunis à la fois pour fabriquer de telles situations peu présentes dans les manuels et pour gérer ces situations en classe

2 Grandes lignes du projet

2.1 Pourquoi les situations de covariation de deux grandeurs ?

Le processus de modélisation de phénomènes de variation et d'évolution par des fonctions amène à les considérer comme des situations de covariation de grandeurs quantifiables.

Or les recherches passées distinguent deux aspects fondamentaux de la notion de fonction que l'on peut repérer comme se succédant dans l'histoire :

- la covariation de deux grandeurs qui nécessite une modélisation en termes de variables dépendantes et/ou indépendantes. Euler écrit en 1755 :

  « Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonction de ces dernières »

- la correspondance : une fonction associe un nombre unique à un nombre donné. Hankel (1870) définit ainsi une fonction :

  « On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit défini pour tout l'intervalle par la même loi en fonction d e x, ni même que y soit défini par une expression mathématique explicite de x. J'appellerai cette définition du nom de Dirichlet parce que cette définition, qui a détrôné toutes les conceptions plus anciennes est fondamentale dans ses travaux sur les séries de Fourier » (Hankel, p.49, 1870).

Les définitions basées sur la correspondance se sont imposées dans l'enseignement actuel, obscurcissant les significations de variable et de fonction (Malik 1980).

Or, de nombreuses recherches montrent que les notions de variable, variable indépendante et variable dépendante posent difficulté aux élèves. Ainsi Carlson (1998) montre que les élèves ont du mal à construire le concept de fonction comme relation entre deux variables, l'une dépendant de l'autre. Les élèves ne voient cette relation qu'éclatée sur des valeurs discrètes des variables dépendante et indépendante et donc de façon statique sans envisager la variation de ces variables. Les difficultés persistent au cours de l'avancement dans la scolarité secondaire. Trigueros et Ursini (1999) rapportent en particulier la difficulté qu'ont les élèves à considérer la covariation des deux variables. Plus encore, il s'agit pour ces auteurs non d'une difficulté mais d'un obstacle (ibid. p.278), dû à la primauté du cadre numérique et à l'absence d'une expérience qualitative de relation fonctionnelle (Goldenberg, Lewis, & O'Keefe, 1992). Ces articles confirment les conclusions de Thompson (1994) sur l'absence de la prise en compte par les curricula de la notion de fonction en tant que covariation et sur le trop faible nombre de recherches portant sur le concept de grandeur variable.

Le projet repose sur l'hypothèse suivante :

> Les notions de variable et de dépendance ne prennent sens que dans **des situations de variation**. Le seul moyen de s'apercevoir qu'une chose dépend d'une autre est de les faire varier chacune à leur tour afin de constater quel effet a la variation mais tant et aussi longtemps qu'il n'y aura pas de variation, il sera presque impossible de savoir s'il y a dépendance (René de Cotret, 1988).

La modélisation d'une situation de covariation de deux grandeurs est donc considérée dans le projet comme un moyen de donner sens aux notions de variable et fonction.

Ce point de vue se démarque de la plupart des nombreux travaux sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions (cf. les synthèses de travaux sur les fonctions Leinhardt, Zaslavky & Stein, 1990, Sierpinska 1992), travaux qui ont essentiellement considéré les fonctions comme des objets mathématiques et non comme des outils de modélisation.

2.2 Pourquoi le recours à des environnements de géométrie dynamique ?

Comme déjà dit, les enseignants se trouvent démunis pour fabriquer des situations de modélisation (qui, de plus, sont peu présentes dans les manuels) et pour gérer de telles situations en classe. Or, l'entrée dans le processus de modélisation semble une étape difficile pour les élèves. L'enseignant se trouve donc face à une situation paradoxale : ou bien il n'aide pas les élèves, qui se trouvent alors en situation d'échec ou il leur donne la solution toute faite, et les élèves n'ont rien appris. En fait, la solution adoptée par l'enseignement est de proposer aux élèves des modèles tout faits. Des travaux récents le confirment : ils montrent que les élèves n'ont presque jamais en charge le processus de modélisation, le modèle étant déjà fourni dans la situation (Rodriguez 2007).

> Nous avons fait l'hypothèse qu'une étape intermédiaire à l'établissement du modèle mathématique est possible en recourant à **une modélisation intermédiaire** de la situation de covariation de grandeurs **dans un environnement de géométrie dynamique**.

En effet, dans cet environnement, la modélisation de grandeurs variables se fait par la création de points qui se déplacent. Cette modélisation graphique et géométrique garde perceptivement la trace matérielle du phénomène de variation qui, en revanche, disparaît dans le symbolisme algébrique, ultime étape du processus de modélisation. Cette étape intermédiaire dévolue aux élèves une première prise de responsabilité dans le processus de modélisation fonctionnelle d'une situation de covariation. Dans ce même esprit, Hazzan et Goldenberg (1997) et Falcade (2002) ont ainsi proposé d'introduire la notion de dépendance fonctionnelle par la géométrie dynamique au lieu de le faire par l'approche numérique classique.

Les environnements de géométrie dynamique adoptés sont Cabri II Plus qui sont issus de l'équipe DIAM (LIG Université Joseph Fourier) partenaire du projet et qui donnent lieu à une convention entre Cabrilog, société de développement de ces logiciels et l'Université Joseph Fourier.

3 Objectifs scientifiques

Nos objectifs pour ce projet ont été :

- d'analyser et de comparer les conditions institutionnelles de l'enseignement mathématique de la modélisation et des fonctions au Viêt-Nam et en France, présenté en dans la partie 2 de ce rapport ;
- de concevoir, expérimenter et analyser des situations de covariation continue de grandeurs ; ces situations devront laisser la production du modèle à la charge de l'élève dans un environnement de géométrie dynamique. Elles devront aussi respecter les conditions institutionnelles des deux pays, présenté en dans la partie 3 de ce rapport.

Notre proposition initiale qui incluait également de produire des parcours de formation pour les enseignants s'appuyant sur les études précédentes pour les aider dans la gestion de ces situations d'enseignement en n'a pas été reprise compte tenu du fait que le projet n'a été financé que partiellement.

Partie 2

Analyse des contextes institutionnels France et Viêt Nam

Cette partie du rapport s'appuie sur les travaux de thèse menés par Nguyen Thi Nga, thèse en co-tutelle entre l'UJF et l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

1 Quelle place occupe la modélisation fonctionnelle dans les différents systèmes d'enseignement ?

Il y a une propension à enseigner des modèles existants – éléments de savoir bien définis et dont l'enseignement peut faire l'objet d'une négociation sociale explicite. L'organisation de réelles activités de modélisation dans les cours de mathématiques se heurte au cloisonnement disciplinaire des savoirs caractéristique des institutions scolaires.

> *« […] bien qu'acceptable dans son principe, cette activité, se référant nécessairement à une réalité extramathématique, pose problème aux mathématiciens, dans la mesure où elle introduit donc du non-mathématique dans un enseignement de mathématique » (Chevallard, 1989b, p.147. C'est l'auteur qui souligne).*

Avant d'examiner ce qui se passe au sujet de la modalisation dans les deux systèmes éducatifs, Viêt Nam et France, nous présentons ce qu'est pour nous un modèle et un processus de modélisation en mathématique.

1.1 Notre point de vue sur ce qu'est un processus de modélisation en mathématique

Un modèle est *« une machine dont la mise en fonctionnement permet de produire des connaissances relatives au système modélisé »* Chevallard (1992). Comment construit-on cette machine ? Ci-après un schéma résumant ce qu'est pour nous le processus de modélisation.

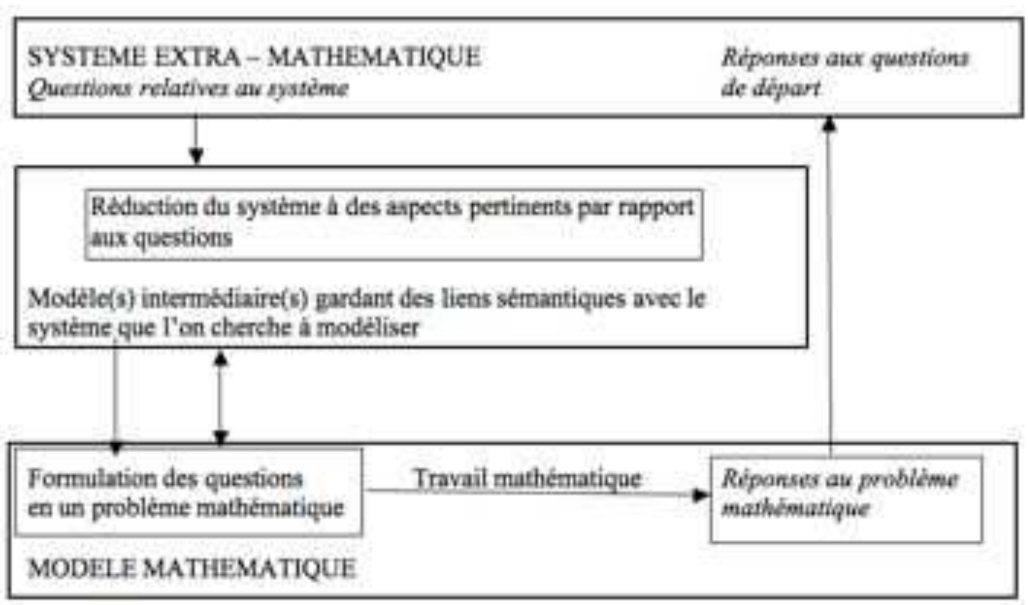


Figure 1 Schéma du processus de modélisation (d'après Coulange 1998)

Ce schéma découpe le processus de modélisation en 4 phases, la première phase étant pour notre recherche une phase essentielle :

- Phase 1. Passage du système extra mathématique à un *modèle intermédiaire.* Le modèle intermédiaire entre la situation extra mathématique et le modèle mathématique à construire représente un premier niveau d'abstraction de la « réalité », qui évolue au fur et à mesure du travail de modélisation : un modèle intermédiaire peut être plus ou moins proche sémantiquement de la situation réelle considérée ou du modèle mathématique à construire. On peut considérer que cette évolution est marquée par une suite de modèles intermédiaires de plus en plus éloignés sémantiquement du système extra mathématique et de plus en plus proche d'un modèle mathématique.
- Phase 2. Passage du modèle intermédiaire au modèle mathématique
- Phase 3. Phase de travail mathématique dans le modèle mathématique
- Phase 4. Retour à la situation étudiée pour transformer les réponses au problème mathématique en des réponses aux questions initiales et les confronter à la réalité modélisée.

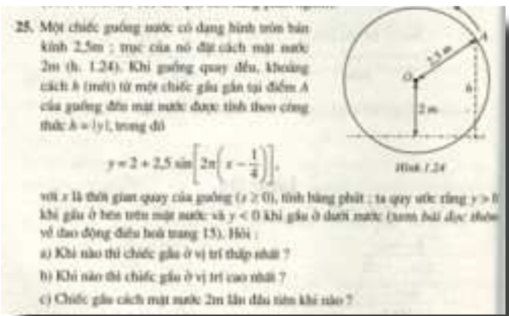
1.2 Pourquoi les rares énoncés présents dans les manuels de mathématiques ne sont-ils pas des exercices de modélisation ?

Nous allons montrer à partir d'énoncés se référant à une réalité extra – mathématique, présents dans l'institution « Enseignement Mathématique Secondaire » (EMS) au Viêt Nam ou en France, l'absence de processus de modélisation, confirmant ainsi la réduction de l'enseignement de la modélisation à l'enseignement de modèles.

Nous avons choisi de présenter un exercice typique de l'enseignement des mathématiques au Lycée dans chacun des deux pays, traitant d'un phénomène de covariation périodique de grandeurs : hauteur et temps pour le premier, intensité électrique et temps pour le second.

1.2.1 Dans l'enseignement mathématique secondaire du Viêt nam

Exemple de l'exercice 25 page 32 du manuel « classe 11, manuel élevé, Chapitre 1. Fonctions et équations trigonométriques »


25. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m ; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (h. 1.24). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức h = |y|, trong đó

$$y = 2 + 2,5\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right],$$

với x là thời gian quay của guồng (x ≥ 0), tính bằng phút ; ta quy ước rằng y > 0 khi gầu ở bên trên mặt nước và y < 0 khi gầu ở dưới nước (xem bài đọc thêm về dao động điều hoà trang 15). Hỏi :

a) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí thấp nhất ?

b) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí cao nhất ?

c) Chiếc gầu cách mặt nước 2m lần đầu tiên khi nào ?

Figure 2 Enoncé en Vietnamien de l'exercice avec représentation géométrique de la noria

25. Une noria a un rayon de 2,5m et son axe de rotation est distant de la surface de l'eau de 2m (figure 1.24). Quand elle tourne régulièrement, la distance h (mètre) à la surface de l'eau d'un seau associé à un point A de la noria est calculée par la formule h = $|y|$ avec

$$y = 2 + 2,5\sin\left[2\pi(x - \frac{1}{4})\right]$$

x est le temps en minute de rotation de la noria (x ≥ 0) ; y > 0 quand la noria est au dessus de la surface de l'eau et y < 0 quand elle est au dessous.

a) Quand le seau est-il à la position la plus basse ?

b) Quand est-il à la position la plus haute ?

c) Quand est-il distant de la surface de l'eau de 2 m pour la première fois ?

La solution attendue dans l'institution Viêt Nam passe par l'usage de la formule (d'après le livre de l'enseignant pour l'exercice 25).

h est le plus petit quand sin[2π(x-1/4)] est le plus petit donc quand sin[2π(x-1/4)] = -1.

D'où 2π(x-1/4)] = π+2kπ, avec k entier, etc.

Une solution non attendue où l'on utilise la formule et le modèle géométrique proposée en illustration :

h = 0,5 et en dessous du niveau d'eau donc y = -0,5 ; donc 2+2,5 sin[2π(x-1/4)] = -0,5.

Les modèles géométrique (illustration) et algébrique ($y = 2 + 2{,}5\sin\left[2\pi(x - \frac{1}{4})\right]$) sont donnés tout faits et non construits par les élèves. Le modèle géométrique est inutile pour répondre aux questions, il n'est qu'une simple illustration. L'exercice 25 fait rentrer l'élève dans le contrat didactique de la résolution d'équations trigonométriques (Thèse en cours de Nguyen Thi Nga).

1.2.2 Dans l'enseignement mathématique secondaire français

Exercice 46 page 292 du manuel Mathématiques 2nde de la collection Déclic (Hachette éducation, 2004). Chapitre 11 : Trigonométrie. Le courant alternatif.

> Le courant utilisé dans les appareils électriques domestiques est alternatif, c'est-à-dire qu'il circule alternativement dans les deux sens à l'intérieur des fils électriques.
>
> L'intensité I du courant circulant dans un appareil donné est donnée par la formule :
>
> I(t) = 2 sin (100πt), où l'intensité I est exprimée en Ampère (A) et t, le temps, en secondes.
>
> 1) Quelle est la période T de la fonction : t I(t) ?
>
> Quelle est sa fréquence ? (On appelle fréquence l'inverse de la période : ; elle est exprimée en Hertz : Hz)
>
> 2) Quelle est la valeur maximale de I ? sa valeur minimale ?
>
> 3) À l'instant t = 0, 1025 s, quelle est l'intensité du courant ?
>
> 4) Représenter la fonction I dans un repère orthogonal, où l'on prendra pour unités : 1 cm pour 0,01 seconde en abscisses ; 1 cm pour 1 ampère en ordonnée.

Le modèle algébrique est aussi donné tout fait. La dernière question (4) de l'exercice 46 ne sert à rien mais est un observable du contrat didactique en jeu dans cet exercice : celui de l'étude d'une fonction.

1.3 Conclusion

Les deux exercices sont typiques des attentes institutionnelles de l'enseignement des mathématiques au Lycée en France et au Viêt Nam en ce qui concerne la modélisation mathématique d'une réalité extra mathématique portant sur la covariation pérodique de grandeurs.

Dans les deux institutions, il y a bien un recours à un modèle fonctionnel pour modéliser la covariation, mais ce modèle est donné dans le registre algébrique particulier à chacune des institutions pour les fonctions : y = f(x) pour EMS au Viêt Nam ; x = f(t) pour EMS en France.

Le processus de modélisation est pris totalement en charge par l'énoncé, sans jamais laissé une part de responsabilité à l'élève.

Nous allons maintenant examiner plus spécifiquement comment est traité la périodicité dans la modélisation des phénomènes de covariation au Lycée. Pour cela, nous allons élargir notre étude à l'enseignement de la physique dans les deux pays, ce qui nous permettra de revisiter le problème de l'enseignement de la modélisation.

2 Le concept scientifique de périodicité : analyse comparative de son enseignement au Viêt Nam et en France

La périodicité est un concept employé en physique et par beaucoup d'autres disciplines scientifiques car il est central dans l'étude des phénomènes de covariation, cycliques ou oscillatoires. On retrouve ce concept en mathématiques via la notion de fonction périodique. Les fonctions périodiques notamment les fonctions trigonométriques se sont constituées progressivement dans les sciences comme outils de modélisation de grandeurs variables qui retournent régulièrement et indéfiniment au même état.

Les phénomènes cycliques ou oscillatoires sont présents très tôt dans les enseignements scolaires de la physique, de la chimie et de la biologie. Quand, dans l'enseignement secondaire, il est fait appel à une formalisation mathématique pour soutenir l'étude d'un phénomène périodique, cette formalisation est conduite, via des modèles mathématiques, donnant lieu à des phénomènes didactiques dont notre présent travail tente de rendre compte tant au Viêt Nam qu'en France.

Nous présentons d'abord de façon synthétique une analyse comparative de l'enseignement de la notion de périodicité et de fonction périodique en physique et en mathématique au Viêt Nam et en France.

