



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사 학위논문

비정렬 격자계 유동해석자의 수렴
가속을 위한 algebraic multigrid
기법 적용 및 성능 분석

Implementation of algebraic multigrid
method and performance analysis on
unstructured flow solver

2021 년 8 월

서울대학교 대학원

항공우주공학과

김 승 현

비정렬 격자계 유동해석자의 수렴
가속을 위한 algebraic multigrid
기법 적용 및 성능 분석

Implementation of algebraic multigrid method and
performance analysis on unstructured flow solver

지도교수 김 종 암

이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함
2021 년 8 월

서울대학교 대학원
항공우주공학과
김 승 현

김승현의 석사 학위논문을 인준함
2021 년 8 월

위 원 장

부위원장

위 원

국문초록

본 연구에서는 비정렬 격자 기반 압축성 유동 해석자에 수렴 가속화 기법인 algebraic multigrid (AMG) 기법을 적용 후 가속 성능 분석을 진행하였다.

Classic AMG 기법과 additive correction 기반 AMG 기법을 이용하여 타원형 편미분 방정식을 풀으로써 각 기법의 성능 비교 후 비정렬 격자 기반 유동 해석자에 AMG 기법을 적용하였으며, 2차원 아음속, 천음속, 초음속 영역의 비정렬 격자와 정렬 격자 기반의 대칭 익형을 해석함으로써 적용된 AMG 기법의 수렴 가속과 정확성을 검증하였다. 충격파가 발생하는 천음속과 초음속 영역 계산에서는 limiter freezing 기법이 사용되어 잔차(residual)의 감소가 멈추는 경우 limiter 값을 고정하여 사용함으로써 계산을 진행하였다.

AMG 기법의 coarsening은 additive correction method를 기반으로 각 계층(level)에서 주어지 있는 격자 연결 강도에 따른 응집(agglomeration)을 통해 진행되었으며, 각 격자의 연결 강도를 정의하는 응집 기법을 변화시켜가며 사례 연구(case study)를 진행함으로써 응집 기법의 차이에 따른 AMG 기법의 성능 영향에 대한 분석을 진행하였다.

사례 연구에는 Jacobian 행렬 대각 요소의 절댓값, trace of matrix, matrix norm (P-1, P-infinity, Max, Frobenius) 그리고 matrix determinant가 응집 기법으로 사용되었다. 성능 분석 결과, 가장 높은 AMG 기법 성능을 보인 첫 번째 대각 요소를 사용한 계산과 가장 낮은 AMG 기법 성능을 보인 trace of matrix를 사용한 계산의 성능 차이 원인은 AMG 내부의 coarsening 성능 차이에 따른 것으로 분석되었다.

주요어 : 전산유체역학, 수렴 가속화 기법, Algebraic multigrid,
Additive correction method, 비점성 유동, 압축성 유동
학 번 : 2019-26635

목 차

초록	i
목차	iii
표 목차	v
그림 목차	vi
제 1 장 서론	1
1.1 Multigrid 기법	1
1.2 연구 목표	2
제 2 장 수치기법	4
2.1 지배방정식	4
2.2 시간 적분법	5
2.3 AMG 기법	6
2.3.1 Classic AMG 기법	7
2.3.2 Additive correction method 기반 AMG 기법	11
2.3.3 AMG 사이클	16
2.3.4 응집 기법	17
제 3 장 AMG 기법 성능 검증	20
3.1 Poisson equation 해석	20
3.2 아음속 영역 NACA0012 익형 해석	22
3.3 천음속 영역 NACA0012 익형 해석	28
3.4 초음속 영역 NACA0012 익형 해석	33

제 4 장 수치해석	38
4.1 NACA0012 익형	38
4.2 가속화 분석	39
제 5 장 결론	42
참고문헌	44
abstract	46

표 목 차

[표 2.1] 주변 격자의 범주	8
[표 2.2] 응집 기법	18
[표 3.1] 계산 조건	20
[표 3.2] AMG, Gauss-Seidel 기법의 계산 결과	22
[표 3.3] 계산 조건	23
[표 3.4] 아음속 영역 익형 계산 결과	28
[표 3.5] 천음속 영역 익형 계산 결과	33
[표 3.6] 초음속 영역 익형 계산 결과	37

그림 목 차

[그림 2.1] 행렬에 대한 undirected adjacency graph ...	7
[그림 2.2] 성긴 계층 격자 생성 절차	10
[그림 2.3] 격자 응집 예시	12
[그림 2.4] Coarsening 절차 알고리즘	13
[그림 2.5] 예시 격자에 대한 coarsening 연산자	14
[그림 2.6] 예시 응집 격자	15
[그림 2.7] 2-grid correction scheme	17
[그림 2.8] Multigrid 사이클	17
[그림 2.9] 행렬 내 격자 연결 관계	18
[그림 3.1] 계산의 잔차 그래프와 해석적 해 contour ...	21
[그림 3.2] 해석적 해에 대한 AMG 계산 결과 차이	22
[그림 3.3] NACA0012 익형의 사각형, 삼각형 격자에 대한 양력 계수 그래프	23
[그림 3.4] NACA0012 익형의 사각형, 삼각형 격자에 대한 항력 계수 그래프	24
[그림 3.5] 아음속, 사각형 격자의 마하수 contour	25
[그림 3.6] 아음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래 프	25
[그림 3.7] 아음속, 삼각형 격자의 마하수 contour	26
[그림 3.8] 아음속, 삼각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래 프	26
[그림 3.9] 받음각 1.25도, 아음속, 사각형 격자의 마하수 contour	27
[그림 3.10] 받음각 1.25도, 아음속, 사각형 격자의 잔차 그래프	

및 압력계수 그래프	27
[그림 3.11] 천음속, 사각형 격자의 마하수 contour	30
[그림 3.12] 천음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프	30
[그림 3.13] 천음속, 삼각형 격자의 마하수 contour	31
[그림 3.14] 천음속, 삼각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프	31
[그림 3.15] 받음각 1.25도, 천음속, 사각형 격자의 마하수 contour	32
[그림 3.16] 받음각 1.25도, 천음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프	32
[그림 3.17] 초음속, 사각형 격자의 마하수 contour	34
[그림 3.18] 초음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프	34
[그림 3.19] 초음속, 삼각형 격자의 마하수 contour	35
[그림 3.20] 초음속, 삼각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프	35
[그림 3.21] 받음각 1.25도, 초음속, 사각형 격자의 마하수 contour	36
[그림 3.22] 받음각 1.25도, 초음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프	36
[그림 4.1] 각 연결 강도 정의 방법에 따른 계산시간	38
[그림 4.2] 응집 기법에 따라 하나의 성긴 격자로 응집되는 미세 격자의 평균 개수	39
[그림 4.3] 천음속 유동 익형에서의 충격파 위치와 하위 계층 격자 형상	41

제 1 장 서론

1.1 Multigrid 기법

Multigrid 기법은 거대한 규모의 식을 풀 때 이를 가속화하는 대표적인 기법으로써 타원형 편미분 방정식(elliptic partial equation)에 처음 사용되어 이론적인 가속 성능을 보였다.[1] 현재는 전산유체역학(CFD) 분야 등 다양한 분야에서 광범위하게 사용되고 있다. 전산유체역학 분야에서 multigrid와 관련된 연구는 다음과 같다. P.wesseling et al.[2]은 multigrid를 압축성, 비압축성 점성 유동 해석자에 적용하였으며 B.Korren[3]은 defect correction 반복 기법(iteration method)을 multigrid 내에 적용하여 압축성 유동해석을 수행함으로써 해당 기법이 연속적인 문제에서 기존 multigrid 방식보다 효율적임을 보였다. 이외에도 multigrid는 coupled Navier-Stokes equation에 적용되어 계산 수렴을 가속화하는 등 전산유체역학 계산에서 수렴 가속화에 이용되고 있다.[4, 5]

Multigrid 기법은 2가지 아이디어를 통해 계산 가속화를 진행한다. 첫 번째 아이디어는 선형방정식을 풀기 위해 사용되는 Gauss-Seidel 기법과 같은 반복 기법들이 높은 주파수의 오차(high frequency error)를 빠르게 제거할 수 있는 반면에, 낮은 주파수의 오차(low frequency error)는 제거하는데 상대적으로 많은 시간이 소요된다는 점이다. 이 때문에 multigrid 기법에서는 효과적으로 잘 제거되는 높은 주파수의 오차만 제거할 정도로 해당 계층에서 반복 기법을 이용하며 특정 횟수 이후에 잘 제거되지 않는 낮은 주파수의 오차는 남겨둔다.

