



Jouni Siipilehto



Annika Kangas

Jouni Siipilehto ja Annika Kangas

## Näslundin pituuskäyrä ja siihen perustuvia malleja läpimitan ja pituuden välisestä riippuvuudesta suomalaisissa talousmetsissä

**Siipilehto, J. & Kangas, A.** 2015. Näslundin pituuskäyrä ja siihen perustuvia malleja läpimitan ja pituuden välisestä riippuvuudesta suomalaisissa talousmetsissä. *Metsätieteen aikakauskirja* 4/2015: 215–236.

Tutkimuksessa tarkasteltiin Näslundin pituuskäyrän matemaattisia ominaisuuksia ja laadittiin malliperhe Näslundin pituuskäyrän ennustamiseksi. Aineistona käytettiin taimikoiden TINKA- ja varttuneiden puustojen INKA-kokeita. Pituuskäyrät sovitettiin männylle, kuuselle ja lehtipuille Näslundin yhtälön linearisoidussa muodossa. Ennustemallit laadittiin havumetsissä pääpuulajille, mutta lehtipuiden aineisto koostui sekä koivikoista, että sekapuuna kasvaneesta koivusta ja vähäisestä määrästä muuta lehtipuustoa. Näslundin pituuskäyrää ennustettiin sekä nuorten että varttuneiden metsiköiden tyyppillisillä puustotunnusten yhdistelmillä ja lisäksi valtapituudella ja puuston tilavuustunnuksilla. Ennustemallit laadittiin lineaarisina sekamalleina, jotta mallit ovat lokalisoitavissa lineaarisen ennustamisen teorian mukaisesti estimoimalla satunnaisosat puutason mittauksilla. Jäännöshajonta oli heteroskedastinen metsikön kehitysvaiheen, keskimääräisen so-lakkuuden sekä lämpösumman suhteen metsiköiden välillä ja se huomioitiin varianssifunktion avulla. Jäännösvirheen hajontaa voitiin hyödyntää pituuden satunnaisvaihtelun luomiseksi. Pääosa laadituista malleista on tarkoitettu vaihtoehdoksi tilanteessa, jossa puutason tietoja ei ole. Mallin kiinteän osan avulla saatiin varsin luotettava kuva puiden läpimitan ja pituuden riippuvuudesta. Laaditut mallit on helppo ottaa käyttöön esim. erilaisissa metsätalouden suunnittelujärjestelmissä.

Avainsanat: ennustaminen, kalibrointi, puustotunnukset, sekamalli

Yhteystiedot: Luonnonvarakeskus (Luke), Vantaa & Joensuu

Sähköposti [jouni.siipilehto@luke.fi](mailto:jouni.siipilehto@luke.fi)

Hyväksytty 15.12.2015

Saatavana <http://www.luke.fi/aikakauskirja/full/ff15/ff154215.pdf>

## I Johdanto

Puun pituuden ja läpimitan välinen riippuvuus on kautta aikain pysynyt metsien mallintamisessa mielenkiinnon kohteena. On olemassa joukko tutkimuksia, joissa useita vaihtoehtoisia funktioita verrataan keskenään läpimitan ja pituuden riippuvuuden kuvaamiseksi. Esimerkkinä tällaisista mainittakoon Prodan (1965), Curtis (1967), Arabatzis ja Burkhart (1992), Elfving ja Kiviste (1997), Zhang (1997), Fang ja Bailey (1998), Newton ja Amponsah (2007), Leduc ja Goelz (2009) ja Gómez-García ym. (2014) ja testattuja funktioita oli esimerkiksi Korf, Gompertz, Schumacher, Chapman-Richards ja Weibull. Minkään tietyn funktion ei ole todettu olevan selvästi muita parempi (ks. Mehtätalo 2004, Mehtätalo ym. 2015). Tyypillisesti Näslundin (1936) pituuskäyrää ei näissä vertailuissa ollut mukana tai se oli mukana, mutta sen alkuperää ei tunnustettu (esim. Fang ja Bailey 1998, Staudhammer ja LeMay 2000, Leduc ja Goelz 2009). Pituuskäyräksi suositellaan sigmoidia funktiota, jolla on sekä käännepiste että tunnettu asymptootti (esim. Yuancai ja Paresol 2001). Näslundin pituuskäyrän käännepiste ja asymptootti tunnetaan, mutta asymptootti ei ole suoraan yksittäinen parametri, kuten muissa edellä mainituissa funktioissa.

Aivan tuoreessa tutkimuksessa Näslundin pituuskäyrä oli mukana vaihtoehtoisten mallien vertailussa ja se pärjäsikin erinomaisesti (Mehtätalo ym. 2015). Näslundin pituuskäyrä on varsin helppokäyttöinen muun muassa siksi, että siinä on vain kaksi estimoitavaa parametria. Tyypillisesti Näslundin pituuskäyrää käytetään koepuiden läpimita- ja pituushavaintojen tasoittamiseksi, jotta koepuutiedot voidaan yleistää lukupuille tasoituskäyrältä. Metsäntutkimuslaitoksella kehitetyssä KPL-laskentaohjelmassa Näslundin pituuskäyrä on oletusarvona ja sen vaihtoehtona on Prodanin (1965) pituuskäyrä (ks. Heinonen 1994). Myös tietyt simulointiohjelmat, kuten MOTTI Suomessa ja HEUREKA Ruotsissa soveltavat Näslundin pituuskäyrää yhtenä vaihtoehtona (Fahlvik ym. 2014, Siipilehto ym. 2014).

Pituuskäyrän ennustemalleja tarvitaan tyypillisesti silloin, kun puuston rakennetta halutaan ennustaa puutasolla. Puiden läpimitat poimitaan ennustetusta läpimitajakaumasta ja vastaava puun pituus

ennustetun pituuskäyrän avulla. Siipilehdon (1999) sekametsäaineistoista (ks. Mielikäinen 1980, 1985) laatimia Näslundin pituuskäyrän ennustemalleja on käytetty Suomessa aika yleisesti (esim. Maltamo ym. 2006, Kuusisto ja Kangas 2008, Mustonen ym. 2008, Kangas ym. 2010, 2012, Muinonen ym. 2013). Siipilehto (2011b) havaitsi niiden tuottavan harhaisia tuloksia mallin laadinta-aineiston ulkopuolella, erityisesti nuorissa metsissä. Tämä systemaattinen virhe johtui pääasiassa siitä, että pituuskäyrän parametrien riippuvuus oli kuvattu suoraan keskiläpimitan ja keskipituuden lineaarisena funktiona (Siipilehto 1999). Myöhemmin Siipilehto (2011a) linearisoi parametrien ja puustotunnusten välisen riippuvuuden ottamalla logaritmit molemmista.

Lineaarisen ennustamisen menetelmällä Näslundin pituuskäyrän parametrit voidaan lokalisoida (kalibroida) millä tahansa tunnetuilla puustotunnuksilla (Siipilehto 2011a) tai puutason mallissa perustuen koepuuotantaan (Kangas ja Maltamo 2002, Kinnunen ym. 2007, Vastaranta ym. 2010, Schmidt ym. 2011). Menetelmän soveltaminen vaatii matriisilaskentaa parhaan lineaarisen ennustimen (best linear unbiased predictor) eli BLUP-estimaatin laskemiseksi (ks. Lappi 1993, Kangas ja Maltamo 2002). Siitä syystä niiden käyttöönotto ei ole aivan yksinkertaisen suoraviivaista vaan vaatii tavallisia regressiomalleja enemmän esimerkiksi ohjelmointitaitoja. Hyvin yleisen pituusmallin lokalisointi yhdelläkin mittaushavainnolla korjaa ennustetta voimakkaasti havainnon suuntaan (ks. Lappi 1991, Mehtätalo 2005). Siten täysin satunnaiseen mittaus-havaintoon kohdistuu pieni riski. Jos satunnainen puu osuu läpimitan suhteen erityisen lyhyeen tai pitkään puuhun, lokalisoitu malli automaattisesti aliarvioi tai jälkimmäisessä tapauksessa yliarvioi metsikön pituuskäyrää. Useampaa mittaushavaintoa käytettäessä riski pienenee. Puustotunnuksilla lokalisoitava Näslundin pituuskäyrän parametrien ennustemalli osoittautui oivaksi vaihtoehdoksi Korf-funktion (Mehtätalo 2005) tai Vetlheimin (1987) pituusmallin rinnalle (ks. Siipilehto 2011b, s. 29). Koska Siipilehto (2011b) ennusti pituuden sijaan pituuskäyrän parametreja, eivät kyseisen mallin virhetermit kuvanneet mitään sen luotettavuudesta itse puun pituuden ennusteena.

Tässä raportissa esitellään Näslundin pituuskäyrän yleisiä ominaisuuksia ja regressiomallinnuksen

vaihtoehtoja. Vaihtoehtoisina menetelminä tarkastellaan regressiomalleja suoraan puun pituudelle sekä linearisoidulle muunnokselle että etukäteen sovitetuille Näslundin pituuskäyrän parametreille. Puukohtaiset mallit estimoidaan puun pituudelle epälineaarisenä ja muunnokselle lineaarisena sekamallina. Lopuksi laaditaan uusi malliperhe männyn, kuusen ja koivun pituuden ennustamiseksi. Tavoitteena on mallien harhaton käyttäytyminen varttuneista taimikoista aina uudistuskypsyihin metsiköihin. Regressiomalleista esitetään useita vaihtoehtoja, joista voidaan valita puustotunnuksiltaan käyttäjän aineistoihin ja suunnittelujärjestelmiin sopivin vaihtoehto. Vaihtoehtoisia puustotunnuksia tarvitaan esim. puuston kehitysvaiheen ja puuston käsittelyn mukaan. Niinpä mallien laadinnassa huomioidaan erot tyypillisissä puustotunnuksissa taimikoissa ja nuorissa metsissä verrattuna varttuneisiin metsiin tai leimikoiden tietoihin.

## 2 Aineisto ja menetelmät

### 2.1 Aineisto

Aineisto edusti suomalaisia talousmetsiä. Se koostui valtakunnan metsien inventointien VMI7- ja VMI8-koealaverkkoon perustetuista varttuneempien puustojen INKA- ja taimikoiden TINKA-kokeista (Gustavsen ym. 1988). Kokeet on perustettu 1976–1986 välisenä aikana. INKA on mitattu neljään ja TINKA kolmeen kertaan. Metsikkökoela koostuu kolmen ympyräkoalan rypästä. Ympyräkoalojen koko valittiin puuston tiheyden mukaan siten, että kolmelta koealalta mitattiin yhteensä noin 120 puuta eteläisessä Suomessa ja noin 100 puuta Lapissa. INKA-kokeiden ympyräkoalan sisältä mitattiin pienempisäteinen koeala koepuita varten siten, että koepuukoela edusti kolmannesta metsikkökoelasta. Koepuista mitattiin läpimitan lisäksi pituus ja esim. latvustunnuksia. TINKA-kokeiden kahdella ensimmäisellä mittauskerralla kaikista rinnankorkeuden ylittäneistä puista mitattiin sekä läpimita että pituus. Koealat yhdistettiin edustamaan koko metsikköä, jolloin pituuskäyrän sovitukseen jäi keskimäärin 40 puuta eteläisen Suomen ja 33 puuta Lapin INKA-aineistossa. Koska koivumetsiköitä

oli vähän ja koivu sekä muut lehtipuut esiintyvät pääasiassa sekapuustona havumetsissä, koostettiin lehtipuiden mallitusaineisto yhdistämällä koivikot (27 metsikköä) ja koivu- ja lehtisekapuustot (39 metsikköä). Sekapuustoissa lehtipuita piti olla vähintään 10 kpl metsikössä. Lehtipuuryhmä koostui lähes yksinomaan hies- ja rauduskoivusta. Todellinen ikä oli aina määritetty metsikön pääpuulajista ja se rajoitettiin lehtisekapuustoissa 120 vuoteen. Metsikön todellinen ikä perustuu valtapuiden keskimääräiseen rinnankorkeusikäen ja INKA-kokeiden kairauksista laadittuun talousmetsien ikälisäysmalliin (Siipilehto ja Huttunen 2015). Näin määritelty todellinen ikä oli pienempi kuin aiemmin yleisesti käytetty VMI-ikälisäykseen (Kuusela ja Salminen 1969) perustunut todellinen ikä. Alikasvos ja ylispuut jätettiin pituuskäyrän sovituksen ulkopuolelle. Taimikoiden TINKA-aineisto rajattiin keskipituudeltaan yli 4 m metsiköihin, koska käytännöllisesti katsoen kaikki puut ovat saavuttaneet tässä vaiheessa rinnankorkeuden (ks. Siipilehto 2011a) ja siten niille saadaan relevantit rinnankorkeuteen perustuvat puustotunnuksot. Lopullinen aineisto koostui 568 männiköstä, 214 kuusikosta sekä 66 koivikosta tai lehtisekapuustosta. Puukohtaisia havaintoja oli männyllä 32 037 kuusella 8 339 ja lehtipuista 1 676.