Avec cette analyse, il s'agit :

- de décrire, en les caractérisant, les rapports institutionnels aux notions de périodicité et de fonction périodique dans les deux institutions d'enseignement secondaire de la France et du Viêt Nam ;
- d'éclairer les conditions et les contraintes institutionnelles de la modélisation de phénomènes périodiques dans EMS (enseignement mathématique secondaire) vietnamien.

En prenant appui sur les différences et les ressemblances entre les deux institutions, la méthode comparative permet :

> *« - une dénaturalisation du regard sur le fonctionnement scolaire d'une institution didactique ;*
>
> *- la prise en compte de niveaux de détermination plus élevés que celui du domaine ;*
>
> *- la constitution d'un répertoire de praxéologies à enseigner et l'évaluation des praxéologies mathématiques et didactiques. » (Bessot & Comiti 2008, p.191)*

Pratiquement, nous repérons les praxéologies en leur donnant des significations épistémologiques et didactiques :

- dans les programmes et manuels de mathématiques dans les deux pays ;
- dans les programmes et manuels de physique, de chimie et de biologie dans les deux pays.

2.1 Enseignement de la physique : deux modèles

Le tableau 1 présente le curriculum d'étude des phénomènes périodiques dans l'enseignement secondaire de la physique :

Classe	Au Viêt Nam	En France
9 (3ème)	aucun phénomène périodique enseigné en collège	tension périodique, tension sinusoïdale : période, fréquence
10 (2de)	rotation des planètes dans le système solaire, mouvement circulaire uniforme : vitesse angulaire, accélération, période, fréquence	alternance des jours et des nuits, des phases de la Lune, mouvement de rotation, vitesse angulaire
12 (Term)	oscillation harmonique (pendule (fil, ressort), pendule simple, pendule physique) : période, fréquence, amplitude, fréquence angulaire. - son, onde sinusoïdale - courant alternatif	- ondes progressives périodiques, onde sinusoïdale, son - circuit électrique oscillant - pendule simple

Tableau 1 Phénomènes périodiques étudiés en physique

Il s'agit pour les deux institutions d'étudier des grandeurs variables avec le temps : des tensions électriques, des distances, des angles, etc. En arrière-plan, même non-nommée ou non formalisée, se trouve toujours une fonction périodique dont la variable indépendante est le temps.

La mathématisation des concepts est certes plus prégnante au Viêt Nam qu'en France mais dans les deux institutions elle va s'enrichir au cours du curriculum en s'appuyant sur deux modèles : celui du mouvement circulaire uniforme (M) et celui de l'oscillation harmonique (O).

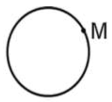
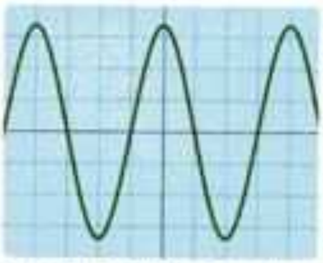
Modèle M	Modèle O
 Trajectoire circulaire et ω constant	 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

Figure 3 Deux modèles mathématiques de la périodicité

Introduite dès le collège en France l'oscillation harmonique ne l'est que par des graphiques présentés comme résultant de prises de mesure (par exemple un oscillogramme). Le rôle du registre graphique est nettement en retrait au Viêt Nam où c'est le registre algébrique qui domine. Cependant, toujours pour l'oscillation harmonique, le registre algébrique ne trouve toute sa place qu'après l'étude des fonctions trigonométriques en classe 11 de mathématiques.

A titre illustratif, voici deux exercices tirés de manuels de physique, le premier d'une classe de troisième française (classe 9 du Viêt Nam) et le second d'une classe 12 vietnamienne (classe terminale française) :

23 Visualiser l'allure de la tension du secteur



Afin de visualiser l'allure de la tension du secteur à l'oscilloscope, on utilise un transformateur.
Ce dernier abaisse la valeur de la tension sans changer son allure ni sa fréquence.
Balayage : 5 ms/DIV

a. Indique si la tension du secteur est : continue, variable, périodique, alternative, sinusoïdale. Plusieurs adjectifs peuvent être employés.
b. Détermine la période de la tension du secteur.
c. Déduis-en sa fréquence.

Figure 4 Exercice de la classe de troisième française

L'équation d'oscillation harmonique d'un objet est
$x = 6\cos(4\pi t + \frac{\pi}{6})$ (cm)
a) Détermine l'amplitude, la fréquence angulaire, la période et la fréquence de l'oscillation.
b) Détermine la phase de l'oscillation au temps $t = \frac{1}{4}$ s. Déduis-en l'élongation à cet instant.
c) Construis un vecteur rotatif représentant l'oscillation au temps $t = 0$.

Figure 5 Exercice de la classe terminale vietnamienne

Notons, avec la présence de la notion de vecteur rotatif, la volonté institutionnelle vietnamienne de créer un lien entre mouvement circulaire et mouvement oscillatoire. Un tel lien n'existe pas dans l'institution française qui d'ailleurs ne cherche pas à faire vivre la cinématique dans l'enseignement de la physique[1].

2.2 Enseignement des mathématiques : les fonctions trigonométriques

Le Tableau 2 présente le curriculum d'objets mathématiques attachés au concept de périodicité dans l'enseignement secondaire des mathématiques :

	En France	Au Viêt Nam
Collège	développement décimal périodique	développement décimal périodique
Lycée (classe 10)	- fonctions trigonométriques - fonctions périodiques (par graphique) - période, fréquence	X
Lycée (classe 11)	fonctions périodiques	fonctions trigonométriques

Tableau 2 Les objets de la périodicité en mathématiques

Au-delà du canevas commun aux deux institutions, il importe de mettre en exergue deux différences essentielles :

- la première est qu'en France la périodicité d'une fonction, présente dans l'enseignement dès la classe de seconde, est regardée comme propriété d'une fonction au même titre que la parité - sur la base d'une définition générale - et donne lieu à la restriction de l'intervalle d'étude de la fonction dans les types de tâche « étudier une fonction numérique ». Au Viêt Nam, par contre, la périodicité est installée comme propriété des fonctions trigonométriques et ne vit donc qu'avec ces fonctions.

- la seconde est l'association, dans les types de tâche que l'on trouve en France, des deux registres de la fonction périodique – comme de toute autre fonction : le registre graphique via la courbe représentative dans un repère cartésien et le registre algébrique via la formule explicitant la relation entre la variable dépendante et la variable indépendante. Au Viêt Nam, par contre, le registre algébrique domine en laissant un rôle de supplétif au registre graphique.

Toujours à titre illustratif, voici deux morceaux « de cours » extraits de deux manuels du même niveau scolaire (la classe 11), l'un français et l'autre Viêt Namien :

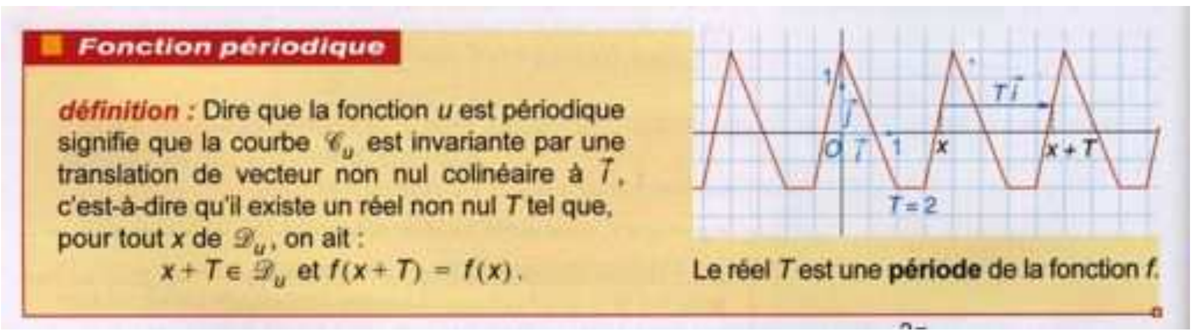


Figure 6 Exercice de la classe de première française

[1] La cinématique, avant d'être attachée à l'enseignement de la physique, formait un thème substantiel des programmes de mathématiques d'avant la réforme des années 1970.

Une fonction $y = f(x)$ définie sur l'ensemble D est appelée périodique s'il existe un nombre $T \neq 0$ tel que pour tout x appartenant à D, on a :

$$x + T \in D,\ x - T \in D \text{ et } f(x + T) = f(x).$$

S'il existe un nombre positif minimal T satisfaisant ces conditions, cette fonction est appelée fonction périodique de période T.

Figure 7 Exercice de la classe de première vietnamienne

Outre l'absence de référence au graphique dans la définition proposée par le manuel vietnamien, notons l'explicitation du caractère de « minimalité » pour le nombre T désigné comme la « période de la fonction » alors que ce caractère est laissé dans l'ombre de la définition du manuel français.

2.3 Enseignement de la modélisation ?

Sous le vocable de modélisation, Legrand (2003) distingue quatre activés fort différentes :

> - une modélisation « prétexte » qui consiste à plaquer un « réel » qui servirait de support concret au modèle mathématique qu'on veut enseigner ou faire fonctionner
>
> - une modélisation « modèle à suivre » qui sert de règle d'action par exemple pour un ingénieur, le modèle n'expliquant peut-être pas mais si on l'applique, ça marche ;
>
> - une modélisation « modèle scientifique achevé » qui explique et rationalise un « réel », modèle qui est présenté tout fait ;
>
> - une modélisation « acte de modélisation scientifique » où, partant d'un réel plus ou moins bien délimité et d'une question à la fois très précise mais aussi souvent trop vaste car trop ambitieuse, […] on construit un modèle à la fois pertinent vis-à-vis du questionnement initial et simultanément assez mathématisé […].

Legrand fait alors remarquer que la troisième activité est la plus répandue à l'école et à l'université, ce qui s'explique, dit-il : « elle plaît au professeur de mathématiques car elle ne l'oblige pas à entrer dans un débat philosophico-scientifique sur ce qu'on garde ou néglige » et « elle plaît au professeur de physique car elle anoblit ses théories par les maths (cela semble plus rigoureux, moins contestable, plus facile à enseigner […]) ».

Nous rejoignons son analyse et son constat : les deux modèles M et O dont les praxéologies attestent la présence dans les enseignements secondaires français et vietnamien ne font vivre que des activités de modélisation « prétexte » ou « modèle scientifique achevé ». Nous n'en voulons pour preuve que l'exercice suivant très représentatif de ce que l'on rencontre dans les manuels de mathématiques vietnamiens :

Exercice 17 page 29, mauel élevé, classe 11

Le nombre d'heure de lumière d'une ville A à la latitude 40^0 nord du t ième jour d'un an est donné par la fonction suivante :

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12,\ t \in \mathbb{Z},\ 0 < t \leq 360^0$$

a) En quel jour la ville A a-t-elle juste 12 heures de lumière ?

b) En quel jour a-t-elle le moins d'heure de lumière ?

c) En quel jour a-t-elle le plus d'heure de lumière ?

Figure 8 Exercice de « modélisation » en classe de première Vietnamienne

La référence au modèle O permet ici au mieux de montrer comment fonctionnent les résultats de la science astronomique mais ne permet pas d'entrer dans un processus de modélisation ; à quoi sert par exemple la donnée de la latitude et la latitude fait-elle partie du modèle à construire ?

Nous allons maintenant présenté des éléments d'une enquête menée en fin de Lycée (classe 12) au Viêt Nam sur le rapport personnel des élèves à la périodicité et à la modélisation de phénomènes de covariation périodique.

3 Une enquête en fin de Lycée au Viêt Nam sur la modélisation de phénomènes de covariation périodique

Trois questions sont à l'origine de la décision de faire passer un questionnaire à des élèves vietnamiens, le questionnaire servant à « travailler » les questions et à enrichir les analyses qui ont débouché sur ces mêmes questions :

- Q1 : comment, dans les conditions actuelles, l'élève utilise-t-il des savoirs non-mathématiques pour travailler à l'intérieur de l'un des modèles mathématiques M ou O ?
- Q2 : comment, dans les conditions actuelles, l'élève se réfère-t-il à l'un des modèles mathématiques M et O pour résoudre un problème extra-mathématique ?
- Q3 : dans quelles conditions l'élève peut-il entrer dans un processus de modélisation d'un problème extra-mathématique relatif à un phénomène périodique ?

3.1 Conception d'un questionnaire

Le questionnaire (cf. annexe 1, p. 57) est composé de quatre exercices à résoudre sur deux séances de 45 minutes. Il est conçu pour une classe 12 après l'enseignement de l'oscillation harmonique en physique et tous les exercices sont bâtis sur des ruptures de contrat didactique (par exemple aucun énoncé ne comporte les mots « périodicité » ou « périodique »).

Tous les exercices font intervenir explicitement ou implicitement une fonction numérique dont la variable indépendante est le temps.

Pour les exercices 1, 2 et 3 :

- la première question est ouverte : « qu'est-ce que tu peux dire sur ce phénomène ? »
- les questions suivantes suggèrent l'exploitation d'un registre de la fonction : graphique, formule algébrique ou table numérique ;
- la dernière question favorise le recours à la périodicité via l'un des deux modèles M ou O.

Quant à l'exercice 4, il ne privilégie aucun des deux modèles M et O.

Le tableau 3 présente les variables de situation et les variables didactiques du questionnaire :

Numéro exercice	Discipline du contexte	Classe du phénomène périodique	Registre de la fonction
Ex. 1	biologie	oscillations	graphique
Ex. 2	physique	mouvement circulaire	algébrique
Ex. 3	géographie	oscillations	table de données
Ex. 4	physique	mouvement circulaire	langue naturelle

Tableau 3 Variables de situations et variables didactiques du questionnaire

Deux cents élèves de deux lycées d'Ho Chi Minh Ville ont passé en individuel ce questionnaire. Précisons que ces élèves possèdent le manuel élevé, que la durée de la fiche 1 comportant les exercices 1 et 2 fut limitée à 35 minutes et que la fiche 2, avec les exercices 3 et 4, dura 55 minutes.

Une analyse détaillée est en cours. Nous nous limitons ici à une présentation de quelques éléments d'une première analyse globale des résultats de cette expérimentation.

3.2 Quelques éléments d'une première analyse globale

La première question de chacun des trois premiers exercices (que nous qualifions de question ouverte[2]) fournissait l'occasion aux élèves d'exprimer la signification qu'ils donnent à la périodicité, s'ils reconnaissaient la présence d'un phénomène périodique. Voici un tableau qui synthétise les différentes réponses :

<table>
<tr><th>Reconnaissances de la périodicité</th><th>Caractérisation de la périodicité</th><th colspan="2">Exercice 1</th><th colspan="2">Exercice 2</th><th colspan="2">Exercice 3</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Oui</td><td>Répétition régulière</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">20</td></tr>
<tr><td>C'est périodique</td><td colspan="2">37</td><td colspan="2">16</td><td colspan="2">39</td></tr>
<tr><td>Oscillation harmonique</td><td>94</td><td rowspan="2">94</td><td>48</td><td rowspan="2">133</td><td>18</td><td rowspan="2">18</td></tr>
<tr><td>Mouvement circulaire uniforme</td><td>0</td><td>85</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="2">138</td><td colspan="2">149</td><td colspan="2">77</td></tr>
<tr><td>Non</td><td></td><td colspan="2">51</td><td colspan="2">42</td><td colspan="2">92</td></tr>
<tr><td>Pas de réponse</td><td></td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">31</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">200</td></tr>
</table>

Tableau 4 Les réponses à la question ouverte du questionnaire

Dès lors que le phénomène n'est pas qualifié de périodique dans l'énoncé, donc sous la responsabilité de l'enseignant, certains élèves, très nombreux, rechignent à « voir » de la périodicité, se cantonnant à une vision locale du phénomène où les irrégularités prennent le dessus sur la régularité qu'apporterait une vision globale. Nous constatons cependant la référence aux modèles M et O, très forte dans les exercices 1 et 2 mais très minoritaire dans l'exercice 3 ce qui peut s'expliquer par l'absence simultanée de graphique et de formule pour la fonction et ce qui confirme que le tableau numérique est un registre peu usité dans l'institution vietnamienne.

Dans le Tableau 5, nous interprétons les refus de réponses à certaines des questions :

<table>
<tr><th>Question</th><th>Numéro exercice</th><th>Réponse attendue</th><th>Nombre de non-réponses</th><th>Interprétation principale ; difficulté à</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Construire une figure permettant…</td><td>1</td><td>Sinusoïde</td><td>92/200</td><td>exploiter le modèle O notamment en réduisant l'échelle de l'axe des abscisses</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Sinusoïde</td><td>144/200</td><td>reconnaître et exploiter le modèle O en l'absence de formule et de graphique</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Cercle ou sinusoïde</td><td>150/200</td><td>articuler les deux modèles M et O</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Combien de temps…</td><td>2</td><td>125 minutes</td><td>120/200</td><td>articuler les deux modèles M et O</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8 minutes</td><td>131/200</td><td>conclure une stratégie algébrique en résolvant une inéquation trigonométrique</td></tr>
</table>

Tableau 5 Les refus de réponses

La confrontation des deux modèles s'érige en obstacle à la mobilisation des outils mathématiques que constituent les modèles. En effet, en plus des difficultés connues (car repérées et analysées dans d'autres recherches de didactique) comme prendre des informations de la réalité (ou du pseudo-concret) pour les placer dans le modèle mathématique (spécifier le modèle) ou comme replacer dans la réalité les résultats du travail mathématique obtenus du modèle - ou les rejeter, nous faisons l'hypothèse que la concurrence des deux modèles oblige à des conversions entre registres et au réemploi dans l'un des modèles d'objets mathématiques qui, institutionnellement, n'y sont pas présents.

[2] C'est un type de question très peu présent dans les exercices des manuels vietnamiens.