두 번째 아이디어는 반복 기법에서 효과적으로 제거하지 못하는 낮은 주파수의 오차가 하위 계층으로 투영(projection)되면 낮은 주파수의 오차 특성이 투영된 계층에서 높은 주파수의 오차 특성으로 변한다는 점이

다. 이후 상위 계층에서 투영되어 높은 주파수 특성을 가지는 오차를 다시 반복 기법을 이용하여 효율적으로 제거하고, 남은 오차의 경우 다시 하위 계층으로 coarsening을 반복하는 다중 계층 절차(multi-level process)를 진행함으로써 multigrid는 계산 수렴 가속을 수행한다.

Multigrid 기법은 coarsening 방법에 따라 크게 두 가지 기법으로 나뉜다. 첫 번째는 Geometric multigrid (GMG) 기법이며 두 번째는 Algebraic multigrid (AMG) 기법이다. GMG 기법은 주어져 있는 격자 정보를 이용하여 coarsening을 진행하며 각 계층에서 공간 차분을 개별적으로 진행하는 반면, AMG 기법은 주어져 있는 선형방정식의 행렬 정보만을 이용하여 coarsening을 진행하고 공간 차분은 최상위 계층에서만 진행한다. 이러한 특성으로 AMG 기법은 코드 제작 시 이미 존재하는 해석자에 적용하기에 GMG 기법보다 상대적으로 용이하다는 장점이 존재한다.[6]

AMG 기법 중에서 additive correction method[7, 8] 기반의 AMG 기법은 주변의 격자들을 응집하여 하위 계층의 방정식을 생성한다. 응집 진행 시 현재 격자는 주변 격자 중에서 강한 연결 관계를 지니는 격자와 응집을 진행한다. 강한 연결을 정의하는 방법은 다양하게 존재하며 이전 연구에서 블록 행렬의 첫 번째 값을 이용한 방법[4], 압력 항에 대한 값을 이용한 방법[5]을 예로 들 수 있다. 이렇게 다수의 연구가 강한 연결을 정의하는 방법에 관해서는 설명하고 있었으나 강한 연결 정의 방법 사용 이유에 관한 내용을 언급하지 않았으며 진행된 연구 중 압력기반 비압축성 해석자에 multigrid 사용 시 격자들의 강한 연결 정의 방법에 대한 사례 연구를 진행한 연구가 있었으나[9], 압축성 유동해석자에 대하여 진행된 연구는 존재하지 않았다는 것이 본 연구의 계기로 작용하였다.

1.2 연구 목표

본 연구의 목표는 크게 두 가지로 나뉜다. 첫 번째 연구 목표는 연구

실 in-house 코드에 additive correction method 기반의 AMG 기법을 적용하는 것이다. 연구실 in-house 코드는 비정렬 격자 기반의 압축성 유동해석자로 완전 결합 형태의 (fully coupled) 밀도 기반 해석자 형식이다. AMG 기법은 내재적 시간 적분법에만 이용되는 기법이기에 코드 내의 backward Euler method의 클래스 내에 AMG 기법을 적용한 새로운 클래스를 생성하여 코드 작성을 진행하였다.

두 번째 연구 목표는 각 격자의 연결 강도를 규정하는 방법에 대한 사례 연구를 진행하여 AMG 기법 성능 영향에 대한 분석을 진행하는 것이다. AMG 기법을 유동해석자에 적용하고 사용한 이전 연구에서 격자들의 특정 연결 강도 규정 방식을 사용한 이유에 대하여 자세한 설명을 확인할 수 없었기에 본 연구 목표로 설정하였다.

제 2 장 수치기법

2.1 지배방정식

본 논문에서 사용한 비점성 압축성 유동 해석의 지배방정식은 아래와 같은 Euler equation을 사용하였다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \vec{F}_c dA = 0 \quad (2.1)$$

위 지배방정식에서 Ω 는 임의의 A 검사 표면으로 둘러싸인 검사 체적을 의미한다. Q 는 보존 변수(conservative variable)들로 이루어진 벡터이며, F_c 는 대류 플럭스(convective flux)로써 아래 식(2.2)과 같이 구성된다.

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_c = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + n_x p \\ \rho v U + n_y p \\ \rho w U + n_z p \\ \rho U H \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

위 식(2.2)에서 ρ, u, v, w, p, E, H 는 순서대로 밀도, x 방향 속도, y 방향 속도, z 방향 속도, 압력, 전에너지(total energy), 전엔탈피(total enthalpy)를 의미한다. 식(2.2)에서 U 로 표현된 contravariant velocity는 아래의 식(2.3)과 같다.

$$U = n_x u + n_y v + n_z w \quad (2.3)$$

식(2.1)에 추가로 이상 기체 상태 방정식을 이용하여 계산을 진행한다.

2.2 시간 적분법

본 논문에서는 AMG 기법이 내재적(implicit) 시간 전진 기법에만 적용할 수 있기 때문에 implicit Euler (backward Euler) 시간 전진 기법을 이용하여 계산을 수행하였으며 정상 유동에 대한 해석을 진행하였기에 기존 식(2.1)의 시간 t 는 아래 식(2.5)과 같이 가상 시간(pseudo time) τ 으로 대체하여 사용하였다. 또한, 식(2.5)의 좌항에 변환 행렬(transformation matrix) \bar{P} 를 사용함으로써 벡터 Q 의 보존 변수(conservative variable)를 원시 변수(primitive variable)로 변형하였다. 변환 행렬 $\bar{P} = \partial \vec{Q} / \partial \vec{W}$ 는 아래 식(2.4)과 같다.[10]

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_p H - 1 + \rho h_p & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho h_T \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

식(2.4)의 밑도 아래 첨자는 밑도에 대한 아래 첨자 위치의 변수로 편미분 하였음을 의미한다.

$$\left(\frac{\Omega \bar{P}}{\Delta \tau} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}} \right) \Delta \vec{W} = -\vec{R} \quad (2.5)$$

본 논문에서는 식(2.5)에 AMG 기법을 적용하여 iteration 마다 방정식의 계층을 생성하여 가속화를 진행하였다. 또한, AMG 기법 내에서 사용된 반복 기법(혹은 relaxation method)으로는 symmetric

Gauss-Seidel 기법이 사용되었다.

2.3 AMG 기법

AMG 기법의 절차는 크게 2가지로 나뉜다. 첫 번째 절차는 setup phase로 AMG 기법에서 각 계층의 방정식들을 제작할 때 사용되는 coarsening 연산자(I_h^{2h}), prolongation 연산자(I_{2h}^h), 성긴 계층 행렬 (coarse level matrix : A^{2h})을 생성한다. 이 절차는 AMG 기법 내에서 상당량의 계산시간을 차지한다는 특징이 있다. 그렇기에 코딩을 진행하는 경우 작성 코드의 효율성을 고려해야 한다. 두 번째 절차는 solving phase로써 이전 setup phase에서 제작된 coarsening 연산자, prolongation 연산자, 성긴 계층 행렬과 미리 설정된 반복 기법을 이용하여 주어진 식을 계산하는 절차이다. Solving phase에서 방정식 계층에 어떠한 순서로 접근하느냐에 따라 AMG 기법의 사이클이 결정되며 대표적인 사이클로는 V, F, W 사이클이 있다. 또한, AMG 기법은 적용되는 coarsening 방식에 따라 classic AMG 기법, additive correction method 기반 AMG 기법 등으로 나뉜다.

