



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사 학위논문

큰 종횡비 및 곡률 질점 분포에서의
무격자 공간 차분 해석 기법 개선

Improved Meshless Method in Point Cloud with
High Aspect Ratio and Curvature

2022 년 2 월

서울대학교 대학원

항공우주공학과

오 준 석

큰 종횡비 및 곡률 질점 분포에서의
무격자 공간 차분 해석 기법 개선

Improved Meshless Method in Point Cloud with
High Aspect Ratio and Curvature

지도 교수 김 규 흥

이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함
2022 년 2 월

서울대학교 대학원
항공우주공학과
오 준 석

오준석의 공학석사 학위논문을 인준함
2022 년 2 월

위 원 장 _____ (인)

부위원장 _____ (인)

위 원 _____ (인)

초 록

본 연구에서는 기존 무격자 공간 차분 해석 기법이 큰 종횡비 및 곡률을 가지는 질점 분포에서의 유동 해석에서 곡률 방향 유동 가속 등의 형태로 나타나는 비물리적이고 부정확한 결과를 보이는 문제점을 해결하기 위해 원인 분석 및 개선 기법 개발을 수행하였다.

기존 기하학적 보존 무격자 기법(GC-LSM)과 비정렬 유한 체적법이 공유하는 특성으로부터 착안하여 라그랑주 승수법을 이용해 최소제곱 과정에서 문제가 발생하는 질점 연결성에 대한 방향 제약조건을 가하는 정렬 기하학적 보존 무격자 기법(AGC-LSM)을 개발하였으며 제안 기법은 다차원 임의의 질점 분포 및 연결성 구조에 효과적으로 적용될 수 있다.

해당 구조를 가지는 격자 및 질점에서 제안 기법과 기존 기법, 그리고 비정렬 유한체적법(Unstructured FVM)의 수치 결과 비교 검증을 수행하였고 제안 기법의 정확도가 기존 기법 대비 크게 향상되었으며 비정렬 유한체적법 결과를 충분히 동일하게 모사하는 것을 확인하였다.

큰 종횡비 및 곡률 질점 분포가 필연적으로 발생하는 일반적인 정상상태 난류 유동 해석에서 본 제안 기법을 적용하여 무격자 기법의 정확한 난류 경계층 해석 능력을 확보하였다.

주요어 : 전산유체역학, 무격자 기법, 비정렬 유한체적법, 최소제곱법, 라그랑주 승수법, 종횡비, 곡률, 압축성 유동, 난류 유동

학 번 : 2020-23740

목 차

제 1 장 서론.....	1
제 1 절 연구의 배경	1
제 2 절 연구의 필요성.....	3
제 3 절 개선기법 기준.....	4
제 2 장 수치기법.....	5
제 1 절 지배방정식.....	5
제 2 절 최소제곱법 기반 무격자 공간 차분.....	6
제 3 절 무격자 기법과 유한체적법의 상사	12
제 4 절 정렬 무격자 기법.....	14
제 5 절 그 외 수치기법.....	25
제 3 장 수치결과.....	31
제 1 절 비교군 상제	31
제 2 절 2D Cylinder.....	31
제 3 절 2D Shock Tube	37
제 4 절 2D RAE2822 Airfoil.....	44
제 5 절 3D ONERA M6 Wing	50
제 4 장 결 론.....	60
참고 문헌.....	61
Abstract.....	63

표 목차

[표 1] L2 norm error of flow variables for $N_x = 50$	42
[표 2] L2 norm error of flow variables for $N_x = 100$	42
[표 3] L2 norm error of flow variables for $N_x = 200$	43

그림 목차

[그림 1] High aspect ratio and curvature mesh.....	2
[그림 2] Gradient reconstruction.....	6
[그림 3] Local point cloud.....	7
[그림 4] Fictitious interface between two points	11
[그림 5] Meshless virtual control volume.....	14
[그림 6] Schematic of virtual volume in problematic circumstance	15
[그림 7] Virtual volume on airfoil	15
[그림 8] Meshless interface.....	15
[그림 9] Virtual control volume shape correction	16
[그림 10] Aligned with geometric vector.....	17
[그림 11] Aligned connectivity selection.....	21
[그림 12] Geometric characteristic of point cloud.....	21
[그림 13] Skewness cancel out.....	22
[그림 14] Computation sequence of AGC-LSM.....	23
[그림 15] Meshless virtual volume in 2D cylinder mesh	24
[그림 16] Meshless virtual volume in 3D sphere mesh - 1.....	24
[그림 17] Meshless virtual volume in 3D sphere mesh - 2.....	25
[그림 18] Schematic representation of TVD limiter for meshless method.....	29
[그림 19] Unstructured mesh for 2D cylinder case.....	32
[그림 20] Meshless virtual volume for 2D cylinder case	33
[그림 21] Mach contour for 2D cylinder.....	34
[그림 22] Surface Mach distribution for 2D cylinder.....	34
[그림 23] C_p contour for 2D cylinder	35
[그림 24] Surface C_p distribution for 2D cylinder	35
[그림 25] C_p , Mach contour for 2D cylinder (2 nd order)	36
[그림 26] Surface C_p , Mach distribution for 2D cylinder (2 nd order)	37
[그림 27] 2D shock tube numerical test overview	38

[그림 28]1D view of 2D shock tube result	38
[그림 29] $N_x = 50, AR = 25$ result	39
[그림 30] $N_x = 50, AR = 50$ result	39
[그림 31] $N_x = 50, AR = 100$ result.....	40
[그림 32] ρ contour of $N_x = 100, AR = 100$ result	40
[그림 33] u contour of $N_x = 100, AR = 100$ result	41
[그림 34] p contour of $N_x = 100, AR = 100$ result.....	41
[그림 35]L2 norm error log scaled plot.....	43
[그림 36]Unstructured mesh for RAE2822.....	44
[그림 37]Meshless virtual volume for RAE2822	45
[그림 38]Meshless virtual volume for RAE2822(LE).....	46
[그림 39]Meshless virtual volume for RAE2822(flat region) .	46
[그림 40]Meshless virtual volume for RAE2822(TE)	47
[그림 41]Surface C_p distribution for RAE2822	48
[그림 42]Mach distribution and contour for RAE2822.....	48
[그림 43]Convergence history for RAE2822 (2 nd , RANS)	49
[그림 44]Surface C_p distribution for RAE2822 (2 nd , RANS) ..	50
[그림 45]ONERA M6 case overview.....	50
[그림 46]ONERA M6 mesh	51
[그림 47]ONERA M6 mesh prism layer	51
[그림 48]Surface C_p distribution for ONERA M6 - 1.....	52
[그림 49]Surface C_p distribution for ONERA M6 - 2.....	53
[그림 50]Surface C_p contour and wing tip distribution.....	54
[그림 51]Wing tip prism layer.....	54
[그림 52]Surface Mach distribution for ONERA M6	55
[그림 53]Surface Mach contour for ONERA M6	55
[그림 54]Surface C_p distribution for ONERA M6 (2 nd , RANS) - 1	56
[그림 55]Surface C_p distribution for ONERA M6 (2 nd , RANS) - 2	57
[그림 56]Surface C_p contour and wing tip distribution (2 nd , RANS)	57
[그림 57]Surface Mach distribution for ONERA M6 (2 nd , RANS) - 1	58
[그림 58]Surface Mach distribution for ONERA M6 (2 nd , RANS) - 2	59

제 1 장 서 론

제 1 절 연구의 배경

최근 컴퓨팅 파워의 발전에 따라 난류, 물체 간 상대운동, 물체의 변형 등을 포함한 복합적인 물리현상에 대한 전산유체역학(CFD) 해석 요구가 증가하고 있다. 격자 기반 해석 기법은 물체의 이동, 변형이 존재할 때 유동해석 과정 중 격자를 재생성(Mesh Regeneration), 격자 변형(Mesh Deformation) 혹은 중첩격자기법(Overset Grid Assembly) 등의 해석 중간 전처리 과정이 필수적인데 각각에 대하여 계산비용이 매우 커 실제 문제에 적용하기 어렵거나, 격자 꼬임(Negative Volume)이 발생하거나, 물체 상대운동에만 대응할 수 있는 등의 단점이 있다. 이러한 복잡한 문제에 대한 유연한 대처를 위해 다양한 무격자 기법들이 연구되었다.

여러 무격자 기법들 가운데 오일러 기술법(Eulerian Approach)을 이용한 방법은 Shepard[1]에 의해 공간상 분포한 점 사이 연결성만으로 공간을 차분하는 연구를 시초로 시작되었다.

이러한 오일러 기술법 기반 무격자 기법 중 최소제곱법(Least Squares Method, 이하 LSM)을 이용한 공간 차분에 대한 연구가 활발히 수행되어왔는데 Sridar et al.에 연구에서는 연결성 사이 가상 경계면을 도입하여 풍상차분(upwind) 특성을 반영해 압축성 유동에서도 강건하게 해석이 가능하게 되었고[2] 최근에는 무격자 기법을 GPGPU에 효과적으로 구현하여 해석을 가속화하는 등[3] 최소제곱법 기반 무격자 기법은 가장 활발히 연구 및 실 해석에 적용되고 있는 기법들 중 하나이며 이중 테일러 급수(Taylor series) 기반 최소제곱법이 일반적으로 사용된다.

오랜 선행연구에도 불구하고 무격자 기법은 일반적인 3차원 유동에 포괄적으로 적용되지 못하고 있는데 이는 최소제곱법 기반 무격자

기법이 본질적으로 가지고 있는 몇 가지 문제점 때문으로 생각된다.

일반적으로 알려진 문제는 다음과 같다. 1) 해석을 위한 질점 배치 및 질점 간 연결을 구성하는 것 자체가 비정렬 격자 생성 만큼이나 복잡하며 해석 결과 또한 이렇게 생성된 질점 분포 및 연결성에 의해서 민감하게 바뀐다는 것, 2) 무격자 기법 자체 특성에서부터 발생하는 비보존 문제, 3) 높은 종횡비 및 곡률 질점 분포에서 발생하는 정확도 하락의 문제 등이 있다.

첫번째 문제점은 Löhner et al.[4][5]의 연구와 같이 비정렬 격자 생성에서 사용되는 Advancing Front 알고리즘을 이용한 질점 생성 기법을 사용하거나 표면 근처 Prism Layer Structure와 그 외 공간은 Octree(Quad-tree in 2D) 등으로 구성하는 혼합 질점 구조를 채택하는 등의 방법 등이 있는데 일반적인 상황에서의 최적 질점 생성 및 연결 구성에 대한 방식은 정형화되어 있지 않고 열려있으며 추가 연구가 필요해보인다.

두번째 문제점인 비보존성은 Huh et al.[6]의 연구에서 라그랑주 승수법을 통한 제약조건이 있는 최소제곱법으로 국소적 보존성을 만족할 수 있게 하는 무격자 기법을 개발하는 등의 연구가 수행되었다.

본 연구에서는 세번째 문제점인 높은 종횡비 및 곡률 질점 분포에서 발생하는 정확도 하락을 분석하고 이를 개선하는 방법에 대하여 제안하고자 한다.

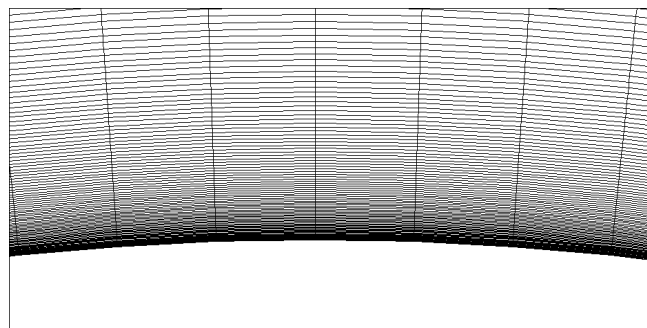


그림 1. High aspect ratio and curvature mesh

제 2 절 연구의 필요성

최소제곱법 기반 무격자 기법은 비점성 오일러 방정식을 해석할 때 일반적으로 사용되는 연결성 간 균일한 길이 척도를 가지고 있는 질점계에 대해서는 매우 효과적으로 작동하고 낮은 레이놀즈 수의 점성류의 경우에도 표면 근처에서 충분히 낮은 종횡비로 해석이 가능하기 때문에 이 경우 또한 효과적으로 작동한다.

그러나 일반적인 공기역학 문제의 경우 10^6 혹은 그 이상의 매우 높은 수준의 레이놀즈 수를 가지고 있는데 이러한 난류 유동의 경우 경계층을 효과적으로 해석하기 위해서는 무격자 질점 구조에서도 비정렬 유한 체적법에서 일반적으로 사용되는 격자 구조인 경계층 프리즘 격자와 유사한 구조의 질점계 구성이 필연적이다. 이러한 구조의 경우 질점계가 높은 종횡비 및 물체 표면을 따라가는 곡률을 가지게 되는데 이때 표면 평행 방향 무격자 계수의 큰 오차가 발생하고 비물리적인 유동 결과를 발생시킨다.

단순하게 이러한 문제를 피하기 위해 복잡한 형상에 대해 임의로 질점을 배치시켜 해석이 가능한 무격자 기법의 특징에 기반하여 이러한 질점 구조를 피하여 균일한 질점 생성 및 해석을 하는 방법을 고려해볼 수 있다. 그러나 레이놀즈 평균 나비에-스톡스 방정식(Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation, 이하 RANS)과 같은 벽면거리 기반 모델링 된 난류 유동 해석에서 대부분의 난류 모델은 정확한 경계층 모사를 위해 무차원 벽면거리 $y^+ = 1$ 의 벽면 수직 방향 격자 해상도를 요구한다. 높은 레이놀즈 수의 공기역학 문제에서 $y^+ = 1$ 의 차원화된 값은 물체 크기 스케일 대비 매우 작은 값을 가지기 때문에 경계층 계산 효율성을 위해서는 높은 종횡비가 필연적이다. 이에 따라 임의의 질점 분포 해석이 특징인 무격자 기법이라도 계산 효율성을 위해서는 이러한 높은 종횡비의 질점 분포를 피해갈 수 없다.

표면 평행 방향 무격자 계수의 오차에 의해 발생하는 정확도

하락을 해결하고자 하는 선행 연구로는 Su et al.[7]의 연구에서 일반적인 경계층 질점 구조를 가정하여 벽면 수직 방향을 유한 차분 기법(Finite Difference Method)으로 차분하여 해석하는 혼합 수치기법으로 해석하는 연구가 수행되었다. 이 연구에 경우 일반적인 정렬 질점 연결구조를 가정하였기 때문에 임의의 질점 구조에 대하여는 적용되기 어렵다.

결론적으로는 3차원, 임의의 질점 분포 및 연결성에 범용적으로 적용 가능한 기법은 개발되지 않았으며 이에 대한 해결이 필요하기 때문에 개선 기법 연구를 수행하였다.

제 3 절 개선기법 기준

결론적으로 본 연구에서는 높은 종횡비 및 곡률을 가지는 질점 연결 구조에서 최소제곱법 기반 무격자 기법을 개선하는 방안에 대한 연구를 수행하였고 다음과 같은 기준 하에 개선 기법을 개발하고자 한다.

- 1) 3차원, 임의의 질점 분포와 연결성에 적용
- 2) 물체 표면 정보와 같은 추가 정보 없이 오직 주어진 질점 분포와 연결성으로부터의 개선
- 3) 선형적인 계산만으로 무격자 계수 산출
- 4) 경험적인 조절이 필요한 매개변수 사용 배제

제 2 장 수치기법

제 1 절 지배방정식

3차원 압축성 나비에-스톡스 방정식은 아래와 같은 보존형 방정식으로 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{F}_C - \mathbf{F}_V)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{G}_C - \mathbf{G}_V)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{H}_C - \mathbf{H}_V)}{\partial z} = 0$$

여기서 각 벡터가 나타내는 값은 아래와 같다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{bmatrix}, \mathbf{G}_C = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{bmatrix}, \mathbf{H}_C = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ [u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x] \end{bmatrix}, \mathbf{G}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ [u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ [u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z] \end{bmatrix}$$

여기서 ρ, u, v, w, p, e, H 는 각각 밀도, x, y, z 속도 성분, 압력, 에너지(total energy), 엔탈피(total enthalpy) 이며 τ 는 점성 스트레스

텐서, q 는 열유속이다.

본 연구에서는 일정한 비열비를 가지는 열량적 완전기체(calorically perfect gas)에 대한 해석을 수행하였으며 이에 대한 상태방정식은 아래와 같다.

$$\rho e = \frac{p}{(\gamma - 1)} + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2 + w^2), H = e + \frac{p}{\rho} \quad (\gamma = 1.4 \text{ for air})$$

추가적으로 난류 유동해석을 위한 RANS의 난류 모델은 Spalart-Allmaras 난류 모델[8]이 사용되었다.

제 2 절 최소제곱법 기반 무격자 공간 차분

최소제곱법 기반 무격자 공간 차분의 출발점은 특정 지점에 대한 변수의 국소 기울기를 계산하기 위한 Gradient Reconstruction이다. Green Gauss Method와 함께 주로 사용되는 Least Squares Method는 격자에 대한 정보를 요구하는 Green Gauss Method와 대비해 오직 점의 위치 정보와 점과 점사이 연결성만을 가지고 국소 기울기를 계산할 수 있다는 특징을 가지고 있다.

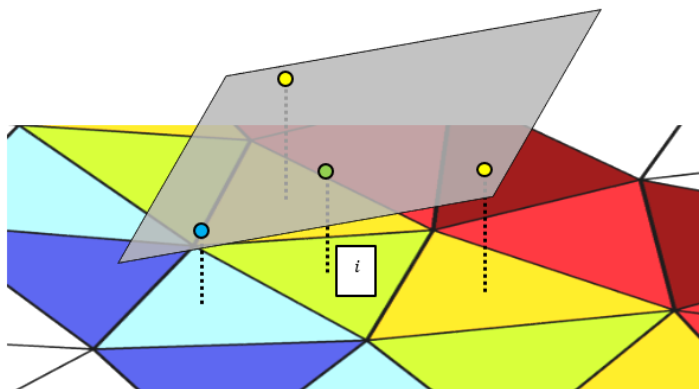


그림 2. Gradient reconstruction

즉 특정 변수 ϕ 의 기울기 값 $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ 를 알 수 있는데 이를 미분형 보존 방정식 형태인 $\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$ 에 직접 적용하여 공간 차분을 수행하는 것이 최소제곱법 기반 무격자 공간 차분이다.

최소제곱법을 이용한 기울기 계산은 기준 질점에서 임의의 변수에 대해 테일러 급수 전개를 한 후 기준 질점에 연결된 다른 질점들의 위치 정보를 전개식에 대입해서 계산된 근사 값과 해당 연결 질점들이 가지는 실제 값들의 차이의 제곱합을 최소화하는 과정으로 얻을 수 있다.