### 2.2 Näslundin pituuskäyrän yleisiä ominaisuuksia

Näslund (1936) esitteli pituuskäyrän männylle käyttäen toisen asteen yhtälöä. Kuitenkin kolmannen asteen yhtälö oli joustavampi kuvaamaan kuusen tyypillisesti laajaa läpimita ja pituusvaihtelua (Peterson 1955, Vestjordet 1972, Siipilehto 1999). Siten Näslundin pituuskäyrän yleisempi muoto voidaan kirjoittaa yhtälön 1 mukaisesti:

$$h = \frac{d^m}{(b_0 + b_1 d)^m} + 1,3 \quad (1)$$

jossa  $h$  on puun pituus,  $d$  on puun läpimita rinnankorkeudelta (1,3 m), potenssi  $m=2$  valopuulajeille (esim. mänty ja koivu) ja  $m=3$  varjoa sietäville lajeille (esim. kuusi),  $b_0$  ja  $b_1$  ovat estimoitavia parametreja. Pituusmallissa on siten kaksi estimoitavaa parametria, koska potenssia  $m$  ei estimoida, vaan se valitaan etukäteen puulajin ominaisuuksiin

perustuen.

Näslundin pituuskäyrän asymptootti saadaan  $b_1$  parametrissa ja käyrän potenssista  $m$  ja käännepestä saadaan molempien parametrien avulla. Käännepestä ( $d''$ ,  $h''$ ) saadaan toisen derivaatan nollakohdan positiivisesta juuresta. Asymptootti on  $(1/b_1^m + 1,3)$  ja käännepestä on:

$$d'' = (m-1)b_0/2b_1 \quad (2)$$

ja

$$h'' = (b_0(m+1))^{-m}(b_0(m-1)/b_1)^m + 1,3 \quad (3)$$

Kaavat 2 ja 3 sievenevät, kun sijoitetaan  $m$ :n arvoiksi 2 ja 3. Kun  $m=2$ ,  $d'' = b_0/2b_1$  ja  $h'' = 1/9b_1^2$  (ks. Näslund 1936, s. 43), kun  $m=3$ ,  $d'' = 2b_0/2b_1$  ja  $h'' = 1/8b_1^3$ .

Pituuskäyrän parametrit voidaan estimoida epälineaarilla regressiolla suoraan yhtälöstä (1). Yleisemmin pituuskäyrän parametrit estimoidaan parametrien suhteen linearisoidun yhtälön (4) avulla:

$$y = \frac{d}{(h-1,3)^{m-1}} = b_0 + b_1d + \varepsilon_y \quad (4)$$

Koska pituudelle tehdään epälineaarinen muunnos, tulee se ottaa huomioon harhankorjauksena takaisinmuunnoksen yhteydessä. Taylorin sarjaan perustuva harhan korjaus on muotoa  $E(h) = g(y) + (1/2)g''(y)\sigma^2$ , missä  $g$  on käänteisfunktio (ks. Lappi 1993, s. 91). Eerikäinen ja Korhonen (2001, s. 75) esittivät harhankorjatun pituusennusteen Näslundin toisen asteen yhtälölle:

$$\hat{h} = \frac{d^2}{(b_0 + b_1d)^2} + \frac{3d^2}{(b_0 + b_1d)^4}\sigma^2 + 1,3 \quad (5)$$

Vastaava harhankorjattu pituusennuste kuuselle Näslundin kolmannen asteen yhtälöstä saadaan seuraavasti. Ensin ratkaistaan käänteisfunktio, joka saadaan:

$$y = \frac{d}{(h-1,3)^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow y(h-1,3)^{\frac{1}{3}} = d \Leftrightarrow (h-1,3)^{\frac{1}{3}} = \frac{d}{y} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow h-1,3 = \frac{d^3}{y^3} \Leftrightarrow h = d^3y^{-3} + 1,3$$

Käänteisfunktion ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat:

$$g'(y) = d^3(-3y)^{-4} \quad \text{ja} \quad (7)$$

$$g''(y) = d^3(-3)(-4y)^{-5} = 12d^3y^{-5}$$

Toisen derivaatan mukainen harhan korjaustermi kuuselle on siten:

$$\frac{1}{2} \frac{12d^3}{y^5} \sigma^2 = \frac{6d^3}{(b_0 + b_1d)^5} \sigma^2 \quad (8)$$

Täten kuusen lopullinen harhankorjattu pituusennuste saadaan:

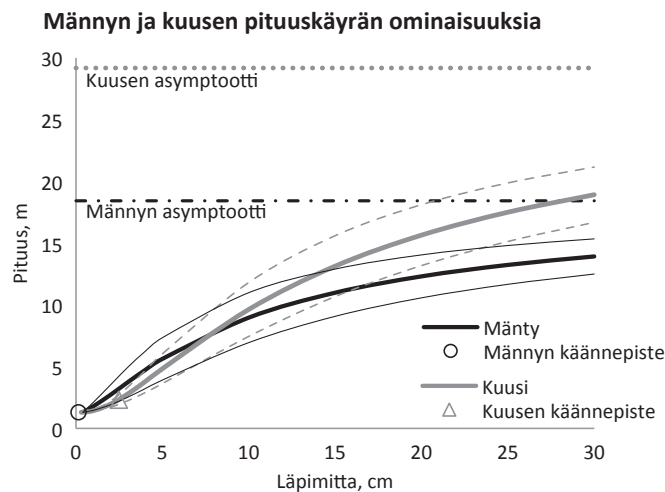
$$\hat{h} = \frac{d^3}{(b_0 + b_1d)^3} + \frac{6d^3}{(b_0 + b_1d)^5} \sigma^2 + 1,3 \quad (9)$$

Linearisoidun mallin etuna on se, että jäännösvirhe voidaan olettaa homogeeniseksi ja normaalijakautuneeksi eli yksittäisen metsikön sisällä varianssi on vakio (Näslund 1936, s. 52). Kun lineaarisen yhtälön (4) normaalijakautuneen virheen keskihajonta ( $s_y$ ) palautetaan alkuperäiseen skaalaan pituuden virhevaihteluksi ( $s_h$ ), on hajonta läpimitan ja pituuden funktio yhtälön (10) mukaisesti (Näslund 1936, s. 56). Yhtälö johdetaan Taylorin sarjan avulla (ks. Siipilehto 2000). Yhtälöä (10) tarvitaan, jos pituuden odotusarvon lisäksi halutaan kuvata realistista metsikkökohtaista pituuden satunnaisvaihtelua linearisoitua yhtälöä (4) käytettäessä.

$$s_h = s_y \frac{m \left[ \left( \hat{h} - 1,3 \right)^{\frac{m+1}{m}} \right]}{d} \quad (10)$$

Jos pituuskäyrältä tunnetaan jokin piste, voidaan Näslundin pituuskäyrän toinen parametri ratkaista siten, että yhtälö kulkee kyseisen pisteen kautta (Siipilehto 1999). Parametreista  $b_1$  on osoittautunut parametria  $b_0$  voimakkaammin puustotunnusten kanssa korreloituneeksi. Oletetaan siis, että  $b_1$  ennustetaan puustotunnusten, kuten metsikön pohjapinta-alan mediaaniäpimitan ( $DGM$ ) ja pituuden ( $HGM$ ) avulla. Jotta pituuskäyrä kulkisi pisteen ( $DGM$ ,  $HGM$ ) kautta, ratkaistaan  $b_0$  yhtälöllä:  $b_0 = DGM / (HGM - 1,3)^{(1/m)} - b_1 DGM$ .

Teoreettisesti parempi menetelmä on laatia sekamalli ja lokalisoida pituuskäyrä koepuumittauksen tai -mittausten avulla (ks. Kangas ja Maltamo 2002, Eerikäinen 2009). Menetelmässä korjataan mallin kiinteän osan ennustetta estimoimalla mallin satunnaisparametrit mittaustiedon avulla. Esimer-



**Kuva 1.** Männyn ja kuusen aineiston keskiarvoja vastaavat pituuskäyrät, niiden asymptootit ja käännepeisteet. Pituuskäyriin on lisätty  $\pm 2$  kertaa pituuden keskihajonta ( $s_h$ ) yhtälön 10 mukaan.

kiksi Kangas ja Maltamo (2002) estimoivat yleisen Näslundin pituuskäyrän männylle koko aineiston yli siten, että malli sisälsi pelkästään kiinteät parametrit  $b_0$  ja  $b_1$  sekä satunnaisen koelavaikutuksen ( $u_{ij}$ ), satunnaisen vakion ( $b_{0i}$ ) että satunnaisen kertoimen ( $b_{1i}$ ) metsikölle  $i$  ja koelalle  $j$ . Malli lokalisoitiin mediaanipuun läpimitan ja pituuden ( $DGM$ ,  $HGM$ ) avulla. Koska tällainen malli lokalisoituu varsin tehokkaasti, laadittiin tässä tutkimuksessa vastaava malli männylle, kuuselle ja lehtipuulle.

Kuvassa 1 on esitetty Näslundin pituuskäyrän ominaisuuksia, kuten tyypillinen pituuskäyrän muoto männyllä ja varjoa sietävällä kuusella. Pituuskäyrät vastasivat aineiston keskiarvoja (taulukko 1). Kuusella erottuu käyrän sigmoidi muoto, koska käyrän käännepeiste ( $d'' = 5,0$  ja  $h'' = 4,8$ ) on kauempana kuin männyllä ( $d'' = 0,14$  ja  $h'' = 1,31$ ). Männyllä pituuskäyrän käännepeiste oli tyypillisesti niin lähellä käyrän lähtöpistettä eli 1,3 m:n pituutta, että käytännössä voidaan puhua konkaavista männyn pituuskäyrästä. Männyn pituuskäyrä taipui voimakkaammin kuin kuusen ja siten sen asymptootti (18,4) oli pienempi kuin kuusella (29,2). Tällaiset erot näyttävät olevan tyypillisiä valopuulajien ja varjoa sietävien lajien välillä (Temesgen ja Gadow 2004).

### 2.3 Näslundin pituuskäyrän sovittaminen ja ennustaminen

Ensiksi pituuskäyrät sovittettiin vaihtoehtoisilla menetelmillä männylle siten, että kussakin mallissa oli samat selittäjät  $\ln(DGM)$  ja  $\ln(HGM)$ . Vaihtoehtoina tarkasteltiin mallien kiinteää osaa menetelmällä A) etukäteen sovittettujen pituuskäyrän parametrien ennustaminen B) lineaarisen muunnoksen (kaava 4) ennustaminen puutason sekamallilla ja C) suora pituuden ennustaminen epälineaarisesti (kaava 1), jossa mallinnettiin logaritmisia parametreja Mehtälön (2015)  $\ln$ for paketin HDnaslund4 funktiolla eli  $h = (d / \exp(b_0) + \exp(b_1)d)^2 + 1,3$ . Näitä laadittuja mallivaihtoehtoja verrattiin myös Siipilehdon (1999) pituusmalliin. Siipilehto (1999) laati mallin suoraan  $b_1$  parametrille  $DGM$  ja  $HGM$  selittäjien avulla ja parametri  $b_0$  ratkaistiin siten, että käyrä kulki pisteen ( $DGM$ ,  $HGM$ ) kautta. Sekä menetelmä A) että C) tuottavat ennusteet logaritmisille parametreille ja siksi ne saavat aina varmasti positiivisen arvon. Vaihtoehtojen tarkastelun jälkeen päädyttiin lineaarisoidun yhtälön (4) käyttöön.

Lopullista mallinnusta varten sovitukset tehtiin lineaarisen yhtälön (4) mukaisella regressiomallilla erikseen jokaiselle metsikölle ja mittauskerralle puulajiryhmittäin. Nämä alustavat sovitukset palvelivat pa-

**Taulukko 1.** Keskimääräiset pituuskäyrän parametrit ( $b_0, b_1$ ), linearisoidun mallin jäännöshajonta ( $s_y$ ) ja niitä selittävät puustotunnukset puulajeittain ja metsiköiden lukumäärä ( $n$ ). Koivu/lehtipuu aineisto sisälsi 27 koivikkoa ja koivu- tai lehtisekapuustoa 39 metsiköstä. (Puustotunnukset:  $DDY$  = lämpösumma,  $T$  = todellinen ikä,  $G$  = metsikön pohjapinta-ala,  $N$  = runkoluku,  $D$  = keskiläpimitta,  $H$  = keskipituus,  $DGM$  = pohjapinta-alan mediaaniläpimitta,  $HGM$  = pohjapinta-alan mediaanipituus,  $DDOM$  = valtaläpimitta,  $HDOM$  = valtapituus,  $Vtot$  = kokonaisrunkotilavuus.