AMG 기법은 격자의 기하학적 정보를 이용하지 않고 주어진 방정식의 coarsening을 진행한다. 진행 방식은 주어진 선형방정식에 있는 행렬의 undirected adjacency graph를 통해 시작된다. Undirected adjacency graph에서 대각 요소의 개수에 맞춰 격자의 개수를 생성하고, 비대각 행렬 요소에 의하여 각 격자의 연결 관계를 규정한다. 아래 그림(2.1)에 해당 예시를 작성하였다. 또한, AMG 기법은 기하학적 격자 정보를 이용하지 않기에 지금부터는 “격자” 라는 단어의 의미를 기하학적인 격자가 아닌, undirected adjacency graph에서 기인한 “가상 격자” 를 의미하는 것으로 간주한다.

$$A = \begin{bmatrix} x & x & & x & x & & \\ & x & x & & x & & \\ & & x & x & & x & x \\ x & x & & x & x & & \\ x & & & x & & & x & x \\ & & & & x & & & \\ & & & x & & & & x \end{bmatrix}$$

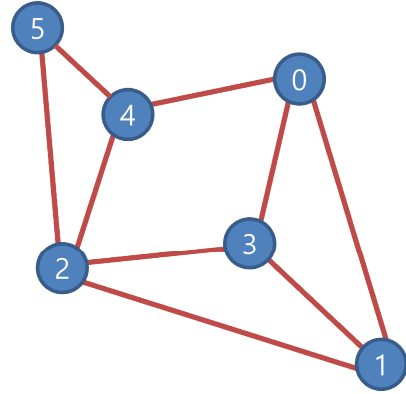


그림 2.1 행렬에 대한 undirected adjacency graph

2.3.1 Classic AMG 기법

Classic AMG 기법은 GMG 기법에서 언급하는 낮은 주파수 오차만 남은 평탄화(smooth) 된 오차를 다른 개념으로 표현한다. AMG 기법이 주어진 선형대수식의 행렬로만 격자에 대한 연결정보를 파악하기에, AMG 기법에서의 평탄화된 오차는 반복 기법이 더는 효율적으로 오차를 줄이지 못하는 상태일 경우의 오차로 표현된다. 이를 “algebraic smoothness” 라고 하며 풀어야 하는 선형대수식을 식(2.6)으로 보았을 때, 반복 기법을 이용해 계산된 근사해 v 를 사용하여 제작되는 잔차 방정식(residual equation)인 식(2.7)으로 표현할 수 있다.

$$Au = f \tag{2.6}$$

$$Ae = r \approx 0, e = u - v, r = f - Av \tag{2.7}$$

그리고 이를 A 행렬의 요소로 표현하면 아래 식(2.8)과 같이 작성하는 것이 가능하다. 식(2.8)을 통하여 행렬의 대칭요소 계산이 비대칭 요소들의 평균 계산을 통해 구해진다는 것을 알 수 있다.

$$a_i e_i = - \sum_{j \neq i} a_{ij} e_j \quad (2.8)$$

식(2.8)에서 확인할 수 있듯, 비대각 요소의 계수가 크면 클수록 i 번째 값의 계산 결과에 영향을 크게 주는 것을 알 수 있다. 그렇기에 각 격자에 대하여 강하게 영향을 준다는 것을 아래 식(2.9)과 같이 정의한다. 식(2.9)에서 θ 는 한계치(threshold)로써 문제에 따라 0에서 1 사이의 사용자가 결정하는 값으로 정의된다.

$$-a_{ij} \geq \theta \max_{i \neq j} \{-a_{ij}\} \quad (2.9)$$

다음 단계인 보간(interpolation) 혹은 prolongation 단계에서는 각 격자에서 강한 연결이 된 방향으로 오차가 “smooth” 하다는 사실을 이용하여 현재 격자에 연결된 주변 격자들을 연결 강도에 따라 아래 표(2.1)와 같이 3가지의 범주로 격자를 분리한다. 이를 C/F splitting이라 한다.

표 2.1 주변 격자의 범주

Notation	Description
C_s	현재 격자에 대하여 강한 연결 관계를 가지며 coarse 격자로 지정된 격자
F_s	현재 격자에 대하여 강한 연결 관계를 가지고 있으나 fine 격자로 지정된 격자
F_w	현재 격자에 대하여 약한 연결 관계를 가지며 fine 격자로 지정된 격자

표(2.1)에서 언급하는 C/F splitting은 heuristic rule과 color scheme을 이용한다. Heuristic rule은 크게 2가지로 다음과 같다.[11, 12, 13]

Rule 1: 모든 fine 격자에 대하여 강하게 영향을 주는 격자들은 C_s 범주에 속하거나, 최소 하나의 C_s 에 연결되어 있어야 한다.

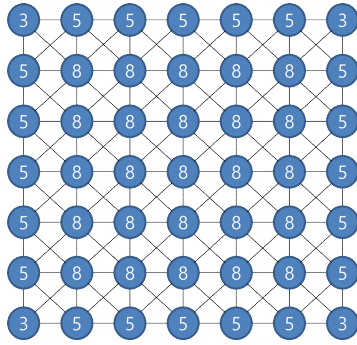
Rule 2: C_s 범주는 C_s 범주에 속한 격자들이 서로 연결되지 않는 최대의 하위 집합이어야 한다.

Rule 1은 C_s 격자가 F_s , F_w 격자들과 반드시 연결될 수 있도록 유도하며 rule 2는 C_s 격자끼리 연결되는 것을 방지한다. 이러한 heuristic rule을 지키며 coloring scheme을 진행한다.

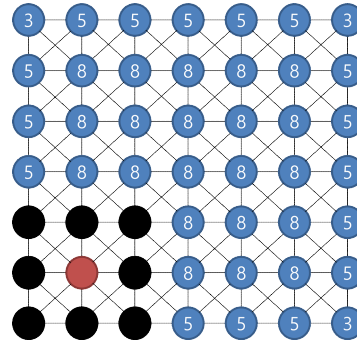
Coloring scheme은 새로운 변수 λ 를 정의한다. 처음에 λ 는 현재 격자가 보유하는 강한 연결 관계의 주변 격자 개수의 값을 가진다. 그다음 전체 격자에 대한 λ 를 조사하여 가장 큰 값의 λ 를 가지는 격자를 첫 C_s 범주 격자로 지정한다. 이는 다른 격자에 강한 영향을 많이 미치는 격자가 주변 격자들을 대표하는 성긴 계층 격자가 되어야 하기 때문이다.

첫 C_s 범주 격자가 지정되면 해당 격자와 연결된 주변 격자들은 모두 연결 관계에 따라 F_s 혹은 F_w 범주로 배정하며 이는 rule 1에 의한 작업이다. 이후 배정된 F_s , F_w 범주의 격자들과 연결되어 있으며 배정되지 않은 격자들의 λ 값은 연결된 F_s , F_w 범주 격자의 개수만큼 1이 더한다. 그 후, 배정되지 않은 격자들에 대하여 최대 λ 값을 가지는 격자를 찾고, 지금까지의 작업을 반복한다. 본 절차는 행렬에서 대각위치 계수가 8, 비대각 위치 계수가 -1인 9-point stencil 행렬을 통한 예시를 보이는 그림(2.2)과 같이 순차적으로 진행된다. 그림(2.2)에서 원형 내 숫자는 λ 값을 의미한다.

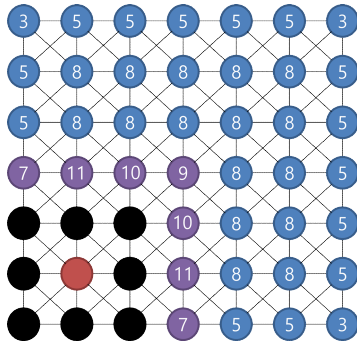
Prolongation 연산자는 생성될 시 C_s 범주에 속하는 값은 그대로 주입(injection)하고 F_s , F_w 범주의 값은 주변의 C_s 범주에 포함되는 값들에 가중치를 곱한 후 더함으로써 생성된다. 이를 아래 식(2.10)과 같이 표현할 수 있다. 식(2.10)에서 w_{ij} 는 가중치로써 식(2.11)과 같이 계산한다.[11]



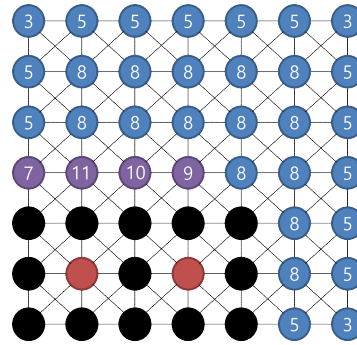
1. 초기 격자 및 각 격자의 λ 값



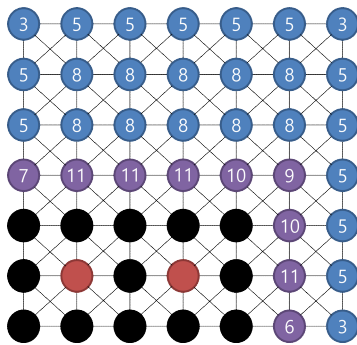
2. 최대 λ 격자 $\rightarrow C$, 주변 격자 $\rightarrow F$