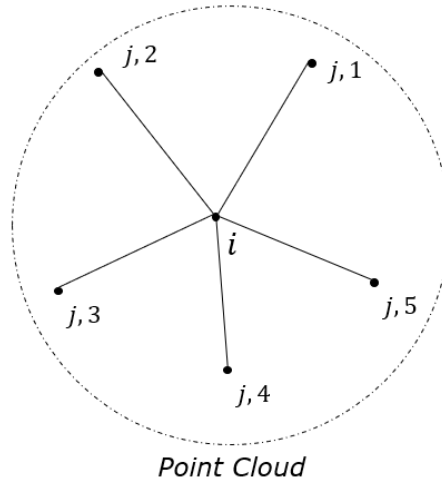


그림 3. Local point cloud

2차원에서 기준 질점 i 에서 임의의 변수 ϕ 에 대한 1차(선형) 테일러 급수 전개는 아래와 같이 표현된다.

$$\phi(x, y) \approx \phi_{approx} = \phi_i + \Delta r \cdot \nabla\phi_i$$

기준 질점 i 에 연결된 다른 질점들의 위치 정보를 위 전개식에 대입 시 아래와 같이 해당 연결 질점 j 에서의 ϕ 의 근사 값을 얻을 수 있다.

$$\Delta\phi_{ij,approx} = \sum_{q=1}^l \sum_{m=0}^q \binom{q}{m} \frac{\Delta x_{ij}^{q-m} \Delta y_{ij}^m}{q!} \frac{\partial^q \phi}{\partial x^{q-m} \partial y^m}$$

($l = 1$ for linear expansion)

이렇게 계산된 근사 값과 실제 질점 j 가 가지고 있는 변수 값인 $\Delta\phi_{ij,exact}$ 와의 차이를 모든 질점에 대하여 제공합한 것을 오차라고 정의하면 아래와 같다.

$$Error = \sum_{j=1}^n (\Delta\phi_{ij,exact} - \Delta\phi_{ij,approx})^2$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\Delta\phi_{ij} - \sum_{q=1}^l \sum_{m=0}^q \binom{q}{m} \frac{\Delta x_{ij}^{q-m} \Delta y_{ij}^m}{q!} \frac{\partial^q \phi}{\partial x^{q-m} \partial y^m} \right)^2$$

위 식에서 알고 있는 값은 $\Delta\phi_{ij}, \Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}$ 이며 아직 알려지지 않은 값은 변수의 기울기 $\nabla\phi_i$ 이다. 이 오차를 최소화 시키는 변수의 기울기는 일반적으로 알려져 있는 최소제곱법 과정을 통해 계산할 수 있다.

위와 같은 형태로 최소제곱법을 수행하면 기울기를 구하고자 하는 변수마다 개별적으로 최소제곱법을 수행해야한다.

질점 i 에서의 기울기는 오직 연결된 다른 질점들의 위치 및 변수 값들에 의해 결정되므로 다음과 같이 선형화된 가중합으로 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial^q \phi}{\partial x^{q-m} \partial y^m} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta\phi_{ij}, \left(c_{ij} \sim \frac{1}{d} \right)$$

이를 다시 각 Cartesian 성분으로 분해하면 1차 미분항들은 최종적으로 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta \phi_{ij}, \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta \phi_{ij}$$

여기에 나타난 a_{ij}, b_{ij} 를 무격자 계수라 하며 위 표현을 위 2차원 1차(선형) 전개 오차식에 대입하면 최종적으로 아래와 같이 표현된다.

$$E(a_{i1}, b_{i1}, \dots, a_{in}, b_{in}) = \sum_{j=1}^n w_{ij} \left(\Delta \phi_{ij} - \Delta x_{ij} \sum_{k=1}^n (a_{ik} \Delta \phi_{ik}) - \Delta y_{ij} \sum_{k=1}^n (b_{ik} \Delta \phi_{ik}) \right)^2$$

여기서 w_{ij} 는 각 연결 점들이 기울기 계산에 영향을 주는 정도를 반영하기 위한 가중치로 일반적으로 역거리가중(inverse distance weight) $w_{ij} = \frac{1}{\Delta d_{ij}}$ 이 사용된다.

위 식에서 오차가 최소화되는 값을 구하기 위한 선형 시스템은 아래식과 같이 최소제곱법의 해석학적 표현으로 정리된다.

$$\frac{\partial E}{\partial a_{i1}} = \frac{\partial E}{\partial b_{i1}} = \dots = \frac{\partial E}{\partial a_{in}} = \frac{\partial E}{\partial b_{in}} = 0$$

이를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$AX = B$$

$$X = [a_{i1}, b_{i1}, \dots, a_{in}, b_{in}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} & \dots & 0 \\ \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta y_{ij}^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} \\ \dots & \dots & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta y_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

$$B = [w_{i1} \Delta x_{i1}, w_{i2} \Delta y_{i1}, \dots, w_{in} \Delta x_{in}, w_{in} \Delta y_{in}]^T$$

위 선형 시스템을 계산 시 최종적으로 오직 질점의 위치 정보와 연결성만의 함수인 무격자 계수 a_{ij}, b_{ij} 를 계산할 수 있다.

이렇게 계산된 무격자 계수를 미분형 보존 방정식 $\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ 에 대입하면 아래와 같은 차분 표현식이 된다.

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + 2 \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta f_{ij+\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta g_{ij+\frac{1}{2}} \right) = 0$$

여기서 공간 차분 앞의 계수 2는 그림 4와 같이 연결성 사이 Δr_{ij} 중심에 가상 경계면을 도입[2]하여 풍상차분(upwind) 특성을 반영하기 위한 성분이다.

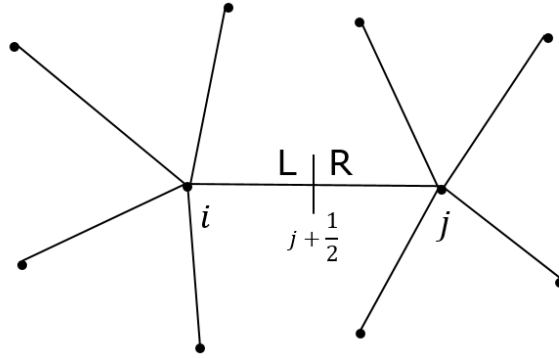


그림 4. Fictitious interface between two points

위 차분식이 가장 기초적으로 적용되는 최소제곱법 기반 무격자 기법이다.

여기에 추가적으로 Huh et al.[6]의 연구에서는 무격자 계수가 국소 기하학적 보존 특성 혹은 zero sum 특성을 만족하는 것이 보존성에 있어서 유리한 특성을 가지기 때문에 아래와 같은 제약조건을 부가하여 무격자 계수를 산출하는 기하학적 보존 무격자 기법(Geometric Conservation Least Squares Method, 이하 GC-LSM)을 개발하였다.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n b_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ij} = 0$$

선형 최소제곱법에 선형 등식 제약조건을 가하기 위해서 위 연구에서는 라그랑주 승수법을 이용하였다.

제약조건을 가하면 기존의 최소제곱법으로 계산된 무격자 계수가 자연스레 만족하는 1st order consistency 특성이 보장되지 않기 때문에 위 연구에서는 zero sum 제약조건 외에도 아래와 같은 1st order consistency 제약조건 또한 부가하였다.

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta x_{ij} & \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta x_{ij} & \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta y_{ij} & \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta y_{ij} & \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta y_{ij} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta z_{ij} & \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta z_{ij} & \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta z_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

위와 같은 제약식을 부가하여 계산된 무격자 계수로 미분형 보존 방정식을 표현하면 아래 식과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} + 2 \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{f}_{ij+\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \mathbf{g}_{ij+\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{h}_{ij+\frac{1}{2}} \right) &= 0 \\ \rightarrow \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{n}_{ij} &= 0 \\ \mathbf{F} &= [\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}]^T \\ \mathbf{n}_{ij} &= [2a_{ij}, 2b_{ij}, 2c_{ij}]^T \end{aligned}$$

본 연구 또한 이 GC-LSM을 기반으로 연구를 수행하였다.

제 3 절 무격자 기법과 유한체적법의 상사

비정렬 유한체적법은 아래와 같은 적분형 보존방정식을 기반으로 차분한다.

$$\int_{V_i} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} dV + \oint_{\partial V_i} \mathbf{F} d\mathbf{S} = 0$$

위 식을 유한체적 차분식으로 다시 표현하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}]^T$$

$$\mathbf{n}_{ij} = \left[\frac{S_{ij,x}}{|V_i|}, \frac{S_{ij,y}}{|V_i|}, \frac{S_{ij,z}}{|V_i|} \right]^T$$

여기서 \mathbf{S}_{ij} 는 검사체적이 가지는 j 방향 표면의 면적 벡터이고 V_i 는 검사체적의 부피이다.

이 FVM 차분식과 GC-LSM 차분식을 비교하면 n_{ij} 성분을 제외하면 모두 동일하다.

$$\mathbf{n}_{ij,GC-LSM} = \begin{bmatrix} 2a_{ij} \\ 2b_{ij} \\ 2c_{ij} \end{bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{n}_{ij,FVM} = \begin{bmatrix} \frac{S_{ij,x}}{|V_i|} \\ \frac{S_{ij,y}}{|V_i|} \\ \frac{S_{ij,z}}{|V_i|} \end{bmatrix}$$

GC-LSM과 FVM의 \mathbf{n}_{ij} 성분이 대응하므로 무격자 계수를 구하면 그림 5와 같이 모든 연결성에 대해 그에 상응하는 \mathbf{S}_{ij}/V_i 를 계산한 것과 동일하다.

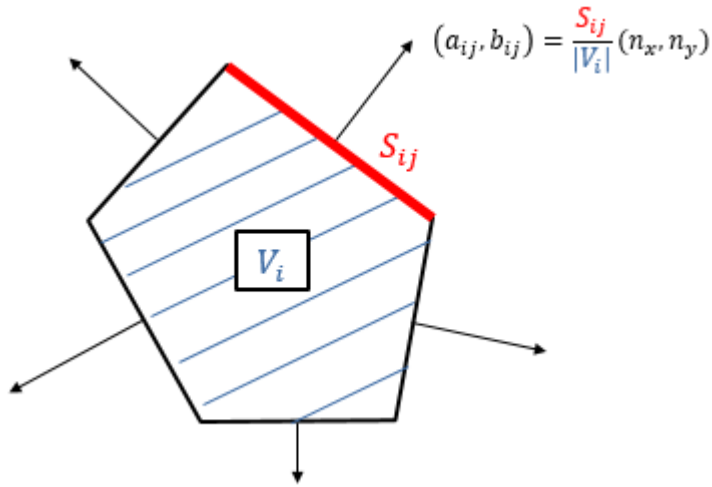


그림 5. Meshless virtual control volume

여기서 임의의 d 차원, n 다면체에서 모든 면에 대한 면적 벡터를 알고 있으면 유일하게 다면체가 결정된다는 것이 수학자 Minkowski에 의해 증명되어 있고 Minkowski problem for polytopes로 알려져 있다.

따라서 GC-LSM 기법을 이용해 무격자 계수를 계산하면 해당 무격자 계수로부터 유일한 가상의 다면체를 구성할 수 있기 때문에 GC-LSM 기법은 local, non-conforming 격자에서 수행되는 FVM으로 볼 수 있다.

제 4 절 정렬 무격자 기법

계산된 무격자 계수로부터 가상 검사체적을 구성할 수 있기 때문에 높은 종횡비와 곡률을 가지는 질점 분포에서 무격자 기법이 가지는 문제점이 어떠한 방식으로 나타나는지를 FVM 관점에서 확인해볼 수 있다.

해당 질점 분포에서는 일반적으로 그림 6, 그림 7과 같이 횡방향(표면 평행방향) 무격자 계수가 곡률 중심 방향으로 기울어지게 된다.

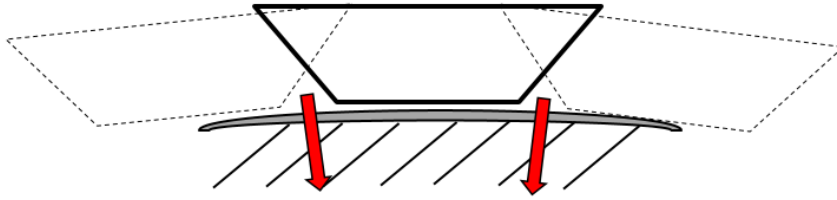


그림 6. Schematic of virtual volume in problematic circumstance

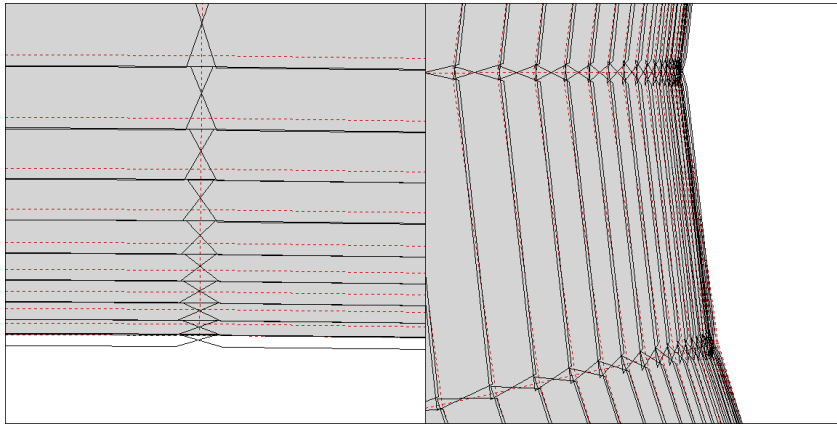


그림 7. Virtual volume on airfoil example

이것의 근본적인 원인은 계수 가중과정에서 곡률에 의한 거리 증분을 정확히 반영하지 못하면서 발생한 것으로 생각된다.

이렇게 곡률 방향으로 기울어진 가상 경계면이 결과에 어떤 영향을 미치는지를 판단하려면 비정렬 FVM에서 일반적으로 표현되는 Convective Directional Flux를 확인하면 알 수 있다.

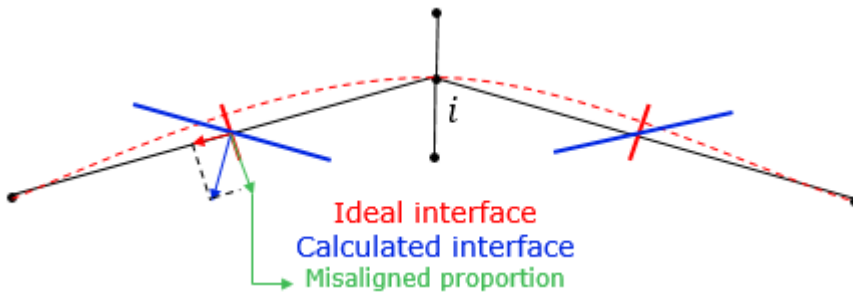


그림 8. Meshless interface

$$\mathbf{F}_{FVM} = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho H V \end{bmatrix}, \quad V = n_x u + n_y v$$

$$n_x \rightarrow \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2}}, \quad n_y \rightarrow \frac{b_{ij}}{\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2}}$$

이상적인 방향과 대비하여 그림 8의 Misaligned 방향, 즉 곡률 중심 방향으로의 속도 성분이 있을 시 해당 경계면에서 과도한 Convective flux 유출입이 발생하게 되는데 전체 질점계에서 이러한 과도 flux가 곡률 중심 방향으로 방향성을 가지게 되기 때문에 곡률 방향 유동 가속과 같은 형태로 유동 결과 전체에 영향을 미치게 된다.

결론적으로 이 횡 방향 연결성에 대한 무격자 계수가 곡률 방향으로 기울어진 것이 문제이며 이를 해결하는 것이 본 연구의 목적이다.

이 문제를 해결하기 위해 기하학적 관점에서 무격자 계수로 구성되는 가상 다면체를 이상적인 FVM 검사체적 형태를 가질 수 있도록 제약 조건을 추가하는 방향으로 접근하였다.

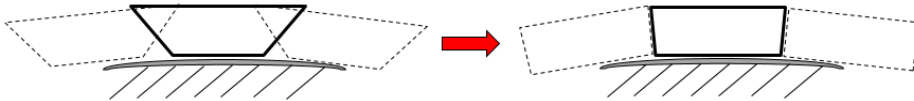


그림 9. Virtual control volume shape correction

보편적인 적용을 위해 오직 질점계에 주어진 기하학적 위치 정보만을 가지고 횡 방향 무격자 계수를 수정해야한다. 또한 비선형 제약조건을 가하게 되면 라그랑주 승수를 이용한 제약 최소화제곱 과정에서 반복계산을 필요로 하는 Root finding 기법 사용이 불가피해

무격자 계수를 계산하는 전처리 시간이 비약적으로 증가하게 되기에 선형 제약조건을 추가하여야 한다.

위 두 조건에 부합하는 가장 명료한 제약으로는 무격자 계수의 방향이 해당 연결성에 대한 방향 벡터와 평행하도록 제약조건을 추가하는 것이며 그림 10 및 아래 관계로 나타낼 수 있다.

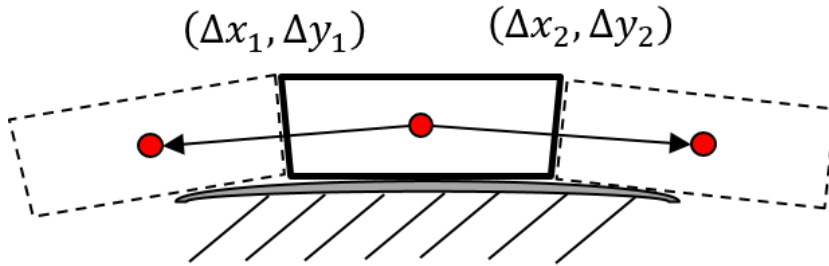


그림 10. Aligned with geometric vector

$$(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})^T \parallel (\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}, \Delta z_{ij})^T$$

위 평행 관계를 외재적인 식으로 표현하면 아래 식과 같다

$$a_{ij}\Delta y_{ij} - b_{ij}\Delta x_{ij} = 0 \quad (2D)$$

$$\begin{cases} a_{ij}\Delta y_{ij} - b_{ij}\Delta x_{ij} = 0 \\ b_{ij}\Delta z_{ij} - c_{ij}\Delta y_{ij} = 0 \end{cases} \quad (3D)$$

그런데 이러한 제약조건을 기존 GC-LSM의 제약조건과 함께 추가하게 되면 특정 상황에서 문제가 발생한다.

질점 i 가 n 개의 다른 질점과 연결되어 있을 때, k 개의 연결성의 방향 제약이 필요한 상황에 대하여 고려한다.

2차원에서는 기존 GC-LSM 제약식 6개, 방향 제약식 k 개 총 $k + 6$ 개의 제약식이 필요하게 되고 최소제곱 선형 시스템의 미지수는 $2n$

개이다.

3차원에서는 기존 GC-LSM 제약식 12개, 방향 제약식 $2k$ 개 총 $2k + 12$ 개의 제약식이 필요하게 되고 최소제곱 선형 시스템의 미지수는 $3n$ 개이다.

2차원에서 $2n < k + 6$, 3차원에서 $3n < 2k + 12$ 일 때 해당 최소제곱 선형 시스템이 미지수보다 제약조건이 많아지는 ill condition이 되므로 기존 GC-LSM의 제약조건을 최소화하여야 한다.