	Mänty n = 568			Kuusi n = 214			Koivu n = 66		
	Keskim.	Min.	Maks.	Keskim.	Min.	Maks.	Keskim.	Min.	Maks.
$b_0$	1,195	0,432	2,499	1,635	0,698	2,492	0,898	0,434	1,767
$b_1$	0,242	0,150	0,432	0,330	0,265	0,457	0,242	0,150	0,449
$s_y$	0,238	0,081	0,889	0,227	0,117	0,622	0,169	0,063	0,461
$DDY$	984	674	1348	1110	746	1356	1032	710	1305
$T$	62,0	11,0	195,0	79,4	18,0	173,0	64,8	10,0	120,0
$G$	13,8	0,9	52,2	21,0	2,4	62,3	9,2	0,4	25,7
$N$	1153	118	4552	1088	203	3183	975	115	7294
$D$	13,0	4,1	34,4	15,3	4,7	34,1	10,8	3,3	29,5
$H$	10,6	4,0	27,3	13,0	4,1	27,9	11,3	3,5	26,5
$DGM$	16,1	5,0	37,0	19,7	6,2	36,8	13,4	3,9	32,0
$HGM$	12,2	4,4	28,1	16,1	5,2	29,0	12,9	4,1	28,3
$DDOM$	20,9	8,2	41,4	26,5	9,0	43,4	17,2	5,9	34,8
$HDOM$	13,5	4,8	28,6	18,7	6,4	30,2	14,1	4,6	29,3
$Vtot$	90,5	5,4	567,1	171,2	7,6	651,3	63,1	0,7	252,3
$Tukki$	40,1	0	478,3	88,6	0	480,9	19,4	0	203,4
$Kuitu$	44,2	1,5	180,7	76,8	2,1	309,3	36,8	0	176,1

rametrien sekä jäännöshajonnan ja puustotunnusten välisten riippuvuuksien tarkastelua ja linearisointia. Lopullisen mallin sovituksessa jäännösvirheen keskijajonta kuvattiin varianssifunktion avulla. Keskimääräiset pituuskäyrän parametrit, linearisoidun mallin jäännöshajonta ja niitä selittävät puustotunnukset puulajeittain on kuvattuna taulukossa 1 vaihteluväleineen.

Metsikköön sovitetuille pituuskäyrän parametreille laadittiin alustavia regressiomalleja metsikön mittauskertakohtaisten puustotunnusten funktiona. Alkuperäinen riippuvuus parametrien ja puustotunnusten, etenkin parametrien  $b_1$  ja dimensioiden  $D$ ,  $DGM$ ,  $DDOM$ ,  $H$ ,  $HGM$  ja  $HDOM$  välillä linearisoitui, kun molemmille tehtiin logaritimuunnos (ks. Siipilehto 2011b, kuva 2). Alustavista parametrien ennustemalleista saatiin lineaarisen sekamallin potentiaalinen rakenne (ja tarvittaessa alkuarvot epälineaarisen sekamallin sovitukseen). Sekamallin ensimmäisessä versiossa oli sekä metsikkö että mittauskerta satunnaisena vakiona ja satunnaisena kertoimena. Mittauskerran kohdalla näiden välinen korrelaatio oli mallin estimoinnin kannalta liian voimakas ( $\approx 1$ ). Ensimmäisen mittauskerran vaikutus poistettiin satunnai-

sesta kertoimesta. Seuraavan vaiheen sovituksessa satunnainen mittauskertakohtainen vakio osoittautui tarpeettomaksi (lähes nolla) ja mallin hyvyttä mitattaava BIC (Bayesian information criterion) parani, kun sekin jätettiin mallista pois. Lopulliset lineaariset sekamallit olivat yleisessä muodossa:

$$y_{ij} = \mathbf{x}_{i0}'\mathbf{b}_0 + b_{0i} + (\mathbf{x}_{i1}'\mathbf{b}_1 + b_{1i})d_{ij} + e_{ij} \quad (11)$$

jossa  $y$  on yhtälön (4) mukainen muunnos,  $\mathbf{x}_{i0}$  on vaihtoehtoisten mallien kiinteän osan selittäjät (esim. mittauskerta- ja metsikkökohtaiset  $N$ ,  $D$  ja  $H$ ) parametrille  $b_0$  ja  $\mathbf{b}_0$  niitä vastaavat kertoimet,  $\mathbf{x}_{i1}$  on vaihtoehtoiset selittäjät parametrille  $b_1$  ja  $\mathbf{b}_1$  on niitä vastaavat kertoimet,  $b_{0i}$  on satunnainen metsikkötason  $i$  vakio ja  $b_{1i}$  satunnainen metsikkötason kerroin ja  $d_{ij}$  on puun  $j$  läpimitta metsikössä  $i$  ja  $e_{ij}$  on puutason jäännösvirhe. Satunnaisvaikutukset oletetaan normaalijakautuneiksi eli  $(b_{0i}, b_{1i}) \sim N(0, \mathbf{D})$ , jossa  $\mathbf{D}$  sisältää satunnaisvaikutusten varianssit ja kovarianssin.

Jos jäännösvirhe on heteroskedastinen, se korjataan varianssifunktion avulla. Usein käytetty vaihtoehto on ns. potenssifunktio, jossa vapaasti esti-



moitava potenssi ( $p$ ) voi kuvata selittävän muuttujan suhteen pienenevää varianssia ( $p < 0$ ) tai kasvavaa varianssia ( $p > 0$ ) (ks. Mehtätalo ym. 2015). Tässä tutkimuksessa yksittäisen metsikön sisällä varianssi oletettiin vakioksi, mutta eri metsiköiden välillä varianssit poikkesivat toisistaan. Siksi varianssifunktio kuvattiin lämpösumman ja puuston keskimääräisen solakkuuden vaikutuksena metsiköiden välisen varianssin vaihtelussa. Varianssi kasvoi lämpösumman pienetessä ja solakkuuden ( $H/D$  tai  $HGM/DGM$ ) pienetessä. Solakkuus pienenee sekä puuston varttuessa että etelästä pohjoiseen, joten voidaan sanoa, että solakkuudessa on mukana kilpailun lisäksi metsikön kehitysvaihe ja maantieteellinen sijainti. Varianssifunktiota käytettäessä perinteisestä jäännöshajontatermistä  $s(e_{ij})$  tulee varianssifunktion skaalausparametri. Tässä tutkimuksessa varianssifunktion selittäjät skaalattiin siten, että keskiarvoksi tuli likimain yksi. Tällaisia selittäjiä olivat  $\ln(H/D+2)$ ,  $\ln(HGM/DGM+2)$  ja  $(1000/DDY)$ . Siten mallin estimoitu varianssifunktion skaalausparametri kuvasi likimain aineiston keskimääräistä puutason jäännöshajontaa ja varianssifunktio korjasi sitä molempiin suuntiin.

Varianssifunktio huomioiden lopullinen  $y$ :n jäännöksen metsikkökohtainen keskihajonta saatiin solakkuudesta  $s_y(H_k, D_k) = s_y \ln(H_k/D_k + 2)^p$ , jossa  $s_y$  on estimoitu varianssifunktion skaalausparametri ja  $p$  on varianssifunktion estimoitu potenssi ja indeksi  $k$  viittaa joko taimikon tai varttuneen puuston keskitunnuksiin. Lämpösummasta laskettaessa se oli  $s_y(DDY) = s_y (1000/DDY)^p$ . Näiden termien avulla ennustettiin metsikkökohtainen keskihajonta muunnoksen  $y$  jäännösvirheelle, joka kaavaa 10 käyttäen voitiin muuttaa puun pituuden keskihajonnaksi (ks. kuva 3). Metsikkökohtaista keskihajontaa tarvittiin myös harhan korjauksen yhteydessä (kaavat 5 ja 9).

Metsiköistä arvioitavat puustotunnukset muuttuvat puuston kehitysvaiheen mukaan. Tiheystunnus on tyypillisesti runkoluku ( $N$ ) nuorissa metsissä ja pohjapinta-ala ( $G$ ) varttuneissa metsissä, kuten esim. SOLMU- ja VMI-kuviotiedoissa (ks. Solmun... 1997, Valtakunnan metsien... 2009). Valtapituus on osoittautunut varsin luotettavaksi lentolaserkeilauksella saatavaksi tunnuksiksi (Næset 2002, Järnstedt 2010, Nord-Larsen ja Riis-Nielsen 2010). Siksi vaihtoehtoisia malleja esitetään myös valtapiuuden funktiona. Pahimmassa tapaukses-

sa metsikön rakenteesta tunnetaan vain leimikon hakkuusopimuksen mukaiset tunnuksot eli tukki- ja kuitupuun tilavuudet puulajeittain. Myös näiden tilavuustunnusten pohjalta laadittiin vaihtoehtoinen pituuden ennuste. Lopulliset mallit estimoitiin sekamallina R-ohjelmiston nlme-kirjaston lineaarisen sekamallin lme-funktiolla.

## 3 Tulokset

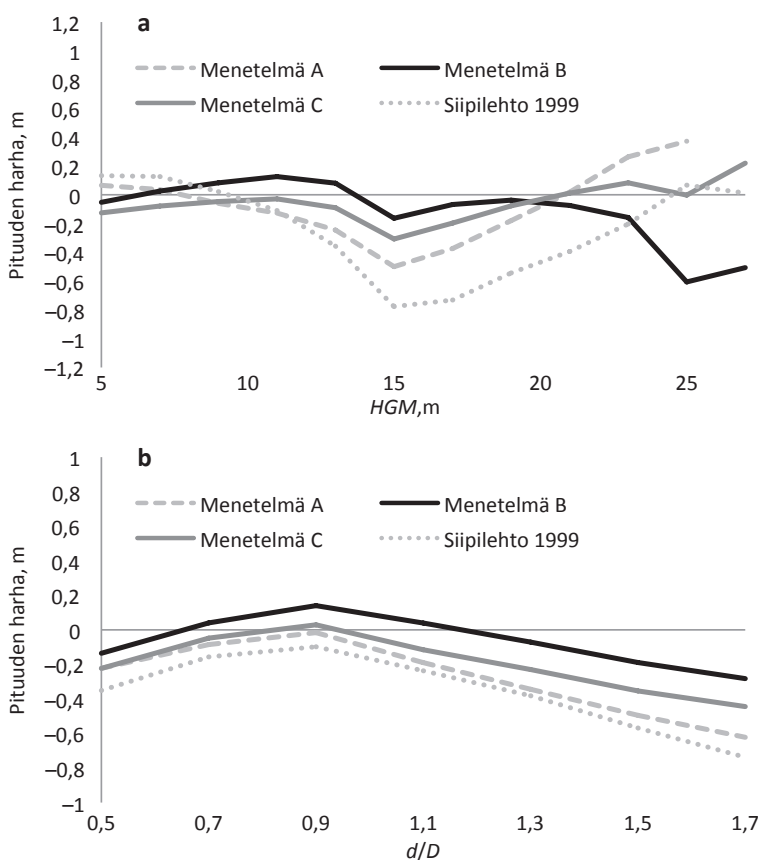
### 3.1 Ennustamismenetelmien vertailua

Pituusmallien estimoimiseksi on käytettävissä erilaisia vaihtoehtoisia lähestymistapoja. Vaihtoehtoisilla menetelmillä A, B ja C estimoitujen mallien luotettavuuksia verrattiin aluksi keskenään. Koska mallien satunnaisosat ja virhetermit menetelmien välillä kuvasivat aivan eri asioita, ne jätettiin taulukosta pois. Vaikka menetelmät erosivat toisistaan, niin silti kiinteän osan estimoidut vakiot ja kertoimet poikkeavat yllättävän paljon toisistaan (taulukko 2). Esimerkiksi menetelmät A ja C ennustavat samoja parametreja logaritmisessa muodossa ja erona on mallin virheen minimointi puustotunnusten (menetelmä A) tai puun pituuden (menetelmä C) mukaan. Menetelmän 1 logaritmuunnoksilla aikaansaatu parametrien ja puustotunnusten välisten riippuvuuk-sien linearisointi paransi parametrien ennustemallia suhteessa Siipilehdon (1999) malliin (kuva 2). Silti samansuuntaiset trendit pituuden harhassa (havaittu – ennuste) oli havaittavissa. Pituus yliarvioitiin yleisesti keskipituuden ollessa 13–20 metriä (kuva 2a). Keskipituuden ylittäessä 23 m puutason mallien harhat poikkesivat selvästi toisistaan siten, että menetelmä 2 selvästi yliarvioi ja menetelmä 3 lievästi aliarvioi pituutta (kuva 2a). Puun suhteellisen koon mukaan harhat olivat toistensa kaltaisia, mutta niissä oli pienet tasoerot (kuva 2b). Molemmat puutason mallit (menetelmät B ja C) olivat parempia kuin pituuskäyrän parametrien ennustemallit (menetelmä A ja Siipilehto 1999).