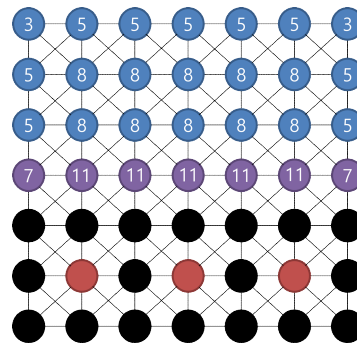
3. F 격자에 연결된 격자 $\lambda = \lambda+1$



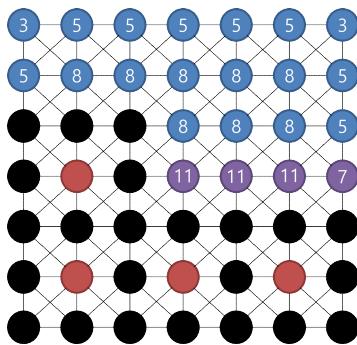
4. 최대 λ 격자 $\rightarrow C$, 주변 격자 $\rightarrow F$



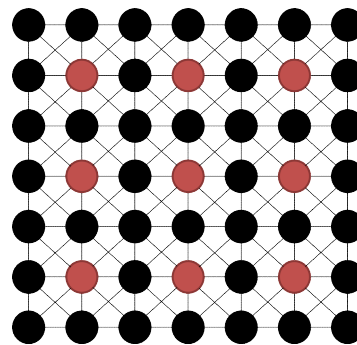
5. F 격자에 연결된 격자 $\lambda = \lambda+1$



6. 최대 λ 격자 $\rightarrow C$, 주변 격자 $\rightarrow F$



7. F 격자에 연결된 격자 $\lambda = \lambda+1$



8. C/F splitting 최종 완료

그림 2.2 성긴 계층 격자 생성 절차

$$(I_{2h}^h e)_i = \begin{cases} e_i & \text{if } i \in C \\ \sum_{j \in C_i} w_{ij} e_j & \text{if } i \in F \end{cases} \quad (2.10)$$

$$w_{ij} = - \frac{a_{ij} + \sum_{m \in F_i^s} \left(\frac{a_{im} a_{mj}}{\sum_{k \in C_i} a_{mk}} \right)}{a_{ii} + \sum_{n \in F_i^w} a_{in}} \quad (2.11)$$

식(2.10)과 식(2.11)을 이용하여 prolongation 연산자를 생성한다. Coarsening 연산자는 식(2.12)과 같이 prolongation 연산자와 전치(transpose) 관계를 지니며, 성긴 계층 행렬은 Galerkin condition을 통해 아래 식(2.13)과 같이 계산된다.

$$I_{2h}^h = (I_h^{2h})^T \quad (2.12)$$

$$A^{2h} = I_h^{2h} A^h I_{2h}^h \quad (2.13)$$

2.3.2 Additive correction method 기반 AMG 기법

Additive correction method 기반 AMG 기법은 classic AMG 기법이 미세(fine) 격자에서 C_s 범주를 찾아 성긴 계층 격자를 규정하는 C/F splitting을 하지 않고 그림(2.3)과 같이 미세 계층의 격자들을 응집함으로써 성긴 계층 격자를 생성하는 기법이다. 본 논문에서는 additive correction method를 기반으로 하는 AMG 기법을 이용하여 익형 문제를 해석하였다.

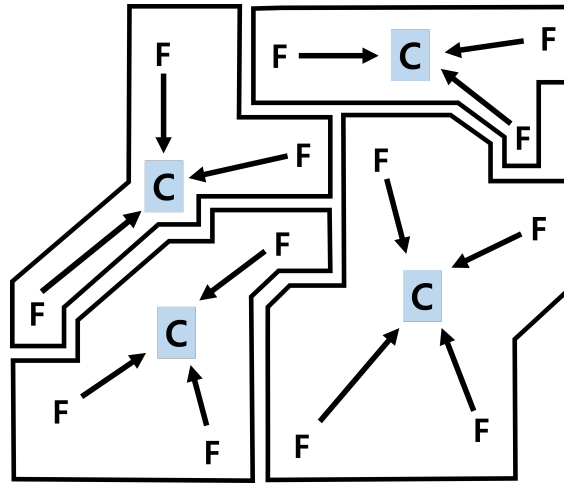


그림 2.3 격자 응집 예시

Additive correction method를 기반으로 하는 AMG 기법의 coarsening 절차는 다음과 같다. Classic AMG 기법에서처럼 강한 연결 관계를 찾고, 최댓값의 λ 를 찾는 방식과 다르게, 미세 격자들로부터 먼저, 어떠한 격자들과 결합 될 것인지, 그리고 몇 개의 미세 계층 격자를 하나의 성긴 계층 격자로 결합할 것인지를 규정한 후 주어진 알고리즘을 통해 coarsening을 진행한다. 결합되는 미세 격자 개수는 “mgbmax” 라는 이름의 변수로 알고리즘 내에 규정된다. 이러한 응집 알고리즘은 그림(2.4)과 같다. 균일한 크기의 성긴 계층 격자를 생성하기 위하여 알고리즘의 입력 매개변수인 mgbmax 값을 만족하는 것을 우선시하여 강한 연결을 가지는 격자끼리 응집되도록 제작되었으며, 이를 기반으로 코드가 작성되었다.

알고리즘을 통한 결합이 완료되면 식(2.14)과 같이 해당 미세 계층 격자들의 값들을 더함으로써 새롭게 성긴 계층 격자의 값을 계산한다.

$$(\mathcal{I}_h^{2h}) = \begin{cases} 1 & \text{성긴 격자에 포함된 미세 격자의 경우} \\ 0 & \text{성긴 격자에 포함되지 않은 미세 격자의 경우} \end{cases} \quad (2.14)$$

논문에서 사용하는 지배방정식에 식(2.14)을 적용하는 경우 복수의

변수가 계산되어야 하기에 1이 아닌, 변수 개수만큼의 크기를 가지는 정사각 행렬 단위행렬이 1 대신 작성되어야 한다. 2차원의 경우 4×4 크기의 단위행렬이 작성되며 coarsening 연산자는 블록 희소 행렬 형태를 지니게 된다. 이는 그림(2.5)의 예를 통하여 확인할 수 있다. 그림(2.5)에서 붉은 점선으로 생긴 계층 격자를 분별하였으며 생긴 계층 격자의 순서(혹은 색인)를 사각형 내에 표기하였다.