국소 기하학적 보존 제약과 1st order consistency 제약 중 국소 기하학적 보존 제약은 중요한 제약 특성으로 판단하여 유지하였고 1st order consistency 제약은 비정렬 FVM의 무격자 계수에 해당하는 $\left[\frac{S_{ij,x}}{|V_{il}|}, \frac{S_{ij,y}}{|V_{il}|}, \frac{S_{ij,z}}{|V_{il}|} \right]^T$ 성분 에 대해서 일반적인 비정렬 격자계에서 대부분 만족하지 않고 무격자 계수의 flux integration 관점에서 큰 영향을 끼치지 않는다고 판단되기에 해당 제약 조건 중 대각 항목만 유지하고 그 외 제약은 제외하였다. 위 판단에 대한 추가적인 근거로 방향 제약의 목적이 이상적인 FVM 검사체적 형태를 가지도록 설계하는 것이므로 일반적인 비정렬 격자가 만족하지 못하는 특성을 부가하는 것은 바람직하지 않은 것으로 보인다. 그러나 1st order consistency에 의한 무격자 계수의 영향은 추가적인 연구가 필요할 것으로 판단된다.

최종적으로 정리된 제약식은 아래와 같다.

1) 국소 기하학적 보존 제약

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n b_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ij} = 0$$

2) 1st order consistency (semi)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta y_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta z_{ij} = 1$$

3-1) Alignment (in 2D)

$$a_{ij} \Delta y_{ij} - b_{ij} \Delta x_{ij} = 0$$

3-2) Alignment (in 3D)

$$\begin{cases} a_{ij} \Delta y_{ij} - b_{ij} \Delta x_{ij} = 0 \\ b_{ij} \Delta z_{ij} - c_{ij} \Delta y_{ij} = 0 \end{cases}$$

3차원에서 n 개의 다른 질점과 연결된 질점 i 에 대해 k 개의 연결성의 방향 제약이 필요할 때 위 제약이 부가된 최소제곱 선형 시스템은 아래와 같다.

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} D & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d \end{bmatrix}_{3n \times 3n}$$

$$d = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij}^2 & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij} \Delta z_{ij} \\ \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta y_{ij}^2 & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta y_{ij} \Delta z_{ij} \\ \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta x_{ij} \Delta z_{ij} & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta y_{ij} \Delta z_{ij} & \sum_{j=1}^n w_{ij} \Delta z_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}_{3n \times (6+2k)}$$

$$e_j = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta y_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\Delta x_{ij} & \Delta z_{ij} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\Delta y_{ij} & 0 & 0 \end{bmatrix} (j \in K) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (j \notin K) \end{cases}$$

$$K = \{\text{Connectivity} \in \text{Cloud} \mid \text{Need Alignment}\}$$

$$B = [w_{i1} \Delta x_{i1}, w_{i1} \Delta y_{i1}, w_{i1} \Delta z_{i1}, \dots, w_{in} \Delta x_{in}, w_{in} \Delta y_{in}, w_{in} \Delta z_{in}, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, \dots, 0]^T$$

제약조건이 부가된 최소제곱 선형 시스템은 표현이 되었지만 아직 어떤 연결성에 대해 방향제약 조건을 부가할 지 결정되지 않았다.

제약이 필요한 연결성에 대한 기준은 최단거리 기준 나머지 연결성 거리에 대한 비율을 계산한 후 해당 비율이 특정 크기 이상일 때 제약 연결성으로 선정한다.

이때 비율 크기에 대한 기준은 경험적으로 정해지며 본 연구에서는 비율 3을 기준으로 선정하였다.

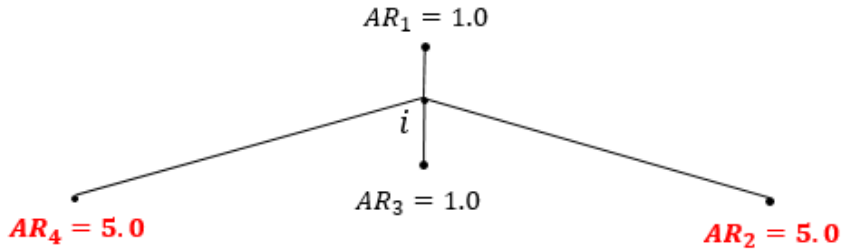


그림 11. Aligned connectivity selection

이 방식은 질점계가 그림 12와 같이 길이 비대칭(Anisotropic)과 곡률(Curvature)만 존재할 때 매우 효과적으로 작동하지만 질점 구조에 비대칭(Skewness)이 존재하면 정확도 하락이 발생하기 때문에 비대칭 성분을 전단 변환(Shear transformation)하여 cancel out 하는 추가 조치가 필요하다.

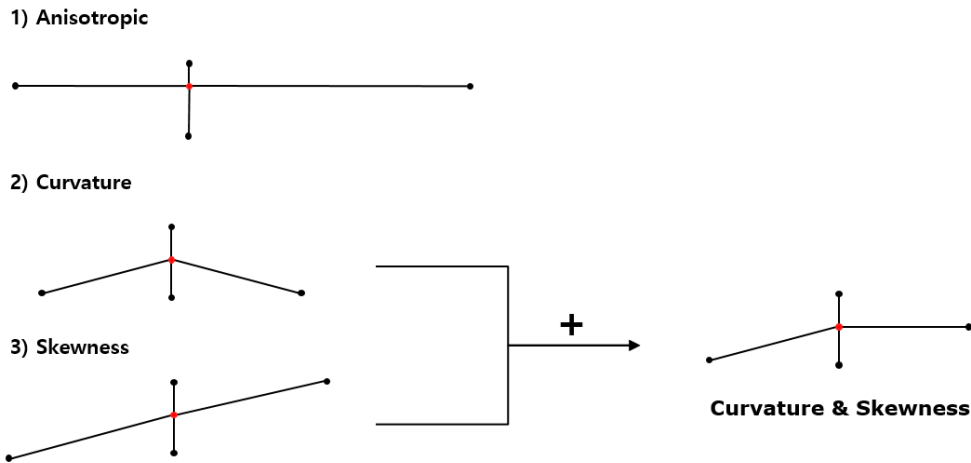


그림 12. Geometric characteristic of point cloud

비대칭 cancel out은 다음과 같은 순서로 진행된다.

우선 높은 종횡비 비율을 가지는 연결 질점들의 모음으로부터 최소제곱법을 이용해 Supporting plane을 구축하고 낮은 종횡비 비율을 가지는 연결 질점들의 모음으로부터 최소제곱법을 이용해 Supporting

line을 구축한다.

해당 Supporting plane & line을 기준으로 좌표계를 전단 변환한 후 $((x, y) \rightarrow (\zeta, \eta))$ 변환된 (ζ, η) 좌표계 상에서 위 정렬 무격자 기법을 동일하게 적용해 무격자 계수를 산출한다. 이후 전단 변환 행렬의 Jacobian은 항상 1 이므로 단순 역변환으로 기존 좌표계 (x, y) 에서의 무격자 계수를 획득한다.

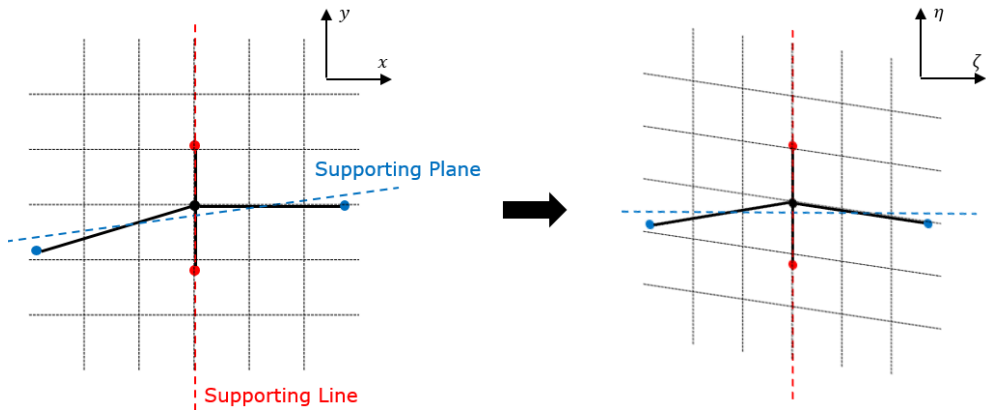


그림 13. Skewness cancel out

최종적으로 본 연구에서는 위 내용을 모두 적용한 기법인 정렬 기하학전 보존 무격자 기법(Aligned GC-LSM, 이하 AGC-LSM)을 개발하였으며 주어진 질점계에 대한 무격자 계수 계산 순서를 정리하면 그림 14와 같다.

- 1) Search Minimum distance $r_{ij,MIN}$
- 2) Calculate relative Aspect ratio of all connectivity $AR_j = \frac{r_{ij}}{r_{ij,MIN}}$
- 3) Mark Low A.R & High A.R connectivity
- 4) If point cloud is isotropic or Marked numbers not satisfy the condition, calculate original GC-LSM and exit
- 5) Cancel out skewness
 - 5-1) Construct **supporting plane** from High A.R marked connectivity
 - 5-2) Construct **supporting line** from Low A.R marked connectivity
 - 5-3) Calculate shear transformation matrix and transform point cloud
- 6) Calculated Constrained LSM on transformed coordinate
- 7) Inverse transformation of AGC-LSM coefficient

그림 14. Computation sequence of AGC-LSM

기법 적용 결과에 대한 예시로 큰 종횡비와 곡률을 가지는 FVM 격자를 기반으로 cell center에 질점들을 배치시키고 격자와 동일한 연결성을 부여한 질점계 상에서 위 AGC-LSM 기법을 적용하였을 때 생성되는 가상 다면체와 기존 GC-LSM으로 생성되는 가상 다면체를 비교하였다.

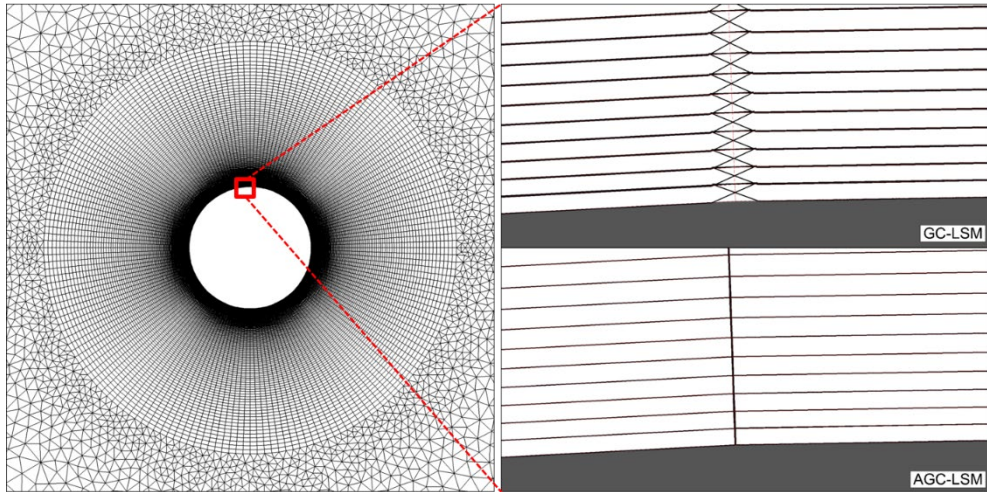


그림 15. Meshless virtual volume in 2D cylinder mesh

그림 15는 2차원 실린더에 대한 격자에 대하여 적용했을 때 생성되는 가상 다면체로 기존 GC-LSM의 경우 곡률 중심 방향으로 무격자 계수가 일관적으로 기울어진 반면 본 제안 기법의 경우 FVM 격자를 정확하게 묘사하는 것을 확인할 수 있다.

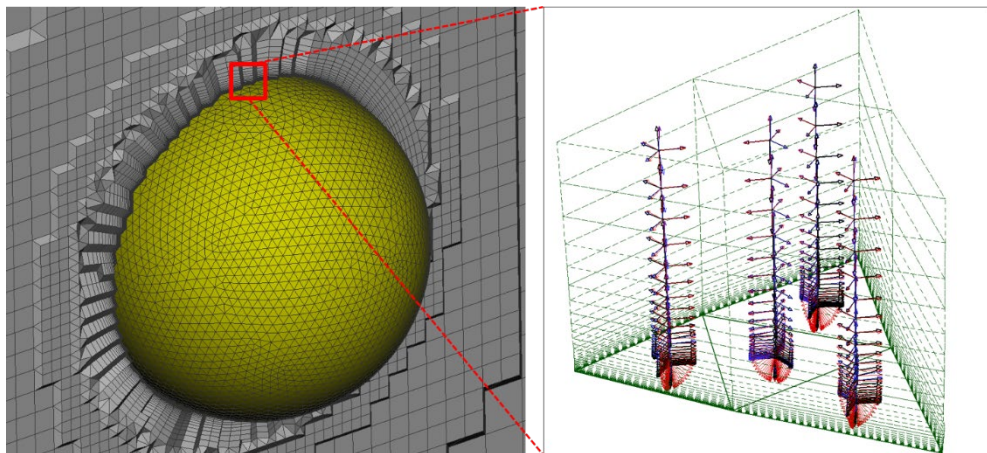


그림 16. Meshless virtual volume in 3D sphere mesh - 1

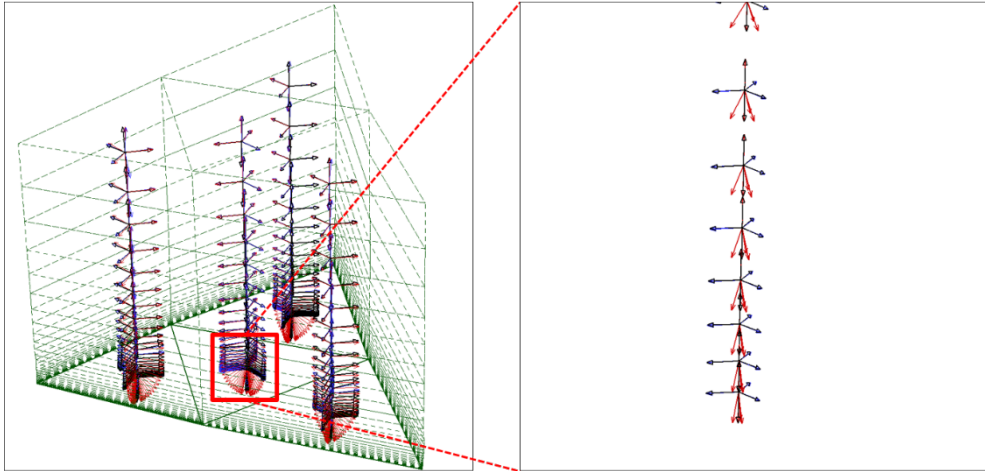


그림 17. Meshless virtual volume in 3D sphere mesh - 2

그림 16, 그림 17은 3차원 구 격자에 대하여 적용했을 때 생성되는 무격자 계수를 벡터로 표현한 것으로 검은색 벡터는 FVM 계수, 빨간색 벡터는 GC-LSM 계수, 파란색 벡터는 AGC-LSM 계수이다.

2차원과 동일하게 GC-LSM 계수는 곡률 중심방향으로 일관되게 기울어진 반면 AGC-LSM 계수는 FVM 계수를 잘 모사하는 것을 확인할 수 있다.

제 5 절 그 외 수치기법

플럭스 기법(Flux Scheme)

압축성 유동을 정확하게 해석하기 위해 본 연구에서 대류 플럭스(Convective flux)를 계산하기 위한 기법은 Kim et al.[9]에 의해 개발된 AUSMPW+ 플럭스 기법을 적용하였다.

AUSMPW+의 1차원 경계면에서의 플럭스 표현은 아래와 같이 정리된다.

$$\mathbf{F}_1 = \bar{M}_L^+ c_1 \frac{\Phi_L}{2} + \bar{M}_R^- c_1 \frac{\Phi_R}{2} + (P_L^+ P_L + P_R^- P_R)$$

$$\Phi = [\rho, \rho V, \rho H]^T$$

$$\mathbf{P} = [0, p, 0]^T$$

경계면 플럭스 계산에 필요한 그 외 값들은 문헌 [9]를 따라 계산할 수 있다.

시간 전진 기법(Time Integration Method)

앞서 확인하였듯이 무격자 계수가 기하학적 보존을 만족하면 국소적으로 FVM과 동일하게 작동하기 때문에 일반적인 FVM에 적용되는 시간 전진 기법들을 대부분 그대로 적용할 수 있다.

본 연구에서 정상 상태 유동 해석에서는 LU-SGS 기법을, 비정상 상태 유동 해석에서는 2nd order time accurate Dual Time Stepping Method with LU-SGS sub-iteration을 사용했다. 추가적인 수렴 가속 기법으로 각 질점에서의 시간 간격을 독립적으로 계산 및 시간전진하는 Local Time Stepping 기법을 적용하였다.

각 질점에 사용되는 시간 간격 크기는 아래와 같다.

$$\Delta t_i = \frac{CFL}{(\Lambda_C + \Lambda_V)_i}$$

$$(\Lambda_C)_i = \sum_{j=1}^{cloud} (|\mathbf{V}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij,LSM}| + C_{ij} \|\mathbf{n}_{ij,LSM}\|_2)$$

$$(\Lambda_V)_i = \sum_{j=1}^{cloud} \left[\max\left(\frac{4}{3\rho_{ij}}, \frac{\gamma_{ij}}{\rho_{ij}}\right) \left(\frac{\mu_L}{Pr_L} + \frac{\mu_T}{Pr_T}\right) (\|\mathbf{n}_{ij,LSM}\|_2)^2 \right]$$

$$\mathbf{n}_{ij,LSM} = [2a_{ij}, 2b_{ij}, 2c_{ij}]^T$$

LU-SGS는 Yoon and Jameson[10]이 제안한 선영화된 내제적 시간 전진 기법으로 압축성 수치해석 분야에 광범위하게 적용되고있는 기법이다.

비정렬 FVM에 적용되는 형식으로 나타내면 아래와 같다.[11]

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n + \Delta \mathbf{Q}^n$$

$$\text{Forward Sweep : } D\Delta \mathbf{Q}'_i = -\mathbf{R}_i^n - \sum_{j \in L} \frac{1}{2} [(\Delta \mathbf{F}'_c)_j \Delta S_{ij} + (r_A^*)_j I \Delta \mathbf{Q}'_j]$$

$$\text{Backward Sweep : } D\Delta \mathbf{Q}^n_i = D\Delta \mathbf{Q}'_i - \sum_{j \in U} \frac{1}{2} [(\Delta \mathbf{F}^n_c)_j \Delta S_{ij} - (r_A^*)_j I \Delta \mathbf{Q}^n_j]$$

여기서 \mathbf{F} 는 numerical flux이고 $A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$ 로 flux jacobian이다. 위 $\Delta \mathbf{F}$ 표현은 flux jacobian의 엄밀한 계산을 피하기 위해 선형 근사한 표현으로 아래와 같다.

$$A\Delta \mathbf{Q} \approx \Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q})$$

\mathbf{R} 은 Residual 혹은 RHS(right hand side term)로, 현재 시간 스텝의 유동 변수들로 계산된 Convective, Diffusive, Source 항들의 총 합이다. 그 외 값들은 아래와 같다.

$$D = \frac{V_i}{\Delta t_i} I + \frac{1}{2} (\Lambda_c)_i + (\Lambda_V)_i - V_i \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_i, \mathbf{S} : \text{Source}$$

$$(\Lambda_c)_i = \sum_{j=1}^{\text{cloud}} (|\mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}| + c_{ij}) \Delta S_{ij}$$

$$(\Lambda_V)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{\text{cloud}} \left[\max \left(\frac{4}{3\rho_{ij}}, \frac{\gamma_{ij}}{\rho_{ij}} \right) \left(\frac{\mu_L}{Pr_L} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right)_{ij} (\Delta S_{ij})^2 \right]$$

$$(r_A^*)_i = (|\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}| + c_j) \Delta S_{ij} + \frac{\Delta S_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|_2} \left[\max \left(\frac{4}{3\rho_j}, \frac{\gamma_j}{\rho_j} \right) \left(\frac{\mu_L}{Pr_L} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \right]$$

위 수식 표현에 존재하는 ΔS_{ij} 및 V_i 항은 무격자 기법에서 외재적으로 계산되지는 않지만 위 식들을 모두 V_i 로 나누어 정규화시키면 무격자 계수 표현으로 변환할 수 있다.