Molemmat puutason sekamallit antoivat melko hyvän tuloksen, mutta tässä tapauksessa suora pituuden ennuste oli muunnosta parempi vaihtoehto (kuva 2). Linearisoidun mallin etuina oli kuitenkin metsikön sisäinen jäännöshajonnan homoskedasti-

**Taulukko 2.** Männiköiden pituuskäyrän ennusteet parametreille  $b_0$  ja  $b_1$  varttuneiden puustojen keskitunnuksilla *DGM* ja *HGM*. Mallin kiinteä osa menetelmällä A) sovitetun pituuskäyrän parametrien ennustaminen, B) lineaarisen muunnoksen ennustaminen (*lme*) ja C) pituuden ennustaminen epälineaarisesti (*nlme*, *HDnaslund4* funktio, ks. Mehtätalo 2015). Siipilehto (1999) laati mallin suoraan  $b_1$  parametrille ja parametri  $b_0$  ratkaistiin siten, että käyrä kuli pisteen (*DGM*, *HGM*) kautta.

Menetelmä:	A		B		C		Siipilehto (1999)	
	$b_0$	$b_1$	$b_0$	$b_1$	$b_0$	$b_1$	$b_1$	
Vakio	1,559	0,533	1,422	0,449	0,995	0,658	Vakio	0,291
$\ln(DGM)$	0,815	0,130	1,051	0,022	0,656	0,166	<i>DGM</i>	0,00134
$\ln(HGM)$	-1,048	-0,478	-1,277	-0,108	-0,679	-0,596	<i>HGM</i>	-0,00634

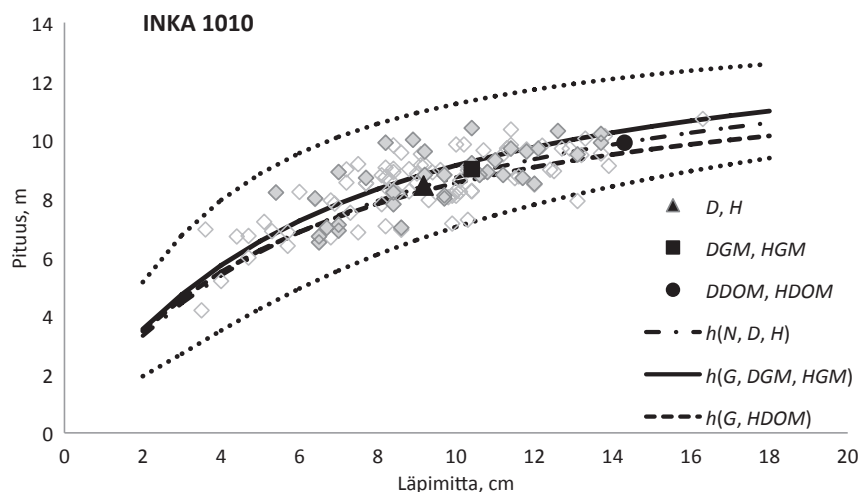


**Kuva 2.** Eri menetelmillä laadittujen mallien pituuden harhat keskipituuden (*HGM*, kuva 2a) ja puun aseman (*d/D*, kuva 2b) suhteen. Menetelmän A parametrien logaritimuunnoksilla  $\ln(b_0)$  ja  $\ln(b_1)$  saatiin selvä parannus Siipilehdon (1999) malliin, jossa  $b_1$  oli suoraan *DGM* ja *HGM* tunnusten lineaarinen funktio ja  $b_0$  ratkaistiin siten, että käyrä kuli pisteen (*DGM*, *HGM*) kautta. Molemmat puutason mallit B ja C olivat parempia kuin pituuskäyrän parametrien ennustemallit. Myös C mallintaa logaritmisia parametreja (Mehtätalo 2015, *HDnaslund4*).

suus ja ennen kaikkea satunnaistermien estimointi voidaan tehdä lineaarisen ennustamisen teorian mukaisesti. Sen sijaan epälineaarisissa mallissa satunnaisparametrien ennustaminen vaatii iteratiivisen ratkaisun (ks. Sirkiä ym. 2015). Siksi lineaarimuunnoksen (yhtälö 4) ennustaminen lineaarisella seka-

mallilla valittiin lopullisten mallien lähtökohdaksi. Lisämuuttujilla ja muunnoksilla pyritään korjaamaan kuvassa 2 havaittua harhaa ja aikaansaamaan aineiston vaihtelualueella mahdollisimman harhaton ennusteet.





**Kuva 3.** Pituuskäyrän ennusteita varttuneen männyn taimikkoon vaihtoehtoisilla puustotunnuksilla:  $h = f(N, D, H)$  (— · —);  $h = f(G, DGM, HGM)$  (—) ja  $h = f(G, HDOM)$  (- - -). Mitatut koepuut (◆) ja lukupuut, joille on generoitu pituus metsikköön sovitteun pituuskäyrän ja jäännösvaihtelun hajonnan avulla (◊). Lisäksi kuvassa on metsikköä kuvaavat puustotunnuksiset ja  $\pm 2 \times s_h$  kuvaamassa 95 % ennustetusta pituuden satunnaisvaihtelusta (····).

### 3.2 Ennustemallit

On hyvin ymmärrettävää, että keskiläpimitta ja keskipituus yhdessä selittävät hyvin pituuskäyrän parametreja, koska keskitunnukset kuvaavat läpimitta–pituus-koordinaatistossa käyrän jyrkkyyttä. Taimikoiden ja nuorten puustojen tunnuksilla ennustettaessa mallin tarkkuus kärsii melko selvästi, kun keskiläpimitta ( $D$ ) ei ole käytettävissä selittävänä muuttujana (taulukko 3). Sen sijaan valtaläpimittaa ( $DDOM$ ) harvoin tunnetaan ja se osoittautui huonoksi selittäväksi muuttujaksi. Harhattomampi malli saatiin valtapituuden ja pohjapinta-alan funktiona (taulukko 5). Laadituissa Näslundin pituuskäyrän sekamalleissa (taulukot 3–7) metsikkötason vakion keskihajonta kasvoi selvästi, kun siirryttiin aritmeettisistä keskitunnuksista painotettuihin keskitunnuksiin ja siitä edelleen valtapituuteen. Tilavuustunnuksilla ennustettaessa metsikkötason vakion hajonta oli odotetusti suurin. Mitä suurempi metsikkötason satunnaisvaikutus on, sitä merkittävämpää on mallin lokalisointi mittaushavaintojen avulla. Liitteessä esitetään esimerkki leimikkotunnuksilla ennustetun pituuskäyrän lokalisoinnista (ks. taulukko 7).

Jäännösvaihtelun keskihajonta kasvoi lämpö-

summan pienessä, mutta kun varianssifunktion selittävä muuttuja muotoiltiin  $1000/ddy$ , tuli estimoidusta potenssista positiivinen (0,77–1,09). Solakkuustermeille estimoitu potenssi oli noin  $-5$  männylle,  $-5,8$  kuuselle ja  $-4,5$  koivulle merkiten voimakasta varianssin pienenemistä solakkuuden kasvaessa (taulukot 4 ja 5). Varianssifunktion estimoidut potenssit muuttuivat melko vähän eri selittäjien välillä, mutta melko paljon puulajien välillä (taulukot 3–7). Puuston kehitysvaihe vaikutti metsikkökohtaisen jäännöshajontaan, mutta se kuvautui osittain solakkuuden kautta.

### 3.3 Mallin havainnollistaminen esimerkkimetsikön avulla

Männyn pituuskäyrän visuaaliseen tarkasteluun valittiin sama INKA–metsikkö (koe 1010, mittauskerta 1, lämpösumma  $1267^\circ\text{Cvrk}$ ) kuin Siipilehdon (2011b, kuva 3) tutkimuksessa. Tähän 24 vuotiaaseen VT männikköön ennustettiin pituuskäyrä vaihtoehtoisilla puustotunnuksilla, joita oli joko ( $N, D, H$ ), ( $G, DGM, HGM$ ) tai ( $G, HDOM$ ). Metsikön koepuista oli maastossa mitattu läpimitta ja pituus.

**Taulukko 3.** Yleiset Näslundin pituuskäyrän sovitukset männylle, kuuselle ja lehtipuustolle (ks. Kangas ja Maltamo 2002). Mallin satunnaistermit olivat metsikkötason  $i$  vakio ( $b_{0i}$ ), metsikkötason kerroin ( $b_{1i}$ ), metsikön mittauskertatason vakio (mitk) ja puutason jäännösvirhe ( $e_{ij}$ ) ja taulukossa on niiden keskihajonnat  $s()$ . Termi  $s(e_{ij})$  on varianssifunktion skaalausparametri ja varianssifunktion mukainen keskihajonta on siten  $s_{yi} = s(e_{ij}) (1000/DDY)^p = 0,244 (1000/DDY)^{1,014}$ .

Parametri $b_0$	Mänty		Kuusi		Koivu	
	$b_0$	$b_1$	$b_0$	$b_1$	$b_0$	$b_1$
Estimaatti	1,181	0,247	1,706	0,327	1,014	0,238
Keskivirhe	0,015	0,002	0,026	0,003	0,044	0,008
$s(b_{0i})$	0,299		0,339		0,296	
$s(b_{1i})$	0,046		0,038		0,059	
$\text{corr}(b_0, b_1)$	-0,232		-0,683		-0,778	
$s(\text{mitk})$	0,184		0,057		0,067	
$s(e_{ij})$	0,244		0,262		0,203	
varianssifunktio (1000/DDY)	1,014		0,779		1,026	

**Taulukko 4.** Pituuskäyrän ennusteet parametreille  $b_0$  ja  $b_1$  nuorten puustojen tunnuksilla keskiläpimitta ( $D$ ) tuntien tai ilman sitä. Kaikki selittävät muuttujat olivat tilastollisesti erittäin merkitseviä. Varianssifunktio laadittiin suhteessa solakkuuteen  $\ln(H/D+2)$ , kun sekä  $D$  että  $H$  tunnettiin ja muulloin lämpösummaan (1000/DDY). Näiden estimoidut potenssit annetaan kahdella viimeisellä rivillä.

Parametri	Mänty		Kuusi		Koivu	
	Estim.	Estim.	Estim.	Estim.	Estim.	Estim.
$b_0$						
Vakio	1,481	5,120	-0,585	6,519	0,824	1,886
$\ln(DDY)$	-0,186	-0,345		-1,045		
$\sqrt{T}$		0,067				
$1/\sqrt{T}$	-2,111	1,397		6,136		
$\ln(T)$				0,557		
$\ln(N)$	-0,126	-0,187		-0,136		-0,110
$\ln(D)$	2,279		1,741		0,837	
$H$		0,031			0,067	0,078
$H^2$				0,00145		
$H/D$	1,744					
$\ln(H-1)$	-2,297	-0,627			-1,117	-0,477
$\ln(H-2)$			-1,036			
$b_1$						
Vakio	0,233	0,348	0,491	0,451	0,470	0,485
$1/\sqrt{T}$	0,287	0,366		0,369		
$\ln(N)$	0,010					
$\ln(D)$	0,041					
$\ln(H-1)$	-0,091	-0,069			-0,106	-0,111
$\ln(H-2)$			-0,070	-0,070		
$s(b_{0i})$	0,153	0,191	0,244	0,307	0,084	0,220
$s(b_{1i})$	0,014	0,016	0,019	0,022	0,013	0,022
$\text{corr}(b_0, b_1)$	-0,908	-0,786	-0,964	-0,898	-0,959	-0,833
$s(e_{ij})$	0,307	0,248	0,309	0,260	0,343	0,205
varianssifunktio $\ln(H/D+2)$ (1000/DDY)	-5,001		-5,831		-4,747	
		0,992		0,800		0,944

**Taulukko 5.** Pituusmallit ja varianssifunktio varttuneiden puustojen puustotunnuksilla ennustettuna.

Parametri	Mänty		Kuusi		Koivu	
	Estim.	Keskivirhe	Estim.	Keskivirhe	Estim.	Keskivirhe
$b_0$						
Vakio	3,394	0,211	3,320	0,536	0,853	0,074
$\ln(DDY)$	-0,296	0,027	-0,365	0,068		
$\ln(G+1)$	-0,253	0,018				
$\ln(DGM)$	0,769	0,061	0,849	0,173	0,525	0,093
$HGM$	0,029	0,004	0,057	0,007	0,058	0,008
$\ln(HGM-1)$	-0,838	0,060	-0,946	0,156	-0,819	0,106
$b_1$						
Vakio	0,431	0,006	0,584	0,012	0,504	0,012
$\ln(G+1)$	0,017	0,001				
$\ln(DGM)$	0,034	0,005	0,047	0,011	0,046	0,010
$\ln(HGM-1)$	-0,136	0,005	-0,147	0,010	-0,161	0,011
$s(b_{0i})$	0,182		0,252		0,080	
$s(b_{1i})$	0,013		0,015		0,0057	
$\text{corr}(b_0, b_1)$	-0,914		-0,956		-0,872	
$s(e_{ij})$	0,275		0,291		0,206	
Varianssifunktio						
$\ln(HGM/DGM+2)$	-5,349		-5,842		-4,476	