L'articulation entre savoirs mathématiques, issus des modèles M et O, et savoirs extra-mathématiques appelés par le contexte de l'exercice est l'une des pistes de travail pour comprendre les phénomènes didactiques à l'œuvre dans une activité de modélisation. Voici, par exemple (Tableau 6), comment l'exercice 1 fait venir différentes significations possibles de la périodicité, lesquelles pourraient servir de point d'appui à une activité de modélisation qu'avec Legrand, nous appelons de nos vœux dans l'enseignement secondaire :

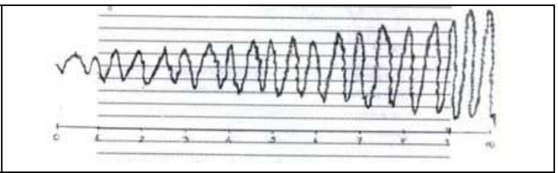
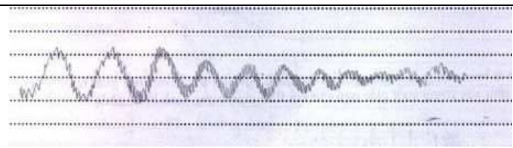
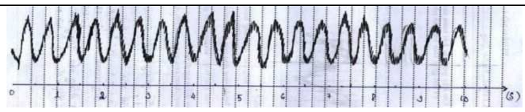
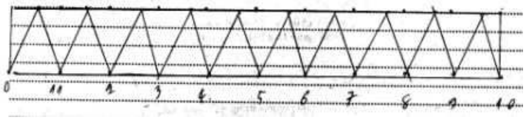
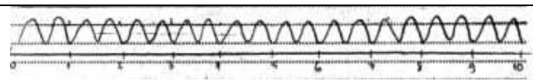
Oscillation explosive	
Oscillation amortie	
Oscillation tremblante	
Oscillation avec changement de forme et de période	
Oscillation harmonique	

Tableau 6 Cinq réponses à la question f de l'exercice 1

4 Conclusion

Que ce soit dans les Institutions didactiques française ou vietnamienne, dans l'étude de situations de modélisation des phénomènes périodiques, en arrière-plan, la variable indépendante est toujours le temps. Les phénomènes périodiques étudiés renvoient le plus souvent aux modèles M (mouvement circulaire uniforme) et O (oscillation harmonique) présents dans l'enseignement de la physique.

L'institution française fait appel aux deux registres, graphique et algébrique, de la fonction qui intervient dans la modélisation des phénomènes. On demande à l'élève de rechercher des informations sur le phénomène à partir d'un graphique ou de l'étude d'une fonction donnée par sa formule algébrique.

L'institution vietnamienne n'insiste au contraire que sur le travail algébrique. On attend que l'élève établisse des équations trigonométriques et les résolve. Le registre géométrique est quelquefois présent dans l'énoncé mais ne joue qu'un rôle illustratif (voir précédemment la figure 1). Le recours au registre graphique pour résoudre le problème n'est pas attendu institutionnellement. De plus, l'étude et la construction des fonctions ne sont pas demandées.

Par ailleurs, dans les deux institutions, face à une situation extra mathématique, on propose immédiatement une modélisation mathématique « parfaite » sans passer par les étapes intermédiaires.

Ce système de contraintes institutionnelles pèsent sur le rapport personnel des élèves à la périodicité et à la modélisation, comme le montrent les résultats de l'enquête effectuée en fin de Lycée au Viêt Nam.

- La périodicité est comprise par les élèves comme une répétition, une régularité d'un mouvement circulaire ou d'oscillation harmonique. Cependant, les propriétés périodiques des phénomènes ne sont pas pour les élèves des outils pour résoudre des problèmes. Tout se passe comme si les élèves ne parvenaient pas à relier les phénomènes périodiques aux modèles mathématiques qui permettent de les étudier.

- Les deux modèles M et O sont perçus mais la prédominance du regard local sur la covariation empêche leur articulation et leur exploitation comme on peut le voir dans l'exercice 4 du questionnaire de l'enquête.
- Comme on pouvait le prévoir, l'entrée dans un processus de modélisation est difficile pour la plupart des élèves. Bien que les élèves puissent en général déterminer un ensemble de variables dépendantes, ils rencontrent des difficultés pour la construction d'un modèle mathématique (phases 1 et 2 dans le schéma du processus de modélisation). Notamment, l'étape de validation semble être absente dans les réponses de la plupart des élèves : une fois le travail effectué au sein du modèle mathématique (phase 3 dans le schéma du processus de modélisation), ils sont incapables d'évaluer si les résultats obtenus sont adaptés ou non à la réalité extra mathématique étudiée (phase 4 dans le schéma du processus de modélisation).

Partie 3

Conception et expérimentation d'une ingénierie didactique de modélisation de phénomènes de covariation périodique

Par le terme d'ingénierie didactique, nous désignons un travail d'ingénieur qui, pour réaliser un projet d'enseignement, s'appuie sur les connaissances du domaine scientifique de la didactique des mathématiques, et accepte de se soumettre à un contrôle de la communauté scientifique.

Dans le même temps, ce travail amène les chercheurs à rencontrer des objets complexes de la réalité de l'enseignement et donc à s'attaquer pragmatiquement, avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes non pris en charges par la théorie : *« problèmes que la science ne veut ou ne peut pas encore prendre en charge »* (Artigue 1990). L'ingénierie didactique a donc une double fonction : méthodologique et productrice de questions didactiques nouvelles.

Nous avons donc produit une ingénierie didactique relative à la modélisation de phénomènes de covariation périodique. Cette ingénierie constitue un prototype de situations pour l'enseignement utilisable par les enseignants en France et au Viêt Nam (présentées dans le § 3 p. 26). Simultanément, cette ingénierie a produit un ensemble de résultats et de nouvelles questions destinés à la communauté de recherche en didactique des mathématiques (présenté dans le § 5 p. 50).

1 Choix fondamentaux retenus pour la conception de l'ingénierie

Une modélisation intermédiaire géométrique construite par les élèves

Le premier choix pour l'ingénierie est d'amener les élèves à construire eux-mêmes les modèles de la situation réelle, en commençant par un modèle intermédiaire. Cela implique notamment que le choix des variables du modèle puisse être sous la responsabilité des élèves. Ce modèle intermédiaire pour travailler la covariation de grandeurs sera géométrique. Le choix d'un modèle de nature géométrique est un choix clef pour l'apprentissage. En effet, le domaine géométrique facilite l'entrée des élèves dans le travail de modélisation car il permet aux élèves d'établir un lien sémantique avec la situation réelle, la géométrie étant un outil habituellement utilisé pour modéliser l'espace qui nous environne. De plus, la modélisation par la géométrie d'un réel spatial est une activité pratiquée par les élèves depuis l'école primaire (une fenêtre ou une table représentée par un rectangle par exemple), même si cela reste le plus souvent implicite.

Deux conception des fonctions

L'ingénierie consistera à introduire d'abord auprès des élèves une conception dynamique des fonctions qui mette en évidence l'asymétrie des variables : variable indépendante et variable dépendante. Elle aboutira ensuite à la mobilisation d'une conception statique de la notion de fonction, conception conforme aux attentes de l'institution scolaire. L'introduction de la conception initiale des fonctions, la conception dynamique, se fera à l'aide du modèle intermédiaire.

Un environnement de géométrie dynamique

L'environnement de géométrie dynamique permettra l'élaboration du modèle intermédiaire géométrique s'appuyant sur une représentation spatiale de la situation réelle. L'environnement de géométrie dynamique a l'avantage de donner les moyens aux élèves d'explorer le modèle en le manipulant, le modifiant et en ayant accès aux effets de ces modifications.

Il permet aussi de dé-symétriser les deux variables choisies dans le modèle. Dans cet environnement de géométrie dynamique, la modélisation de grandeurs variables se fait par la création de points qui se déplacent. Un point mobile peut modéliser différentes variables possibles (distances, aires, temps). Ainsi, l'établissement de ce modèle intermédiaire grâce à la géométrie dynamique permet de matérialiser les variables tout en laissant aux élèves la responsabilité du choix des variables pertinentes dans la situation étudiée. La notion de point pilotant un autre point, prémisses aux notions de variables indépendante et dépendante peut alors être introduite. Au cours de la manipulation du modèle dynamique, les élèves pourront se rendre compte que certains objets, essentiellement des points, sont libres dans leur déplacement alors que d'autres sont contraints et ne se déplacent que par l'intermédiaire des premiers, de façon analogue aux variables indépendantes et variables dépendantes des fonctions. Enfin, cette modélisation géométrique intermédiaire conserve perceptivement la trace matérielle du phénomène de variation qui, en revanche, disparaît dans le symbolisme algébrique, ultime étape du processus de modélisation.

Des phénomènes périodiques

La périodicité a été retenue dans cette ingénierie car il s'agit d'un concept central employé en physique et par de nombreuses autres disciplines scientifiques pour l'étude des phénomènes cycliques et des phénomènes oscillatoires. En mathématiques, les fonctions périodiques notamment les fonctions trigonométriques se sont constituées progressivement dans les sciences comme outils de modélisation de grandeurs variables qui retournent régulièrement et indéfiniment au même état. D'autre part, dans les deux pays, les fonctions trigonométriques de base (sinus, cosinus) font partie du curriculum du niveau scolaire considéré. L'ingénierie s'intègrera donc aisément dans la progression des classes de ce niveau.

Ce choix a pour conséquence d'introduire dans la situation la question de la modélisation du temps. C'est un des enjeux de l'ingénierie : amener les élèves à prendre en compte le temps dans le modèle. L'environnement de géométrie dynamique peut donner lieu à différentes modélisations du temps.

Prise en compte des contraintes des deux institutions France et Viêt Nam

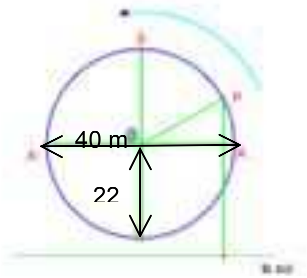
Nous avons tenu à prendre en compte les contraintes issues de l'analyse institutionnelle pour rendre possible une véritable utilisation des situations de l'ingénierie produite. Par ailleurs, la confrontation aux fonctionnements d'une institution différente est un outil méthodologique qui agit comme révélateur des implicites d'une institution donnée. Ainsi, la conception d'une ingénierie compatible pour la France et le Viêt Nam nous permet de mieux comprendre les contraintes de fonctionnement de chaque institution scolaire et également d'envisager d'autres choix possibles.

2 Processus de conception de l'ingénierie

Dans cette partie, nous présentons brièvement les aspects les plus notables de notre processus de conception de l'ingénierie.

2.1 Une situation de départ issue de problèmes habituels

Nous avons repris une idée de Burgermeister (2009), celle de modifier des énoncés de problèmes scolaires, représentatifs d'un certain rapport institutionnel à la modélisation, pour construire des situations permettant de transférer aux élèves une part de responsabilité dans le processus de modélisation. C'est par ailleurs une pratique répandue chez les enseignants de partir d'un énoncé issu d'un manuel ou d'une base d'exercices pour l'adapter à leur classe et leur contexte d'enseignement. Nous avons repris cette idée et choisi l'énoncé du manège, énoncé traditionnel au Viêt Nam, utilisé dans le questionnaire (cf. Partie 2 du rapport). Voici cet énoncé initial (Figure 9), interprété selon les deux rapports institutionnels Viêt Nam et France :

<table>
<tr>
<td>À la façon vietnamienne
Un parc d’attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont l’axe de rotation est situé à 22 m du sol (figure 1). Au début du voyage, Minh s’assoit dans une cabine.


Quand la roue tourne régulièrement dans le même sens, la distance y (en mètres) au sol de la cabine de Minh, associée au point P, est calculée par la formule :
$y = 22 – 20 \cos \pi x / 5$
où x est le temps en minutes de rotation du manège.
a) A quel instant Minh est-il à la position la plus basse ?
b) A quel instant est-il à la position la plus haute ?
c) Quand est-il distant du sol de 23 m pour la première fois ?</td>
<td>À la façon française
Un parc d’attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont l’axe de rotation est situé à 22 m du sol. Au début du voyage, Minh s’assoit dans une cabine.
Quand la roue tourne régulièrement dans le même sens, la distance h (en mètres) au sol de la cabine de Minh, associée au point P, est calculée par la formule :
$h(t) = 22 – 20 \cos \pi t/ 5$
1) Quelle est la période T de la fonction : t h(t) ?
2) Quelle est la valeur maximale de h ? sa valeur minimale ?
3) À l’instant t = 3 min, quelle est la distance au sol de la cabine de Minh ?
4) Représenter la fonction h dans un repère orthogonal, où l’on prendra pour unités : 1 cm pour 1 min en abscisse ; 1 cm pour 5 m en ordonnée.</td>
</tr>
</table>

Figure 9 Les deux énoncés initiaux du problème du manège (cf. thèse en cours de Nguyen Thi Nga)

C’est à partir de cet énoncé, sous sa double forme, que nous avons conçu une ingénierie en 4 situations (cf. Figure 10) permettant aux élèves de construire la notion de périodicité en mettant en œuvre une démarche de modélisation.

2.2 Un processus de conception itératif

Nous avons mis en place un processus de conception itératif de cette ingénierie. Nous entendons par là que nous avons procédé à des expérimentations d’états successifs de l’ingénierie afin de pouvoir améliorer et compléter la succession des situations qui la constitue. Au cours de l’année du projet, nous avons ainsi pu réaliser trois expérimentations, deux au Viêt Nam et une en France. A l’issue de chaque expérimentation, nous avons modifié les situations testées et nous en avons ajouté de nouvelles. L’alinéa 3 présentE l’état final de l’ingénierie. Nous détaillons ici les principales évolutions de l’ingénierie.

Expérimentation 1 Viêt Nam (décembre 2009)

Test des situations 1 et 2 en classe de dixième.

Expérimentation 2 France (juin 2010)

Introduction d’une séance d’initiation à Cabri et test des situations 0, 1, 2 et 3.

Par rapport à l’expérimentation 1, l’expérimentation 2 apporte les éléments et modifications suivantes :

- une séance d’initiation à Cabri articulée à l’ingénierie a été ajoutée ; son objectif est de provoquer, chez les élèves, une genèse instrumentale minimale des outils nécessaires à l’ingénierie ;

- la situation 0 a été extraite de la situation 1 ; en effet, il est apparu que la notion de pilotage d'un point par un autre, instrument de modélisation de la covariation, n'est pas traitable directement par les élèves au cours de la résolution de la situation 1 ;
- la situation 2 a été modifiée relativement au traitement de l'introduction de l'axe du temps ;
- la situation 3 a été ajoutée ; la conception de cette situation, qui finalise l'ingénierie, a été délicate en raison des difficultés que nous avons rencontrées pour identifier les conditions rendant incontournable le recours au caractère périodique des fonctions.

Expérimentation 3 Viêt Nam (novembre 2010)

Test des séances d'initiation à Cabri, puis des situations 0, 1, 2 et 3.

Par rapport à l'expérimentation 2, l'expérimentation finale réalisée au Viêt Nam a testé les modifications suivantes :

- la séance d'initiation a été raccourcie car elle s'est révélée trop longue au cours de l'expérimentation 2 ;
- la situation 3 a été modifiée ; l'expérimentation 3 étant destinée essentiellement à évaluer la pertinence des choix faits pour la situation 3 dans laquelle la périodicité doit apparaître ainsi que le passage à un modèle algébrique, nous avons renforcé les consignes de déroulement de cette situation finale.

Les résultats de cette dernière expérimentation ne sont pas encore disponibles au moment où nous rédigeons ce rapport.

3 Une ingénierie sur la covariation périodique de grandeurs

3.1 Présentation globale de l'articulation des situations dans l'ingéniérie

Nous présentons par un schéma (Figure 10) la succession des quatre situations de notre ingénierie autour du problème du manège. La numérotation commençant par zéro est un effet de notre processus de conception qui a débuté par la situation 1 et qui s'est enrichi d'une situation préalable que nous avons numéroté par 0. Nous ne présentons dans ce schéma essentiellement ce qui a trait aux processus de modélisation et aux conceptions de la notion de fonction et de variable.

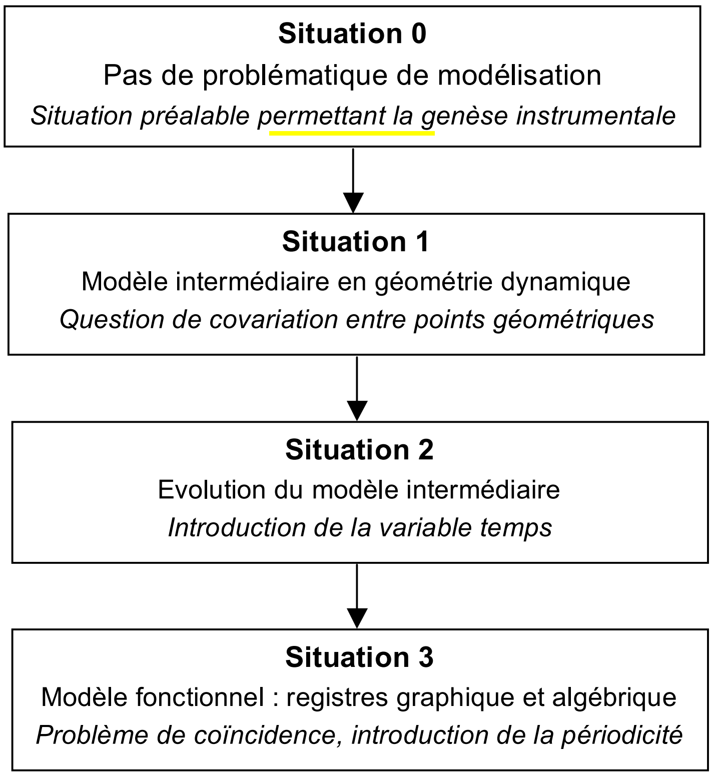


Figure 10 Succession des 4 situations constituant l'ingénierie

3.2 Situation d'initiation à Cabri (durée environ 45 minutes)

Cette situation d'initiation est proposée comme pré-requis pour l'ingénierie dans le cas où les élèves ne connaissent pas Cabri. Cependant, si les élèves connaissent déjà Cabri, il faut alors commencer directement par la situation préalable (situation 0 de l'ingénierie).