Euler Explicit, Runge-Kutta와 같은 Real Time Stepping 기법은 모든 격자에 대해 allowable Δt 를 계산한 후 최소 값으로 전체 격자에 대한 시간 전진을 수행한다. 이는 일반적으로 최소 격자 크기에 비례하여 감소하기 때문에 표면 근처 조밀한 격자를 가지는 적응형 격자계의 경우 매우 작은 시간 간격을 가지게 된다. 또한 유동 속도에 비례하여 작아지기 때문에 초음속 유동에서는 더 작은 시간 간격을 가지게 된다.

Dual Time Stepping 기법은 Jameson[12]에 의해 개발된 시간전진 기법으로 두 물리적 시간 간격 $t^n \rightarrow t^{n+1}$ 사이를 가상 시간 $\tau: 0 \rightarrow \infty$ 으로 변환 후 정상상태해석을 통해 수렴시켜 물리적 시간 전진을 수행하는 기법이다. 따라서 물리적 시간 간격 Δt 가 시간전진 기법의 stable region에 무관하게 되고 내부 시간 전진은 Local Time Stepping과 같은 다양한 time inaccurate 수렴가속 기법을 적용하여 수렴시키는 것이 가능하기 때문에 조밀한 격자에서의 초음속 유동해석을 충분히 큰 시간간격으로 해석할 수 있게 된다.

Dual Time Stepping 기법 상세 식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial Q'}{\partial \tau} + R' = 0$$

$$R' = R + \frac{3}{2\Delta t} Q' - \frac{2}{\Delta t} Q^n + \frac{1}{2\Delta t} Q^{n-1}$$

$$\text{if } R' \ll \text{tolerance} : Q^{n+1} = Q'$$

위 식을 임의의 시간 전진 기법으로 충분히 수렴시키면 다음 물리 시간으로 진행하고 이를 반복한다.

Gradient Reconstruction

본 연구에서는 Flux integration 역할로써의 무격자 계수를 분석하는 것이 주 목적이기 때문에 국소 기울기를 위한 방법으로는 가장

기초적인 LSM 기법을 이용하여 계산하였고 상세 방법은 위 내용과 동일하다.

2nd order MUSCL Reconstruction

Convective Flux의 정확도를 상승시키기 위해 MUSCL Reconstruction 방법을 적용하였다. 비정렬 FVM에서 일반적으로 적용되는 Mono-slope Reconstruction(혹은 다차원 제한자)는 격자의 interface 혹은 vertex의 정보를 요구하기 때문에 무격자 기법에는 엄밀한 적용이 불가능하다.

따라서 정렬 격자계에서 일반적으로 적용되는 Multi-slope Reconstruction(혹은 1차원 제한자)를 이용하여 정확도를 상승시켰다.[6]

위 Reconstruction에서 새로운 Extrema가 발생하는 것을 방지하기 위해 Minmod Limiter를 적용하였다. 또한 Reconstruction 변수는 보존변수가 아닌 원시변수 $\mathbf{W} = [\rho, u, v, w, p]^T$ 를 사용하였다.

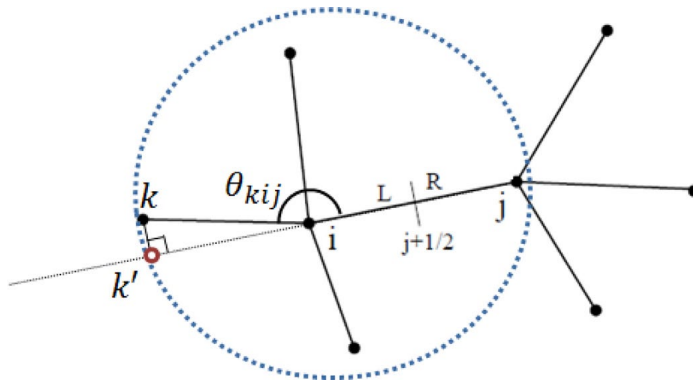


그림 18. Schematic representation of TVD limiter for meshless method[6]

MUSCL Reconstruction 과정은 아래 식과 같다.

$$\mathbf{w}_L = \mathbf{w}_i + \frac{1}{2} \phi_L(\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_i)$$

$$\mathbf{W}_R = \mathbf{W}_j + \frac{1}{2} \phi_R(\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_j)$$

for Minmod : $\phi_L = \max(0, \min(1, \mathbf{r}_k))$

$$\mathbf{r}_k = \frac{\mathbf{s}_{ik'}}{\mathbf{s}_{ji}} = \frac{\mathbf{s}_{ki}}{\mathbf{s}_{ji}} \cos(\theta_{kij})$$

$$\mathbf{s}_{ki} = \frac{\mathbf{W}_k - \mathbf{W}_i}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|_2}$$

제 3 장 수치결과

제 1 절 비교군 상세

본 연구에서 개발한 정렬 무격자 기법의 성능개선 효과를 확인하기 위해 동일한 조건하에 비정렬 FVM, GC-LSM, AGC-LSM 총 3가지 공간 차분 기법에 대한 상호 비교 검증을 수행하였다. 완벽히 동일한 조건에서 비교하기 위해 해석케이스에 대한 비정렬 격자계를 생성한 후 무격자 공간 차분을 위한 질점계는 격자의 cell center에 배치하였고 질점 간 연결성 또한 격자구조와 일치시켰다.

FVM, GC-LSM, AGC-LSM 간 공간 차분의 전환은 독자적으로 개발한 3D 비정렬 FVM 해석자의 S_{ij}/V_i 항을 계산된 무격자 계수를 스케일링하여 대입하는 것으로 이루어진다.

Flux integration으로써의 무격자 계수 성능 비교가 주 목적이기에 모든 수치해석 케이스에서 우선적으로 1차 정확도 비점성 오일러 해석이 수행되었다.

제 2 절 2D Cylinder

먼저 기존 기법이 높은 종횡비 및 곡률 질점 분포에서 보이는 유동 결과 양상을 직관적으로 확인하기 위해 2차원 실린더 유동에 대한 수치해석을 수행하였다.

수치해석에 사용된 격자(질점계)는 그림 19와 같은 혼합 비정렬 격자이며 총 격자 수는 45,836 개, 그 중 Prism Layer 격자 수는 36,000 개이다. 이 격자가 가지는 최대 종횡비는 실린더 표면 바로 위 175 정도이며 Prism Layer 첫 층 높이는 $10^{-4}D$, 전체 Computation Domain 크기는 $40D \times 40D$ 이다. 경계조건에 의한 공간 차분 간 결과 차이를 최대한 줄이기 위해 Far Boundary 구역의 격자는 정사각형 정렬 격자 형태로 배치하였다.

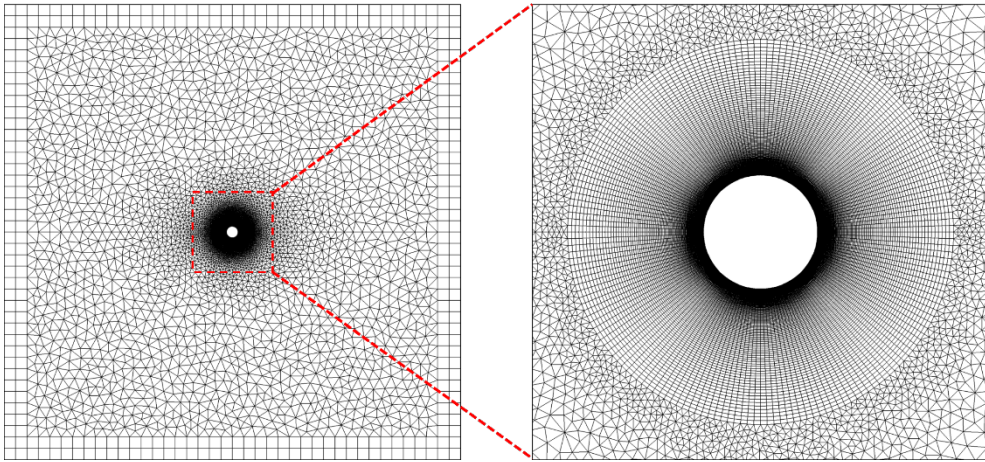


그림 19. Unstructured mesh for 2D cylinder case

그림 20은 해당 격자에서 계산된 무격자 계수에 의해 구성되는 가상 다면체를 표현한 것이다. 균질한 삼각형 격자 구역에서는 무격자 기법이 FVM 격자를 충분히 잘 모사하는 것을 확인할 수 있다. 높은 종횡비를 가지는 표면 근처 구역에서는 앞서 설명한 것과 같이 기존 기법의 표면 평행방향 무격자 계수가 곡률 중심 방향으로 일관되게 기울어진 것을 확인할 수 있다. 이에 반해 제안 기법의 가상 다면체의 경우 FVM 격자를 정확하게 모사하는 것을 확인할 수 있다.

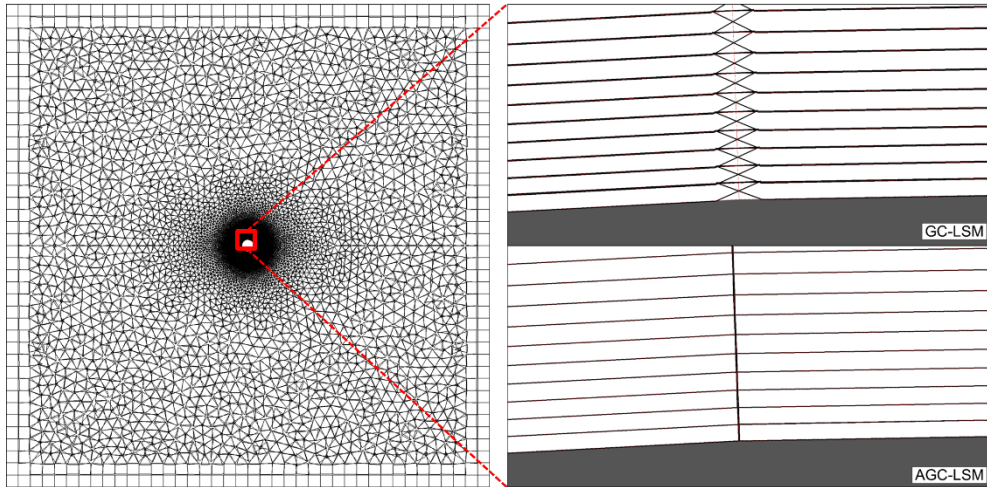


그림 20. Meshless virtual volume for 2D cylinder case

본 격자에 대한 해석조건은 다음과 같다.

Freestream Condition

$$Ma_{\infty} = 0.3$$

$$p_{\infty} = 101325 Pa$$

$$T_{\infty} = 278 K$$

Boundary Condition

Wall : Slip Boundary

Far : Riemann invariant Boundary

먼저 1차 정확도 해석을 수행하였다.

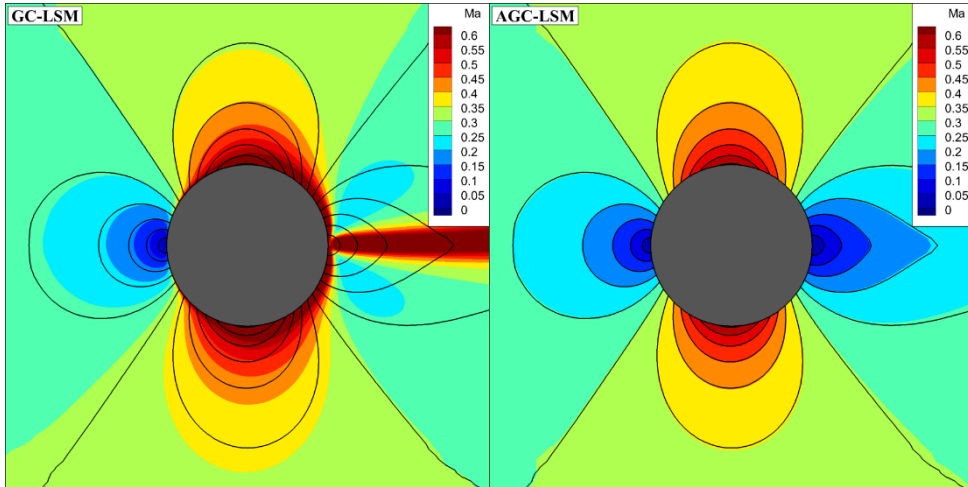


그림 21. Mach contour for 2D cylinder

그림 21은 마하수 contour로 왼쪽은 기존 기법 결과, 오른쪽은 제안 기법 결과이며 FVM 결과는 양 그림의 검은 실선으로 나타나 있다. 기존 기법의 경우 실린더 주위 기울어진 무격자 계수에 의해 실린더 표면을 따라 유동 가속이 발생하고 실린더 후방에서 모여 제트처럼 유동이 분사되는 비물리적인 결과를 보이고 있다. 제안 기법의 경우 FVM contour와 충분히 동일한 결과를 보여준다.

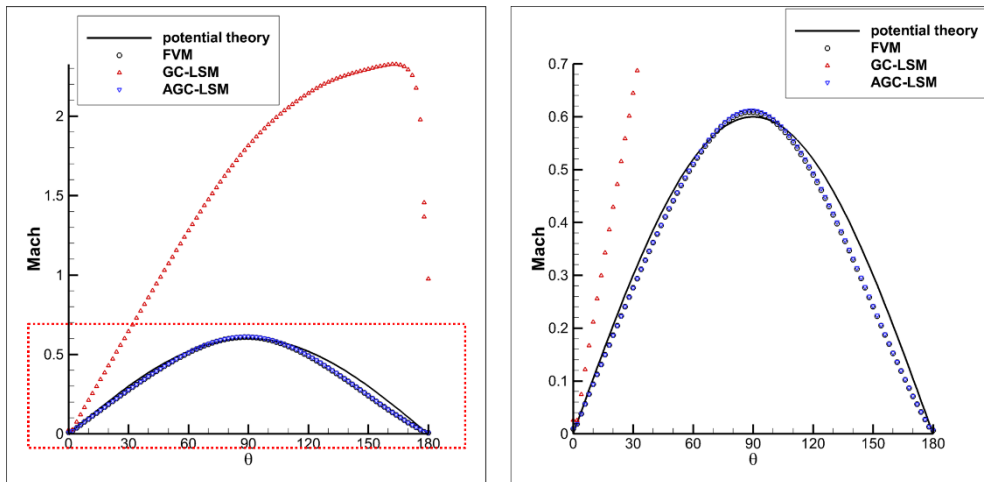


그림 22. Surface Mach distribution for 2D cylinder

그림 22는 실린더 표면에서의 마하수 결과를 비점성, 비압축성, 정상상태 Potential 이론 결과와 함께 나타낸 것이다. 기존 기법은 자유류 마하수 0.3 대비 표면 마하수가 2 이상까지 상승하는 반면 제안 기법은 FVM 결과 및 Potential 이론 결과를 잘 따라가는 것을 확인할 수 있다.

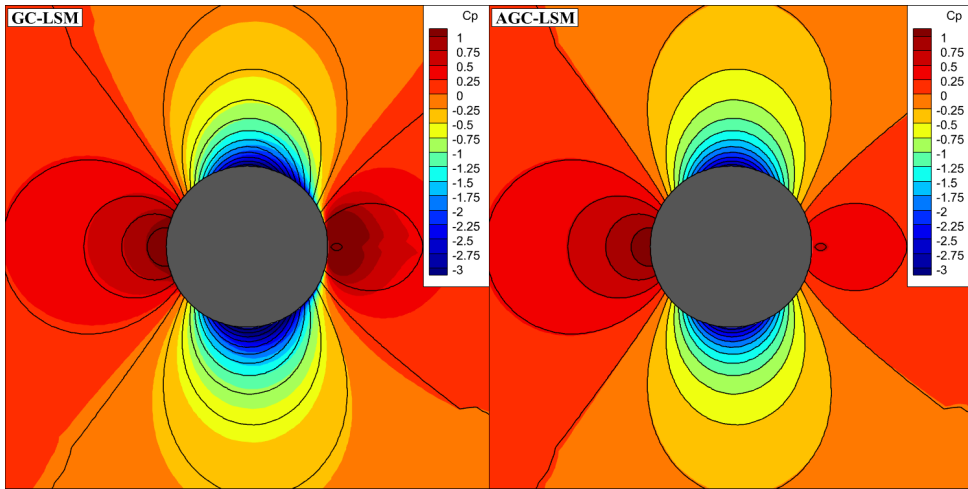


그림 23. C_p contour for 2D cylinder

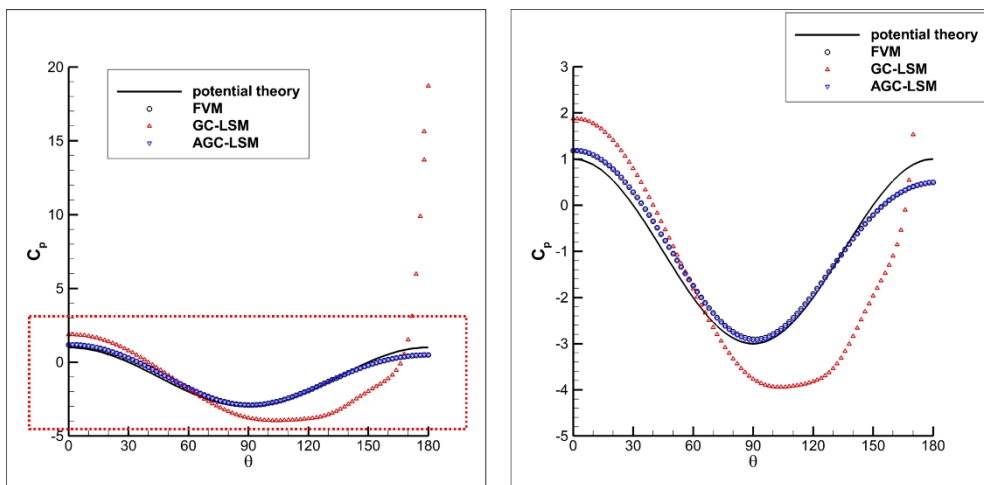


그림 24. Surface C_p distribution for 2D cylinder

그림 23은 압력계수 contour, 그림 24는 실린더 표면에서의 압력계수 결과를 Potential 이론과 함께 나타낸 것이다. 동일하게 기존 기법은 압력계수가 실린더 후방에서 20 가까이 상승하는 비물리적인 결과를 보이는 반면 제안 기법은 FVM 결과 및 Potential 이론 결과를 잘 따라간다.

추가적인 확인을 위해 동일한 조건에서 2차 정확도 수치 계산을 수행하였다.