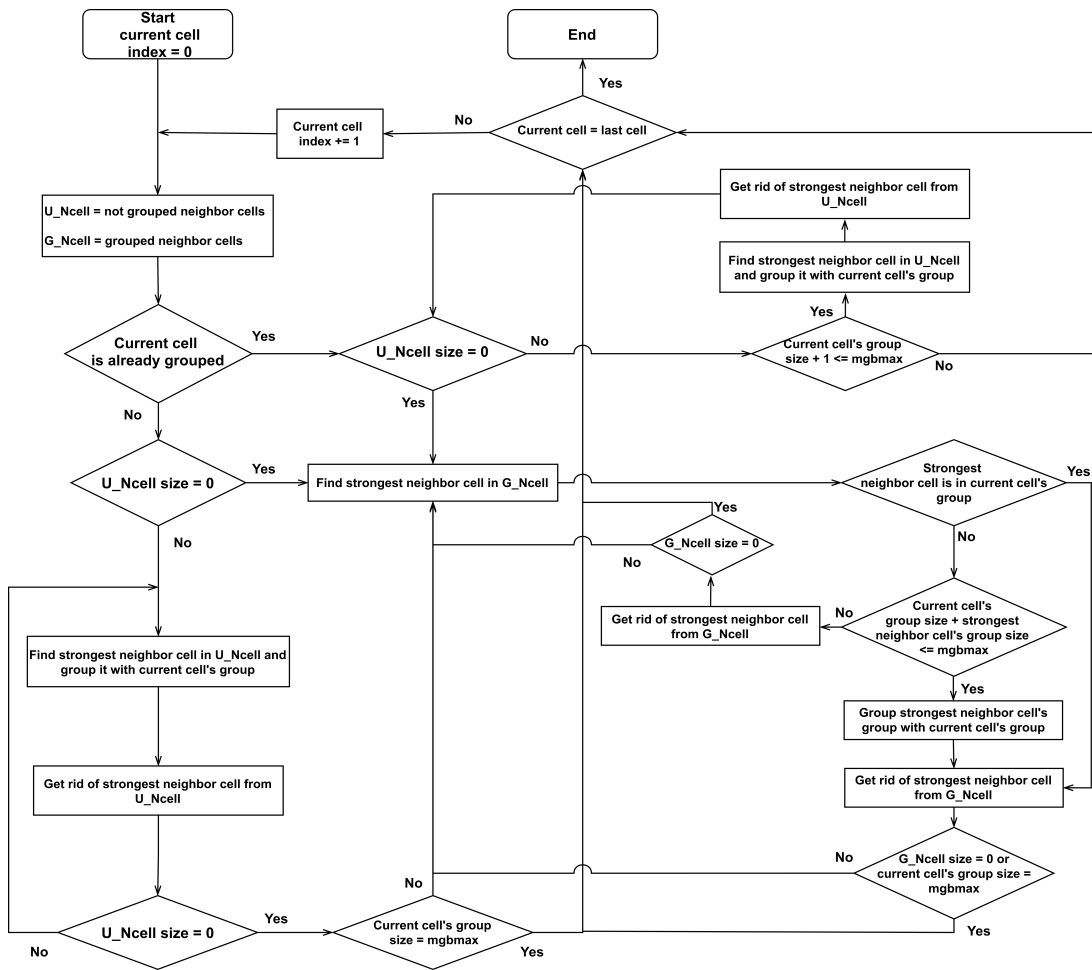


그림 2.4 Coarsening 절차 알고리즘

Additive correction method 기반 AMG 기법의 prolongation 연산자는 classic AMG 기법과 마찬가지로 식(2.12)과 같이 coarsening 연산자와 전치 관계를 지닌다. Prolongation 연산자는 식(2.7)의 오차에

적용되어 성긴 계층 격자로부터 계산된 오차를 성긴 격자를 이루고 있는 미세 계층 격자들로 균일 배분하여 보정(correction)을 진행한다.

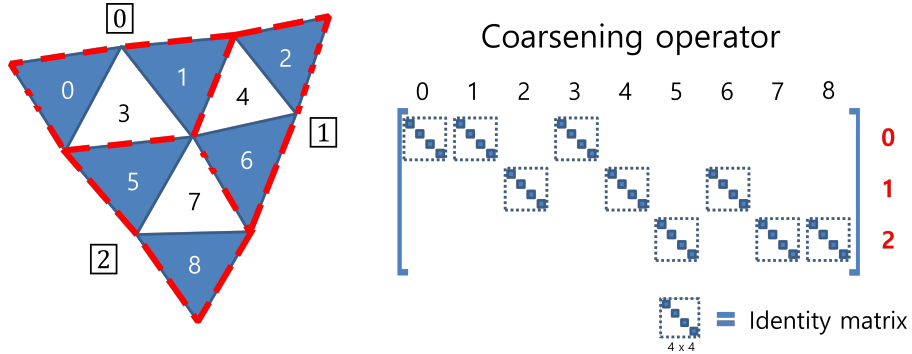


그림 2.5 예시 격자에 대한 coarsening 연산자

성긴 계층 행렬(A^{2h})은 성긴 계층 격자의 오차로부터 보정이 진행된 해로부터 계산된 미세 계층 격자의 잔차가 성긴 계층 격자에 대해서 합을 진행하였을 때 0이 되도록 전제함으로써 계산이 유도된다. 전제는 식(2.15)과 같으며 식(2.16)을 통해 성긴 계층 행렬(A^{2h})이 유도된다.[14, 15, 16]

$$I_h^{2h} r^{\neq w} = \sum r^{\neq w} = 0 \quad (2.15)$$

$$r^{\neq w} = f - A^h v^{\neq w} = f - A^h (v + I_{2h}^h e^{2h})$$

$$I_h^{2h} A^h I_{2h}^h e^{2h} - I_h^{2h} r^h = 0 \quad (2.16)$$

$$A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$$

위 식(2.16)을 통해 성긴 계층 행렬(A^{2h})은 미리 제작된 coarsening 연산자와 prolongation 연산자가 미세 계층 행렬(A^h)의 양옆에 곱해지는 것으로 계산되는 것을 알 수 있다. 여기서 식(2.16)의 계산을 통해 성긴 격자에서의 행렬값이 해당 격자를 구성하는 미세 격자 행렬값의 합

으로부터 계산됨을 알 수 있다. 이는 아래 그림(2.6)의 예시 격자에 대한 일부 계수들을 계산함으로써 확인할 수 있다.

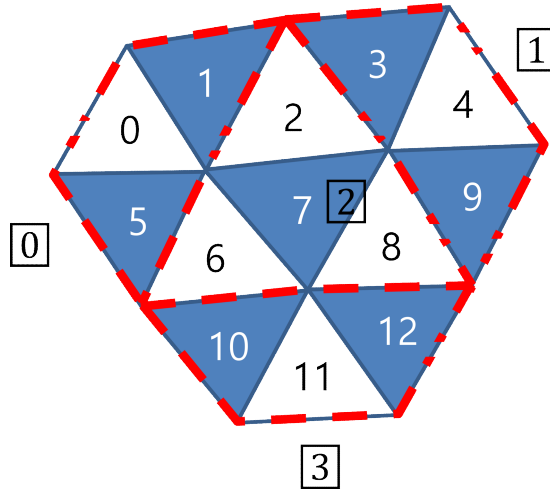


그림 2.6 예시 응집 격자

$$A^{2h}e^{2h} = a_{2,2}^{2h}e_2^{2h} + a_{2,0}^{2h}e_0^{2h} + a_{2,1}^{2h}e_1^{2h} + a_{2,3}^{2h}e_3^{2h} = r^{2h} \quad (2.17)$$

$$a_{2,0}^{2h} = a_{2,1}^h + a_{6,5}^h$$

$$a_{2,1}^{2h} = a_{2,3}^h + a_{8,9}^h$$

$$a_{2,2}^{2h} = a_{2,2}^h + a_{6,6}^h + a_{7,7}^h + a_{8,8}^h + a_{2,7}^h + a_{6,7}^h + a_{7,2}^h + a_{7,6}^h + a_{7,8}^h + a_{8,7}^h$$

$$a_{2,3}^{2h} = a_{6,10}^h + a_{8,12}^h$$

식(2.17)을 자세히 보면, 성긴 계층 행렬의 대각(diagonal) 위치에 놓이는 계수($a_{2,2}^{2h}$)는 해당 격자를 구성하는 미세 계층 격자들의 미세 계층 행렬에서의 계수들과 내부 연결 관계에 해당하는 계수가 더해져 계산되며, 비대각 위치에 놓이는 계수는 미세 계층 행렬 위치의 격자에 해당하는 계수들의 합으로 계산되는 것을 확인할 수 있다.

2.3.3 AMG 사이클

AMG 기법은 setup phase에서 생성한 coarsening 연산자, prolongation 연산자를 이용하여 각 계층의 방정식을 제작한다. 그리고 제작된 각 계층에 접근하는 순서에 따라 AMG 기법의 사이클이 결정되며 대표적인 AMG 사이클로는 V 사이클, F 사이클, W 사이클이 있다. 이 사이클들은 모두 가장 기본적인 2-grid correction 사이클을 재귀적으로 사용하는 알고리즘이다.

2-grid correction 사이클은 2개의 계층만으로 구성되며 아래와 같은 알고리즘으로 구성된다.

2 - grid correction 사이클 알고리즘

1. 정해진 ν_1 횟수만큼 반복 기법을 주어진 식 $A^h u = f$ 에 사용, 근사 해 v 를 계산
 2. 근사 해 v 를 이용하여 잔차 방정식 $A^h e^h = r^h$ 생성
 3. Coarsening/prolongation 연산자 사용, 하위 계층 잔차 방정식 $A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$ 생성
 4. 하위 계층 잔차 방정식에서 e^{2h} 계산
 5. 계산된 e^{2h} 에 prolongation 연산자를 이용, 보정 진행
($v^{new} = v + J_{2h}^h e^{2h}$)
 6. 보정을 진행한 예측값 v^{new} 을 초기 값으로 식 $A^h u = f$ 에서 정해진 ν_2 횟수만큼 반복 기법을 사용하여 최종 해 계산
-

위 2-grid correction 알고리즘을 아래 그림(2.7)처럼 도식화하는 것이 가능하다. 그림(2.7)의 하위 계층에서 2-grid correction 알고리즘이 재귀적으로 사용됨으로써 V 사이클, F 사이클, W 사이클이 제작된다. 그림(2.8)을 통해 각 사이클의 형상에 관하여 확인할 수 있다. 각 사이클은 W, F, V 사이클 순서대로 계산 비용을 많이 소모한다는 특징이 있다.