Initiation

SURTOUT BOUGE LES POINTS !

➢ *Créer et nommer un point*

Construis un point. Nomme le A. Déplace le.
Construis un autre point. Nomme le B. Déplace le.

Point Nommer Pointer

➢ *Créer un segment, une droite*

Construis le segment d'extrémités A et B.
Construis la demi-droite [AB).
Déplace A et B.

Segment Demi-droite Droite

➢ *Construire un point sur une demi-droite ou un segment*

Place un point C sur le segment et un point D sur la demi-droite.
Observe les contraintes sur le déplacement du point C et du point D.

Point

➢ *Supprimer des objets*

Supprime le point C. Supprime le point D.
Supprime tout ce que tu as construit.

Pointer

➢ *Construire un rectangle*

Construis un segment [AB].
Construis un rectangle de côté [AB] en utilisant au choix
l'outil parallèle ou l'outil perpendiculaire.
Déplace les points A et B. Essaye aussi de déplacer autres sommets du rectangle.
Supprime ta construction.

Parallèle Perpendiculaire

➢ *Trois façons de construire un carré*

Construis un segment [AB] et une droite perpendiculaire à [AB]
passant par A.
Voici trois façons de reporter la longueur AB sur la droite perpendiculaire.

1. Construis un cercle de centre A, passant par B. Il coupe la perpendiculaire
en deux points, choisis en un pour être le troisième sommet du carré.
Termine la construction comme pour le rectangle.
Déplace A et B.
Conserve cette construction.

2. Reconstruis un segment [AB] et une perpendiculaire à [AB] passant par A.
Sélectionne l'outil « compas » et clique sur le segment [AB] puis sur le point A.
Tu obtiens un cercle de centre A et de rayon la longueur AB.
Termine la construction comme pour le rectangle. Déplace A et B.

Segment Cercle Compas

Figure 11 Page 1 de la fiche élève pour la séance d'initiation

3. Reconstruis un segment [AB] et une perpendiculaire à [AB] passant par A.
Sélectionne l'outil « distance et mesure » et clique sur [AB].
Déplace A et B et constate que la mesure de AB s'actualise au fur et à mesure du déplacement.
Construit une demi droite d'origine A et perpendiculaire à [AB]. Tu peux le faire en sélectionnant « demi-droite » puis A puis en cliquant sur la perpendiculaire à [AB].

Distance

Sélectionne l'outil « report de mesure ».
Clique sur la mesure de AB puis sur la demi-droite.
Tu obtiens un point qui est sur la droite perpendiculaire, exactement à la distance AB de A.

Report de mesure

➢ ***Mesures de longueurs et d'aires***

Repars de la construction du carré avec un cercle.
Mesure le côté [AB] du carré avec l'outil distance.

Distance

Sélectionne la calculette pour calculer l'aire du carré (côté x côté)
Pour cela, tu cliques sur :
- la mesure AB, elle s'affiche sous la forme d'une variable « a » dans la calculette,
- puis sur l'opération x
- puis à nouveau sur la mesure AB
- puis sur le signe égal.

Calculette

Le résultat apparait dans la fenêtre de la calculatrice.
Attrape le résultat avec la souris et place le dans la fenêtre de construction.
Déplace A et B et constate que la mesure de l'aire du carré s'actualise quand le carré varie.

Avec l'outil « aire » affiche l'aire du carré.
Constate qu'elle est toujours égale à celle que tu as calculée précédemment.

Aire

Avec l'outil « aire », affiche l'aire du cercle de centre A et passant par B.
Avec l'outil « calculatrice », calcule le rapport entre l'aire du cercle et celle du carré.
Déplace ton résultat dans la fenêtre de construction.
Déplace les points A et B.
Que constates-tu sur le rapport entre l'aire du cercle et celle du carré ?

➢ ***Une jolie trace***

Construis un point M sur le cercle, puis le triangle ABM.
Construis deux hauteurs du triangle ABM et leur point d'intersection H.
Sélectionne l'outil « trace » et clique sur H.
Déplace le point M. Tu obtiens une courbe rouge qui est la trace du point H.

Trace

Tu ne peux pas attraper directement le point H, mais tu peux le faire bouger en déplaçant le point M. On dira que le point M « **pilote** » le point H.

Figure 12 Page 2 de la fiche élève pour la séance d'initiation

L'enjeu de l'initiation est de rendre disponible le report de mesure pour la suite sans insister spécialement dessus.

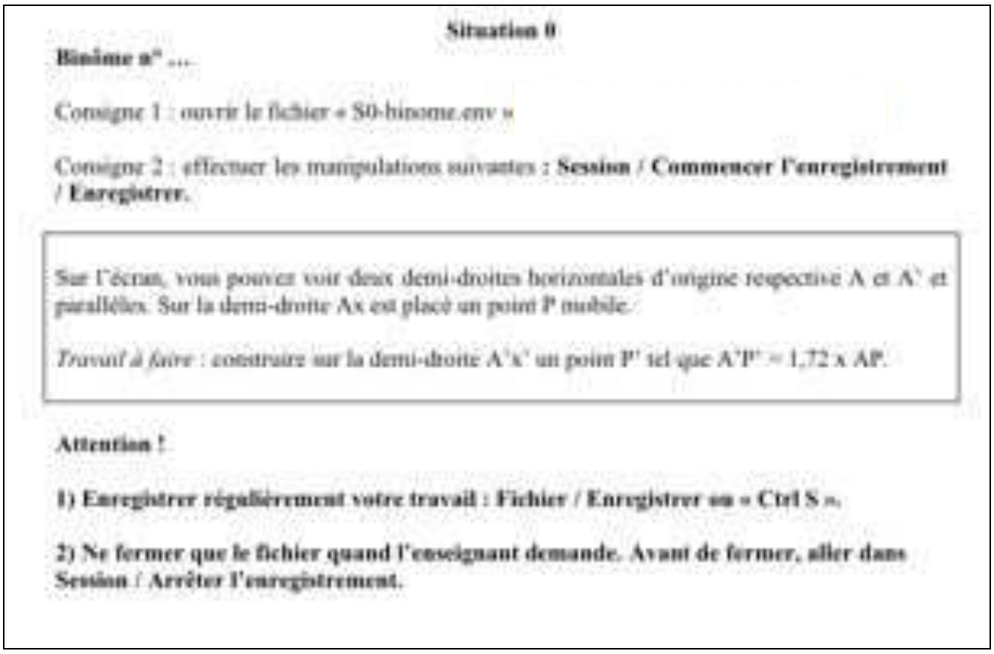
Il faut qu'à l'issue de cette séance d'initiation les élèves connaissent les outils Cabri suivants : milieu, droite perpendiculaire, droite parallèle, cercle, compas, arc, calculatrice, mesure (d'angle, d'arc), report de mesure (sur une droite puis sur un polygone), sans insister particulièrement sur l'un de ces outils. L'enseignant devra présenter également aux élèves l'accès à l'aide qui explique comment utiliser les outils.

Durant cette séance d'initiation, l'enseignant mets l'accent sur le déplacement des points dans Cabri (cf. titre de l'activité « surtout bouge les points) et en particulier montre, sur un exemple, que des points « pilotent » le déplacement d'autres points. Il n'utilise pas pour cet exemple le cas d'un report de mesure pour ne pas dévoiler le sujet de la situation 0 et éviter les effets de contrat.

L'enseignant conclut la séance par l'introduction du mot « pilote » pour désigner un point libre qui entraîne le déplacement d'un autre point : « Le point M pilote le déplacement du point M' ».

3.3 Situation 0 : situation préalable

3.3.1 Consignes données aux élèves et indications de déroulement pour l'enseignant


Situation 0

Binôme n° ...

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S0-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Sur l'écran, vous pouvez voir deux demi-droites horizontales d'origine respective A et A' et parallèles. Sur la demi-droite Ax est placé un point P mobile.

Travail à faire : construire sur la demi-droite A'x' un point P' tel que A'P' = 1,72 x AP.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 13 Consignes données aux élèves pour la situation 0

L'enseignant rappelle ou introduit pour les élèves qui connaissent déjà Cabri, l'idée de point qui pilote le déplacement d'autres points. Il institutionnalise le terme de point pilote d'un autre.

L'enseignant demande ensuite aux élèves d'ouvrir le fichier Cabri, avec un menu particulier.

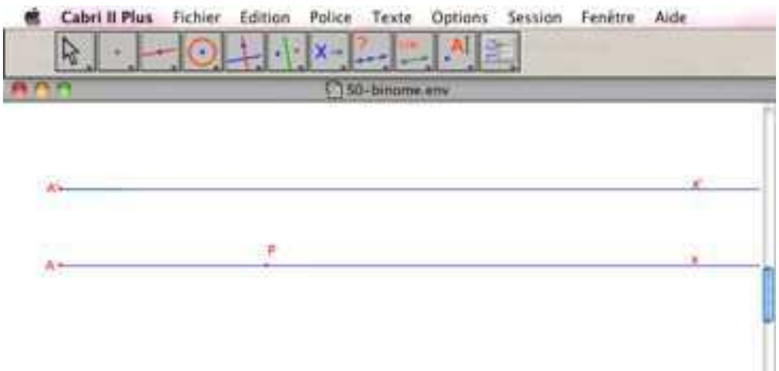


Figure 14 A l'ouverture du fichier Cabri de la situation 0, la figure présente deux demi-droites horizontales d'origine respective O et O', parallèles et punaisées (c'est-à-dire non déplaçables). Sur la demi-droite Ox est placé un point P mobile.

La consigne est rappelée oralement : « Construire sur la demi-droite O'x' un point P', piloté par le point P, tel que O'P' = 1,72 x OP ».

Durant la phase de travail autonome des élèves, d'une durée d'au moins 15 min, l'enseignant passe parmi les élèves pour observer et repérer ce que font les élèves : pour cela, il faut que l'enseignant ait une bonne connaissance des stratégies possibles dans Cabri et des observables de ces stratégies.

Lors de la synthèse collective, l'enseignant classe les productions des élèves : il rejoue au vidéoprojecteur pour toute la classe les stratégies sans en privilégier une, par exemple les stratégies « report de mesure » et « compas » (si elle apparaît). *Si la stratégie « report de mesure » n'est pas apparue dans les travaux des élèves, il faut que l'enseignant l'introduise en invoquant le travail fait par des élèves d'une autre classe.*

3.3.2 Description des stratégies des élèves : « report de mesure » et « compas »

Stratégie utilisant le « report de mesure » :

- il faut mesurer OP,
- reporter la mesure OP sur O'x' à partir de O'.

Stratégie utilisant le « compas » :

- mesure de la distance OP,
- avec la calculatrice éditer (mesure de OP)x1,72 ,
- avec le compas, prendre le résultat du calcul précédent et cliquer sur le point O',
- construire le point P' intersection de la demi droite O'x' avec le cercle
- éventuellement cacher le cercle.

Les deux stratégies « report de mesure » et « compas » sont concurrentes, même si la stratégie « report de mesure » est un peu moins coûteuse en termes de nombre d'actions à effectuer dans Cabri. Cependant, la stratégie « compas » ne permettra pas le report de mesure sur un cercle nécessaire à la situation 1. Donc cette stratégie valable en situation 0 sera invalidée en situation 1.

La connaissance « point pilote d'un autre », caractéristique de la géométrie dynamique de Cabri, est enseignée durant les situations d'initiation et cette situation préalable. Un point pilote a au moins deux caractéristiques :

- un point que l'on peut « attraper »
- un point qui fait se déplacer un autre point.

Cette connaissance « instrumentale » spécifique à la géométrie dynamique est sous-jacente à deux connaissances spécifiques à la notion de fonction, celles de variable indépendante et de variable dépendante.

3.4 Situation 1 : construction du modèle géométrique intermédiaire

3.4.1 Consignes données aux élèves et indications de déroulement pour l'enseignant

L'enseignant présente le problème général que l'on veut résoudre :

> « Un parc d'attractions possède une grande roue. Au début du voyage, M s'assoit dans une cabine.
>
> Une lampe rouge éclaire par intermittence un endroit fixe (noté L) du manège où passent les cabines. Si une cabine est éclairée par la lampe rouge lors de son passage en L, son occupant gagne un voyage gratuit.
>
> On se demande si M va gagner un voyage gratuit sachant que la lampe s'allume au moment où il monte dans sa cabine.
>
> Pour résoudre, on va commencer par essayer de représenter le manège »

Les élèves travaillent par deux ou trois durant au moins 10 minutes : le cercle devrait émerger comme représentant le manège. Durant la phase de travail des élèves, l'enseignant circule dans la classe pour observer et repérer les stratégies des élèves.

Représentation du manège par un cercle

L'enseignant s'appuie sur les figures des élèves pour institutionnaliser le cercle comme représentant le manège. Attention le centre du cercle peut être n'import où sauf en P. L'enseignant peut le justifier en rapport avec la réalité : le centre du manège est fixe et le rayon ne doit pas pouvoir être modifié avec le point P car le manège réel ne se déforme pas lorsque les cabines tournent.

Binôme n° ...

Un parc d'attractions possède une grande roue. Au début du voyage, M s'assoit dans une cabine.

Photo d'une grande roue

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S1-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

A l'écran vous pouvez voir un point P placé sur une demi-droite d'origine A.

Travail à faire : construire à l'écran une figure géométrique représentant le manège et la cabine de M de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine de M.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 15 Fiche élève pour la situation 1

Faire tourner la cabine sur le cercle à l'aide du point P

La question posée aux élèves est de représenter la cabine de M de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine. Différentes stratégies sont possibles dans Cabri pour obtenir un point mobile sur le cercle qui bouge en fonction de P. Cependant, les modèles produits par les élèves doivent être « cohérents » avec certaines caractéristiques de la réalité :

- la cabine ne sort pas du manège
- la cabine peut faire plusieurs tours
- la cabine tourne toujours dans le même sens
- la cabine tourne à vitesse constante, cela correspond à une hypothèse simplificatrice de modélisation.

L'enseignant cherche à faire expliciter aux élèves des règles de validation des différents modèles produits dans la classe : ces règles de validation doivent être analogue aux caractéristiques de la réalité citées dans la liste précédente. Ces caractéristiques permettent de rejeter ou accepter collectivement certains modèles. C'est donc la référence à la réalité qui doit valider ou non les constructions produites par les élèves.

L'enseignant **institutionnalise le processus de modélisation** qui consiste à chercher à construire une image de la réalité qui en conserve certains aspects et en néglige d'autres en fonction de questions que l'on se pose sur la réalité : ici la question est de représenter le mouvement de la cabine. Il faut donc que l'institutionnalisation porte sur le fait que l'on retourne à la réalité pour décider momentanément quels modèles on conserve.

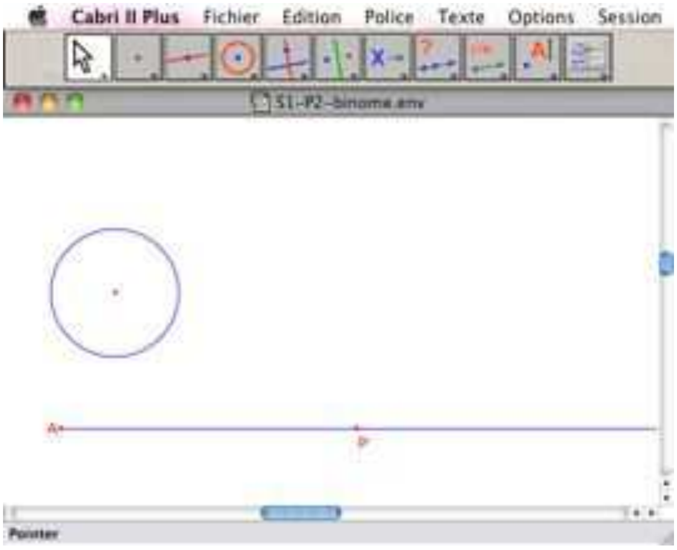


Figure 16 Fichier Cabri élève dans la seconde partie de la situation 1

L'enseignant institutionnalise le modèle de « report de mesure » en rejetant les autres modèles (« stéréographique », « compas ») et en introduisant le modèle par report de mesure si cela est nécessaire.

3.4.2 Analyse a priori des stratégies possibles et éléments du milieu pour le processus de modélisation de la covariation

Quels éléments de la pseudo – réalité les élèves peuvent-ils choisir de représenter ou de ne pas représenter ?

> Première **hypothèse :** la grande roue du manège sera représentée par un cercle, ce cercle changeant implicitement de statut quand il s'agira de représenter le déplacement de la cabine de Minh : le cercle représentera alors la trajectoire de la cabine.