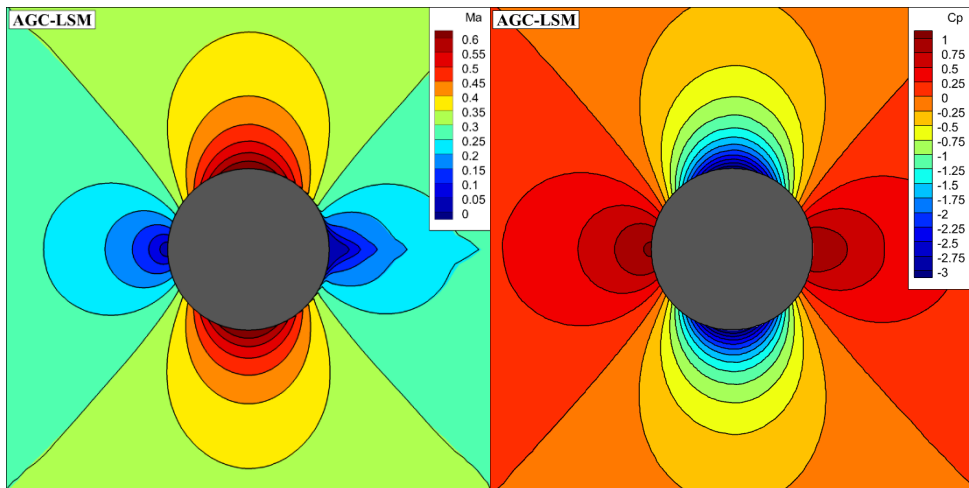


그림 25. C_p , Mach contour for 2D cylinder (2nd order)

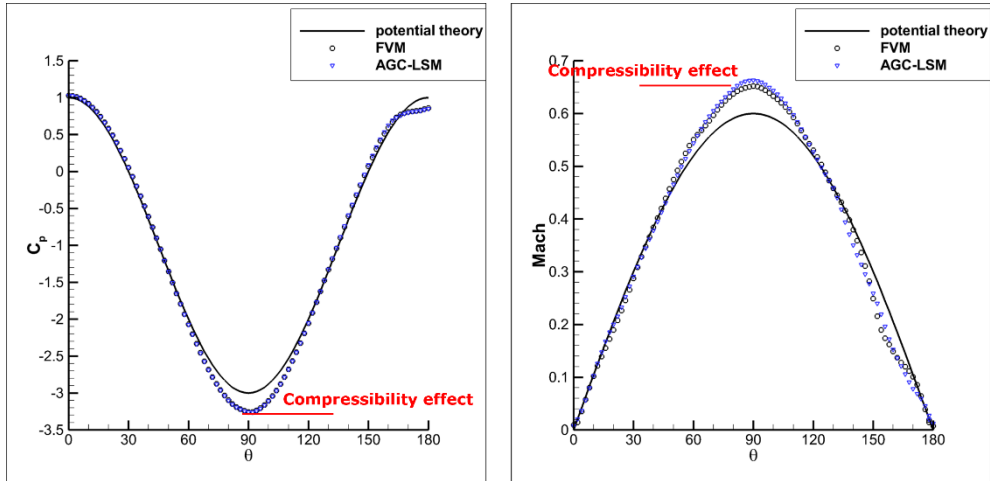


그림 26. Surface C_p , Mach distribution for 2D cylinder (2nd order)

2차 정확도 해석에서 기존 기법의 경우 수치 불안정에 의해 해가 발산하였기 때문에 제안 기법 및 FVM 결과만 나타내었다.

그림 25는 압력계수, 마하수 contour로 제안 기법의 결과가 FVM 결과를 동일하게 모사하고 있으며 그림 26의 표면 결과 또한 동일하다.

제 3 절 2D Shock Tube

정량적인 분석을 위해 고전적인 검증문제인 1D shock tube 문제를 2차원으로 확장하여 수치 실험을 진행하였다. 확장 후 span 방향 간격을 조정해 격자가 큰 중횡비를 가질 수 있게 하였고 격자가 곡률을 가지게 하기 위해 Δx 는 일정하게, Δy 는 위아래 대칭 코사인 함수 꼴을 가지도록 설정해 그림 27의 오른쪽과 같은 최종 격자를 생성하였다.

$N_x = 50, 100, 200$, $AR = 25, 50, 100$ 조합으로 총 9가지 격자에 대한 수치 실험을 진행했고 shock tube 내 초기조건은 그림 27 왼쪽 위와 같으며 $\pm x$ 방향 경계조건은 transmissive boundary, $\pm y$ 방향 경계조건은 periodic boundary를 부여하였다.

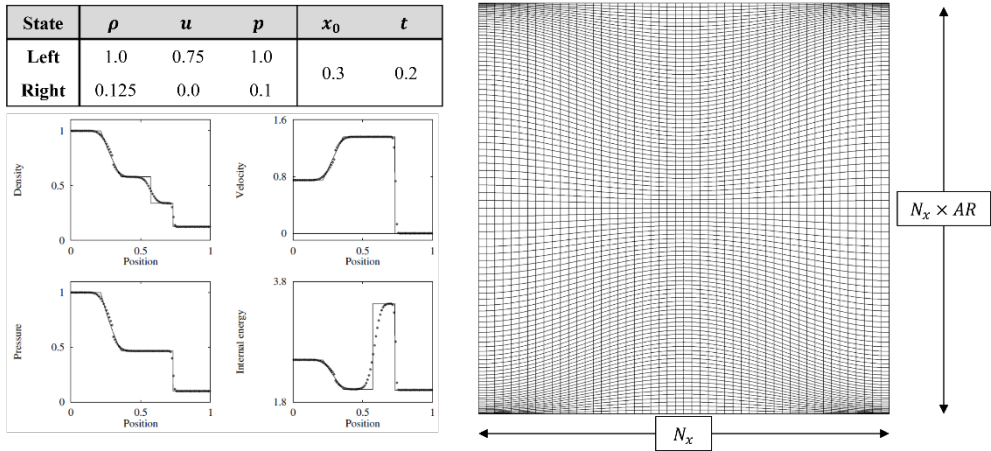


그림 27. 2D shock tube numerical test overview

계수에 의해 발생한 영향을 확인하기 위해 그림 28과 같이 x 축 상에서 2차원 결과를 투사시켜 결과를 확인하였다.

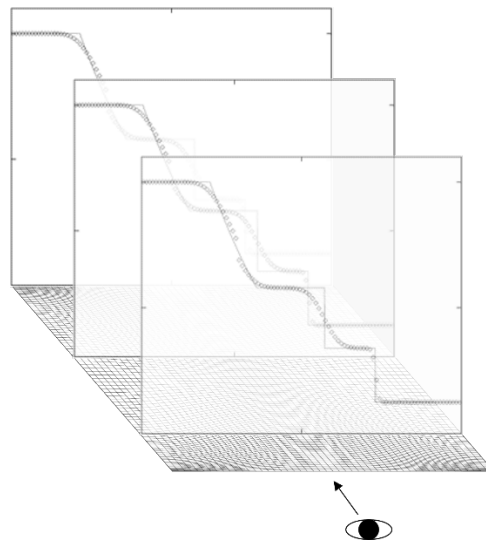


그림 28. 1D view of 2D shock tube result

그림 29, 그림 30, 그림 31은 $N_x = 50$ 케이스에서 3가지 종횡비에 따른 1차원 투사 결과를 동일한 조건에서 해석한 1D shock tube 결과와 함께 나타낸 것이다.

FVM과 제안 기법은 모든 종횡비에서 1D 기준 결과에 근접하게 유지되며 격자 및 질점계 구조에 영향을 크게 받지않고 강건한 반면에 기존 기법은 종횡비가 커질수록 1D 기준 결과에서 완전히 벗어나는 것을 확인할 수 있다.

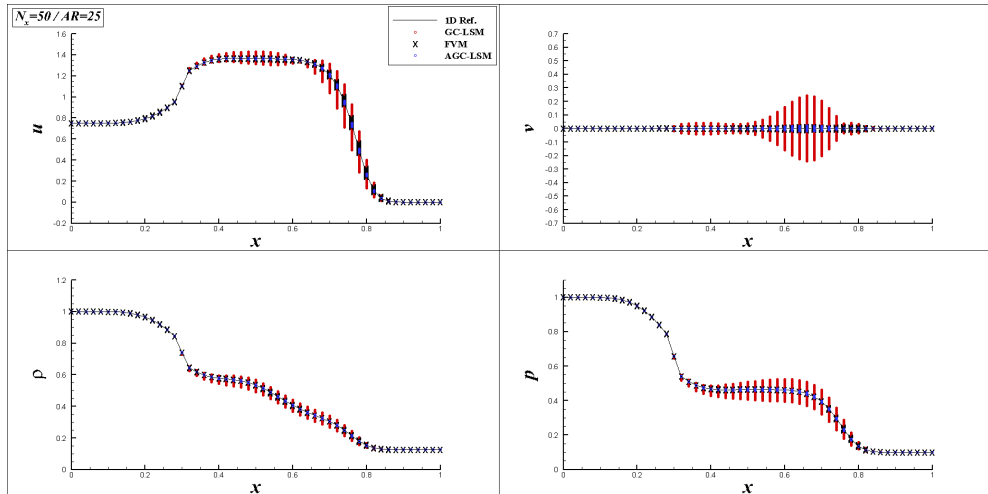


그림 29. $N_x = 50, AR = 25$ result

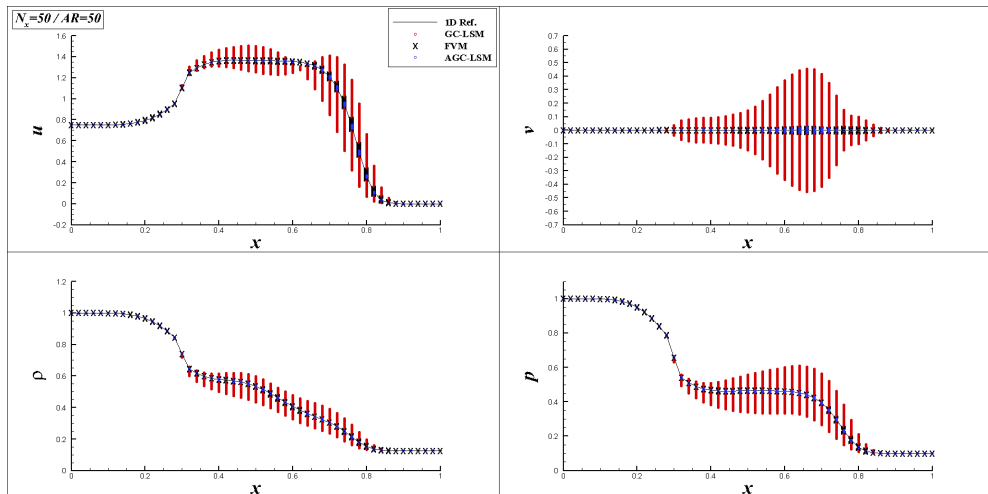


그림 30. $N_x = 50, AR = 50$ result

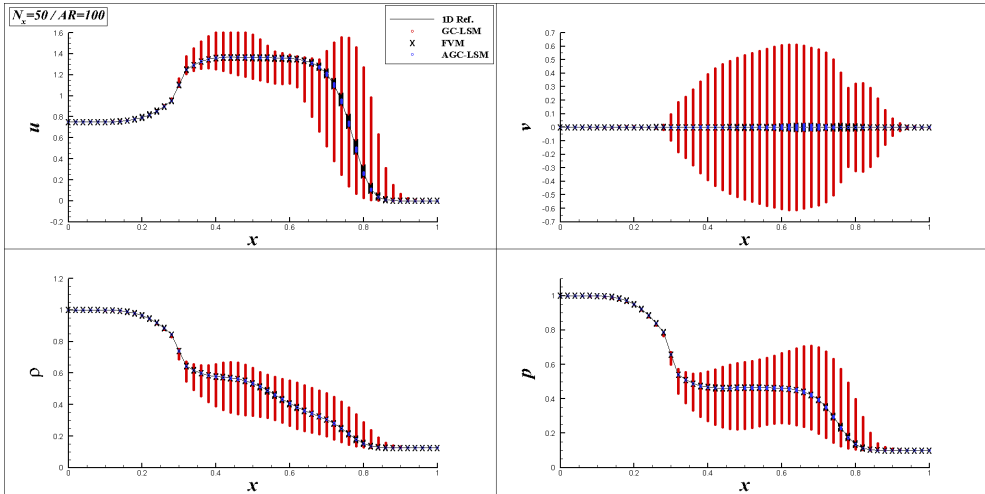


그림 31. $N_x = 50, AR = 100$ result

그림 32, 그림 33, 그림 34은 $N_x = 100, AR = 100$ 케이스에 대한 유동 변수 ρ, u, p contour이다. 기존 기법은 질점계의 중흥비 및 곡률에 의해 발생하는 계수 기울어짐으로 수치 점성이 방향성을 가져 그림과 같이 해의 1차원 특성이 깨지게 된 반면에 제안 기법은 1차원 특성을 유지하고 있음을 볼 수 있다.

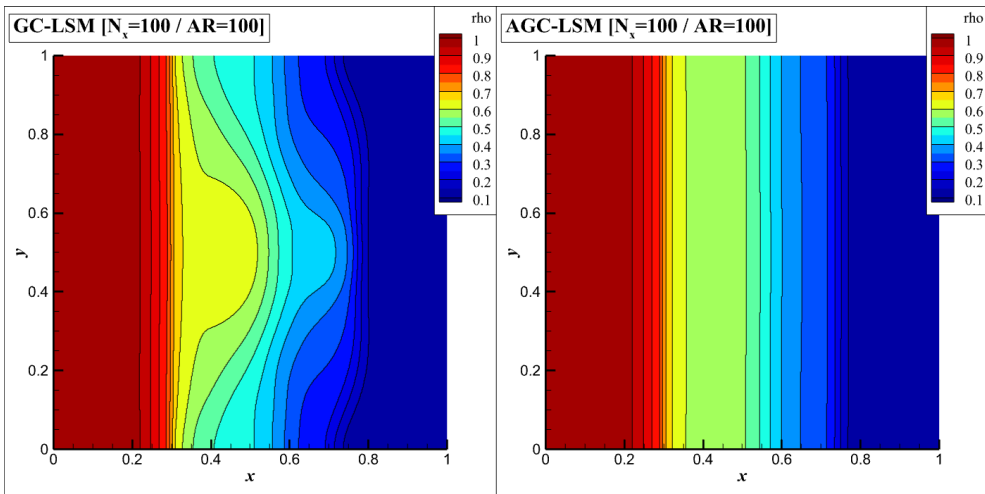


그림 32. ρ contour of $N_x = 100, AR = 100$ result

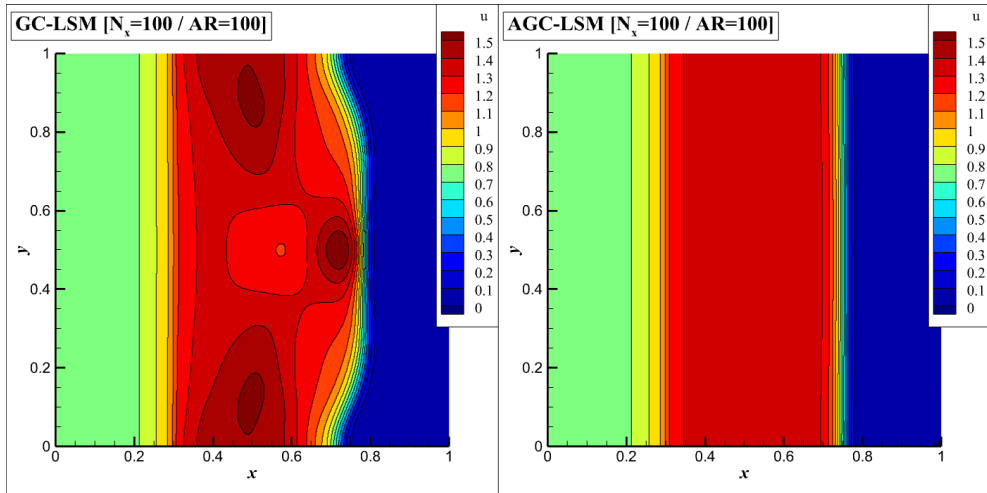


그림 33. u contour of $N_x = 100, AR = 100$ result

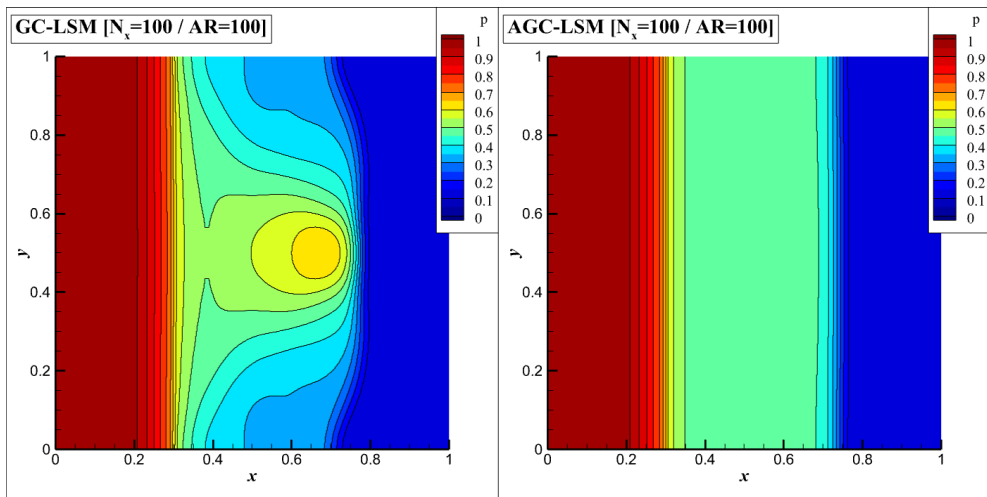


그림 34. p contour of $N_x = 100, AR = 100$ result

표 1, 표 2, 표 3은 세가지 공간 차분 기법에 대해 각각 $N_x = 50, 100, 200$ 에서 유동 변수들의 1D 결과 대비 L2 norm error 결과이다.

기존 기법은 종횡비가 증가함에 따라 에러가 약 1.5의 오더로 증가하는 반면 FVM과 제안 기법은 0.5에 오더로 증가해 보다 격자 및 질점계 구조에 강건한 모습을 보인다.