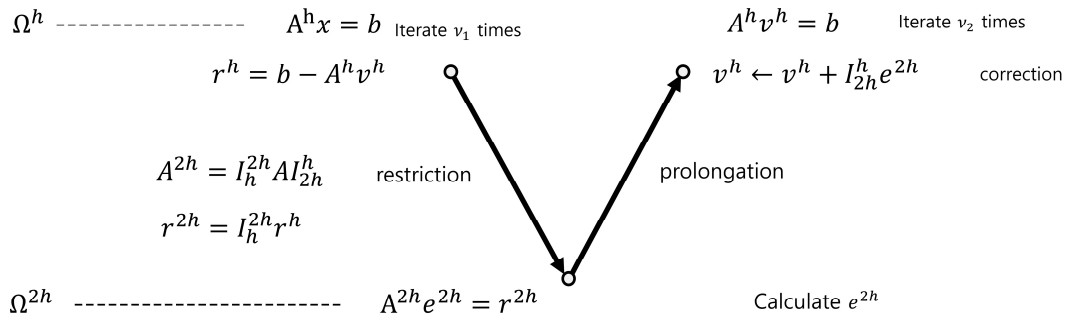


그림 2.7 2-grid correction scheme

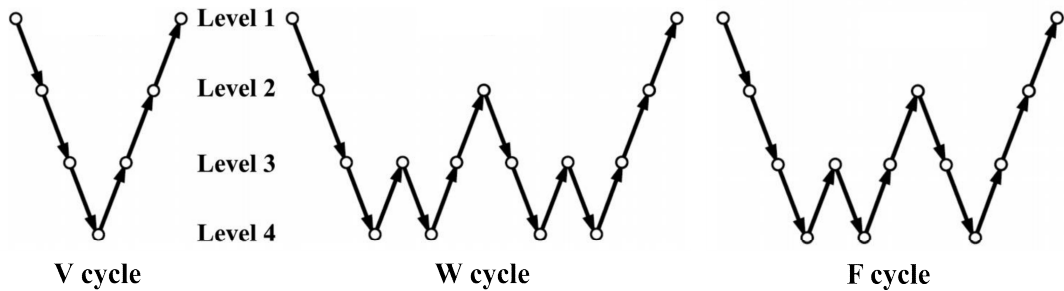


그림 2.8 Multigrid 사이클

2.3.4 응집 기법

Additive correction method 기반 AMG 기법은 위 그림(2.4)의 알고리즘으로 setup phase가 진행된다고 이전 장에서 설명하였다. Setup phase 내에는 각 격자의 연결 강도를 확인하여 가장 강한 연결 강도를 가지는 격자부터 규정한 mgbmax 값만큼 그룹을 만들어 이를 바탕으로 coarsening 연산자와 prolongation 연산자를 제작한다.

풀어야 하는 지배방정식의 변수가 한 개일 경우 해당 격자들의 연결과 관련된 행렬값의 절댓값을 이용하여 격자들 사이의 연결 강도를 정의하나, 본 논문에서 AMG 기법을 적용하는 압축성 유동해석자의 경우 한 격자 내에 압력, 속도, 온도의 여러 변수가 저장된다. 그렇기에 격자들의

연결이 스칼라값으로 표현되지 못하고, 아래 그림(2.9)과 같이 식(2.5)의 행렬 내부에 Jacobian 행렬 형태로 나타나게 된다. 2차원의 경우 4×4 Jacobian 행렬의 형태로 격자들의 연결 관계가 표현되며 연결 강도의 정의 방식은 행렬의 요소들을 이용하여 결정한다. 이 격자의 연결 관계를 정의하는 방법을 본 논문에서는 “응집 기법”으로 언급하며 10가지 기법을 이용하여 AMG 기법의 가속 성능을 확인하였다. 사용한 응집 기법들은 아래 표(2.2)와 같다.

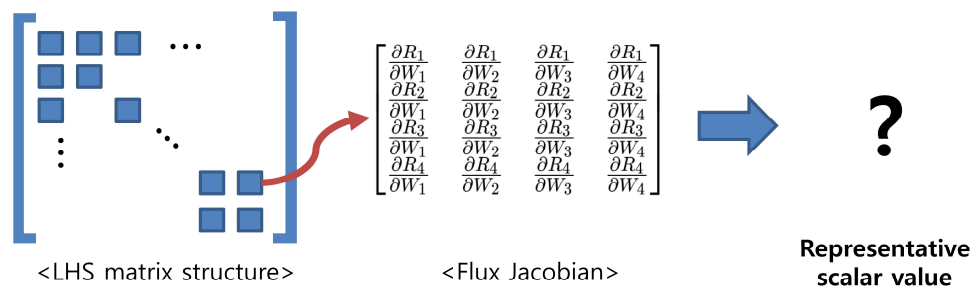


그림 2.9 행렬 내 격자 연결 관계

표 2.2 응집 기법

Index	Method
1	1 st diagonal absolute value
2	2 nd diagonal absolute value
3	3 rd diagonal absolute value
4	4 th diagonal absolute value
5	P - 1 norm
6	P - infinity norm
7	Frobenius norm
8	Max norm
9	Trace of matrix
10	Determinant of matrix

격자의 연결 관계를 나타내는 Jacobian 행렬은 4×4 행렬이기에 표(2.2)의 1~4번 방법은 행렬의 대각 요소 중 해당 순서에 속하는 값의

절댓값을 이용하는 방법이다. P-1 norm, P-infinity norm, Frobenius norm, Max norm은 아래 식(2.18) ~ 식(2.21)과 같이 계산된다.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (2.18)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (2.19)$$

$$\|A\|_{Frobenius} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2} \quad (2.20)$$

$$\|A\|_{\max} = \max_{ij} |a_{ij}| \quad (2.21)$$

제 3 장 AMG 기법 성능 검증

3.1 Poisson equation 해석

본 장에서는 AMG 기법을 사용하지 않는 계산과 classic AMG 기법과 additive correction method 기반 AMG 기법의 2-grid 사이클을 이용하여 계산하는 경우로 나누고 5-point stencil 유한 차분 기법 (finite difference method)을 이용하여 Poisson 방정식[11]을 풀어보았으며, 이때 계산마다 걸리는 시간과 계산 결과의 정확성을 파악하였다. 계산에 사용한 Poisson 방정식은 아래 식(3.1)과 같으며 계산 조건은 아래 표(3.1)와 같이 설정하였다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\{(1-6x^2)y^2(1-y^2) - (1-6y^2)x^2(1-x^2)\} \quad (3.1)$$

$$u(x,y) = (x^2 - x^4)(y^4 - y^2) \quad (3.2)$$

표 3.1 계산 조건

Criteria	Description
Grid	64×64 quadrilateral grid
Error convergence	1.0e-10
Iteration method	Gauss-Seidel method
AMG threshold (classic)	0.5
mgbmax (agglomeration)	4

계산 결과에 대한 계산 정확성 확인은 식(3.2)의 해석적 해(analytic solution)를 Gauss-Seidel 기법을 사용한 계산, classic AMG 기법과

additive correction method 기반 AMG 기법을 사용한 계산의 결과에서 뺀 후 이를 contour에 표시하고 비교하는 것으로 진행하였다.

각 Gauss-Seidel 기법을 이용한 계산과 classic AMG 기법, additive correction method 기반 AMG 기법을 이용한 계산의 잔차 그래프를 그림(3.1) 좌측에, 해석적 해는 그림(3.1)의 우측에 작성하였다. Classic AMG 기법과 additive correction method 기반 AMG 기법을 이용한 해와 해석적 해의 차이는 그림(3.2)과 같이 나타나며, 차이가 일반 Gauss-Seidel 기법의 차와 동일하게 나왔기에 AMG 기법이 옳게 적용됨을 알 수 있었다. 소요되는 계산시간과 iteration 횟수는 표(3.2)와 같다. 표(3.2)를 통해 classic AMG 기법의 성능이 additive correction method 기반 AMG 기법보다 좋은 것을 확인하였다.