Les choix à faire par les élèves pour modéliser géométriquement la situation réelle invoquée de la grande roue de manège sont :

- Où représenter le centre du cercle : sur la droite donnée ou non ?
- Quelle dimension choisir pour le rayon ?
- Faut-il représenter le sol (présent sur la photo, cf. Figure 15) ? Si oui , est-ce à l'aide d'une droite supplémentaire ou avec la droite donnée (cf. Figure 16) ?
- Quelle position choisir pour le cercle construit par rapport à la droite donnée : extérieure, tangente, sécante ? etc…

***Stratégies numériques « report de mesure »** pour la modélisation dans Cabri du co-déplacement de P sur la droite avec le mouvement d'un point - cabine M sur le « cercle - manège »*

- *Stratégie « report de mesure directe » :* report de mesure de la *distance* OP, P distinct de O, sur la demi-droite sur le cercle à partir d'un point I « origine » choisi et construit sur le cercle.
- *Stratégie « report de mesure principale »* (en référence avec la notion de mesure principale d'un angle : mesure comprise entre 0 et 2π) : l'idée de cette stratégie nous a été donnée par la prise en compte d'un point de vue algébrique : vérifier l'égalité OP = IM + (nombre de tour) x (périmètre du cercle) (I : point origine sur le cercle). Dans Cabri : Construire un cercle représentant la grande roue / Mesurer le périmètre, soit l / Mesurer OP sur la demi-droite, noté OP / Diviser ce nombre OP par l avec la calculatrice / Prendre avec la calculatrice la valeur entière [commande « floor »], soit n [Attention si OP < l , n = 0] / Avec la calculatrice calculer OP – n x l [on obtient la mesure principale IM] / Choisir sur le cercle une origine I / *Reporter* sur le cercle la mesure principale IM.

Pour ces stratégies de report, il est nécessaire de choisir et de marquer un point « origine » sur le cercle. Le choix qui sera vraisemblablement fait par les élèves est celui d'un point le plus bas possible par rapport au sol supposé horizontal (qu'il soit présent ou non dans la modélisation) qui correspondrait dans la réalité à la position de départ de la cabine de Minh. Mais il y a une incertitude sur le choix des positions relatives des 2 origines, celle du cercle et celle de la droite, il peut s'agir du même point ou pas. Ces stratégies peuvent donc produire différents modèles de co-déplacement.

Stratégie numérico-géométrique *pour la modélisation dans Cabri du co-déplacement de P sur la droite avec le mouvement d'un point - cabine M sur le « cercle - manège »*

- *Stratégie « compas »* : avec l'outil compas, construire un cercle centré en un point quelconque du cercle et de rayon OP. Le point M est une des deux intersections des deux cercles obtenus. Le point M est bien piloté par P mais il disparaît quand le cercle a un rayon OP plus grand que le rayon du cercle image de la grande roue. Le modèle est donc incompatible avec la réalité.

Stratégies géométriques *pour la modélisation dans Cabri du co-déplacement de P sur la droite avec le mouvement d'un point - cabine M sur le « cercle - manège »*

- *Stratégie « piston »* : transmission d'un mouvement alternatif (translation de longueur t) du point P en un mouvement circulaire d'un point M. Impossible à réaliser dans l'environnement Cabri.
- *Stratégie « intersection »* : constuire une droite passant par P et qui coupe perceptivement le cercle. M est à l'intersection de cette droite mobile liée à P et du cercle. Exemple sur la Figure 17 avec une droite mobile perpendiculaire à la demi-droite donnée.
-

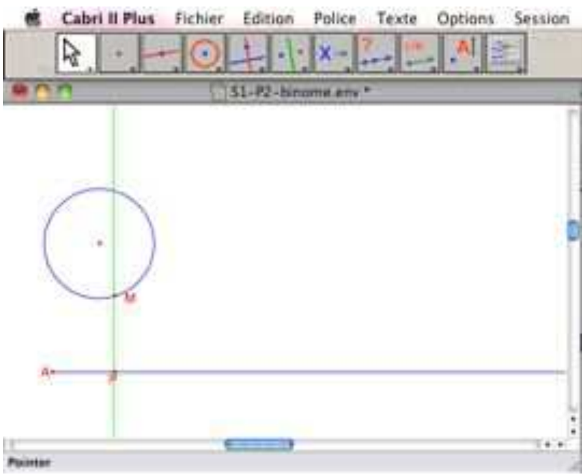


Figure 17 Exemple de stratégie « intersection » pour obtenir un point M mobile sur le cercle en fonction du point P.

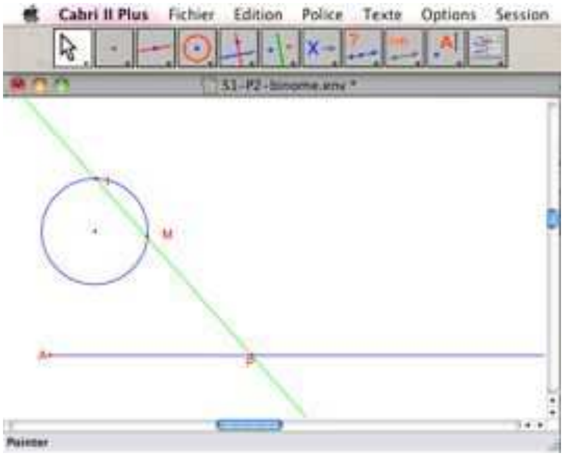


Figure 18 Exemple de la stratégie stéréographique pour obtenir un point M mobile sur le cercle

- *Stratégie « stéréographique »* (projection, cf. Figure 18) : choix d'un point I sur le cercle, intersection M avec la droite (PI) avec le cercle. Cette stratégie rencontre le problème suivant : le point M ne fait qu'un tour incomplet sur le cercle quand P se déplace sur la droite : quand P s'éloigne de plus en plus à droite ou à gauche sur la droite supposée horizontale, PI tend vers la tangente au cercle en I.

3.4.3 Conclusion sur l'analyse a priori des stratégies pour le modèle géométrique intermédiaire

Les stratégies numérico-géométriques ou géométriques sont soit trop coûteuses, soit impossibles, soit productives de modèles non compatibles avec la réalité. Ainsi, la stratégie « optimale » est celle du report de mesure direct, les arguments étant son coût réduit et les limites des stratégies non numériques. Cela nous permet de formuler une seconde hypothèse, à tester dans les expérimentations :

> Deuxième **hypothèse** : si la connaissance instrumentale « report de mesure » O (présent dans le menu Cabri, « measurement transfert » en anglais pour les élèves vietnamiens) est un savoir instrumental, la stratégie « report de mesure directe » est une stratégie de base.

3.5 Situation 2 : élaboration d'une représentation du temps à partir du modèle intermédiaire

3.5.1 Consignes données aux élèves et indications de déroulement pour l'enseignant

SITUATION 2
Fiche 1

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S2-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

> A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.
>
> *Travail à faire* : placer sur la demi-droite AP le point P1 correspondant à 1 tour de la cabine M, le point P2 correspondant à 2 tours de la cabine M, le point P3 correspondant à 3 tours de la cabine M.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 19 Fiche élève n°1 pour la situation 2

Fiche 2

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S2-P2-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

> A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.
> Vous pouvez voir aussi les points P1, P2 et P3 sur la demi-droite d'origine A tels que nous venons de les construire.
>
> On sait de plus qu'un tour complet de la grande roue dure 5 minutes.
>
> *Travail à faire* :
> Placer le point U pour que quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 20 Fiche élève n°2 pour la situation 2

Dans la première partie de la situation 2, à l'ouverture de la fenêtre Cabri, la figure correspond au modèle géométrique de covariation institutionnalisé dans la séance 1. Quand on déplace le point P, le point M se déplace sur un cercle (modifiable). Le point M ne peut être déplacé que par l'intermédiaire du déplacement de P. Le point M peut faire plusieurs tours. Un point I « origine » a été marqué sur le cercle. Il s'agit d'un point fixe, c'est-à-dire punaisé sur le cercle. Ce choix de la position de I est une variable de l'ingénierie. Le sol n'est pas représenté et la demi-droite est placée à droite du cercle pour qu'il ne puisse pas être confondu avec le sol. La position de la demi-droite d'origine O peut être changée (information importante pour l'enseignant).

Ainsi, à l'ouverture de la figure Cabri, tous les élèves ont le même modèle géométrique obtenu par une stratégie « report de mesure ».

Avec la consigne 1, « Placer les points P1, P2, P3 sur la demi-droite OP correspondant à 1 tour, 2 tours, 3 tours de la cabine M » est initiée une première graduation de l'axe OP correspondant au **« temps tour ».** Le « temps tour » désigne le fait que l'unité de temps dans le modèle est celui d'un tour complet du point M sur le cercle, c'est-à-dire un tour de la cabine sur la grande roue.

Dans la deuxième partie de la situation 2, l'indication supplémentaire « Trois tours de manège durent 15 minutes » est donnée. La nouvelle consigne, « Trouver le segment OU sur lequel se déplace P pendant la 1ère minute du voyage de Minh », introduit l'unité de temps et amène la construction d'un seconde graduation de l'axe OP correspondant au **« temps minute »**.

> Notre troisième **hypothèse** est que dans cette situation, l'environnement de géométrie dynamique permet aux les élèves de transformer le temps tour en temps min et d'ainsi accéder à la variable indépendante « temps » pertinente pour résoudre le problème posé.

3.5.2 Analyse a priori des stratégies possibles

Stratégie « ajustement perceptif » pour marquer P_1 sur [OP)

Déplacer P à partir de O sur la demi-droite [O, P) pour que le point M se déplace sur le cercle de I à I une seule fois : « position P » / Construire un point P1 sur [O, P) et le placer sur P en « position P » / Séparer P de la « position P » et donc de P1 / Punaiser le point P1 puis l'étiqueter P1.

Avec cette stratégie, la graduation « ne résiste pas » à la modification de la taille du cercle.

Stratégie « report de mesure » pour marquer P_1 sur [OP)

Mesurer le périmètre du cercle, soit l / Report de l à partir de O sur [O, P) : « position P » / Construire un point P_1 sur [O, P) et le placer sur P en « position P » / Séparer P de la « position P » et donc de P_1 / Punaiser le point P_1 puis l'étiqueter P_1.

Avec cette stratégie, la graduation « résiste » à la modification de la taille du cercle.

Stratégies « géométriques » pour marquer P_2, P_3 sur [OP)

A l'aide d'une symétrie centrale ou de la commande cercle, reporter la mesure OP_1 sur la droite.

Avec ces stratégies, la graduation « résiste » à la modification de la taille du cercle.

Stratégies « report de mesure » pour marquer P_2, P_3 sur [OP)

Mesure OP_1 puis à reporter la mesure l=OP_1 à partir de O sur [OP), reporter 2x l pour P_2, 3x l pour P_3. La graduation résiste à la modification de la taille du cercle.

Stratégie « ajustement perceptif » pour marquer P_2, P_3 sur [OP)

Déplacer P à partir de O sur la demi-droite [O, P) pour que le point M se déplace sur le cercle de I à I. Lorsque le point M a fait un tour est se retrouve en I, placer le point P_1 à l'emplacement du point P. Lorsque le point M a fait deux tours (resp. trois) est se retrouve en I, placer le point P_1 (resp. P_2) à l'emplacement du point P. Dans cette dernière stratégie, la graduation ne résiste pas à la modification de la taille du cercle.

Stratégie « diviser » pour placer une graduation à une min

- *Stratégie P « diviser par la mesure » :* prendre la mesure de OP_1, la diviser par 5 avec la calculatrice et reporter le résultat à partir de O avec l'outil report de mesure. Cette stratégie et la suivante s'appellent P car elles s'appuient sur la droite comme lieu du point P ;
- *Stratégie P « diviser géométriquement » :* diviser OP_1 par 5 « géométriquement » (technique issue de l'application du théorème de Thalès) ;

- *Stratégie M « diviser la mesure » :* prendre la mesure du cercle I, la diviser par 5 avec la calculatrice et reporter le résultat à partir de O avec l'outil report de mesure. Cette stratégie et la suivante s'appellent M car elles s'appuient sur le cercle comme lieu du point M ;
- *Stratégie M « diviser géométriquement » :* diviser géométriquement le cercle en 5, par exemple en construisant un pentagone dont le centre est le même que celui du cercle et dont l'un des sommets est I.

3.5.3 Conclusion sur l'analyse a priori des stratégies de la première partie : quelle signification ces différentes stratégies ont-elles par rapport à la réalité modélisée ?

Les deux stratégies que l'on peut supposer comme étant majoritairement mobilisées par les élèves permettent de construire deux modèles différents :

- le premier modèle, obtenu par ajustement perceptif, est particulier au cercle proposé à l'ouverture de la fenêtre Cabri ;
- le second modèle, obtenu par report de mesure, n'est pas attaché au cercle particulier proposé à l'ouverture de la fenêtre Cabri : en ce sens la stratégie « report de mesure » fournit un modèle plus général. En l'absence de questions que pourraient permettre de résoudre le modèle, il n'y a pas de critère de distinction évident. Il peut être avantageux de privilégier le modèle le plus général possible, mais cela reste à vérifier et ce n'est pas forcément un critère opérationnel pour les élèves.

La graduation construite par les élèves résiste-t-elle ou non à la modification de la taille du cercle ?

La distinction entre les stratégies, celle de l'« ajustement perceptif » et celle du « report de mesure » (cf. § 3.5.2), et les deux modèles qu'elles produisent passe par la modification de la taille du cercle.

Mais quel peut être la motivation d'un élève pour agrandir ou diminuer la taille du cercle ? Le fait de pouvoir modifier le diamètre de la roue *sans modifier la graduation du temps sur la demi-droite*, permet à l'écran des zooms + et des zooms – sur la droite du temps. Cependant, il n'est pas certain que les élèves déforment le cercle et soient amenés à changer de stratégie en constatant que leur graduation de la demi-droite est perdue. Il est donc nécessaire que l'enseignant amène ou rappelle cette consigne pour différencier publiquement et confronter les deux stratégies possibles chez les élèves. Par ailleurs, le seul déplacement de la droite ne permet pas d'invalider l'ajustement perceptif.

3.6 Situation 3 : problème de coïncidence pour motiver l'introduction de la périodicité

Dans cette situation, la complexité est telle que les seules consignes données aux élèves ne sont pas suffisantes pour en comprendre le déroulement.

À l'ouverture de la figure Cabri, les élèves découvrent une figure du modèle géométrique de covariation institutionnalisé dans la situation 2 (cf. Figure 21). On indique aux élèves que la grande roue du manège a un diamètre de 40 m et son centre est situé à 22 m du sol.

Dans cette figure où figurent sur la demi-droite d'origine O et les points étiquetés U et P, quand on déplace le point P sur la demi-droite, le point M se déplace sur un cercle modifiable (centre et rayon). Le point M ne peut être déplacé que par l'intermédiaire du déplacement de P et peut faire plusieurs tours de cercle. Le sol a également été représenté par un segment à une distance d du centre du cercle, d tel que $d = r + \frac{1}{10}r$ (r rayon du cercle), dans une proportion identique à celle de la réalité invoquée : $22 = 20 + 2 = 20 + \frac{1}{10} \times 20$. Nous avons fait le choix de ne pas transférer aux élèves la responsabilité de représenter le sol pour une simple question d'économie du temps de l'ingénierie. Enfin, les points P_1, P_2 et P_3 sont construits, mais n'apparaissent pas dans le même écran que le cercle. Il faut utiliser les ascenseurs horizontaux de la fenêtre pour les découvrir. Il s'agit là d'une contrainte que permet l'environnement qui jouera un rôle positif important pour la situation.

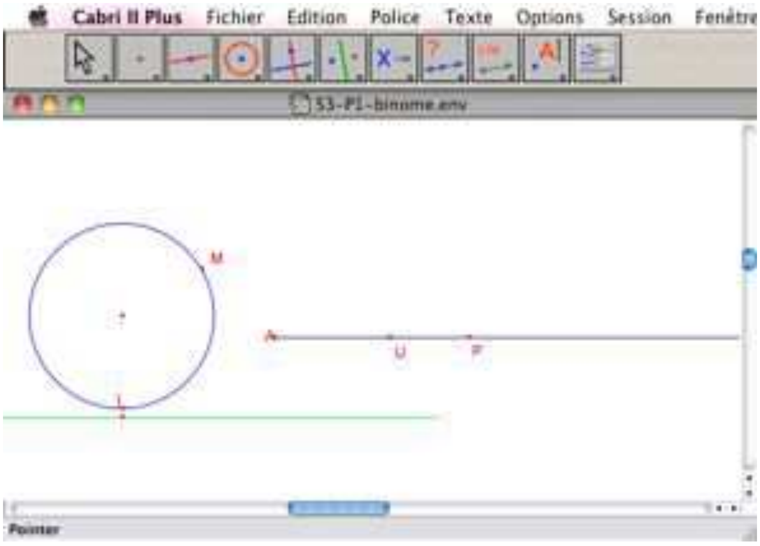


Figure 21 Figure Cabri fournie aux élèves au début de la situation 3

La première série de questions posées aux élèves est :

- A quelle hauteur du sol se trouve la cabine de Minh au bout de 2,5 minutes ? Au bout de 7 minutes ?

La seconde série de questions posées aux élèves porte sur le moment où la cabine de Minh est éclairée par un laser, dont la position est fixe mais dont l'allumage est intermittent.

- Une lumière rouge éclaire par intermittence un endroit du manège où passent les cabines [l'enseignant et les élèves se mettent d'accord sur une position L sur le cercle]. Cette position L est située à une hauteur fixe (35 mètres par exemple, on peut encore complexifier la situation en disant : « le laser oscille entre h1 et h2 ») et la lumière s'allume pendant n secondes toutes les m minutes. Minh va-t-il gagner un voyage gratuit ? A quel moment ?

> Notre quatrième **hypothèse** pour cette partie de la situation est que pour étudier la coïncidence de deux mouvements, il est nécessaire de choisir la variable temps comme la variable indépendante dans le modèle et de concevoir des fonctions périodiques qui modélisent les phénomènes étudiés.

Plus généralement, avec cette situation, nous voulons identifier les conditions d'émergence d'une formalisation *d'une covariation fonctionnelle de grandeurs*.

3.6.1 Consignes données aux élèves et indications de déroulement pour l'enseignant

La situation 3 est présentée aux élèves à l'aide de 6 fiches de travail successives (cf. Figure 23 Figure 24, Figure 25 et Figure 26, pages 39 à 41). `

SITUATION 3
Fiche 1

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

M entre dans sa cabine lorsqu'elle passe au plus près du sol, au point I. La grande roue du manège a un rayon de 20 m et son centre est situé à 22 m du sol.