**Taulukko 6.** Pituusmallit valtapituuden avulla ennustettuna.

Parametri	Mänty		Kuusi		Koivu	
	Estim.	Keskivirhe	Estim.	Keskivirhe	Estim.	Keskivirhe
$b_0$						
Vakio	7,136	0,321	9,833	0,759	0,206	0,166
$\ln(DDY)$	-0,686	0,045	-1,185	0,106	-0,708	0,128
$\ln(G+1)$	-0,273	0,019				
$HDOM^2$	0,00139	$8,2 \cdot 10^{-5}$	0,00176	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$9,15 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
$\ln(HDOM-1)$	-0,329	0,029	-0,188	0,103		
$\ln(HDOM-4)$					0,098	0,044
$b_1$						
Vakio	0,530	0,0053	0,710	0,013	0,474	0,014
$\ln(G+1)$	0,0136	0,0015				
$\ln(HDOM-1)$	-0,128	0,0024	-0,133	0,0046		
$\ln(HDOM-4)$					-0,104	0,006
$s(b_{0i})$	0,235		0,275		0,177	
$s(b_{1i})$	0,015		0,016		0,018	
$\text{corr}(b_0, b_1)$	-0,765		-0,797		-0,639	
$s(e_{ij})$	0,249		0,259		0,204	
Varianssifunktio						
$(1000/DDY)$	0,994		0,813		1,056	

Lukupuista oli mitattu vain läpimita ja pituus generoitiin metsikköön sovitetun Näslundin käyrän ja metsikkömittauskerta kohtaisen, aineistosta estimoidun hajontatermin avulla. Koepuut ja lukupuut on kuvassa erotettu toisistaan. Koko puujoukosta

lasketut metsikön puustotunnuksot olivat:  $D$  9,2 cm,  $H$  8,4 m,  $DGM$  10,4 cm,  $HGM$  9,0 m,  $DDOM$  14,3 cm,  $HDOM$  9,9 m ja tiheystunnuksot  $N$  2577 ha<sup>-1</sup> ja  $G$  18,4 m<sup>2</sup>ha<sup>-1</sup>.

Metsikön keskitunnuksilla ( $D, H$ ) ja ( $DGM, HGM$ )

**Taulukko 7.** Pituusmallit leimikon tukkilavuuden ja kuitupuutilavuuden avulla ennustettuna. Kaupallinen tilavuus ( $V_{kaup}$ ) on tukki- ja kuitupuutilavuuden summa.

Parametri	Mänty		Kuusi		Koivu	
	Estim.	Keskivirhe	Estim.	Keskivirhe	Estim.	Keskivirhe
$b_0$						
Vakio	3,128	0,065	3,011	0,144	1,400	0,161
( $DDY/1000$ )	-0,537	0,058	-0,963	0,103	-0,666	0,158
$\ln(Tukki+2)$	-0,041	0,005	0,161	0,013		
$\ln(Kuitu+2)$	-0,414	0,010	-0,212	0,026	-0,346	0,101
$\ln(V_{kaup}+2)$					0,409	0,097
$b_1$						
Vakio	0,232	0,003	0,387	0,009	0,343	0,010
$\ln(Tukki+2)$	-0,025	0,0005	-0,021	0,001		
$\ln(Kuitu+2)$	0,023	0,001	0,006	0,002	0,023	0,006
$\ln(V_{kaup}+2)$					-0,054	0,006
$s(b_{0i})$	0,245		0,295		0,209	
$s(b_{1i})$	0,022		0,022		0,025	
$\text{Corr}(b_0, b_1)$	-0,621		-0,790		-0,673	
$s(e_{ij})$	0,257		0,261		0,209	
Varianssifunktio ( $1000/DDY$ )	0,914		0,800		0,790	

ennustetut pituuskäyrät sopivat erinomaisesti havaintoaineistoon (kuva 3). Molemmat käyrät näyttivät kulkevan lähes selittäjänä olleen pisteen kautta. Valtapituudella ennustettu pituuskäyrä puolestaan aliarvioi pituutta tässä metsikössä ja kulki pisteen ( $DDOM$ ,  $HDOM$ ) alapuolelta. (Kuvan ennusteissa on mukana harhankorjaus). Metsikön puiden pituudet pysyivät ennustetun satunnaisvaihtelun rajoissa, joka on kuvattu pisteviivoilla ( $2 \times s_h$  eli 95 %:n rajat). Tässä kuvassa vaihteluväli edusti  $HGM/DGM$  suhteen avulla ennustettua jäännöshajontaa ( $s_y(HGM, DGM) = 0,240$ ). Aritmeettisilla tunnuksilla tai lämpösumman avulla ennustetut vaihteluvälit olisivat olleet melko samanlaiset, koska  $s_y(H, D) = 0,228$  ja  $s_y(DDY) = 0,243$ .

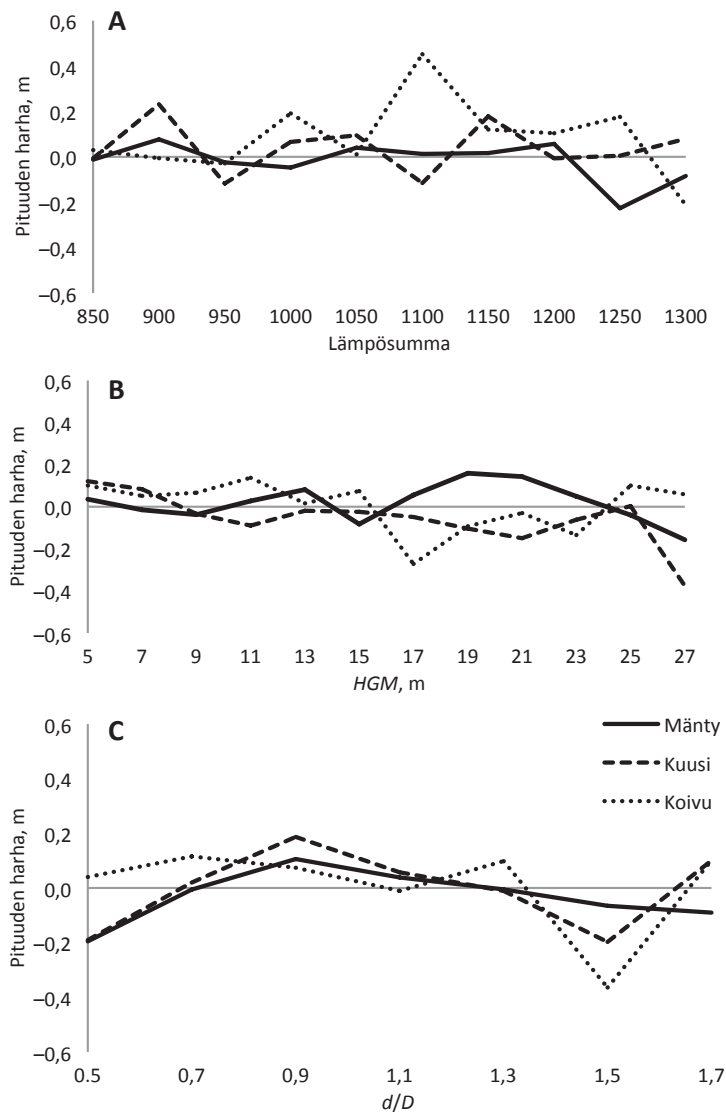
### 3.4 Näslundin pituuskäyrän lokalisointi

Koska ennustemallit laadittiin lineaarisina sekamalleina, ne olivat lokalisoitavissa (kalibroittavissa) yhden tai useamman koepuumittauksen avulla lineaarisen ennustamisen teorian mukaan (esim. Lappi 1991). Tämän tutkimuksen liitteessä on esimerkki, jossa yksi malli lokalisoidaan viiden ensimmäisen koepuumittaushavainnon avulla. Lokalisoin-

nissa käytetään ns. parasta lineaarista harhatonta ennustinta (BLUP) mallin satunnaisparametreille. Liitteen esimerkissä käytettiin epävarmintaa mallia, jossa Näslundin pituuskäyrä ennustettiin puuston tilavuustunnusten avulla ilman yhtään keskitunnusta (metsänhakuusopimuksen mukaiset lähtötiedot, taulukko 7). On selvää, ettei puuston tilavuus anna yksiselitteistä kuvaa puuston rakenteesta. Kuitupuun ja tukkipuun osuudet antoivat osviittaa puuston kehitysvaiheesta, mutta pituuskäyrän ennustetarkkuudessa oli suurta vaihtelua metsiköiden välillä. Esimerkkitapauksessa kiinteän osan ennuste yliarvioi puiden pituuksia selvästi. Esitetyillä lokalisoinnin vaihtoehdoilla, eli 1, 3 tai 5 ensimmäistä mittaushavaintoa, saatiin pituuskäyrää oleellisesti korjattua, vaikka ensimmäinen havainto ei vielä riittänyt korjaamaan pituuskäyrän muotoa (ks. liite 1 ja liitekuva 1).

### 3.5 Mallien testausta

Tarkastellaan lähemmin yleisimmin sovellettavaa mallia, jossa tunnetut puustotunnukset ovat tyypillisiä varttuneen puuston tunnuksia, eli  $G$ ,  $DGM$  ja  $HGM$ . Residuaalikuvat on laskettu mallinnusaineis-



**Kuva 4.** Puun pituuden harhat puulajeittain A: lämpösumman, B: mediaanipituuden ( $HGM$ ) ja C: puun suhteellisen koon ( $d/D$ ) suhteen. Pituuskäyrät ennustettiin varttuneiden puustojen tunnuksilla. Y-akseli on skaalattu puoleen keskimääräisestä 1,2 m hajonnasta.

tosta. Lämpösumman suhteen ei ollut havaittavissa minkäläistä trendiä millään puulajilla (kuva 4 A). Suurimmillaan tavattiin pituuden 31 cm:n aliarvio koivulla lämpösumman ollessa noin 1100 °Cvrk. Pituusmalleissa ei ollut myöskään harhan trendiä keskipituuden suhteen (kuva 4B). Kuvassa 2 havaittua harhaa saatiin korjattua pienillä muutoksilla, kuten lisäämällä  $HGM$  sellaisenaan selittämään parametria  $b_0$  ja toisaalta muunnos  $\ln(HGM - 1)$  oikaisi residuaalia yllättävän paljon verrattuna aluksi kokeiltuun muuttujaan  $\ln(HGM)$ . Silti aivan kook-

kaimmissa kuusikoissa pituuden 38 cm yliarvio oli huomionarvoista. Suhteellinen virhe oli silti vain noin 1,4 %. Havaintoja kyseisessä luokassa oli vain 78, kun niitä tyypillisesti oli yli 300. Puun aseman ( $d/D$ ) suhteen on havaittavissa pituuden yliarviota metsikön pienimmissä puissa ja aliarviota metsikön keskikokoisissa puissa (kuva 4C). Suurimmillaan aliarvio oli männyllä 13 cm, kuusella 8 cm ja koivulla 11 cm. Männyllä kookkaimpien puiden ( $d/D = 1,7$ ) pituus hieman yliarvioitiin, mutta kuusella ja koivulla nämä ennusteet kääntyivät edellisen luo-

kan 27–46 cm yliarvioista lähes harhattomiksi (kuva 4C). Kaiken kaikkiaan mallien harhat olivat pieniä verrattuna virheen keskihajontaan eri luokissa. Esimerkiksi lämpösummaluokissa keskihajonta oli 97–150 cm,  $d/D$ -luokissa keskihajonta oli 88–185 cm ja  $HGM$ -luokissa 52–220 cm. Keskimääräinen virheen keskihajonta oli noin 1,2 m ja harhakuvien  $y$ -akseli skaalattiin puoleen siitä. Mainittakoon, että keskimääräiset harhankorjaukset koko aineistossa olivat männyllä ja kuusella 12 cm ja koivulla 17 cm ja suurimmillaan ne olivat 39, 18 ja 29 cm.

## 4 Tulosten tarkastelua

Näslundin (1936) pituuskäyrä on melko yksinkertainen, koska siinä on vain kaksi estimoitavaa parametria. Kaksiparametrisista pituuskäyrästä se on ollut yksi parhaimmista (ks. Fang ja Bailey 1998, Leduc ja Goelz 2009). Toisinaan se on sopinut eri puulajien aineistoihin jopa paremmin kuin suositut kolmen parametrin funktiot (ks. Mehtätalo ym. 2015). Kun malli estimoitii pituden tai sen muunnoksen virheen minimoimiseksi, niin pituden ennuste oli luotettavampi kuin tapauksissa, joissa minimoitiin etukäteen sovitettujen parametrien ennustevirhettä (Siipilehto 1999, 2011a, 2011b) ilman puiden pituushavaintoja (ks. kuva 2). Tulos on analoginen jakaumaparametrien ennusteiden kanssa. Tyypillisesti jakaumaparametrien ennustemallit laaditaan etukäteen sovitetuille parametreille, mutta Cao (2004) kehitti menetelmän, jossa malli sovitettiin maksimum likelihood -funktion osana suoraan puutason havaintoihin ja mallin luotettavuus samalla parani (ks. Siipilehto 2009). Jos mallitetaan pelkkiä pituuskäyrän parametreja ei estimoiduista virhetermeistä voi tehdä johtopäätöksiä itse puun pituden tarkkuudesta.