두 AMG 기법의 성능 차이는 additive correction method 기반 AMG 기법이 상숫값을 기반으로 prolongation 연산자를 제작하는 반면, classic AMG 기법은 주변 격자에 대한 값들을 이용하는 보간을 기반으로 prolongation 연산자를 제작하기에 나타나는 성능의 차이이다. 이를 통해 coarsening 연산자를 제작할 때 주변 격자에 대한 영향을 정확하게 고려하는 것이 중요함을 알 수 있다.

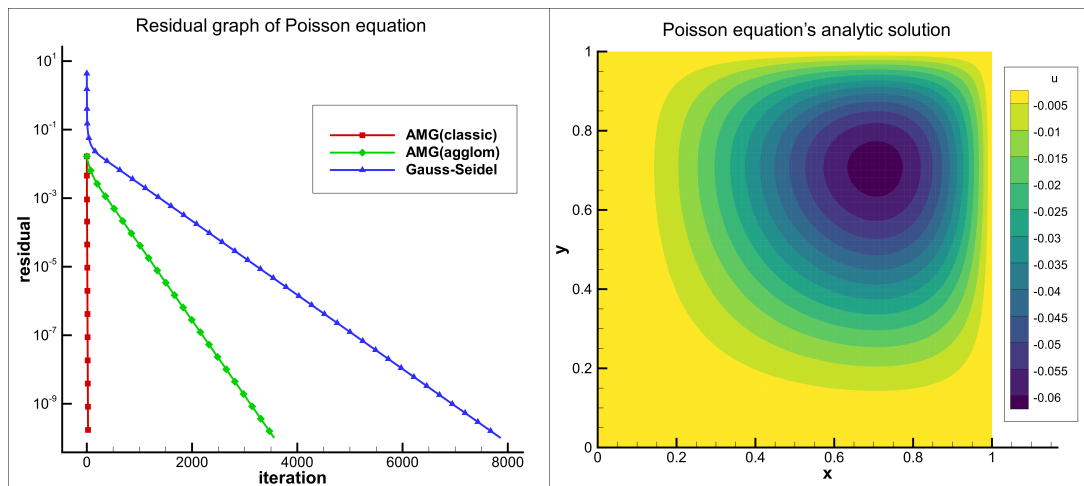


그림 3.1 계산의 잔차 그래프와 해석적 해 contour

표 3.2 AMG, Gauss-Seidel 기법의 계산 결과

Method	Iteration	Time (sec)
AMG (classic)	25	1.7945
AMG (agglomeration)	3562	47.515
Gauss-Seidel	7866	400.6273

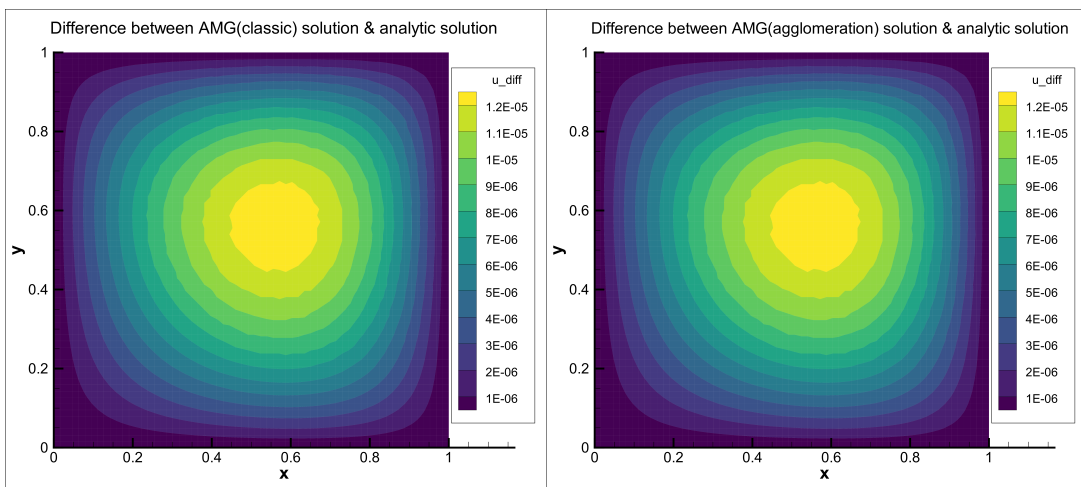


그림 3.2 해석적 해에 대한 AMG 계산 결과 차이

3.2 아음속 영역 NACA0012 익형 해석

본 장에서는 압축성 유동해석자에 additive correction method 기반 AMG 기법을 적용하여 가속화와 올바른 해를 계산하는지 여부를 확인하였다. 사용된 압축성 유동해석자는 하나의 격자에 복수의 변수들을 저장하기 위해, classic AMG 기법보다 적용에 용이하며 이전 연구의 참조가 가능한 additive correction method 기반 AMG 기법을 적용하였으며 삼각형(triangle) O type 격자와 사각형(quadrilateral) O type 격자를 이용한 NACA0012 익형 문제를 해석하였다.

먼저 grid refinement test를 진행하여 해석에 적합한 격자를 선정하였다. 아래 두 그림(3.3), 그림(3.4)과 같이 삼각형 격자와 사각형 격자에 마하수 0.5, 받음각 1.25도를 조건으로 각각 grid refinement test를 진행하였으며, 이를 통해 결정된 격자를 각각 사용하여 계산을 진행하였다. Grid refinement test 결과, 삼각형 격자의 경우 74,348개 규모의 격자가 사용되었으며, 사각형 격자의 경우 10만 개 규모의 격자가 사용되었다. 계산 조건은 아래 표(3.3)와 같다. 각 계산에 사용된 CFL 수는 각 계산에서 사용 가능한 최댓값을 이용하였다.

표 3.3 계산 조건

Criteria	Description
Grid	Triangle, quadrilateral
Error convergence	1.0e-10
Mach number	0.5, 0.8, 1.2
Angle of attack	1.25 °
Iteration method	Symmetric Gauss-Seidel method
mgbmax(agglomeration)	4