Une lampe rouge éclaire par intermittence un endroit fixe (noté L) du manège où passent les cabines. Si une cabine est éclairée par la lampe rouge lors de son passage en L, son occupant gagne un voyage gratuit.
On se demande si M va gagner un voyage gratuit sachant que la lampe s'allume au moment où il monte dans sa cabine.

A l'écran, vous pouvez voir le cercle représentant le manège, le point I, un segment représentant le sol, et l'axe du temps construit précédemment.

De quelles informations avez-vous besoin pour savoir si M va gagner un voyage gratuit ?

Informations complémentaires : …………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Question :
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?
Si oui, au bout de combien de tours ? Peut-il en gagner d'autres ?

Réponse et explications :

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 22 Fiche élève n°1 pour la situation 3

SITUATION 3
Fiche 2

Binôme n° …

Consigne 1 : *ouvrir le fichier « S3-P2-binome.env »*

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Travail à faire :
Tracer la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire au sol.
Appeler H le point d'intersection avec le sol.
Mesurer la longueur MH.
Tracer une droite passant par P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Tracer une demi-droite d'origine P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Reporter la mesure MH sur la nouvelle demi-droite.
On obtient le point M'.

Question :
Si on déplace P que se passe-t-il pour M' ? Quel est le chemin de M' ?

Réponse et explications :

Figure 23 Fiche élève n°2 pour la situation 3

SITUATION 3
Fiche 3

Binôme n° …

Consigne 1 : *ouvrir le fichier « S3-P3-binome.env »*

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Travail fait :
Tracer la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire au sol.
Appeler H le point d'intersection avec le sol.
Mesurer la longueur MH.
Tracer une droite passant par P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Tracer une demi-droite d'origine P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Reporter la mesure MH sur la nouvelle demi-droite.
On obtient le point M'.

Question de la fiche 2 :
Si on déplace P que se passe-t-il pour M' ? Quel est le chemin de M' ?

Nous allons voir si tu as raison.
Sélectionne l'outil « trace » et clique sur M'.
Déplace le point P. Tu obtiens une courbe rouge qui est le chemin du point M'.

Question : que peux-tu dire de cette courbe ?

Réponse :

Travail à faire : le gérant du manège n'a pas d'ordinateur. Recopie sur la feuille ci-jointe le chemin de M' pour que le gérant puisse contrôler le jeu.

Figure 24 Fiche élève n°3 pour la situation 3

SITUATION 3
Fiche 4

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P4-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Vous avez reçu en plus une feuille avec le chemin de M'.

Répondre aux questions suivantes dans le tableau ci-dessous.

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
A quelle hauteur est la cabine au bout de 22 minutes ?		
A quels moments la cabine est-elle à une hauteur de 30 mètres ?		

Le gérant décide de changer la hauteur de la lampe : il la met à 20 mètres à droite de la grande roue.
La lampe s'allume désormais 1 minute toutes les 4 minutes.

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?		
Si oui, au bout de combien de tours ?		
Peut-il gagner d'autres voyages ?		

Attention !

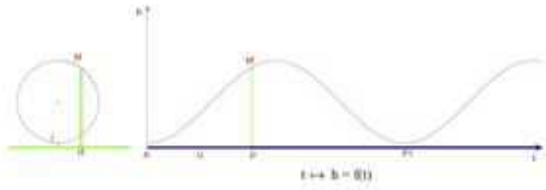
1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 25 Fiche élève n°4 pour la situation 3

SITUATION 3
Fiche 5
(Travail individuel)

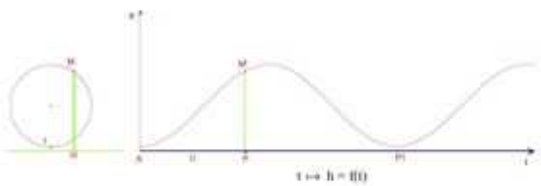
Nom prénom : ……………………………………
Binôme n° : ……………………………………



Écrivez individuellement tout ce que vous pouvez dire sur la fonction : $t \mapsto h = f(t)$.

SITUATION 3
Fiche 6
(Devoir à la maison)

Nom prénom : ……………………………………
Binôme n° : ……………………………………



Rappel
M entre dans sa cabine lorsqu'elle passe au plus près du sol, au point I. La grande roue du manège a un rayon de 20 m et son centre est situé à 22 m du sol.

Etablir que f(t) = 22-20 cos (2πt/5)

Figure 26 Fiches élève n°5 et 6 pour la situation 3

3.6.2 Analyse a priori des solutions possibles pour la première série de questions

La question posée aux élèves est de déterminer la position de la cabine (point M) à 2,5 min puis 7 min.

Solutions possibles dans le modèle géométrique sans algébrisation

Ces solutions reposent sur une conversion du temps-minute en nombres de tour de la cabine.

- Pour t = 2,5 minutes, étant donnée que 2,5 minutes correspond au temps nécessaire pour faire ½ tour, le point M diamétralement opposé à I, il est à 42 mètres du sol. Pour cette question, la stratégie géométrique est optimale.
- Pour t = 7 minutes : 7 minutes est (temps nécessaire pour effectuer 1 tour) + 2 minutes. Donc la position de M au bout de 7 min est la même qu'au bout de 2 min. Pour déterminer cette position, il faut déplacer P sur la demi droite jusqu'à la graduation correspondant à 2 min, puis au choix :
    - mesurer la hauteur de M sur le modèle (avec l'outil mesure de Cabri) et effectuer un changement d'échelle pour calculer la hauteur réelle.
    - mesurer l'angle α en degré (avec l'outil angle de Cabri) et calculer h = 20 sinα + 22 avec la calculette.
    - mesurer l'arc de cercle IM (construire l'arc IM dans Cabri puis mesurer sa longueur avec l'outil « distance et longueur ») puis calculer l'angle α en radian : $\alpha = \frac{arc(IM)}{\ell} \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$ [3] et enfin calculer h = 20 sinα + 22 avec la calculatrice Cabri.

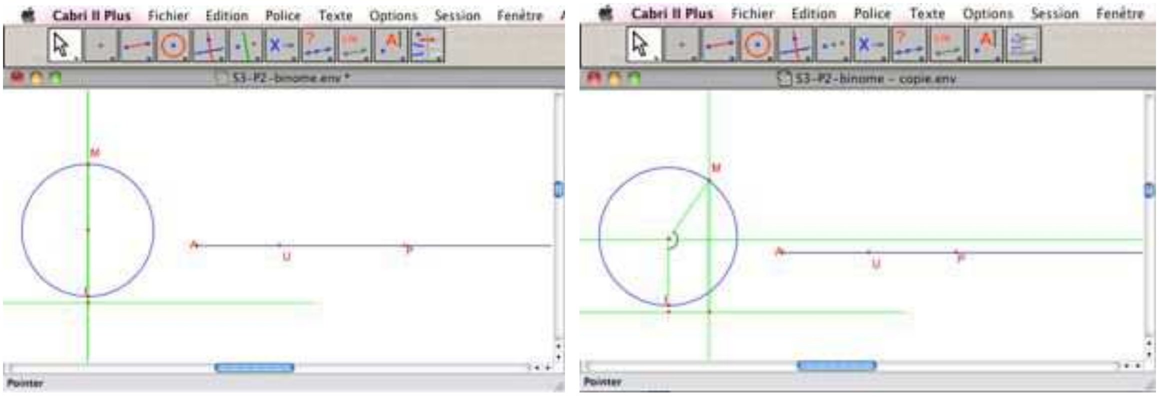


Figure 27 Construction possible pour déterminer la hauteur de M au bout de 2,5 min puis 7 min.

Remarque : Dans la réalité (à vérifier), le manège tourne lentement pour permettre aux cabines de se vider et de se remplir progressivement. Une fois le manège rempli, il tourne à vitesse constante (v = 1 tour pour 5min) : c'est cette situation que l'on choisit de modéliser. Donc au moment du départ (v = 1 tour pour 5 min) la cabine de Minh peut ne pas être dans la position la plus basse par rapport au sol. On peut ainsi introduire une « phase à l'origine » par le choix de la position de I, position de la cabine de Minh au temps 0, temps 0 correspondant au départ à la vitesse v. La position de I apparaît alors comme une variable.

3.6.3 Analyse a priori des solutions possibles pour la deuxième partie

Il s'agissait de déterminer si la cabine de Minh serait éclairée ou pas lors de son voyage afin qu'il puisse gagner un voyage gratuit.

Cette question peut se reformuler dans les termes proposés dans l'énoncé, c'est à dire : « A quel moment la cabine est-elle à la position L, c'est à dire à la hauteur h = 35m ? Ce moment correspond-t-il à un moment d'allumage de la lumière ? ».

---

[3] Variante : / mesure du rayon sur le cercle - modèle dans Cabri soit r_m / $\alpha = \frac{arc(IM)}{r_m} - \frac{\pi}{2}$ / etc.

La question posée portant sur le moment où la cabine de Minh est éclairée rend effectivement nécessaire un usage graphique de l'axe du temps en rupture avec les solutions géométriques de la première partie. Cela doit provoquer chez les élèves le passage à un travail algébrique, voir analytique.

Stratégie géométrico-numérique

Cette stratégie consiste à déterminer successivement :

- la longueur d'un tour : détermination par le calcul de ℓ le périmètre du cercle ($\ell = 2\pi.20$) ou géométriquement sur la représentation par l'outil Cabri « distance et longueur »
- la mesure de l'arc IL entre la position de départ de la cabine et la position L où la cabine peut être éclairée mesure (arc IL) (même outil Cabri)
- le temps t_0 au bout du quel la cabine passe pour la première fois en L : sachant que pour faire un tour complet il faut 5 min, pour arriver la première fois en L, il faut t_0 min avec $t_0 = \frac{5.arc(IL)}{périmètre}$
- les temps des passages suivants de la cabine en L : ces passages ont lieu aux temps t_0+5k avec k naturel, c'est-à-dire tous les t_k $\{t_k \,/\, t_k = t_0 + 5k,\ k \in N\}$.

Par ailleurs, le point L est éclairé pendant des intervalles de temps qui durent n secondes, toutes les m minutes. Ainsi, la première fois ou la position L est éclairée, c'est pendant l'intervalle [m, m+n] puis en [2m, 2m+n], c'est-à-dire pendant tous les intervalles [k'm ; k'm+n] avec k' entier naturel non nul.

La solution cherchée correspond à l'intersection d'un ensemble de temps $\{t_k \,/\, t_k = t_0 + 5k,\ k \in N\}$ et de l'ensemble d'intervalles $\{Int_{k'} \,/\, Int_{k'} = [k'm \,;\, k'm+n\,] \,/\, k' \in N\,\}$.

Une stratégie géométrico-graphique

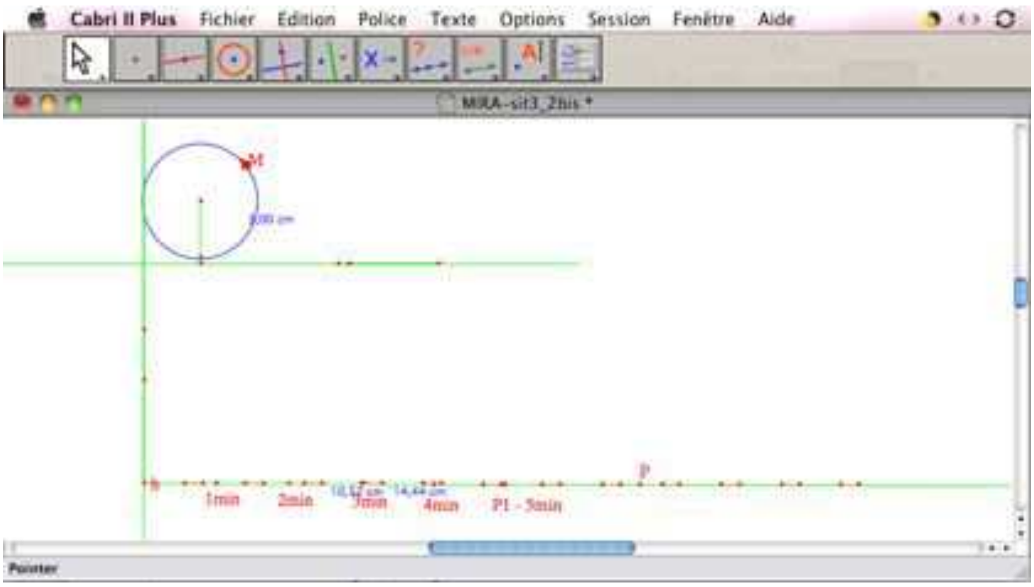


Figure 28 Stratégie graphique pour l'identification de la coïncidence entre le passage de la cabine et l'éclairage de la position.

Cette stratégie consiste à :

- marquer sur le cercle un point rouge R à l'endroit L éclairé par la lumière rouge, ou repérer cette position par un autre moyen, tel que le tracé d'une droite horizontale représentant le laser ;
- repérer sur l'axe du temps les segments représentant le moment et la durée d'éclairement de la lumière ;

- déplacer le point pilote sur l'axe du temps et relever la première coïncidence : point M sur point rouge et point P appartenant à l'un de segments représentant le moment et la durée d'éclairement de la lumière.

On peut jouer sur les limites de l'écran Cabri qui ne permettent pas de visualiser simultanément le cercle et l'axe du temps au delà de 7-8 min pour favoriser un blocage de cette stratégie et faire apparaître une stratégie non géométrique. Pour cela choisir un cercle représentant le manège d'un diamètre tel que l'on puisse, par déplacement de P, repérer un point P1 à la hauteur h, mais ensuite le déplacement de P vers la droite fait sortir le cercle de l'écran Cabri. On ne peut plus déplacer P en visualisant à l'écran la position de M sur le cercle. Ceci rend nécessaire de marquer les autres points P_2, P_3, etc. à la hauteur h *sans la perception de M et de R sur le cercle*, donc oblige à l'usage de connaissances liées à la périodicité pour marquer P_2, etc. en vue de rechercher une coïncidence.

Une stratégie graphique « unidimensionnelle » sur l'axe du temps, sans axe vertical même implicite :

Cette stratégie consiste à placer sur un axe horizontal qui représente le temps, les points qui correspondent aux moments où la cabine de Minh passe en L et les intervalles pendant lesquels le même emplacement est éclairé. Pour chaque point inclus dans un intervalle, la cabine sera éclairée.

La procédure consiste à :

- repérer sur l'axe du temps les moments où la cabine de Minh M passe par la position L (c'est à dire est à la même hauteur h du bon côté). L'usage de connaissances liées à la périodicité permet de placer un premier point puis de construire les autres sur l'axe ;
- repérer toujours sur l'axe du temps les segments représentant le moment et la durée d'éclairement de la position L par la lumière.

Les coïncidences sont les solutions.

Une stratégie graphique « bidimensionnelle » à la façon d'Euler (cf. Falcade, 2006) avec axe vertical implicite

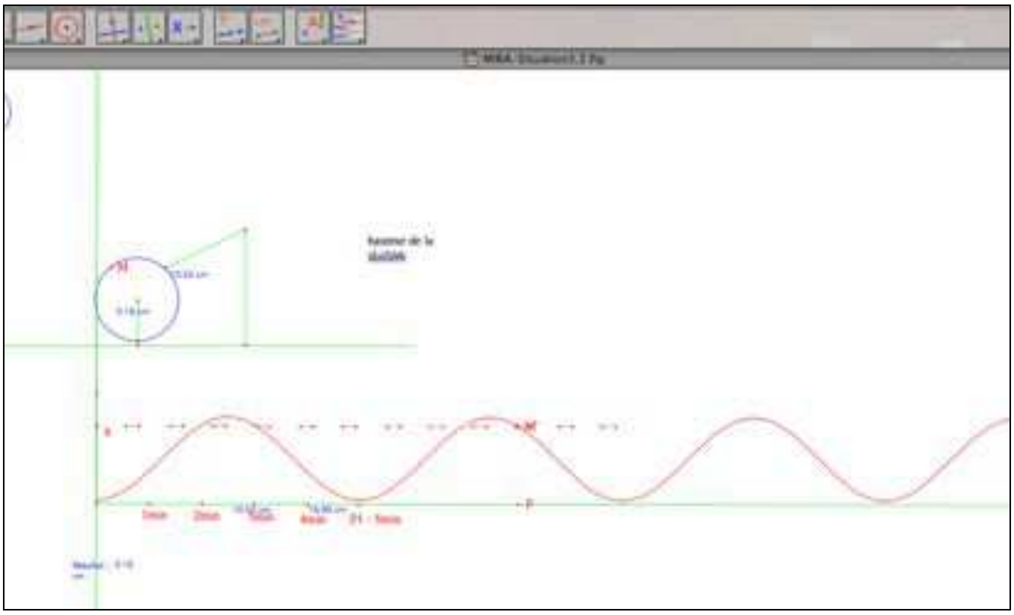


Figure 29 Stratégie à la Euler pour identifier les coïncidences. Les intersections entre la sinusoïde et les segments donnent les solutions

Cette stratégie (cf. Figure 29) consiste à construire verticalement par rapport à l'axe du temps les segments dont l'une des extrémités est le point pilote P, l'autre est le point P' et telle que PP' a même mesure que HM[4] c'est à dire la hauteur de la cabine. La trace de l'extrémité P' du segment suit alors une sinusoïde. Cependant, la trace n'est pas permanente mais s'efface : cela peut être une motivation pour que les élèves cherchent le lieu de P' et ainsi apporter la preuve mathématique que le lieu de P' est bien une sinusoïde.

Il faut finir en repérant sur l'axe du temps les segments horizontaux représentant le moment et la durée d'éclairement du laser et construire leurs images à la hauteur h. Les intersections avec la sinusoïde sont les solutions.