⌘ 1. L2 norm error of flow variables for $N_x = 50$

Scheme	AR	$\ \Delta u\ _2$	Order	$\ \Delta v\ _2$	Order	$\ \Delta \rho\ _2$	Order	$\ \Delta p\ _2$	Order
FVM	25	2.049E+00	-	8.239E-01	-	3.588E-01	-	4.553E-01	-
	50	2.898E+00	0.5000	1.167E+00	0.5028	5.075E-01	0.5003	6.442E-01	0.5006
	100	4.099E+00	0.5000	1.653E+00	0.5014	7.178E-01	0.5002	9.112E-01	0.5003
GC-LSM	25	1.706E+01	-	2.067E+01	-	5.822E+00	-	9.287E+00	-
	50	5.228E+01	1.6159	6.216E+01	1.5885	1.820E+01	1.6444	2.843E+01	1.6143
	100	1.401E+02	1.4221	1.642E+02	1.4010	5.370E+01	1.5608	7.677E+01	1.4330
AGC-LSM	25	1.300E+00	-	1.580E+00	-	4.421E-01	-	7.117E-01	-
	50	1.839E+00	0.5010	2.236E+00	0.5014	6.259E-01	0.5015	1.008E+00	0.5014
	100	2.602E+00	0.5005	3.164E+00	0.5007	8.856E-01	0.5007	1.426E+00	0.5007

⌘ 2. L2 norm error of flow variables for $N_x = 100$

Scheme	AR	$\ \Delta u\ _2$	Order	$\ \Delta v\ _2$	Order	$\ \Delta \rho\ _2$	Order	$\ \Delta p\ _2$	Order
FVM	25	2.313E+00	-	9.963E-01	-	4.709E-01	-	5.576E-01	-
	50	3.271E+00	0.5001	1.410E+00	0.5014	6.660E-01	0.5002	7.887E-01	0.5003
	100	4.627E+00	0.5000	1.996E+00	0.5007	9.420E-01	0.5001	1.116E+00	0.5002
GC-LSM	25	2.218E+01	-	2.212E+01	-	5.797E+00	-	9.831E+00	-
	50	6.583E+01	1.5698	6.534E+01	1.5626	1.720E+01	1.5694	2.911E+01	1.5661
	100	2.029E+02	1.6241	1.908E+02	1.5464	5.394E+01	1.6485	8.919E+01	1.6153
AGC-LSM	25	1.759E+00	-	1.756E+00	-	4.595E-01	-	7.827E-01	-
	50	2.489E+00	0.5005	2.484E+00	0.5007	6.501E-01	0.5007	1.107E+00	0.5007
	100	3.520E+00	0.5002	3.514E+00	0.5003	9.197E-01	0.5004	1.567E+00	0.5003

표 3. L2 norm error of flow variables for $N_x = 200$

Scheme	AR	$\ \Delta u\ _2$	Order	$\ \Delta v\ _2$	Order	$\ \Delta \rho\ _2$	Order	$\ \Delta p\ _2$	Order
FVM	25	2.839E+00	-	1.156E+00	-	6.110E-01	-	7.227E-01	-
	50	4.015E+00	0.5000	1.636E+00	0.5007	8.641E-01	0.5001	1.022E+00	0.5002
	100	5.679E+00	0.5000	2.314E+00	0.5004	1.222E+00	0.5000	1.446E+00	0.5001
GC-LSM	25	2.968E+01	-	2.350E+01	-	6.324E+00	-	1.112E+01	-
	50	8.490E+01	1.5164	6.775E+01	1.5275	1.811E+01	1.5176	3.186E+01	1.5190
	100	2.498E+02	1.5567	2.001E+02	1.5625	5.351E+01	1.5633	9.419E+01	1.5640
AGC-LSM	25	2.388E+00	-	1.891E+00	-	5.087E-01	-	8.964E-01	-
	50	3.378E+00	0.5002	2.675E+00	0.5004	7.196E-01	0.5003	1.268E+00	0.5003
	100	4.778E+00	0.5001	3.783E+00	0.5002	1.018E+00	0.5002	1.793E+00	0.5002

그림 35는 위 표의 결과를 로그 스케일 그래프로 표현한 것으로 제안 기법이 기존 기법 대비 종횡비에 강건하게 반응하는 것을 확인하였다.

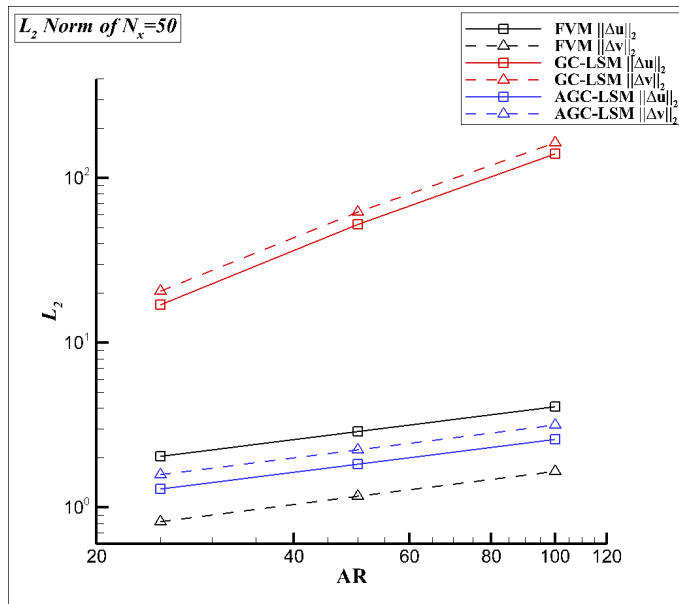


그림 35. L2 norm error log scaled plot

제 4 절 2D RAE2822 Airfoil

RAE2822 익형에 대한 수치 해석을 수행하였다. 해당 익형은 실험 결과가 존재하고[13] 많은 수치기법 연구자들에 의해 해석이 수행된 상호 검증용 테스트 케이스로 검증을 위한 자유류 조건은 $Mach = 0.729, Re = 6,500,000, \alpha = 2.31^\circ, T = 255.56 K$ 이다.

정상상태 난류 유동해석 검증 케이스이므로 격자는 그림 36와 같이 $y^+ = 1$ 을 만족하는 혼합 비정렬 격자로 생성했으며 총 격자 수는 83,126 개, 이 중 Prism Layer 격자 수는 69,920 개이다. 이때 최대 종횡비는 표면 근처에서 약 1,000 정도이며 전체 Computation Domain 크기는 $40C \times 40C$ 이다. 경계조건에 의한 공간 차분 간 결과 차이를 최대한 줄이기 위해 Far Boundary 구역의 격자는 정사각형 정렬 격자 형태로 배치하였다.

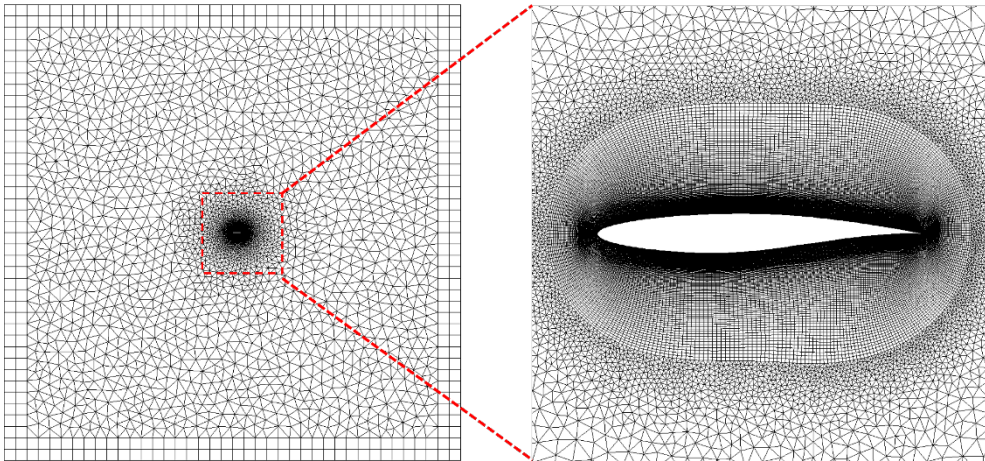


그림 36. Unstructured mesh for RAE2822

각 무격자 기법으로 생성된 가상 다면체는 그림 37과 같다. 균질한 삼각형 격자 구역에서는 두 무격자 기법 모두 FVM 격자를 충분히 잘 모사하며 종횡비가 충분히 작은 Prism Layer 외각 구역에서도 FVM 격자를 충분히 잘 모사하고 있다.

중횡비가 큰 표면 근처에서의 가상 다면체를 확인하면 그림 38, 그림 39, 그림 40와 같다. 익형의 trailing edge 구역을 제외한 대부분의 구역에서 제안 기법이 FVM 격자를 충분히 잘 모사하고 있는 것을 볼 수 있다. Trailing edge에서는 질점계의 skewness가 매우 크기 때문에 본 제안 기법 또한 FVM 격자를 잘 모사하지 못하는데 이러한 극단적인 질점 분포에서는 물체 표면 형상정보와 같은 추가적인 정보가 무격자 계수 산출 과정에 주어지지 않는다면 해결하는 것이 어려울 것으로 판단된다.

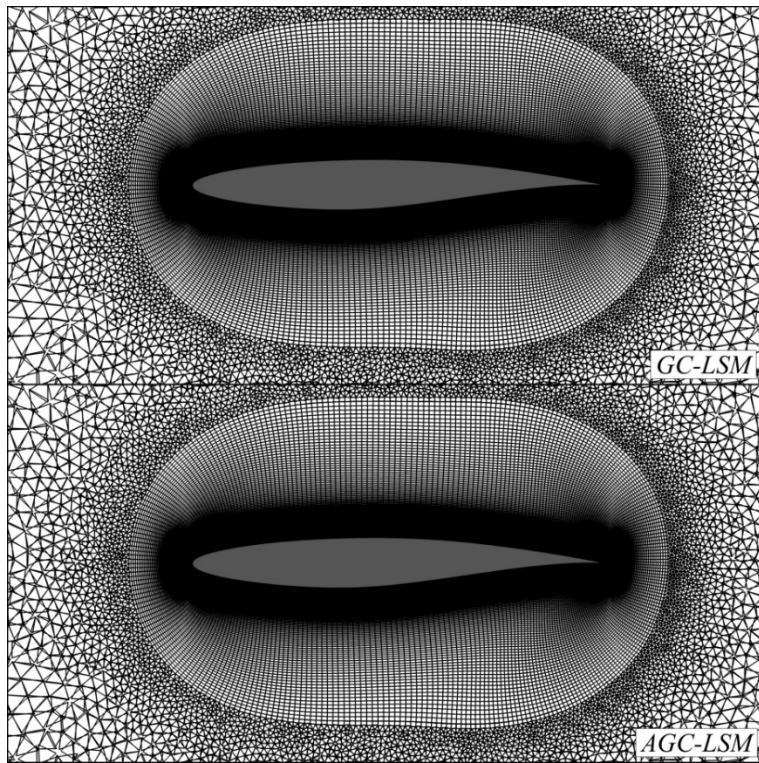


그림 37. Meshless virtual volume for RAE2822

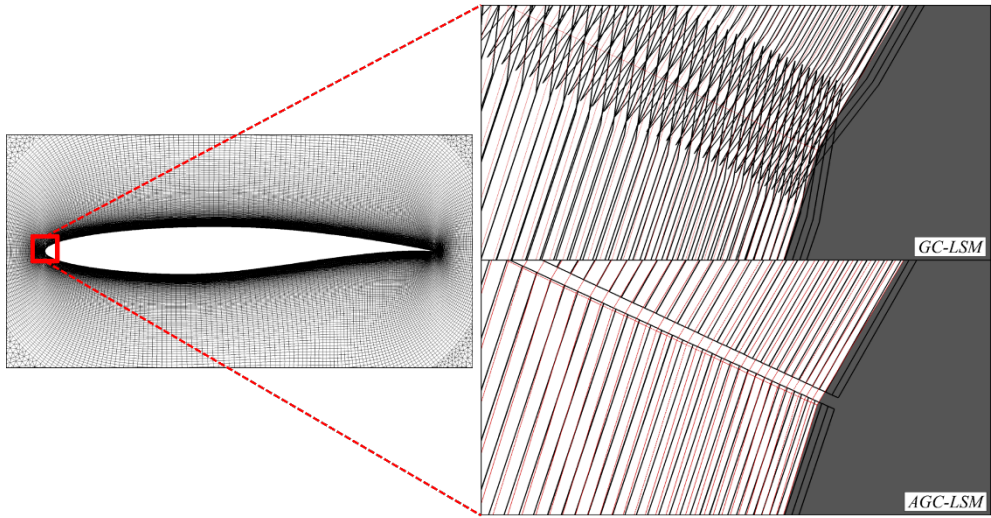


그림 38. Meshless virtual volume for RAE2822(LE)

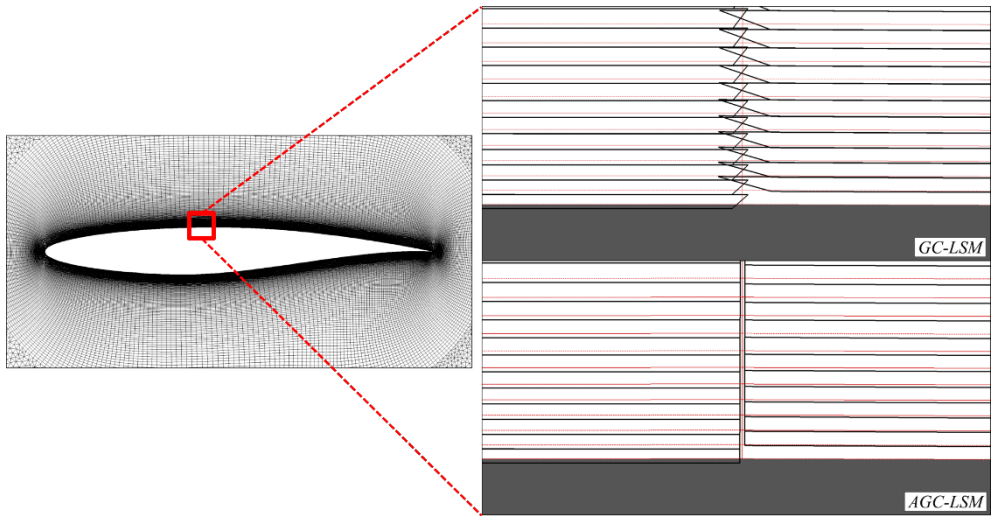


그림 39. Meshless virtual volume for RAE2822(flat region)

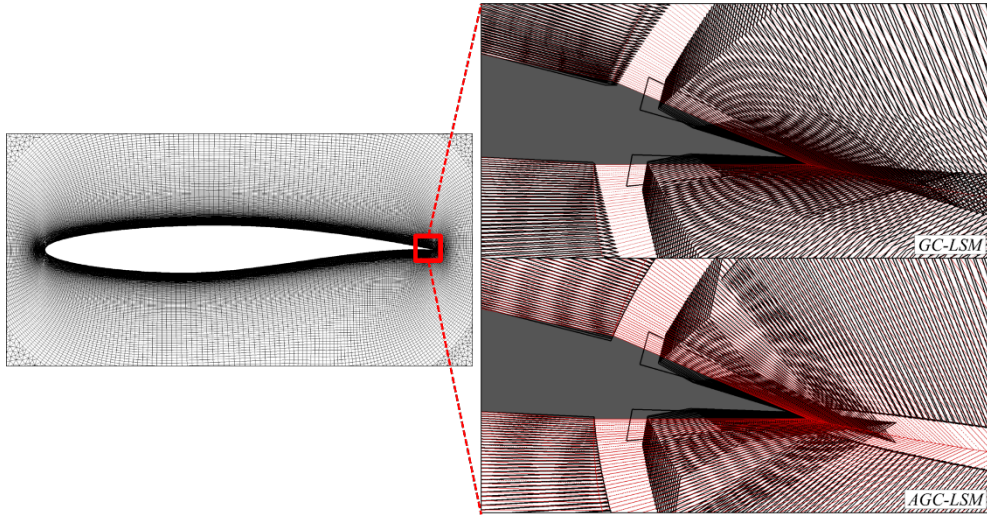


그림 40. Meshless virtual volume for RAE2822(TE)

먼저 해당 격자에서 1차 정확도 비점성 유동 해석을 수행하였으며 그림 41은 각 공간 차분 기법의 익형 표면 압력계수를 실험 값과 함께 나타내었다. 실험 값은 충분히 큰 레이놀즈 수 6,500,000에서 얻어진 결과로 비점성 유동해석 결과에 대한 비교에도 유의미하게 사용될 수 있다.

그림 41, 그림 42에서 볼 수 있듯이 기존 기법은 표면 근처 유동 가속으로 인해 익형 윗면에 위치한 충격파가 비교 값 대비 뒷전 쪽으로 후퇴한 반면 제안 기법은 실험 값과 FVM 결과를 잘 모사하는 것을 확인할 수 있다.

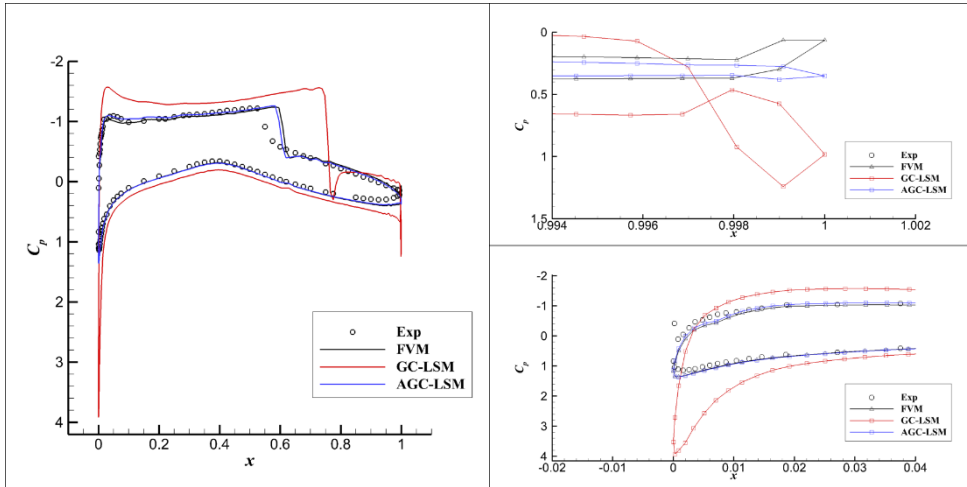


그림 41. Surface C_p distribution for RAE2822

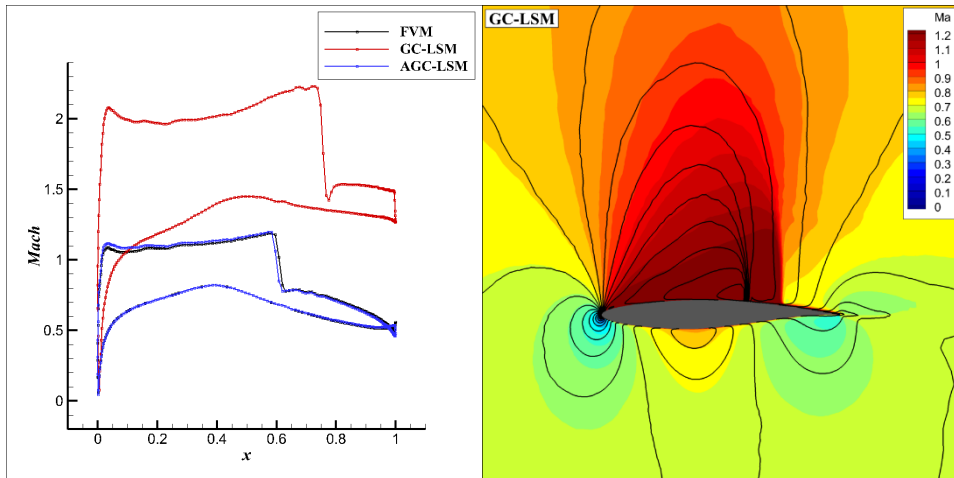


그림 42. Mach distribution and contour for RAE2822

정량적인 검증을 위해 동일한 조건에서 2차정확도 난류(RANS) 유동해석을 수행하였다.

그림 43는 각 공간 차분 방식에 따른 연속방정식 잔차(density residual)의 수렴 이력이다.