Näslundin pituuskäyrää sovelletaan sekä toisen että kolmannen asteen yhtälönä. Kuten Petterson (1955), Vestjordet (1972) ja Siipilehto (1999), myös tässä tutkimuksessa käytettiin kolmannen asteen yhtälöä kuuselle, kun taas männyllä ja koivulla käytettiin Näslundin (1936) alkuperäistä toisen asteen yhtälöä. Kuusi poikkeaa varjoa sietävänä puulajina männystä ja koivusta. Kuusikoille on ominaista laaja läpimitta- ja pituusvaihtelu metsikön sisällä, joten

kolmannen asteen yhtälö loi toisen asteen yhtälöä paremmat edellytykset sigmoidin pituuskäyrän soveltamiseksi ja ennustamiseksi. Kolmannen asteen yhtälöä on käytetty myös Tanskassa varjoa sietävän pyökin pituuskäyrän tasoittamiseksi (Johannsen 2002, Nord-Larsen ja Cao 2006). Fitje ja Vestjordet (1977), Staudhammer ja LeMay (2000) ja Leduc ja Goelz (2009) kokeilivat Näslundin kolmannen asteen yhtälöä yhtenä vaihtoehtona, mutta päätyivät lopulta soveltamaan muita pituusmalleja. Schmidt ym. (2011) käyttivät kolmannen asteen yhtälöä männyllä, kun taas Kinnunen ym. (2007) estimoivat toisen asteen yhtälön kuuselle ja muut puulajit olivat yhteisen pituusmallin dummy-muuttujia. KPL-laskentaohjelmassa Näslundin pituuskäyrän potenssi on parametrisoitu eli sitä voidaan muuttaa, mutta potenssin valintaa ei ole toistaiseksi ohjeistettu ja sen oletusarvo on puulajista riippumatta 2 (Heinonen 1994, s. 31). KPL-laskentaohjelman ohjeita ollaan päivittämässä ja samalla Näslundin yhtälön parametrisointi saa uudet ohjeet (Jaakko Heinonen suullisesti).

Tässä tutkimuksessa laaditut pituusmallit olivat varsin luotettavia johtuen mm. siitä, että puustotunnukset olivat tarkkaan mitatuista puista laskettuja eli aineiston puustotunnuksissa ei ollut tyypillistä arviointi virhettä. Ennusteen luotettavuuden kannalta onkin ensiarvoisen tärkeää, että malliin syötettävät puustotunnukset, kuten keskiläpimita ja keskipituus ovat mahdollisimman tarkkoja. Silmävaraista arviointia tehdään laajemmassa mittakaavassa enää VMI:n yhteydessä, mutta sen tarkkuus vaikuttaa yhä kilpailukykyiseltä kuvatulkintamenetelmiin verrattuna (ks. Uuttera ym. 2002, Haara ja Korhonen 2004, Uuttera ym. 2006). Laseraineistoilla on päästy parhaimmillaan alle 10 % keskivirheeseen metsikkötason keski- ja valtapituudessa tai keskiläpimitassa (Næsset 2002, Suvanto ym. 2005, Uuttera ym. 2006, Packalén ja Maltamo 2007), mutta koealatasolla tulokset eivät ole yhtä hyviä. Esimerkiksi Holopainen ym. (2009) ja Järnstedt (2010) vertasivat korkean resoluution ilmakuvia (0,5 m resoluutio) laserkeilaukseen (1–3 m resoluutio) ja saivat keskiläpimitan ja keskipituden keskivirheiksi 25–34 % ilmakuvilta ja 20–29 % laseraineistolla koealatasolla tarkasteltuna. Edellä mainituista Næsset (2002), Suvanto ym. (2005) ja Uuttera ym. (2006) käyttivät puustotunnusten regressiomallitusta laseraineiston



korkeusjakaumatunnuksista ja muissa sovellettiin laseraineiston aluepohjaista tulkintaa  $k$ - $nn$  menetelmällä. Kaiken kaikkiaan metsätalouden suunnittelujärjestelmissä mallivirheiden (puuston luominen jakaumamallien ja läpimita-pituus riippuvuuden avulla sekä kasvun ennustaminen) osuus on hyvin pieni verrattuna puustotunnusten arviointivirheeseen (ks. Ojansuu ym. 2002, Holopainen ym. 2010).

Laaditut pituuskäyrän ennusteet kulkivat lähes mallien syöttötietona annetun pisteen kautta, oli piste sitten ( $D$ ,  $H$ ) tai ( $DGM$ ,  $HGM$ ). Siten lähtötiedon (mallien selittäjät) ja lopputuloksen (malleilla luodut kuvauspuut) välinen yhteensopivuus vaikuttaa hyvältä. Mallit laadittiin lineaarisina sekamalleina, jotta ne voidaan helposti lokalisoida, eli ennustaa sekamallin satunnaisparametrit koepuumittausten avulla. Alustavan tarkastelun perusteella nyt laadittujen mallien kiinteä osa antaa hyvän tarkkuuden sellaisenaan, joten lokalisoinnille ei ole yleistä tarvetta. Poikkeuksena leimikon tilavuustunnuksilla ennustaminen (taulukko 7), jonka yhteydessä esitettiin esimerkki mallin lokalisoinnista. Samoin lokalisointia tarvitaan, kun tehdään yleinen malli pelkästään puun läpimitan funktiona (taulukko 3), kuten Kangas ja Maltamo (2002). Sekamallit lokalisoituvat varsin tehokkaasti ja yksikin mittaushavainto voi selvästi parantaa ennustetta (esim. Lappi 1991, Eerikäinen ym. 2002, Mehtätalo 2005). Jos havainto poikkeaa huomattavasti mallin odotusarvosta, niin yksi havainto ei riitä korjaamaan ennustetta täysimääräisesti. Otetaan esimerkiksi INKA metsikön 1215 toinen mittauskertta, jossa mediaani  $DGM = 16,0$  cm,  $HGM = 16,7$  m ( $G = 12,5$  m<sup>2</sup>ha<sup>-1</sup>,  $DDY 1086$  °Cv<sub>rk</sub>) ja yleisen mallin (taulukko 3) pituuden odotusarvo 11 m, kun läpimita on 16 cm. Kun malli kalibroitiin mediaanipuun dimensioilla (ks. Kangas ja Maltamo 2002), saatiin mediaaniläpimitaa vastaavaksi pituudeksi 16,0 m. Kun metsikön puustotunnukset syötettiin regressiomalliin (taulukko 5), niin mediaanipuun pituudeksi saatiin 16,7 m, eli tässä tapauksessa sama kuin mitattu  $HGM$ . Toisaalta, jos yksittäinen mittaushavainto on täysin sattumanvarainen, voi ennusteen lokalisoituminen olla melko vaatimatonta, kuten tämän tutkimuksen liitteessä esitettyssä esimerkkitapauksessa. Kun mittaushavaintoja lisättiin kolmeen ja lopulta viiteen, niin lokalisoiu pituuskäyrä sopi aina vaan paremmin metsikön kaikkiin läpimita- ja pituusmittaus-

havaintoihin.

Vaihtoehtoisia läpimita-pituusmalleja Suomessa ovat esittäneet Lappi (1991, 1997), Hökkä (1997), Mehtätalo (2004, 2005) ja Eerikäinen (2009) ja useimmiten näissä on esitetty lokalisointi lineaarisen ennustamisen sovelluksena mitattujen koepuiden avulla. Alustava tarkastelu osoitti, että epälineaarinen funktio puun pituudelle, jossa mallitettiin logaritmisia parametreja (parametri on aina positiivinen) selittäjien lineaarisella funktiolla (ks. Mehtätalo 2015), tarjosi varteenotettavan vaihtoehdon. Jos oltaisiin kiinnostuneita pelkästään mallin kiinteästä osasta, se voisi olla paras vaihtoehto. Epälineaarisen mallin lokalisointi on kuitenkin hankalampaa, mutta se voidaan tehdä iteratiivisesti Taylorin sarjaan perustuen (ks. Sirkiä ym. 2014).

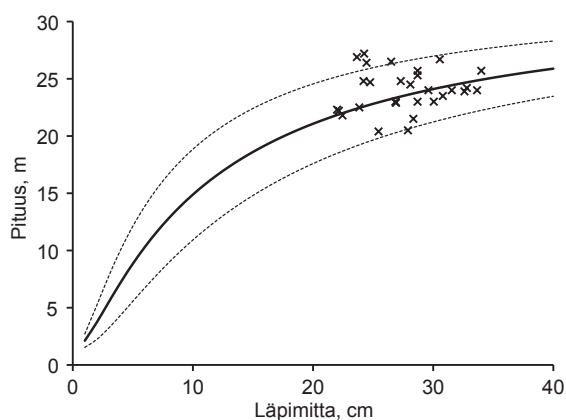
Tässä tutkimuksessa laadituilla vaihtoehtoisilla malleilla tulisi korvata Siipilehdon (1999) Näslundin pituuskäyrän parametreja ennustavat mallit mahdollisissa suunnittelujärjestelmissä tai tutkimusaineistoja malleilla täydennettäessä. Uusilla malleilla voidaan välttää Siipilehdon (2011b) havaitsema pituuden harha, joka johtui sekä Näslundin parametrien ennustamisesta ilman logaritmuunnoksia Siipilehdon (1999) mallilla, että kyseisen mallin soveltamisesta laadinta-aineiston ulkopuolella. Tämä harha oli havaittavissa erityisesti nuorissa metsiköissä sekä varttuneiden metsiköiden vallitun latvuskerroksen aluspuissa (Siipilehto 2011b, kuva 4, s 30). Kuusisto ja Kangas (2008) havaitsi Siipilehdon (1999) kuusen pituusmallin aiheuttavan tilavuustunnusten kasvavaa aliarviota keskipituuden pienessä. Nyt laadittu kuusen pituusmalli oli lähes harhaton keskipituuden suhteen (kuva 4b) ja pienimmissä kuusikoissa ( $HGM 5-7$  m) aliarvio oli vain 1–2 %. Kun pienimmät puustot ennustettiin nuorten puustojen tunnuksilla ( $N$ ,  $D$ ,  $H$ ), niiden tarkkuus edelleen parani (0,3–0,7 %). Taulukoiden 4–7 malliperheestä voidaan valita kulloisenkin käyttäjän lähtötietoihin parhaiten sopiva vaihtoehto.

Pituuskäyrän lisäksi malleilla voitiin ennustaa pituuden metsikkökohtaista keskihajontaa varianssifunktioilla. Aikanaan Siipilehto (2000) esitti yksinkertaiset mallit keskihajonnan ennustamiseksi perustuen solakkuuteen ( $HGM/DGM$ ). Myös tässä tutkimuksessa puuston keskimääräinen solakkuus osoittautui tärkeimmäksi jäännöshajontaa selittäväksi tunnukseksi. Jos keskitunnuksia ei voitu olettaa

tunnetuksi, varianssifunktio kuvattiin lämpösunnan avulla. Jäännösvirheen keskihajonta kasvoi selvästi etelästä pohjoiseen. Esimerkiksi männyllä lineaari-muunnoksen y jäännösvirheen keskihajonnaksi saatiin varianssifunktiolla 0,22, kun lämpösomma oli  $1200^{\circ}\text{Cvrk}$  ja 0,27, kun lämpösomma oli  $800^{\circ}\text{Cvrk}$ . Toisaalta, jos katsotaan puuston solakkuutta mediaaniläpimitan *DGM* ollessa 20 cm ja pituuden *HGM* vaihdellessa 12 m:stä 24 m:iin, niin näitä vastaavat keskihajonnat männyllä olivat varianssifunktion mukaan 0,31 ja 0,18.

Harhankorjauksen lisäksi hajontatieto on oleellinen silloin, kun halutaan generoida satunnaista vaihtelua pituuden odotusarvon ympärille eli läpimitan suhteen ehdollista pituusvaihtelua. Pituuden satunnaistamisella voidaan saavuttaa joitakin selkeitä hyötyjä. Satunnaistamisen avulla pituuden reunajakauma vastaa hyvin luonnossa havaittavaa pituuden reunajakaumaa, kun taas pituuden odotusarvo supistaa sitä voimakkaasti (Siipilehto 2000). Siipilehto (2001) osoitti, että näin käy etenkin vanhoissa männiköissä, joissa läpimittaluokan sisäinen pituusvaihtelu on selvästi suurempaa kuin läpimittaluokkien välinen pituusvaihtelu (ks. kuva 5). Läpimittaluokan sisäisestä pituusvaihtelusta voi olla hyötyä myös harvennusten generoimisessa, koska esimerkiksi alaharvennus perustuu paremminkin puiden pituuksien välisiin suhteisiin kuin puun läpimittaan (Hafley ja Buford 1985). Myöskin realistisen testiaineiston luomiseksi satunnaistettua pituutta on pidetty parempana vaihtoehtona kuin pituuden odotusarvo (Siipilehto 2011a, 2011b). Metsikön kokonaistilavuuteen ja puutavaralajien tilavuustunnuksiin sillä ei sen sijaan ole juuri merkitystä (Siipilehto 2000).