4 Expérimentations en France et au Viêt Nam

Trois expérimentations ont été conduites sur la base de cette ingénierie. La première a eu lieu au Viêt Nam en décembre 2009, sous la responsabilité de Nguyen Thi Nga avec une classe de dixième (équivalent de la classe de Seconde française). La deuxième a été réalisée en France en juin 2010, sous la responsabilité d'Alain Birebent, avec deux binômes d'élèves de seconde. La troisième a été réalisée en novembre 2010, au Viêt Nam, sous la responsabilité de Nguyen Thi Nga.

4.1 Expérimentation au Viêt Nam, décembre 2009

La première expérimentation a duré 2 heures et a été réalisée auprès de 14 élèves de la classe10A1, classe sélectionnée avec de bons élèves, mais ne connaissant pas Cabri, au lycée Truong Chinh à Ho Chi Minh ville.

L'enseignante était Mademoiselle Nguyen Thi Nga et deux observateurs étaient présents, Le Thai Bao Thien Trung et Trinh Duy Trong.

4.1.1 Déroulement et observables

Situation d'initiation avec Cabri (Durée : environs 30 minutes)

L'enseignant a présenté rapidement et schématiquement le menu cabri, notamment les commandes de construction d'un point, d'une droite, d'un cercle et les commandes de calcul. Les élèves se sont rapidement familiarisés avec le logiciel.

Situation préalable (Durée : environs 20 minutes)

Version utilisée lors de cette première expérimentation

> À l'ouverture de la fenêtre cabri, deux demi-droites horizontales d'origine respective O et O' et parallèles punaisées (c'est-à-dire non déplaçables). Sur l'une des demi-droites est placé un point P mobile.
>
> Consigne
>
> « Construire sur l'autre demi-droite un point P' tel que :
>
> - P' se déplace quand P se déplace
>
> - OP' = 1,72xOP. »

L'enseignant a présenté rapidement la situation. Les élèves ont eu seulement quelques minutes pour comprendre la consigne puis l'enseignant a présenté la stratégie « report des mesures ». Les élèves ont alors reproduit la stratégie pendant 5 minutes et tous ont réussi.

Situation 1

Version utilisée lors de cette première expérimentation

> « Un parc d'attractions de Ho Chi Minh ville possède une grande roue. Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine. Ci-après la photo d'une grande roue »

[4] H projection au sol de M

 Photo d'une grande roue

« Construire dans Cabri une figure géométrique représentant le manège et la cabine de Minh de façon à ce que le déplacement du point P « Pilote » permette le mouvement de la cabine du manège »

A l'ouverture de Cabri, il y a à l'écran un point P placé sur une demi-droite

Les 14 élèves se sont regroupés en 6 groupes (2 ou 3 élèves par groupe). La procédure suivante a été observée dans 5 groupes sur 6, où elle est la première procédure mobilisée :

- Procédure 1 « M sur cercle de centre O et de rayon OP »: Construction d'un cercle de centre O (origine de la demi-droite) et de rayon OP puis placer un point M sur ce cercle.

Au début, ces élèves n'ont pas compris pas la phrase : « le point P pilote le mouvement de la cabine ». Ensuite, l'enseignant a expliqué que le déplacement du point P sur la demi-droite donnée devait entraîner le déplacement de la cabine sur la grande roue. Les élèves se sont alors référés à la réalité pour rejeter leur première procédure 1. En effet, si le changement du rayon du cercle cause le déplacement du point M, ce déplacement du point M sur le cercle n'est pas analogue au mouvement de la cabine qui tourne sur la grande roue dans la réalité. Cependant, 4 groupes sur 5 n'ont pas réussi à modifier leur procédure initiale. Seul le groupe 4 a changé de procédure.

- Procédure 2 « quasi stéréographique » (procédure du groupe 4) : i) construction d'un cercle avec de centre quelconque extérieur à la demi-droite, ii) placer un point M sur ce cercle, iii) construction de la droite MP, iv) nommer N le point d'intersection de la droite MP avec le cercle. Le déplacement du point P pilote le déplacement du point N.

A nouveau, le retour à la réalité a permis invalider cette seconde stratégie : le point M fait un tour incomplet sur le cercle.

- Procédure 3 « report de mesure « (procédure initiale de 1 groupe sur 6) : i) construction d'un cercle quelconque dont le centre n'appartient pas à la demi-droite donnée , ii) construction d'un point quelconque sur ce cercle (ce n'est pas le point le plus bas par rapport à un sol horizontal), iii) calcul de la distance OP, iv) calcul de OP x 1 (conséquence situation précédente où l'on avait à calculer OPx1,72), v)report de mesure sur le cercle.

Pour conclure, la situation 1 a bien fait entrer tous les élèves dans un processus de modélisation : deux groupes (sur 6) réussissent à construire un modèle où le point P pilote un point M sur le cercle (dont la stratégie visée « report de mesure »). Le rapport du modèle à certains éléments de la réalité valide ou invalide les modèles produits pour tous les élèves : il y a bien un milieu pour la validation !

Situation 2

Version utilisée lors de cette première expérimentation :

À l'ouverture de la fenêtre Cabri, une figure, modèle géométrique de covariation, institutionnalisé dans la séance 1 : quand on déplace le point P, le point M se déplace sur un cercle (modifiable). Le point M ne peut être déplacé que par l'intermédiaire du déplacement de P. Le point M peut faire plusieurs tours.

Consigne

« Minh fait un voyage de 3 tours qui dure 15 minutes : pouvez-vous faire en sorte que le mouvement de la cabine fasse 3 tours en 15 min en jouant sur les éléments de votre figure ? »

La stratégie P n'est pas du tout apparue. La stratégie M, basée sur la perception, est mobilisées par 5 groupes sur 6 :

- - Déplacement du point P pour que M effectue un tour sur le cercle
- - Marquage du point obtenu sur la demi-droite comme représentant 5 minutes.

Une rétroaction du milieu qui fonctionne est le fait que la position du point P correspondant à 3 tours étant très loin de O, les élèves sont amenés à modifier la taille du cercle, pour obtenir une circonférence plus courte et donc un point P qui n'a pas besoin d'être déplacer loin sur la droite pour que le point M fasse plusieurs tours de roues.

Exemple de production du groupe 4 :

- Un groupe ne termine pas sa solution : après la situation 1, l'enseignant avait présenté à la classe la stratégie « report des mesures » d'un autre groupe et conclut que c'est la bonne stratégie. Cependant, ce groupe n'a pas reconstruit le modèle présenté par l'enseignant et a poursuivi avec la figure qu'il avait lui même construite lors de la situation précédente (M sur le cercle de centre O et de rayon OP). Cette figure l'empêche de résoudre la situation 2.
- Un autre groupe 2 illustre l'équation du mouvement rectiligne uniforme du point P sur la demi-droite donnée dans son brouillon : s = 5t où s représente la longueur de la droite OP et t le temps.

Finalement, les élèves travaillent sur la situation 2 pendant encore 30 minutes. L'enseignant n'a pas eu le temps de présenter la stratégie P et de faire le bilan de cette situation.

4.1.2 Propositions d'évolution de l'ingénierie et questions

Une séance d'initiation

La nécessité d'une séance d'initiation est apparue clairement, la situation 1 ne pouvant pas jouer simultanément le rôle de séance d'initiation et première situation de l'ingénierie (avec la construction du modèle géométrique intermédiaire). Il faut qu'à l'issue de cette séance d'initiation il faudra que les élèves connaissent les outils suivants nécessaire aux situations de l'ingénierie : milieu, droite perpendiculaire, droite parallèle, cercle, compas, arc, calculatrice, mesure (d'angle, d'arc), report de mesure (sur une droite puis sur un polygone). Il faudra présenter également l'aide qui explique comment utiliser les outils.

L'enjeu de l'initiation est de rendre disponible le report de mesure pour la suite sans insister spécialement dessus.

Nous pensons également que, durant cette séance d'initiation, l'enseignant doit insister sur le déplacement des points dans Cabri et en particulier montrer, sur un exemple, que des points « pilotent » le déplacement d'autres points. Il ne faut pas utiliser pour cet exemple le cas d'un report de mesure pour ne pas dévoiler le sujet et éviter les effets de contrat.

L'enseignant pourrait conclure la séance par l'introduction du mot « pilote » pour désigner un point libre qui entraîne le déplacement d'un autre point : « Le point M pilote le déplacement du point M'».

Si les élèves connaissent déjà Cabri, la séance d'initiation n'est pas nécessaire, il faut alors commencer directement par la situation préalable.

Démarrer la situation 2 avec le même modèle fourni aux élèves

Dans la situation 2, seconde version, l'idée est de donner à tous les élèves la même figure institutionnalisée dans la séance 1.

Modification de formulations

Des formulations doivent être modifiées. Par exemple une question formulée en « Pouvez-vous... » n'est pas bien comprise car la demande « pouvez-vous » donne lie à de multiples interprétations. Comment les élèves sont-ils censés y répondre ? En mobilisant quels moyens ? Qu'est-ce qui montre que « je peux » ?

Validation et invalidation des stratégies et modèles obtenus grâce à la confrontation à la réalité

Les validations et invalidations proviennent d'une confrontation à la réalité.

En effet, on peut expliquer l'apparition massive de stratégies M car elles sont moins coûteuses que les stratégies P : Il n'y a pas à ajuster la taille du cercle déjà construit dans la situation 1 / il n'y a pas à calculer le rayon du cercle connaissant son périmètre (calcul à faire hors Cabri).

Cependant, les stratégies M ont été invalidées par un retour à la réalité. Dans la réalité, le manège est construit pour que la durée d'un tour soit de 5 minutes et non l'inverse ! Une modélisation M est contraire à la signification du temps : le temps ne peut pas dépendre de la taille d'un cercle. Elle est rejetée par les élèves. Un débat collectif sur l'indépendance du temps peut se nourrir de la confrontation de ces deux types de stratégies.

Cependant, à l'issue de la situation 2, la question de ce qui a été travaillé et appris lors de cette situation est posée :

- Institutionnalisation ? Quels savoirs institutionnaliser ?

4.2 Expérimentation en France, juin 2010

Cette expérimentation a été réalisée avec 2 binômes d'élèves de fin de Seconde, à Grenoble, dans les locaux du laboratoire LIG en juin 2010. Elle a duré 4 heures, l'enseignant était Alain Birebent et deux observateurs étaient présents, Annie Bessot et Lê Thai Bao Thien Trung.

Pour le recueil de données dans cette expérimentation, nous avons pu mettre en place l'enregistrement vidéo des manipulations de l'environnement Cabri par les élèves, à l'aide de l'outil « enregistrement de session » dans Cabri. Nous disposons également des rapports des observateurs. Une partie des données est encore en cours d'analyse. Nous ne présentons ci-dessous qu'un résumé de l'activité des élèves.

4.2.1 Déroulement et observables

L'initiation a bien fonctionné. Cependant, l'esthétique de la trace finale obtenue a eu un tel impact sur les élèves, que dans la suite du travail, l'outil trace a été souvent évoqué et fait l'objet de multiples tentatives d'utilisation inappropriées. Cela souligne le fait que chaque situation peut orienter fortement le travail ultérieur des élèves et donc, la prise en charge de l'initiation par l'enseignant doit être faite en connaissance de la suite du travail. Au cours de cette initiation, l'outil report de mesure n'a pas été invoqué particulièrement par l'enseignant. Nous pouvons considérer qu'il était disponible mais pas forcément mobilisable par les élèves.

Dans la situation 0, celle qui consiste à faire bouger deux points ensemble, l'un pilotant l'autre, aucun élève n'a mobilisé initialement le report de mesure pour faire déplacer les points ensemble. C'est l'outil compas (stratégie « compas », cf. page 30).

Dans la situation 1, le cercle est immédiatement proposé pour modéliser la roue, mais le modèle construit spontanément n'est pas le modèle géométrique intermédiaire attendu. Le centre choisi pour le cercle est O et le rayon est OP, donc le cercle varie en fonction de P. Le centre du cercle en O est remis en cause au bout de plusieurs tentatives et c'est la stratégie stéréographique (cf. page 32) qui apparaît alors.

Dans la situation 2, qui concerne la graduation de la droite, c'est la mesure du périmètre du cercle qui détermine les emplacements des graduations (stratégie perceptive, cf. page 36). Avec un cercle un peu grand, les graduations sont « trop à droite » (mots d'un élève), c'est-à-dire qu'elles existent dans la figure mais en dehors de l'affichage à l'écran. C'est ce constat qui amène les élèves à construire les graduations à l'aide du report de mesure, pour qu'elles correspondent exactement à 1, 2 ou 3 tours, quelque soit la taille de la roue, même dans le cas où cette taille est modifiée en cours de travail. Cependant, dans cette situation, l'intervention de l'enseignant a été cruciale pour aider les élèves à dépasser la difficulté. La graduation à une minute a été réalisée en divisant par 5 la longueur du cercle et la reportant sur l'axe (stratégie M « diviser la mesure », cf. page 37), le passage au « temps-minute » étant facilement réalisé par les élèves.

Dans la situation 3, les premières questions sur la hauteur de la cabine au bout de 2,5 minutes puis 7 minutes ont été résolues par proportionnalité. Ensuite, construire dans le modèle la position du laser à 35 mètres du sol a constitué une première difficulté. Pour déterminé si la cabine de Minh allait être allumée, la stratégie mobilisée a été pragmatique et perceptive. Les élèves ont d'abord gradué l'axe toutes les minutes et repéré la période d'allumage du laser (toutes les 3 minutes pendant 1 minute) puis ont déplacé P sur l'axe et de regardé où se situait M à chaque fois que P est sur une graduation (stratégie géométrico-graphique, cf. page 43). Ils ont ensuite changé de stratégie en plaçant une graduation sur l'axe à chaque fois que le point M passait en L (position du laser, stratégie graphique unidimensionnelle, cf. page 44). La conclusion est qu'il n'y a peut être aucune coïncidence entre les deux phénomènes (la cabine passe en L et le laser est éclairé). La prise en considération de la hauteur variable de la cabine (fiche 3 de la situation 3) amène les élèves à penser à la trigonométrie. C'est l'enseignant qui conclue sur la forme de la courbe : une sinusoïde.

4.2.2 Conclusion

La conclusion de cette expérimentation est brève étant donné que les données n'ont pas été entièrement analysées. Il en ressort tout de même que les stratégies identifiées dans l'analyse a priori apparaissent effectivement chez les élèves. Par ailleurs, la principale difficulté de cette ingénierie réside dans la situation 1 où il s'agit de trouver un moyen géométrique de faire bouger le point M sur le cercle en fonction du point pilote P. Seule l'intervention de l'enseignant permet d'étendre au cercle l'usage du report de mesure et de l'installer comme stratégie de base pour les situations suivantes. Ce constat conduira à modifier la séance d'initiation à Cabri et mieux anticiper les possibles instrumentations des outils de Cabri dans chacune des autres situations. C'est donc la construction du premier modèle intermédiaire qui constitue la difficulté majeure pour les élèves, soulignant ainsi le caractère inhabituel pour ces élèves de la démarche de modélisation.

Par ailleurs, les situations proposées ne sont finalement pas encore suffisamment robustes pour rendre l'intervention de l'enseignant secondaire. A de nombreuse reprise, c'est la gestion de la situation par l'enseignant et son interaction avec les élèves qui a permis de dépasser les difficultés. Mais de nombreux aspects de ces situations fonctionnent très bien, comme l'impossibilité d'afficher simultanément toutes les graduations demandées qui amène les élèves à reconsidérer leur façon de construire ces graduations.

Ces résultats nous ont conduit à modifier les parties suivantes de l'ingénierie en vue de la troisième expérimentation :

- simplification de la séance d'initiation, qui a été raccourcie car elle s'est révélée trop longue au cours de l'expérimentation 2 et dans laquelle le rôle de l'outil « trace » à été atténué ;
- le rôle de la périodicité a été renforcé pour permettre le passage à un modèle algébrique. Les questions sur la hauteur de la cabine au bout de 2,5 min et 7 min ont été enlevées, car au Viêt Nam, les élèves ne disposent pas de la proportionnalité, contrairement aux élèves français et cela ne provoque pas le passage au cadre algébrique.

4.3 Expérimentation au Viêt Nam, novembre 2010

La troisième expérimentation a été réalisée au début de l'année scolaire avec 12 élèves de classe 12 (équivalent de la terminale française), répartis en 6 binômes. L'expérimentation s'est déroulée sur deux séances de 2,5 heures, avec Le Thai Bao Thien Trung comme enseignant et trois observateurs, Nguyen Thi Nga, Tang Minh Dung et Vu Nhu Thu Huong.

Les données ont été recueillies de la façon suivante : les séances ont été filmées, les échanges verbaux dans les binômes enregistrés par dictaphone, les fiches élèves et les brouillons ont été collectés et les sessions enregistrées dans Cabri.

Les données recueillies sont encore en cours d'analyse et ne permettent donc pas de présenter les résultats. Cependant, un premier constat important est que de nombreuses stratégies identifiées dans l'analyse a priori ont été observées. Par ailleurs, l'ingénierie a pu se dérouler jusqu'à son terme. Ainsi l'enjeu de la situation 3, qui amène la question de la périodicité, a été atteint.

5 Résultats

Notre résultat majeur est l'ingénierie finale que nous avons présentée au § 3. D'ores et déjà son expérimentation complète au Viêt Nam a permis de valider ou invalider certaines des hypothèses qui structurent cette ingénierie.

> Première **hypothèse :** la grande roue du manège sera représentée par un cercle, ce cercle changeant implicitement de statut quand il s'agira de représenter le déplacement de la cabine de Minh : le cercle représentera alors la trajectoire de la cabine.