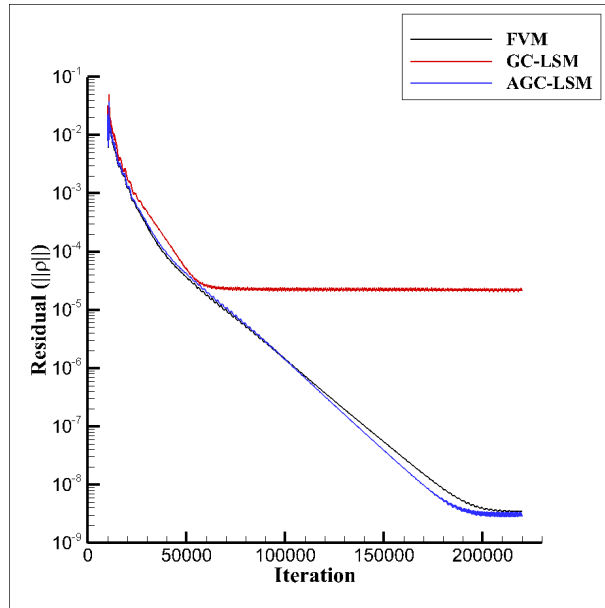


그림 43. Convergence history for RAE2822 (2nd, RANS)

난류 유동 해석의 경우 벽면 경계조건에 의해 경계층 내 유동의 속도가 비점성 유동 해석에 비해 매우 작기 때문에 기울어진 무격자 계수 방향 속도 성분이 상대적으로 작다. 따라서 그림 44를 보면 기존 기법이 보이던 유동 가속 문제가 크게 발생하지 않지만 익형 leading edge 구역에서는 여전히 빠른 유속으로 인한 유동 가속으로 실험 값 대비 큰 압력계수를 보이고 있다. 제안 기법의 경우 실험 값, 검증 해석자의 수치해석 결과, 그리고 FVM 결과를 잘 모사하는 것을 확인할 수 있다.

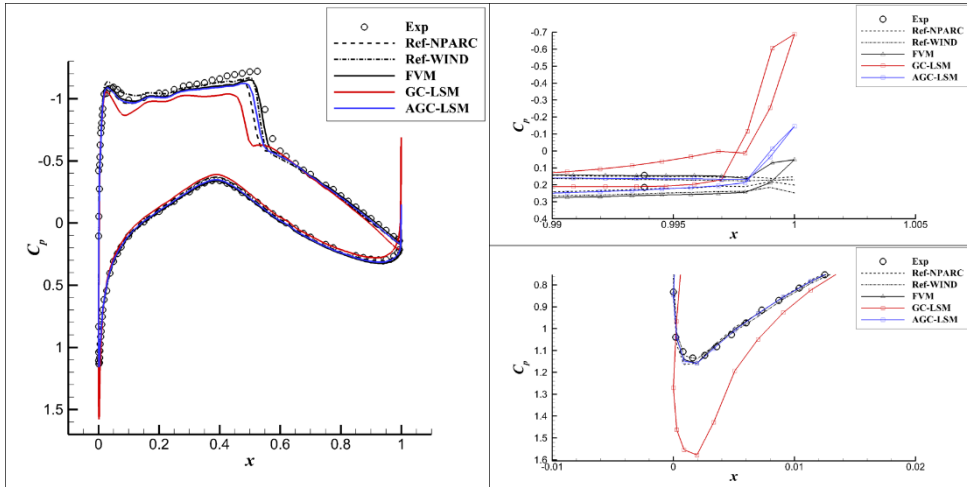


그림 44. Surface C_p distribution for RAE2822 (2nd, RANS)

제 5 절 3D ONERA M6 Wing

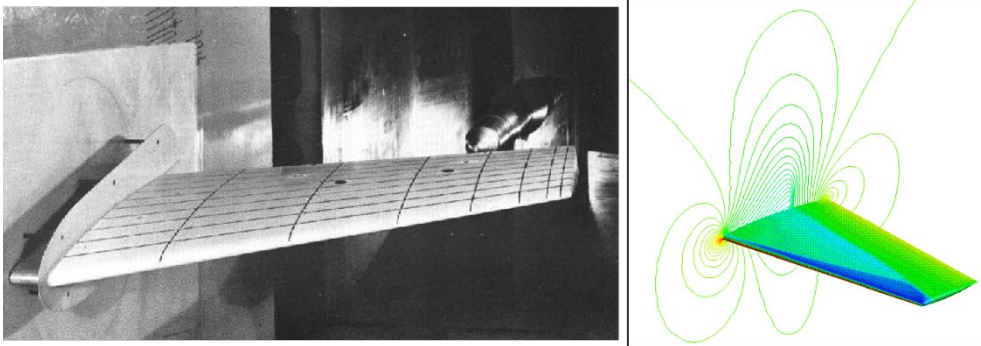


그림 45. ONERA M6 case overview

마지막으로 ONERA M6 날개에 대한 수치 해석을 수행하였다. 해당 모형은 RAE2822와 동일하게 실험 결과가 존재하고[14] 많은 수치기법 연구자들에 의해 해석이 수행된 상호 검증용 테스트 케이스로 검증을 위한 자유류 조건은 $Mach = 0.8395$, $Re = 11,720,000$, $\alpha = 3.06^\circ$, $T = 255.56 K$ 이다.

정상상태 난류 유동해석 검증 케이스이므로 격자는 그림 36와 같이

$y^+ = 1$ 을 만족하는 혼합 비정렬 격자로 생성했으며 총 격자 수는 5,219,242 개, 이 중 Prism Layer 격자 수는 4,228,480 개이다. 이때 최대 종횡비는 표면 근처에서 약 6,000 정도이며 전체 Computation Domain 크기는 $40C \times 40C \times 40C$ 이다. 경계조건에 의한 공간 차분 간결과 차이를 최대한 줄이기 위해 Far Boundary 구역의 격자는 정육면체 정렬 격자 형태로 배치하였다.

격자의 형상은 그림 46, 그림 47과 같다.

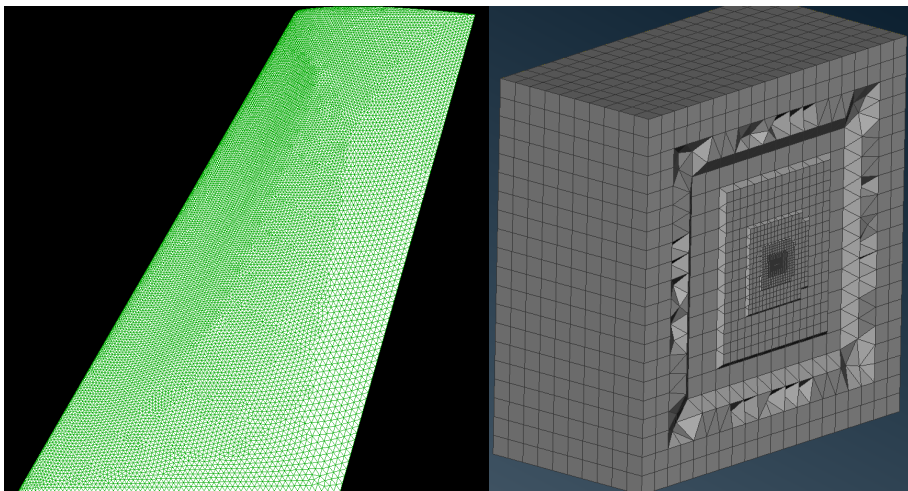


그림 46. ONERA M6 mesh

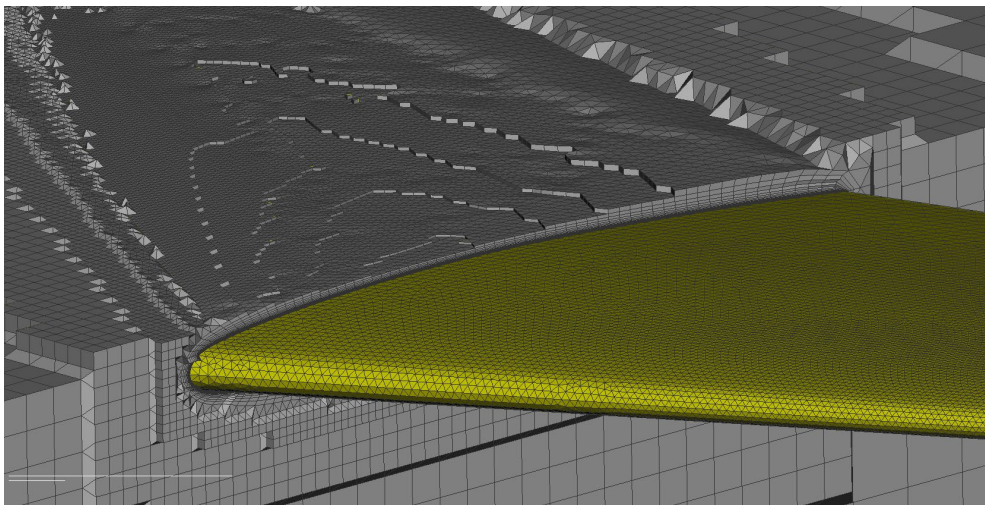


그림 47. ONERA M6 mesh prism layer

먼저 해당 격자에서 1차 정확도 비점성 유동 해석을 수행하였으며 그림 48, 그림 49은 각 공간 차분 기법의 날개 표면 압력계수를 실험 값과 함께 나타내었다. 각 Section의 위치는 그림 45 왼쪽에 나타나 있는 날개 chord 방향 검은 실선이며 상세 위치는 실험 [14]를 확인하면 알 수 있다. 실험 값은 충분히 큰 레이놀즈 수 11,720,000에서 얻어진 결과로 비점성 유동해석 결과에 대한 비교에도 유의미하게 사용될 수 있다.

본 테스트 케이스는 3차원 해석 문제인 만큼 계산 시간을 줄이기 위해 경계층 Prism Layer 구역을 다른 2차원 해석 문제 대비 작게 배치하였다. 따라서 큰 종횡비를 가지는 격자 구역이 작기에 기존 기법 또한 대부분의 구역에서 실험 값과 FVM 결과를 잘 모사한다. 그러나 곡률이 심한 leading edge 구역에서는 RAE2822 케이스와 유사하게 실험 값 대비 높은 압력계수를 보이고 있다.

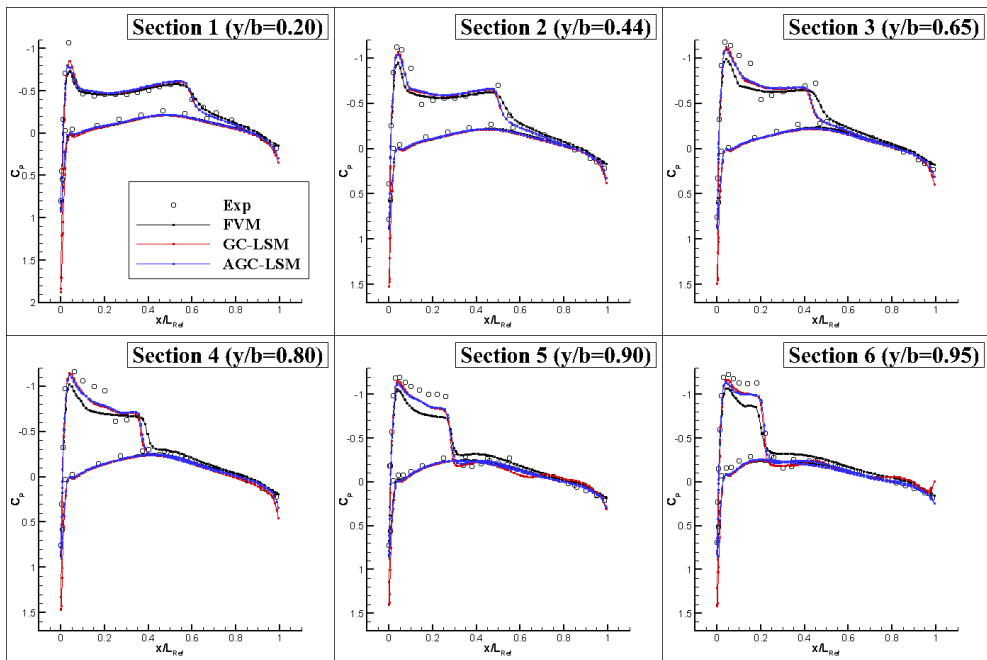


그림 48. Surface C_p distribution for ONERA M6 - 1

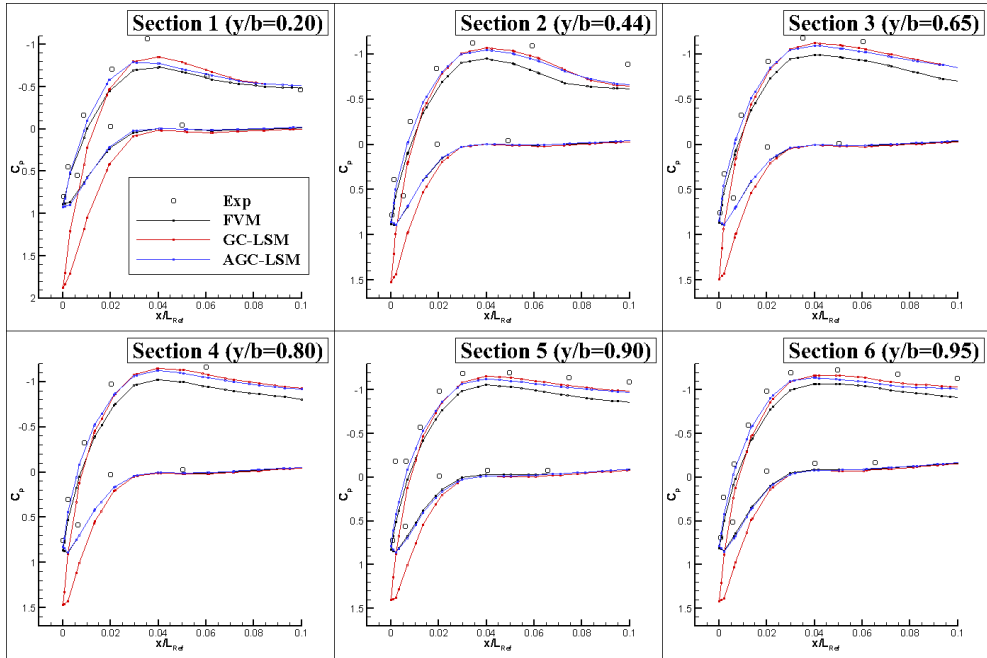


그림 49. Surface C_p distribution for ONERA M6 - 2

그림 50는 표면 압력계수 contour 및 wing tip에 가장 근접한 section에 대한 압력계수 분포이다. 기존 기법의 wing tip 부근에 비물리적인 충격파가 포착되는데 이는 그림 51과 같이 wing tip 부근에서 격자가 높은 곡률을 가지고 있고 받음각이 약 3° 인 자유류로 인해 해당 구역을 휘감으며 흐르는 유동이 있기에 유동 가속이 크게 발생하기 때문이다. 제안 기법의 경우 이러한 wing tip 충격파가 발생하지 않고 실험 값 및 FVM 결과를 잘 모사하는 것을 확인할 수 있다.

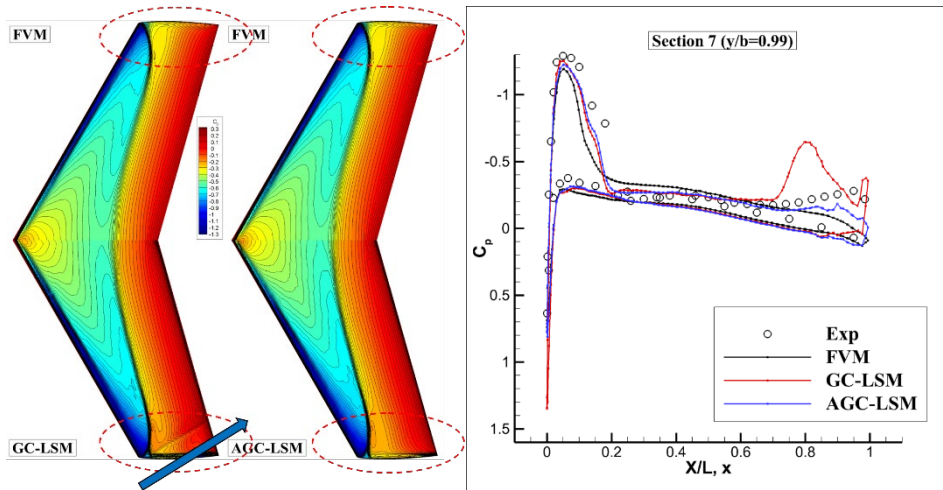


그림 50. Surface C_p contour and wing tip distribution

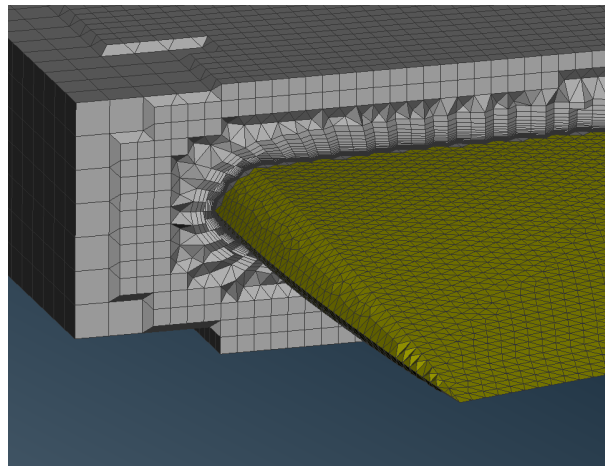


그림 51. Wing tip prism layer

그림 52은 동일한 section에서의 표면 마하수 분포이며 그림 53는 wing tip 구역 표면 마하수 contour이다. 제안 기법의 경우 skewness가 매우 큰 구역을 제외하고 FVM결과를 잘 따라가는 것을 확인할 수 있다.