Näslundin pituuskäyrä on suosittu koepuiden pituuden tasoittamiseksi ja yleistämiseksi puulle, joiden pituutta ei tunneta. Toisaalta Näslundin pituusmallia on käytetty apumallina esimerkiksi tilavuuden arvioimiseksi, eikä pituusmallin hyvyttä ole näissä tutkimuksissa erikseen tarkasteltu (esim. Siipilehto 1999, Kangas ja Maltamo 2002, Kinnunen ym. 2007, Vastaranta ym. 2010, Siipilehto 2011a). Siten Näslundin pituuskäyrän ennustamisesta ja ennusteen tarkkuudesta on toistaiseksi melko vähän käytännön esimerkkejä. Nyt laaditut mallit eivät olleet täysin harhattomia, mutta tyypillisillä puus-



**Kuva 5.** Esimerkki läpimitta-pituus -riippuvuudesta vanhassa männikössä ( $T = 70$ ,  $DGM = 27$  cm). Läpimittahavaintojen (x) vaihtelualueella männyn ennustettu pituus (—) vaihteli välillä 22,5–26 m. Ennustettu satunnaisvaihtelu (---) lisäsi vaihteluvälin 19–28,5 metriin eli lähelle havaittua vaihtelua. Kuvassa vaihteluväli on pituuden odotusarvo  $\pm 2 \times s_h$  eli se edustaa 95 % satunnaisvaihtelusta.

totunnuksilla saatiin hyviä tuloksia. Tämä tarkoittaa mm. sitä, että  $N$ ,  $D$  ja  $H$  olivat hyviä selittäjiä nuorille puustoille, kun taas  $G$ ,  $DGM$  ja  $HGM$  toimivat hyvin varttuneille puustoille. Myös valtapituuden ja lämpösunnan (männyllä myös pohjapinta-alan) funktiona pituuskäyrä saatiin kohtalaisen luotettavasti. Viimeksi mainittuja malleja voitaneen tulevaisuudessa soveltaa laseraineiston yhteydessä, koska valtapituus saadaan luotettavasti laserpisteiden korkeusjakaumasta (Næsset 2002, Nord-Larsen ja Riis-Nielsen 2010). Toistaiseksi suomalaiset sovellukset valtapituuden ennustamiseksi laseraineistosta puuttuvat. Heikoimmillaan metsikön kuvaus voi sisältää vain puulajeittaiset puutavaralajien tilavuudet eli metsänhakuusopimuksen mukaiset tunnuksat. Tällaisessa tilanteessa on aika mahdotonta saada luotettavaa puuston rakenteen kuvausta. Siksi tähän tilanteeseen sopiva sovellus olisi hakkuukoneen korjuaikainen mallien kalibrointi. Tällaista tapausta simuloitiin liitteessä ja mallin lokalisointi esim. viiden ensimmäisen puun jälkeen tuotti varsin luotettavan pituuden ennusteen.

## Kirjallisuus

- Arabatzis, A.A. & Burkhart, H.E. 1992. An evaluation of sampling methods and model forms for estimating height-diameter relationships in loblolly pine plantations. *Forest Science* 38: 192–198.
- Cao, Q.V. 2004. Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. *Forest Science* 50(5): 682–685.
- Curtis, R.O. 1967. Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-fir. *Forest Science* 13(4):265–357.
- Eerikäinen, K. 2009. A multivariate linear mixed-effects model for the generalization of sample tree heights and crown ratios in the Finnish National Forest Inventory. *Forest Science* 55(6): 480–493.
- & Korhonen, K.T. 2001. Puutunnusmallit. Julkaisussa: Maltamo, M. & Laukkanen, J. (toim.). *Metsää kuvaavat mallit*. *Silva Carelica* 36. Joensuun yliopisto 239 s.
- , Mabvurira, D., Nshubemuki, L., Saramäki, J. 2002. A calibrateable site index model for *Pinus kesiya* plantation in southeastern Africa. *Canadian Journal of Forest Research* 32: 1916–1928.
- Elfving, B. & Kiviste, A. 1997. Constructing of site index equations for *Pinus sylvestris* L. Using permanent plot data in Sweden. *Forest Ecology and Management* 98: 125–134.
- Fahlvik, N., Elfving, B. & Wikström, P. 2014. Evaluation of growth models used in the Swedish forest planning system Heureka. *Silva Fennica* 48(2). 17 s. Article id 1013.
- Fang, Z. & Bailey, R.L. 1998. Height-diameter models for tropical forests on Hainan Island in southern China. *Forest Ecology and Management* 110(1–3): 315–327.
- Fitje, A. & Vestjordet, E. 1977. Bestandshøydekurver og nya høydeklasser for gran. *Meddelelser fra Norsk Institutt for Skogforskning* 34(2). 68 s.
- Gómez-García, E., Diéguez-Aranda, U., Castedo-Dorado F. & Crecente-Campo, F. 2014. A comparison of model forms for the development of height-diameter relationships in even-aged stands. *Forest Science* 60(3): 560–568.
- Gustavsen, H.G., Roiko-Jokela, P. & Varmola, M. 1988. Kivennäismaiden talousmetsien pysyvät (INKA ja TINKA) kokeet. Suunnitelmat, mittausmenetelmät ja aineistojen rakenteet. *Metsäntutkimuslaitoksen tiedonantoja* 292. 212 s.
- Haara, A. & Korhonen, K.T. 2004. Kuvioittaisen arvioinnin luotettavuus. *Metsätieteen aikakauskirja* 4/2004: 489–508.
- Hafley, W.L. & Buford, M.A. 1985. A bivariate model for growth and yield prediction. *Forest Science* 31(1): 237–247.
- Heinonen, J. 1994. Koealojen puu- ja puustotunnusten laskentaohjelma KPL. Käyttöohje. *Metsäntutkimuslaitoksen tiedonantoja* 504. 80 s.
- Holopainen, M., Tuominen, S., Karjalainen, M., Hyyppä, J., Vastaranta, M., Hujala, T. & Tokola, T. 2009. Korkearesoluutioisten E-SAR-tutkakuvien tarkkuus puustotunnusten koealatasen estimoinnissa. *Metsätieteen aikakauskirja* 4/2009: 309–323.
- , Vastaranta, M., Rasinmäki, J., Kalliovirta, J., Mäkinen, A., Haapanen, R., Melkas, T., Yu, X. & Hyyppä, J. 2010. Uncertainty in timber assortment estimates predicted from forest inventory data. *European Journal of Forest Research* 129: 1131–1142.
- Hökkä, H. 1997. Height-diameter curves with random intercepts and slopes for trees growing on drained peatlands. *Forest Ecology and Management* 97: 63–72.
- Johannsen, V.K. 2002. Selection of diameter-height curves for even-aged oak stands in Denmark, Dynamic growth models for Danish forest tree species, Working paper 16, Danish Forest and Landscape Research Institute.
- Järnstedt, J. 2010. Erittäin korkean resoluution ilmakuviasta tuotettu pintamalli puustotunnusten estimoinnissa. *Metsänarvioimistieteen ja -teknologian pro gradu -tutkinto*. Helsingin yliopisto. 52 s.
- Kangas, A. & Maltamo, M. 2002. Anticipating the variance of predicted stand volume and timber assortments with respect to stand characteristics and field measurements. *Silva Fennica* 36(4): 799–811.
- , Mäkinen, H. & Lyhykäinen, H.T. 2010. Value of quality information of Scots pine stands in timber bidding. *Canadian Journal of Forest Research* 40: 1781–1790.
- , Hurttala, H., Mäkinen, H. & Lappi, J. 2012. Estimating the value of wood quality information in constrained optimization. *Canadian Journal of Forest Research* 42: 1347–1358.
- Kinnunen, J., Maltamo, M & Päivinen, R. 2007. Standing volume estimates of forests in Russia: how accurate is the published data? *Forestry* 80(1): 53–64.
- Kuusela, K. & Salminen, S. 1969. The 5th National Forest Inventory in Finland. General design, instruction for field work and data processing. *Metsäntutkimuslaitoksen Julkaisuja* 69(4).

- Kuusisto, L. & Kangas, A. 2008. Harhakomponentit kuivoittaisen arvioinnin puuston tilavuuden laskentaketjussa. *Metsätieteen aikakauskirja* 3/2008: 177–190.
- Lappi, J. 1991. Calibration of height and volume equations with random parameters. *Forest Science* 37(3): 781–801.
- 1993. Metsäbiometrian menetelmiä. *Silva Carelia* 24. Joensuun yliopisto. 182 s.
- 1997. A longitudinal analysis of height/diameter curves. *Forest Science* 43(4): 555–570.
- Leduc, D. & Goelz, J. 2009. A height-diameter curve for loblolly pine plantations in the Gulf Coastal Plain. *Southern journal of Applied Forestry* 33(4): 164–170.
- Maltamo, M., Eerikäinen, K., Packalén, P. & Hyypä, J. 2006. Estimation of stem volume using laser scanning-based canopy height metrics *Forestry* 79(2): 217–229.
- Mehtätalo, L. 2004. A longitudinal height-diameter model for Norway spruce in Finland. *Canadian Journal of Forest Research* 34: 131–140.
- 2005. Height-Diameter (H-D) models for Scots pine and birch in Finland. *Silva Fennica* 39(1): 55–66.
- 2015. Package lmfor. Saatavilla: <https://cran.r-project.org/web/packages/lmfor/lmfor.pdf>.
- , de-Miguel, S. & Gregoire, T.G. 2015. Modeling height-diameter curves for prediction. *Canadian Journal of Forest Research* 45(7): 826–837.
- Mielikäinen, K. 1980. Structure and development of mixed pine and birch stands. *Communicationes Instituti Forestalis Fenniae* 99(3). 82 s.
- 1985. Effect of an admixture of birch on the structure and development of Norway spruce stands. *Communicationes Instituti Forestalis Fenniae* 133. 73 s.
- Muinenen E., Anttila P., Heinonen J. & Mustonen J. 2013. Estimating the bioenergy potential of forest chips from final fellings in Central Finland based on biomass maps and spatially explicit constraints. *Silva Fennica* 47(4), article id 1022. 22 s.
- Mustonen, J., Packalén, P. & Kangas, A. 2008. Automatic segmentation of forest stands using a canopy height model and aerial photography. *Scandinavian Journal of Forest Research* 23: 534–545.
- Næsset, E., 2002. Predicting forest stand characteristics with airborne scanning laser using a practical two-stage procedure and field data. *Remote Sensing of Environment* 80: 88–99.
- Newton, P.F. & Amponsah, I.G. 2007. Comparative evaluation of five height-diameter models developed for black spruce and jack pine stand-types on terms of goodness-of-fit, lack-of-fit and predictive ability. *Forest Ecology and Management* 247: 149–166.
- Nord-Larsen, T. & Cao, Q.V. 2006. A diameter distribution model for even-aged beech in Denmark. *Forest Ecology and Management* 231(1–3): 218–225.
- & Riis-Nielsen, T. 2010. Developing an airborne laser scanning dominant height model from a countrywide scanning survey an national forest inventory data. *Scandinavian Journal of Forest Research* 25: 262–272.
- Näslund, M. 1936. Skogsförsöksanstaltens gallringsförsök i tallskog. *Meddelanden från Statens Skogsförsöksanstalt* 29. 169 s.
- Ojansuu, R., Halinen, M. & Härkönen, K. 2002. Metsätalouden suunnittelujärjestelmän virhelähteet männyn ensiharvennuskypsyuden määrittämisessä. *Metsätieteen aikakauskirja* 3/2002: 441–457.
- Packalén, P. & Maltamo, M. 2007. The k-MSN method for the prediction of species-specific stand attributes using airborne laser scanning and aerial photographs. *Remote sensing of Environment* 109(3): 328–341.
- Petterson, H. 1955. Barrskogens volymproduktion. *Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut* 45(1). 399 s.
- Prodan, M. 1965. *Holzmesslehre*. J.D. Sauerländers Verlag, Frankfurt Am Main. 644 s.
- Schmidt, M., Kiviste, A. & von Gadow, K. 2011. A spatially explicit height-diameter model for Scots pine in Estonia. *European Journal of Forest Research* 130: 303–315. doi10.1007/s10342-010-0434-8.
- Siipilehto, J. 1999. Improving the accuracy of predicted basal-area diameter distribution in advanced stands by determining stem number. *Silva Fennica* 33(4): 281–301.
- 2000. A comparison of two parameter prediction methods for stand structure in Finland. *Silva Fennica* 34(4): 331–349.
- 2001. Improving the accuracy of predicted diameter and height distributions. *Julkaisussa: LeMay, V. & Marshall, P. (toim.). Forest modelling for ecosystem management, forest certification, and sustainable management. Proceedings of the conference held in Vancouver, BC, Canada, August 12 to 17, 2001.* s. 385–391.
- 2009. Modelling stand structure in young Scots pine dominated stands. *Forest Ecology and Management* 257: 223–232.
- 2011a. Local prediction of stand structure using linear prediction theory in Scots pine-dominated stands in