Il n'y a eu aucune difficulté pour les élèves de choisir un cercle pour représenter la roue, le cercle représentant la roue dans un premier temps puis de considérer ce cercle comme la trajectoire de la cabine de Minh. Cela signifie probablement que le modèle intermédiaire géométrique est mobilisable par les élèves et fournit un milieu pour le passage des élèves à d'autres types de modèles.

> Deuxième **hypothèse** : si la connaissance instrumentale « report de mesure » O (présent dans le menu Cabri, « measurement transfert » en anglais pour les élèves vietnamiens) est un savoir instrumental, la stratégie « report de mesure directe » est une stratégie de base.

Dans les deux pays, la situation 1 est problématique, les élèves bloquent sur la mobilisation du report de mesure sur un cercle. Mais une fois cette difficulté surmontée, le modèle géométrique est tout à fait opérationnel. On peut faire l'hypothèse que cette difficulté est liée à l'obstacle d'une vision des mesures comme n'existant que sur des objets rectilignes. Il faut noter que l'identification de cet obstacle révélé par la difficulté récurrente des élèves n'est possible que par l'utilisation d'un environnement de géométrie dynamique, l'enroulement d'une droite sur un cercle étant quasiment impossible en papier-crayon. Pourtant, en France l'enroulement de la droite sur le cercle est enseignée en classe de Seconde, cela aurait dû favoriser la mobilisation du report de mesure sur un cercle par les élèves. Cependant, dans Cabri, il y a plusieurs façons de reporter une mesure. Dans l'expérimentation en France, l'outil « Compas » qui permet de tracer des cercles de rayon donné par une longueur était disponible alors qu'il avait été enlevé de la séance d'initiation au Viêt Nam. En conclusion, notre deuxième hypothèse n'est pas validée, la stratégie « report de mesure » n'est pas une stratégie de base. Elle doit être introduite par l'enseignant et la question d'une situation qui l'amène de façon nécessaire reste ouverte.

> Notre troisième **hypothèse** est que dans cette situation, l'environnement de géométrie dynamique permet aux élèves de transformer le temps tour en temps min et d'ainsi accéder à deux modélisations possibles du temps.

Dans les deux pays, la situation n°2 se déroule sans difficulté pour les élèves. Le travail sur la représentation et la modélisation du temps, en jeu dans la situation 2, est tout à fait central dans notre ingénierie. Dans la situation 2, une première phase de la situation introduit « le temps de la roue », c'est-à-dire un temps lié au périmètre du cercle dans le modèle choisi : en partant de la modélisation de la roue, puis en graduant l'axe à l'aide d'une unité donnée par le périmètre de la roue, le temps est défini, dans ce modèle, relativement à la roue : c'est un « temps-tour de roue ». En second lieu, la situation 2 introduit une vitesse angulaire et donc ainsi une référence au temps universel, le « temps-minute ». Ainsi, l'ingénierie débouche sur les questions de (i) comment modéliser le temps et (ii) quelles manipulations du temps le ou les modèles construits permettent-ils. Ces questions ouvrent la voie à de nouvelles recherches en didactique avec une entrée sciences et mathématiques nécessaire.

> Notre quatrième **hypothèse** est l'étude de la coïncidence de deux mouvements fait apparaître la variable temps comme la seule variable indépendante possible dans le modèle et amène à prendre en compte les propriétés de périodicité des fonctions qui modélisent les mouvements.

Notre dernier résultat concerne notre hypothèse sur ce qui rend nécessaire le passage aux propriétés de périodicité d'une fonction. L'ingénierie a montré que chercher à faire coïncider deux phénomènes périodiques est une question pertinente. Dans notre contexte, si on se restreint à un seul phénomène périodique, cela n'amène pas nécessairement les élèves à une stratégie fondée sur l'usage de la périodicité des fonctions.

Partie 4

Diffusion des travaux

Les travaux réalisés dans le cadre du projet MIRA ont fait l'objet de présentations dans des conférences et séminaires et sont au cœur de travaux de master et de doctorat. Ce n'est que le début de la diffusion des résultats puisque le projet n'a commencé que depuis un an.

Séminaire et congrès

Bessot A., (2010) Modélisation mathématique de phénomènes variables dans l'enseignement à l'aide de la géométrie dynamique, *Deuxième séminaire franco-vietnamien de didactique des mathématiques Didactique, Méthodologie, et Enseignement/ Apprentissage des Mathématiques*, Viêt Nam, Ho Chi Minh Ville, 26 et 27 avril 2010.

Birebent A., Nguyen Thi N. (2010) Une étude didactique de la modélisation des phénomènes périodiques, *Deuxième séminaire franco-vietnamien de didactique des mathématiques Didactique, Méthodologie, et Enseignement/ Apprentissage des Mathématiques*, Viêt Nam, Ho Chi Minh Ville, 26 et 27 avril 2010.

Laborde C. et Pence B., (2010), « One-Variable and Two-variable functions through the lens of 3D geometry in a dynamic environment », gallery workshop at the *Annual Conference of the National Council of Teachers of Mathematics*, San Diego, California, 21-24 Avril 2010.

Thèse en préparation à l'Université Joseph Fourier, soutenance prévue en septembre 2011

Mme Nguyen Thi Nga « La notion de périodicité dans les enseignements scientifiques : étude pour une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques au Viêt Nam »

Mémoire de Thac Sy 2010-2011 à l'Université pédagogique d'Hô Chi Minh ville :

Phan Tấn Phú « Modelisation dans l'enseignement de la focntion : comment trouver un modèle fonctionnel à partir de tableaux numérique »

Un atelier est prévu aux journées de l'APMEP qui se tiendront à Grenoble en octobre 2011. Un article sera rédigé à l'issue de la thèse de Nguyen Thi Nga.

Références

Artigue M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, n°3, pp. 281-308, Éditions la Pensée Sauvage, Grenoble.

Bessot A. et Comiti C. (2008) Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam / France, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2008*, p.171-194 Editions ARDM et IREM de Paris 7.

Blum W. et Niss M. (1991) Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjets – State, trends and issues in mathematics instructions. *Educational Studies in Mathematics* 22(1-2), 37-68.

Burgermeister P-F. (2009) Modélisation mathématique de problèmes extramathématiques au lycée. Vers une praxéologie consistante de la modélisation. *Colloque EMF.* Dakar : 6 ? 10 avril 2009.

Carlson, M. P.: 1998, 'A Cross-Sectional Investigation of the Development of the Function Concept', *CBMS Issues in Mathematics Education* 7, 114-162.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l?arithmétique à l?algèbre dans l?enseignement des mathématiques au Collège, 2ème partie, perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43-72.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol.12/1, 73-112. La Pensée Sauvage / Grenoble.

Coulange L. (1998) Les problèmes concrets à mettre en équation dans l'enseignement, *Petit x*, n°47, 33-58

Euler L. (1755) *Opera Omnia* ser.I, vol VIII, Editions A. Krazer & F. Rudio (1922)

Hankel H. (1870) *Untersuchunen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktione.*

Organisation de Coopération et de Développement Économique - OCDE (2003) *Apprendre aujourd'hui, réussir demain. Premiers résultats de PISA 2003*. Paris, France. Tiré le 3 septembre 2008 de http://www.oecd.org/document/29/0,3343,en_32252351_32236173_34023965_1_1_1_1,00.html

Falcade, R.: (2002), 'Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe de fonction', *Petit x*, Vol. 58, 47-81.

Goldenberg, E. P., Lewis, P. and O'Keefe, J.: (1992), 'Dynamic representation and the development of an understanding of functions', in E. Dubinsky and G. Harel (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, Washington, DC, 235-260.

Hazzan, O and Goldenberg, E. P.: (1997), 'Student's understanding of the notion of function', *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol. 1(3), 263-290.

Kaiser-Messmer G. (1991) Application-orientated Mathematics Teaching: A survey of The Theoretical Debate. In Niss, M.; Blum, W. et Huntley, I. (Eds) *Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (pp. 83-92) Chichester : Ellis Horwood.

Legrand M. (2003), Différents types de modélisation dans l'enseignement, in *Dossier 2004 diffusé dans les Irem, Séance du Comité Scientifique des Irem « La modélisation »* du 26 novembre 2003.

Leinhardt, G., Zaslavky, O., Stein, M.K.: (1990), 'Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching', *Review of Educational Research*, 60 (1), 1-64.

Malik, M.A.: 1980, 'Historical and pedagogical aspects of the definition of function', *Int. Jour. of Mathematics Education in Science and Technology*, 11 (4), 489-92.

René de Cotret S. (1988) Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante *Petit x*, n°17, 5-27.

Rodriguez Gallegos R. (2007) *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en classe de physique et de mathématiques au Lycée : une étude de manuel et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Sierpinska, A.: (1992), 'On understanding the notion of function', in E. Dubinsky and G. Harel (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, Washington DC, 25-58.

Thompson, P. W.: 1994, 'Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum', *CBMS Issues in Mathematics Education*, Vol. 4, 21-44.

Trigueros, M. and Ursini, S: 1999, 'Does the understanding of variable evolve through schooling ?', *Proceedings of the 23rd International Conference, Psychology of Mathematics Education*, in O. Zaslavsky (ed.), Israel Institute of Technology, Vol. 4, Haifa, Israel, 273-80.

Youskhevitch A.P. (1981) Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXè siècle In : *Fragments d'Histoire des Mathématiques*, Brochure APMEP n°41, Paris : Association des Professeurs de Mathématiques

Annexes

Table des annexes

Annexe 1.
Questionnaire pour l'analyse institutionnelle de l'enseignement secondaire au Viêt Nam

FICHE 1

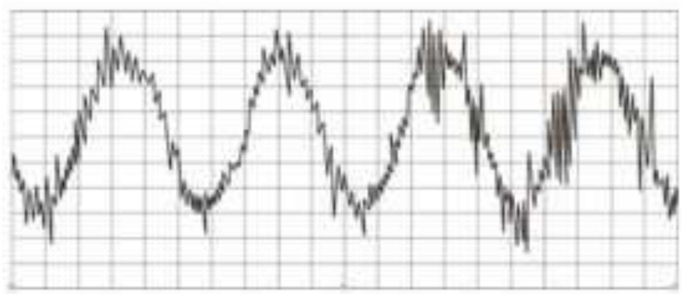
Nom et Prénom : **Classe :** **Ecole :**

Résoudre les problèmes suivants

Durée : 35 minutes

Exercice 1

Ci-après un encéphalogramme montre l'activité du cerveau humain pendant le sommeil profond selon le temps en seconde (s). Cette activité est la même durant tout le sommeil profond dont la durée moyenne est de 20 minutes.



0 1 2 (s)

a) Qu'est-ce que tu peux dire sur ce phénomène ?
b) Durant la première seconde, dans quels intervalles l'activité du cerveau augmente-t-elle ? Dans quels intervalles diminue-t-elle ?
c) Durant la première seconde, à quel instant l'activité du cerveau est-elle la plus forte ? A quel instant est-elle la plus faible ?
d) Que remarques-tu de l'activité du cerveau durant l'intervalle de temps de 3,5s à 4s ? Justifie ta réponse.
e) Evalue l'activité du cerveau au temps t = 2,5s.
f) Construis une figure permettant d'apprécier l'activité du cerveau sur les 10 premières secondes du sommeil profond.

Exercice 2

Les peuples montagnards du Nord utilisent souvent la noria pour apporter de l'eau aux champs élevés. C'est une grande roue, comme la roue d'une bicyclette, avec des seaux attachés par des goupilles. Les seaux sont successivement immergés, remplis et vidés dans une gouttière.

Supposons qu'une noria ait 8 seaux attachés ci-dessous. Un mathématicien étudie la « hauteur » du seau, noté A dans la figure, par rapport à la surface de l'eau. Cette hauteur est positive quand le seau est au dessus de l'eau, négative quand il est au dessous. A chaque instant t (calculé en minute), le mathématicien a trouvé que cette hauteur (calculée en mètre) suit la loi suivante :

$$h = 2 + 2,5 \sin\left[2\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right]$$

a) Qu'est-ce que tu peux dire sur le mouvement de la noria ?
b) Trouve le rayon de la roue et la distance du centre de la roue à la surface de l'eau.
c) On veut déverser dans le champ une quantité d'eau égale au déversement de 1000 seaux dans la gouttière. Pendant combien de temps la noria doit-elle tourner?

FICHE 2

Nom et Prénom : **Classe :** **Ecole :**

Résoudre les problèmes suivants

Durée : 55 minutes

Exercice 3

On a relevé la hauteur d'eau au port de Saint-Malo en France les 9 et 10 mai 2009 dans les deux tableaux ci-dessous.

9 mai 2009

Matin		Après-midi	
0H00	5,02m	12H00	5,60m
1H00	3,38m	13H00	3,87m
2H00	2,30m	14H00	2,62m
3H00	2,12m	15H00	2,10m
4H00	3,28m	16H00	2,84m
5H00	5,62m	17H00	4,91m
6H00	8,40m	18H00	7,71m
7H00	10,64m	19H00	10,27m
8H00	11,54m	20H00	11,64m
9H00	11,05m	21H00	11,51m
10H00	9,62m	22H00	10,27m
11H00	7,66m	23H00	8,36m

10 mai 2009

Matin		Après-midi	
0H00	6,22m	12H00	6,78m
1H00	4,28m	13H00	4,82m
2H00	2,83m	14H00	3,30m
3H00	2,05m	15H00	2,33m
4H00	2,39m	16H00	2,34m
5H00	4,10m	17H00	3,71m
6H00	6,73m	18H00	6,19m
7H00	9,40m	19H00	8,96m
8H00	11,15m	20H00	11,04m
9H00	11,45m	21H00	11,72m
10H00	10,51m	22H00	11,03m
11H00	8,83m	23H00	9,46m

a) Que peux-tu dire sur ce phénomène ?

b) Combien y a-t-il de marées hautes durant ces deux jours ? Combien y a-t-il de marées basses ?

c) Quelle est l'amplitude moyenne des marées à Saint-Malo sur les deux jours ?

(L'amplitude des marées dans un jour est la différence de hauteur entre le niveau de la marée haute et celui de la marée basse suivante).

d) Le capitaine d'un bateau veut prendre la mer à Saint-Malo le 11 mai. Le tirant d'eau de son bateau est de 7 mètres. A quelles heures peut-il partir le 11 mai?

(Le tirant d'eau est la hauteur de la partie immergée du bateau qui varie en fonction de la charge transportée. Il correspond à la distance verticale entre la ligne de flottaison d'un bateau et le bas de la quille. Un bateau dont le tirant d'eau est de d mètres peut naviguer en toute sécurité quand la hauteur d'eau est supérieure à d mètres).

e) Construis une figure permettant d'apprécier les hauteurs d'eau dans ce port durant la totalité des trois jours 9, 10 et 11 mai 2009.

Exercice 4

Un parc d'attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40m de diamètre dont le centre est situé à 22m du sol.

La roue tourne toujours dans le même sens de manière uniforme. Au début du voyage, la cabine P se trouve au plus bas et Minh s'y assoit. Il fait un voyage de 3 tours qui dure 30 minutes.

a) A quel instant Minh est-il à la position la plus haute ?
b) Calcule la hauteur de la cabine de Minh au sol après 2,5 minutes du voyage, après 7 minutes, après 12 minutes et après 22 minutes.
c) Construis une figure permettant d'apprécier les hauteurs de la cabine P durant les trois tours du voyage.
d) A partir de 35m de hauteur on voit la rivière Saigon. Combien de temps Minh peut-il la voir pendant tout un voyage ?

Annexe 2.
Compte-rendu du séjour de Le Thai Bao Thien Trung en France

Rapport de mission MIRA 2008 (bourse BAC)
du 12 juin au 11 septembre 2010 dans l'équipe DIAM-LIG

Le Thai Bao Thien Trung – Université pédagogique d'HCMV – Viêt Nam

- Participation aux réunions du projet de recherche MIRA 2008 avec les membres de l'équipe DIAM : mise au point dans l'ingénierie didactique de la phase intermédiaire du processus de modélisation, passage de la situation réelle à sa modélisation graphique en géométrie dynamique
- Contribution à la conception des situations expérimentales, à l'analyse a priori des situations construites et de leur mise en scène dans les conditions institutionnelles de l'enseignement mathématiques au Viêt Nam
- Mise en place, avec Bernard Genevès, des commandes de configuration du logiciel Cabri II Plus nécessaires à la confection des fichiers Cabri des scénarios expérimentaux
- Expérimentation (durée = 4 heures) avec Annie Bessot, Alain Birebent et Nguyen Thi Nga d'une première version de l'ingénierie didactique sur deux binômes d'élèves français volontaires le 1er juillet 2010
- Confection avec Annie Bessot, Alain Birebent et Nguyen Thi Nga des fichiers Cabri des scénarios expérimentaux pour le Viêt Nam
- Traduction en vietnamien avec Nguyen Thi Nga des protocoles et des fiches-élèves de l'ingénierie didactique
- Réunions avec Annie Bessot et Hamid Chaachoua (équipe MeTAH) pour ouvrir de nouveaux sujets de mémoires de recherche sur la géométrie dans l'espace
- Rédaction, en vietnamien, de deux articles à partir des matériaux de ma thèse de doctorat, le premier sur la relation épistémologique entre la notion de limite et la construction des nombres réels, le second sur l'analyse d'une séquence d'enseignement qui vise à redonner du sens à la notion de limite au lycée à l'aide de la calculatrice
- Recherche et recueil de documentations pour le développement de la coopération inter-universitaire en didactique des mathématiques entre l'UJF et l'UPHCMV

Personnes avec lesquelles j'ai travaillé lors de ma mission : Sophie Soury-Lavergne (responsable de l'équipe DIAM), Alain Birebent (responsable de la coopération inter-universitaire), Annie Bessot, Hamid Chaachoua, Claude Comiti, Bernard Genevès, Colette Laborde, Muriel Ney et Nguyen Thi Nga

Grenoble, le 10 septembre 2010