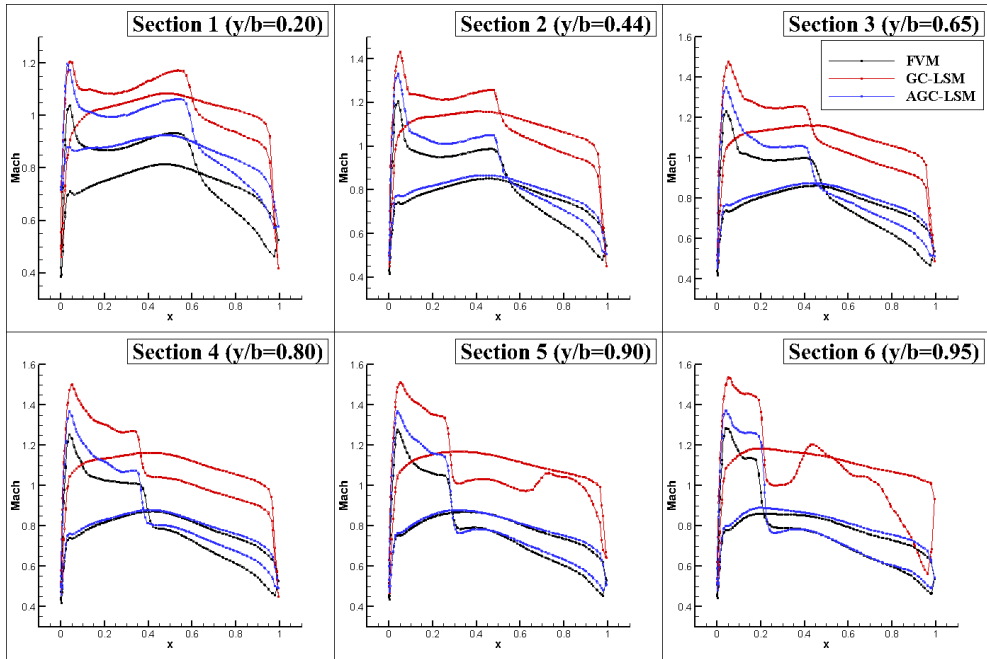


그림 52. Surface Mach distribution for ONERA M6

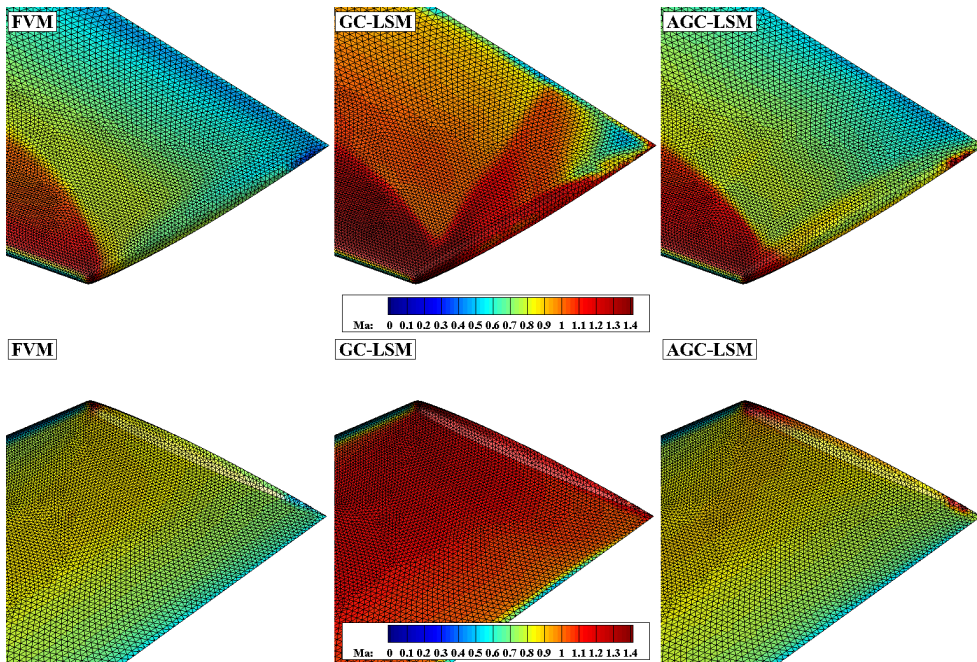


그림 53. Surface Mach contour for ONERA M6

정량적인 검증을 위해 동일한 조건에서 2차정확도 난류(RANS) 유동해석을 수행하였다.

그림 54, 그림 55는 기존과 동일한 Section에 대한 압력계수 분포로 RAE2822 케이스와 동일하게 기울어진 무격자 계수 방향 속도 성분이 상대적으로 작기 때문에 대부분의 구역에서 FVM, 기존 기법, 제안 기법 모두 유사한 결과를 보이고 있다. Leading edge 구역에서 높은 곡률로 인해 기존 기법의 경우 실험 값 및 FVM 결과 대비 높은 압력계수를 보이고 있다.

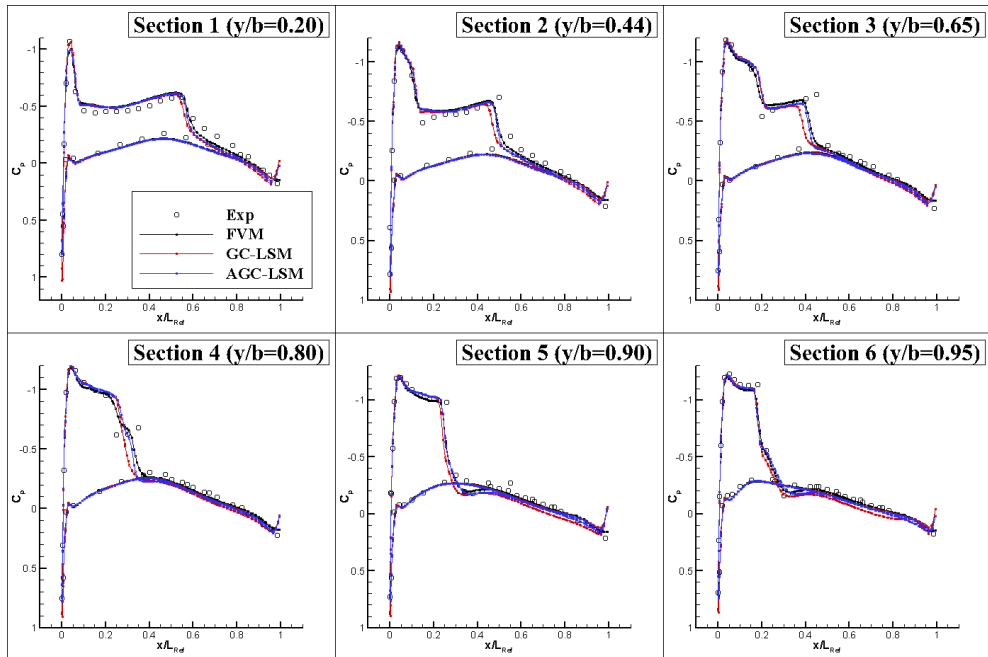


그림 54. Surface C_p distribution for ONERA M6 (2nd, RANS) - 1

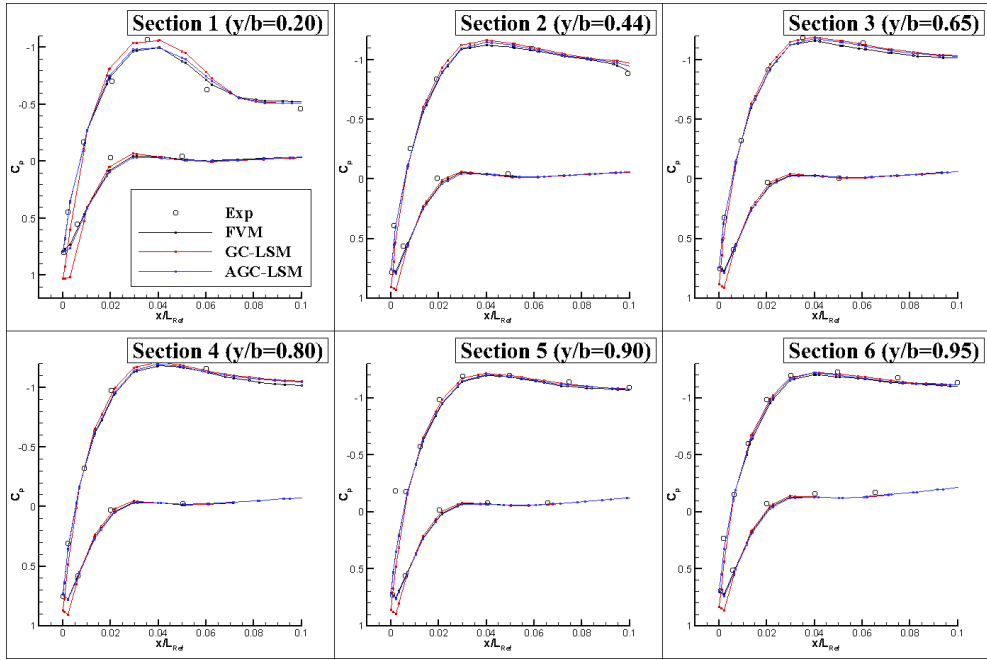


그림 55. Surface C_p distribution for ONERA M6 (2nd, RANS) - 2

그림 56는 표면 압력계수 contour 및 wing tip에 가장 근접한 section에 대한 압력계수 분포이다. 기존 기법의 경우 벽면에 의한 낮은 유속으로 기존 비점성 결과에서 포착되던 wing tip 충격파는 포착되지 않는다.

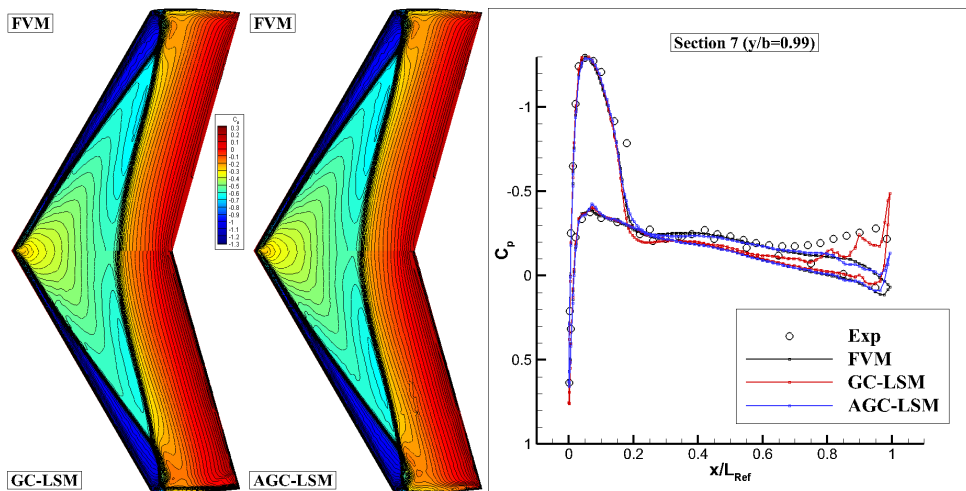


그림 56. Surface C_p contour and wing tip distribution (2nd, RANS)

그림 57, 그림 58은 점성유동에서 표면 마찰계수와 직결되는 표면 바로 위 마하수 분포로 제안기법의 경우 leading edge를 포함한 모든 구역에서 FVM 결과를 잘 모사하는 것을 볼 수 있다.

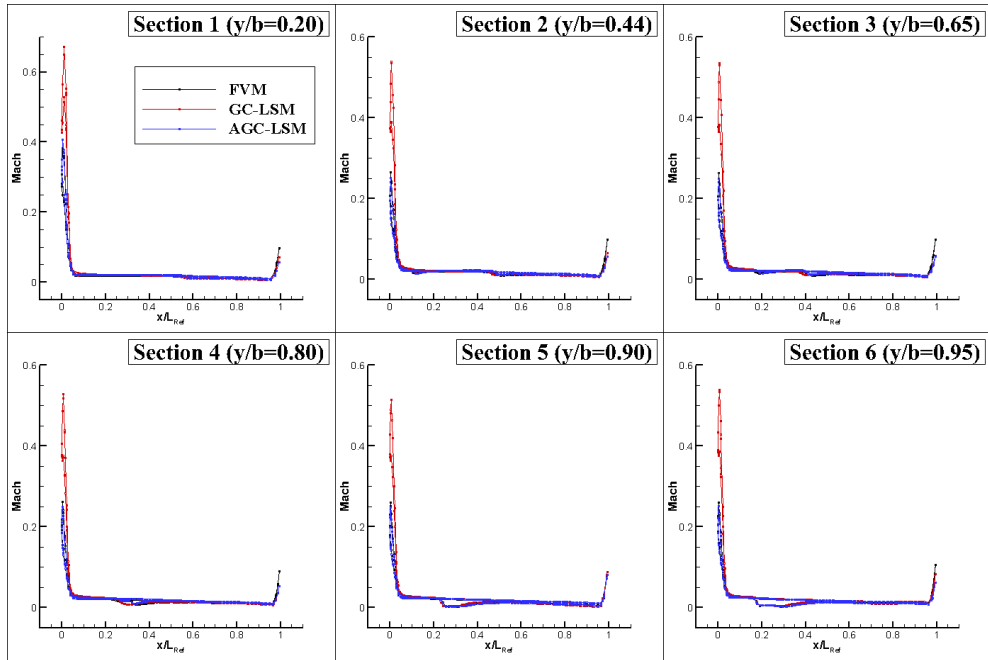


그림 57. Surface Mach distribution for ONERA M6 (2nd, RANS) - 1

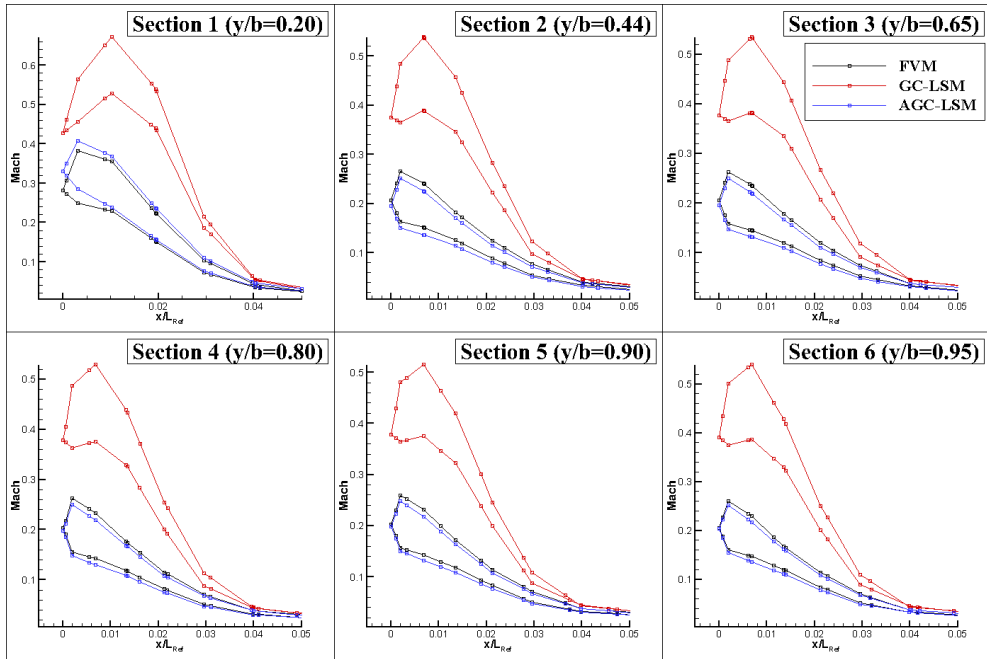


그림 58. Surface Mach distribution for ONERA M6 (2nd, RANS) - 2

제 4 장 결 론

본 연구에서는 큰 종횡비 및 곡률 질점 구조에서 정확도 및 강건성이 향상된 정렬 무격자 기법(AGC-LSM)을 개발하였다. 제안 기법은 라그랑주 승수법을 이용해 무격자 계수를 구하는 과정에서 국소 기하학적 보존 및 큰 종횡비 방향 무격자 계수의 방향에 대한 정렬 제약조건을 부가하였고 주어진 질점계 정보 외 추가 정보의 요구 없이 임의의 질점 구조 및 연결성에 적용 가능하다.

제안 기법에 대해 해당 질점 구조를 가지는 다양한 2차원, 3차원 압축성 유동 수치해석 검증을 수행하여 기존 기법 대비 개선 효과를 확인하였으며 동일 격자계 및 질점계에서 비정렬 유한체적법과 근접한 수준의 정확도 및 강건성을 확보하였다.

제안 기법을 적용하면 큰 종횡비를 가지는 질점 구조가 필연적으로 발생하는 RANS, DES와 같은 난류 유동해석에서 무격자 기법을 효과적으로 적용할 수 있을 것으로 기대된다.

후속 연구로는 무격자 계수로 생성된 가상 다면체를 이용하여 유한체적법에서 사용되는 Mono-slope reconstruction(다차원 제한자)을 적용하는 연구와 Trailing edge와 같은 매우 큰 skewness를 가지는 질점 구조에서의 개선 방향에 대한 연구를 수행하고자 한다.

참고 문헌

- [1] Shepard, Donald. "A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data." Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference. 1968.
- [2] Sridar, D., and N. Balakrishnan. "An upwind finite difference scheme for meshless solvers." Journal of Computational Physics 189.1 (2003): 1-29.
- [3] Zhang, Jia-Le, et al. "A GPU-accelerated implicit meshless method for compressible flows." Journal of Computational Physics 360 (2018): 39-56.
- [4] Löhner, Rainald, and Eugenio Oñate. "An advancing front point generation technique." Communications in numerical methods in engineering 14.12 (1998): 1097-1108.
- [5] Löhner, Rainald, and Eugenio Oñate. "A general advancing front technique for filling space with arbitrary objects." International journal for numerical methods in engineering 61.12 (2004): 1977-1991.
- [6] Huh, Jin Young, et al. "New least squares method with geometric conservation law (GC-LSM) for compressible flow computation in meshless method." Computers & Fluids 172 (2018): 122-146.
- [7] Su, Xinrong, Satoru Yamamoto, and Kazuhiro Nakahashi. "Analysis of a meshless solver for high Reynolds number flow." International Journal for Numerical Methods in Fluids 72.5 (2013): 505-527.
- [8] Spalart, Philippe, and Steven Allmaras. "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows." 30th aerospace sciences meeting and exhibit. 1992.
- [9] Kim, Kyu Hong, Chongam Kim, and Oh-Hyun Rho. "Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ scheme." Journal of computational physics 174.1 (2001): 38-80.
- [10] Yoon, Seokkwan, and Antony Jameson. "Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-

- Stokes equations." AIAA journal 26.9 (1988): 1025–1026.
- [11] Blazek, Jiri. Computational fluid dynamics: principles and applications. Butterworth–Heinemann, 2015.
- [12] Jameson, Antony. "Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings." 10th Computational fluid dynamics conference. 1991
- [13] Cook, P. H., M. C. P. Firmin, and M. A. McDonald. Aerofoil RAE 2822: pressure distributions, and boundary layer and wake measurements. RAE, 1977.
- [14] Schmitt, V. "Pressure distributions on the ONERA M6-wing at transonic mach numbers, experimental data base for computer program assessment." AGARD AR-138 (1979).

Abstract

Improved Meshless Method in Point Cloud with High Aspect Ratio and Curvature

Jun Seok Oh

Department of Aerospace Engineering

The Graduate School

Seoul National University

In this study, cause analysis and improved meshless method were developed to solve the problems that existing meshless method show non-physical and inaccurate results under point cloud with large aspect ratio and curvature.

Based on the characteristics shared by geometric conservation least squares method(GC-LSM) and unstructured finite volume methods, the Lagrange multiplier was used to develop aligned geometric conservation least squares method(AGC-LSM) that impose direction constraints on problematic connectivity in the least squares process, and the proposed method can be effectively applied to any multidimensional point distribution and connectivity.

The comparison and verification of the numerical results of the proposed method, the existing method, and the unstructured FVM were performed under the mesh that have high aspect ratio and curvature, proposed method shows improved result compare to existing method and shows sufficiently comparable results to those of FVM.

In general steady-state turbulent flow analysis, where high aspect ratio and curvature point distributions inevitably occur, the proposed method could be applied to obtain the accurate and robust turbulent boundary layer analysis ability of the meshless method.

Keywords : Computational Fluid Dynamics, Meshless Method, Unstructured Finite Volume Method, Least Squares Method, Lagrange Multiplier, Aspect Ratio, Curvature, Compressible Flow, Turbulent Flow
Student Number : 2020-23740