- Finland. *Silva Fennica* 45(4): 669–692.
- 2011b. Methods and applications for improving parameter prediction models for stand structures in Finland. *Dissertationes Forestales* 124. <http://www.metla.fi/dissertationes/df124.htm>
- & Huttunen, T. 2015. Metsikön todellisen iän määrittäminen rinnankorkeusiästä suomalaisissa talousmetsissä. Ikälisäysmalli INKA-aineiston kairauksista. *Metsätieteen aikakauskirja* 2/2015: 87–104.
- , Valkonen, S., Ojansuu, R., Hynynen J., Miina J. & Saksa, T. 2014. Metsikön varhaiskehityksen kuvaus MOTTI-ohjelmistossa. *Metlan Työraportti* 286. 43 s. Saatavissa: <http://www.metla.fi/julkaisut/workingpapers/2014/mwp286.htm>
- Sirkkiä, S., Heinonen, J., Miina, J. & Eerikäinen, K. 2015. Subject-specific prediction using a nonlinear mixed model: consequences of different approaches. *Forest Science* 61(2): 205–212.
- Solmun maastotyöopas. 1997. Metsätalouden kehittämisskeskus Tapio. 82 s
- Staudhammer, C. & LeMay, V. 2000. Height prediction equations using diameter and stand density measures. *Forestry Chronicle* 76(2): 303–309.
- Suvanto, A., Maltamo, M., Packalén, P. & Kangas, J. 2005. Kuviokohtaisten puustotunnusten ennustaminen laserkeilauksella. *Metsätieteen aikakauskirja* 4/2005: 413–428.
- Utterä, J., Anttila P., Suvanto A. & Maltamo M. 2002. Uudet kuvioittaisen arvioinnin menetelmät – Arvio soveltuvuudesta yksityismaiden metsäsuunnitteluun. (Tieteen tori). *Metsätieteen aikakauskirja* 3/2002: 523–531.
- , Anttila P., Suvanto A. & Maltamo M. 2006. Yksityismetsien metsävaratiedon keruuseen soveltuvilla kaukokartoitusmenetelmillä estimoitujen puustotunnusten luotettavuus. *Metsätieteen aikakauskirja* 4/2006: 507–519.
- Temesgen, H. & Gadaw, K.von. 2004. Generalized height-diameter models – an application for major tree species in complex stands of interior British Columbia. *European Journal of Forest Research* 123: 45–51. doi 10.1007/s10342-004-0020-z.
- Valtakunnan metsien 11. inventointi (VMI11). Maastotyön ohjeet 2009. Metsäntutkimuslaitos. Saatavilla: <http://www.metla.fi/ohjelma/vmi/vmi11-maasto-ohje09-2p.pdf>.
- Vastaranta, M., Ojansuu, R. & Holopainen, M. 2010. Puustotunnusten laskennallisen ajantasaistuksen luotettavuus – tapaustutkimus Pohjois-Savossa. *Metsätieteen aikakauskirja* 4/2010: 367–381.
- Veltheim, T. 1987. Puumallit männylle, kuuselle ja koivulle. Helsingin yliopisto. 60 s.
- Vestjordet, E. 1972. Diameterfordelinger og høydekurver for ensal- drede granbestand. *Meddelelser fra det Norske Skogforsøksvesen* 29: 482–557.
- Yuancai, L. & Parresol, B.R. 2001. Remarks on height-diameter modelling. USDA Forest Service. Southern Research Station. Research Note SRS-10. 5 s.
- Zhang, L. 1997. Cross-validation of non-linear growth functions for modelling tree height-diameter relationships. *Annals of Botany* 79: 251–257.

## 70 viitettä

## Liite

Esimerkissä esitetään pituuden sekamallin lokalisointi (kalibrointi) lineaarisen ennustamisen teoriaan perustuen. Aineistoon sovitettu malli Näslundin pituuskäyrän parametreille oli muotoa:

$$y_{ij} = \mathbf{x}_{i0}'\mathbf{b}_0 + b_{0i} + (\mathbf{x}_{i1}'\mathbf{b}_1 + b_{1i})d_{ij} + e_{ij}$$

jossa  $\mathbf{x}_{i0}$  ja  $\mathbf{x}_{i1}$  kuvaavat mallin kiinteän osan selittäjiä parametreille  $b_0$  ja  $b_1$  ja  $\mathbf{b}_0$  ja  $\mathbf{b}_1$  ovat niitä vastaavat kertoimet,  $b_{0i}$  ja  $b_{1i}$  ovat satunnainen metsikkö vakio ja satunnainen metsikkökerroin. Pituus ennustetaan uudistuskypsän männikön (INKA metsikkö 1194) tilavuustunnuksilla. Mallissa tarvittavat tunnuksot olivat lämpösumma (*DDY*) 1176 °Cvrk, tukkipuun ja kuitupuun tilavuudet olivat (*Tukki*) 243 m<sup>3</sup>ha<sup>-1</sup> (*Kuitu*) 39 m<sup>3</sup>ha<sup>-1</sup> (ks. taulukko 7). Näillä tunnuksilla ennusteet ja varianssifunktion mukainen jäännösvarianssi männylle olivat:

$$b_0 = 3,128 - 0,537(DDY/1000) - 0,041\ln(Tukki+2) - 0,414\ln(Kuitu+2) = 0,733$$

$$b_1 = 0,232 - 0,025\ln(Tukki+2) + 0,023\ln(Kuitu+2) = 0,180$$

$$s(e)^2 = 0,257^2(1000/DDY)^{0,914} = 0,057$$

Mallin satunnaisparametrien estimoidut keskihajonnat ja korrelaatiokerroin olivat:

$$s(b_{0i}) = 0,245, s(b_{1i}) = 0,0220 \text{ ja } \text{corr}(b_{0i}, b_{1i}) = -0,621.$$

Metsikön lokalisointiin käytetyt viisi koepuuta olivat:

Puut	1	2	3	4	5
Läpimitta, cm	19,4	21,1	24,0	23,8	24,4
Pituus, m	20,7	20,1	20,3	19,2	20,8

Ennustevirheet ( $\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}$ ) lasketaan muunnoksen  $y$  ennusteesta ja mitatuista puista  $d_j, h_j$ :

$$\hat{y}_j = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 d_j \quad \text{ja} \quad y_j = \frac{d_j}{\sqrt{(h_j - 1,3)}}$$

missä  $j$  = puut 1,...,5.

Sekamalli voidaan esittää yleisessä muodossa:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \mathbf{e}$$

Missä  $\mathbf{y}$  on havaintovektori,  $\mathbf{X}$  on matriisi selittävästä muuttujista,  $\mathbf{Z}$  on mallimatriisi,  $\mathbf{a}$  on kiinteiden parametrien vektori,  $\mathbf{b}$  on tuntemattomien satunnaisparametrien vektori ja  $\mathbf{e}$  on jäännösvirhe. Jos  $\text{var}(\mathbf{b}) = \mathbf{D}$  ja  $\text{var}(\mathbf{e}) = \mathbf{R}$ , niin  $\mathbf{y}$ :n varianssikovarianssimatriisi voidaan esittää:

$$\text{var}(\mathbf{y}) = \mathbf{Z}\mathbf{D}\mathbf{Z}' + \mathbf{R}$$



Tuntemattomat satunnaisparametrit saadaan BLUP estimaatista (esim. Lappi 1991, Kangas ja Maltamo 2002):

$$\mathbf{b} = [\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{D}^{-1}]^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a})$$

Missä  $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a})$  on vektori havaittujen ja ennustettujen  $y$  arvojen eroista. Kirjoitetaan edellä esitetyt matriisit kolmen mittaushavainnon esimerkille. Mallimatriisi  $\mathbf{Z}$  satunnaiselle vakiolle ja satunnaiselle kertoimelle on:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & d_2 \\ 1 & d_3 \end{pmatrix} \text{ ja sen transpoosi, johon } d\text{:n arvot on sijoitettu } \mathbf{Z}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 19,4 & 21,1 & 24,0 \end{pmatrix}$$

Ennustevirheiden vektoriksi saatiin:

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0,181 \\ 0,337 \\ 0,455 \end{pmatrix}$$

Varianssit saadaan satunnaisparametrien estimoidun keskihajonnan neliönä, esim.  $\text{var}(b_{0i}) = s(b_{0i})^2$  ja kovarianssi saadaan estimoidusta korrelaatiokertoimesta  $\text{cov}(b_{0i}, b_{1i}) = \text{corr}(b_{0i}, b_{1i}) \times s(b_{0i}) \times s(b_{1i})$ . Siten estimoitu varianssi-kovarianssimatriisi satunnaisparametreille on  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0,060 & -0,00335 \\ -0,00335 & 0,000484 \end{pmatrix} \text{ ja sen kääntematriisi on } \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 27,12 & 187,53 \\ 187,53 & 3363 \end{pmatrix}$$

Jäännösvirheen varianssi on diagonaalinen ( $\text{var}(\mathbf{e}) = \mathbf{R}_{n \times n}$ ) eli  $0,055 \mathbf{R}_{3 \times 3}$ . Sen kääntematriisi saadaan varianssin  $0,055$  käänteisluvusta, joka on  $18,18$ . Kun näistä elementeistä kirjoitetaan yhtälö  $\mathbf{b} = [\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{D}^{-1}]^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a})$ , saadaan metsikön satunnaisparametrit  $b_{0i}$  ja  $b_{1i}$  matriisista  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 19,4 \\ 1 & 21,1 \\ 1 & 24,0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0,057 & 0 & 0 \\ 0 & 0,057 & 0 \\ 0 & 0 & 0,057 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 19,4 \\ 1 & 21,1 \\ 1 & 24,0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,060 & -0,00335 \\ -0,00335 & 0,000484 \end{pmatrix}^{-1} \right]^{-1} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 19,4 \\ 1 & 21,1 \\ 1 & 24,0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0,057 & 0 & 0 \\ 0 & 0,057 & 0 \\ 0 & 0 & 0,057 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,181 \\ 0,337 \\ 0,455 \end{pmatrix}$$

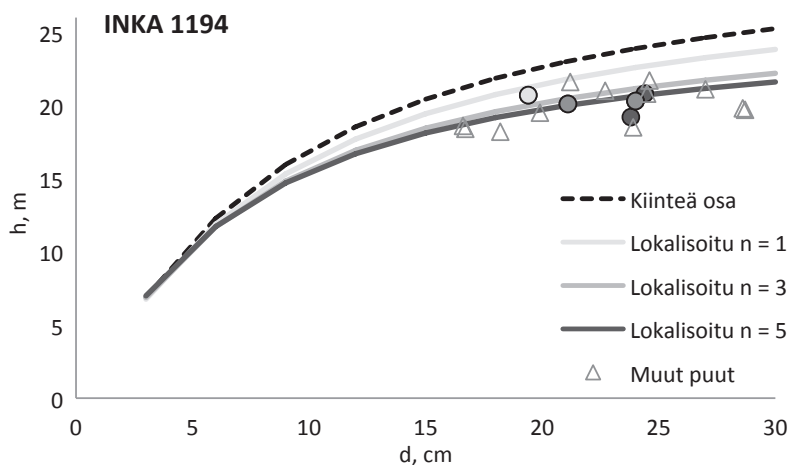
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0,047 \\ 0,016 \end{pmatrix}$$

Ennustetut satunnaisparametrit sijoitetaan yhtälöön, joka on lokalisoidussa muodossa metsikölle  $i$  ja puulle  $j$ :

$$y_{ij} = b_0 + b_{0i} + b_1 d_{ij} + b_{1i} d_{ij} = 0,733 - 0,047 + 0,180 d_{ij} + 0,016 d_{ij} = 0,686 + 0,196 d_{ij}$$

ja puun pituus vastaavasti

$$h_{ij} = (d_{ij} / y_{ij})^2 + 1,3.$$



**Liitekuva I.** Metsikön tilavuustunnuksilla ennustettu pituuskäyrä mallin kiinteän osan mukaan ja ensimmäisellä, kolmella ja viidellä mittaushavainnolla lokalisoituna. Puut tulivat mukaan mittauserjestyksessä vaaleimmasta tummimpaan ympyrään. Metsikön muut mitatut koeput on esitetty kolmioilla.