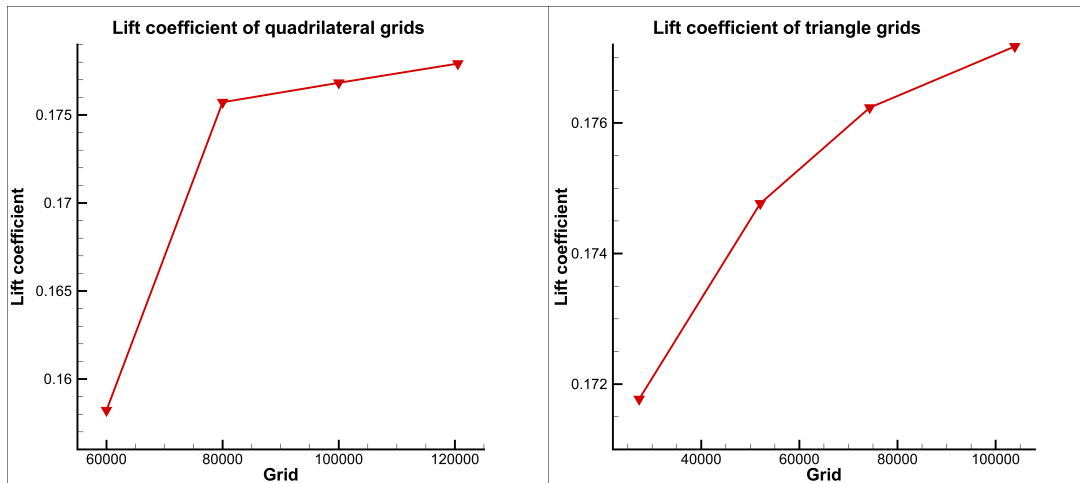


그림 3.3 NACA0012 익형의 사각형, 삼각형 격자에 대한 양력계수 그래프

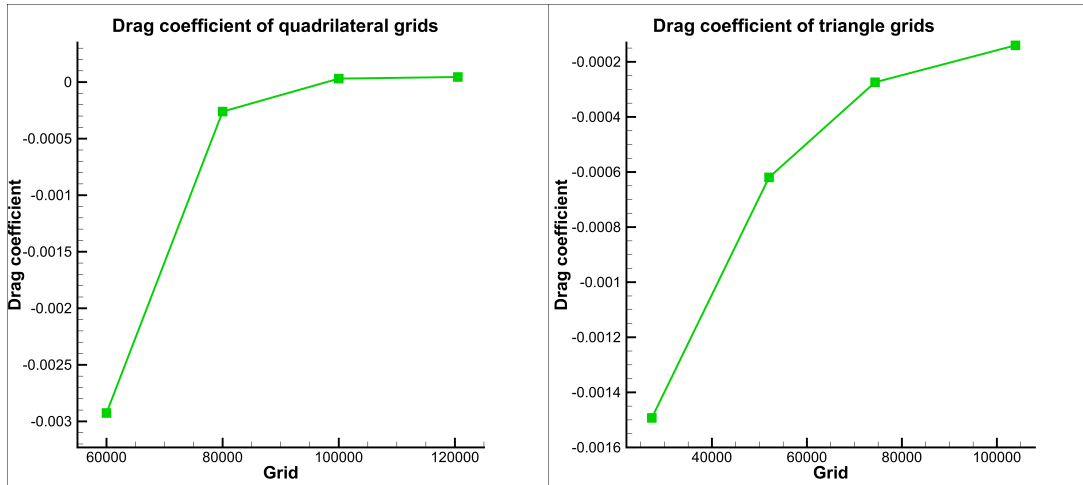


그림 3.4 NACA0012 익형의 사각형, 삼각형 격자에 대한 항력계수 그래프

사각형 격자에 대해서 그림(3.5)과 같이 AMG 기법을 이용한 계산과 AMG 기법을 이용하지 않은 계산의 마하수에 대한 contour를 비교하였다. 또한, 아래 그림(3.6)의 우측에 압력계수까지 비교하여 두 계산 결과가 같음을 확인하였다. 그림(3.6)의 좌측에는 변수 중 압력 항에 대한 잔차 그래프를 작성하였고 이를 통하여 iteration에 대한 각 계산의 잔차가 어떻게 감소하는지 확인하였다. 같은 순서로 삼각형 격자에 관한 결과는 그림(3.7)과 그림(3.8)으로 나타내었으며, AMG 기법을 사용한 계산과 AMG 기법을 사용하지 않은 계산 결과가 모두 동일함을 확인하였다. 받음각을 1.25도로 넣고 나머지 계산 조건은 전 계산과 동일하게 설정한 후 진행한 계산 역시 AMG를 사용한 경우와 사용하지 않은 경우의 계산 결과가 같게 나타나는 것을 그림(3.9), 그림(3.10)을 통하여 확인할 수 있었다.

각 계산의 계산시간을 아래 표(3.4)에 작성하였다. 사각형 격자의 경우 “Q”, 삼각형 격자의 경우 “T” 로 표기하고 받음각 유무에 따라 0.0, 혹은 1.25를 작성하여 분별하였다. 계산시간 감소의 경우 AMG 기법을 사용하는 계산이 AMG 기법을 사용하지 않고 symmetric Gauss-Seidel 기법만을 이용하여 계산하는 계산에 비해 사각형 격자의

경우 82%, 삼각형 격자의 경우 87%의 계산시간이 감소하였다.

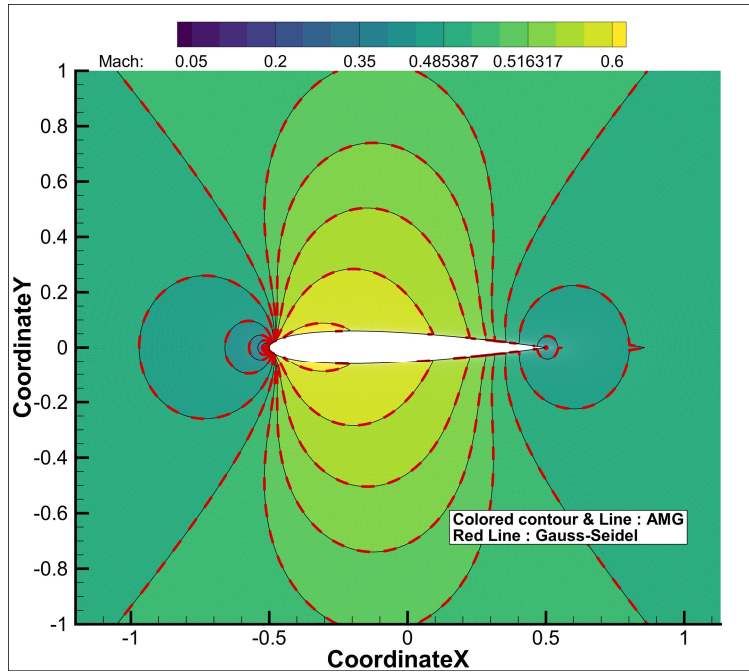


그림 3.5 아음속, 사각형 격자의 마하수 contour

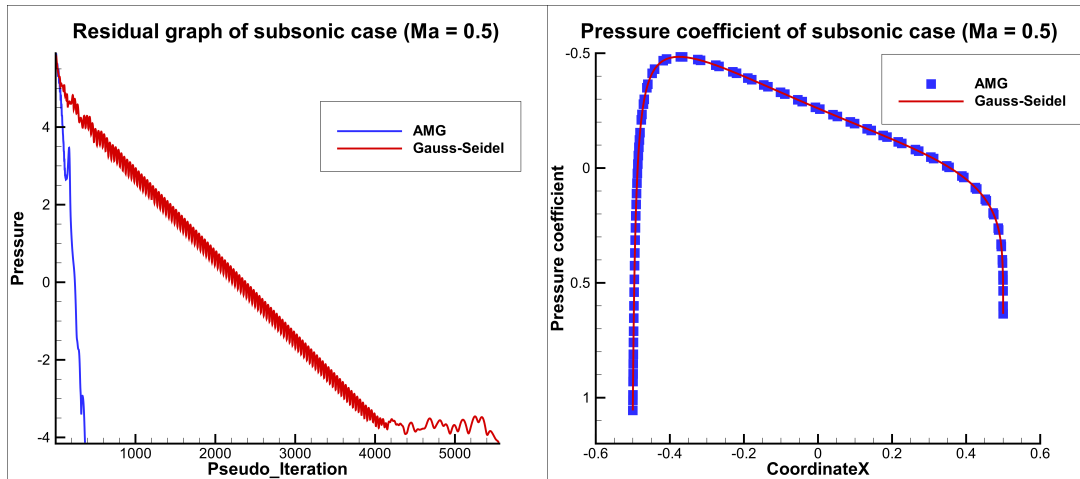


그림 3.6 아음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프

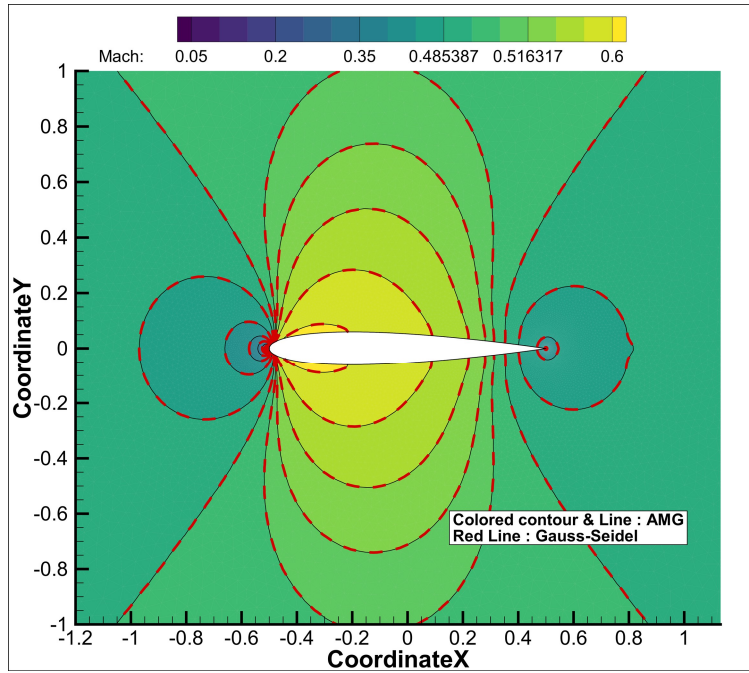


그림 3.7 아음속, 삼각형 격자의 마하수 contour

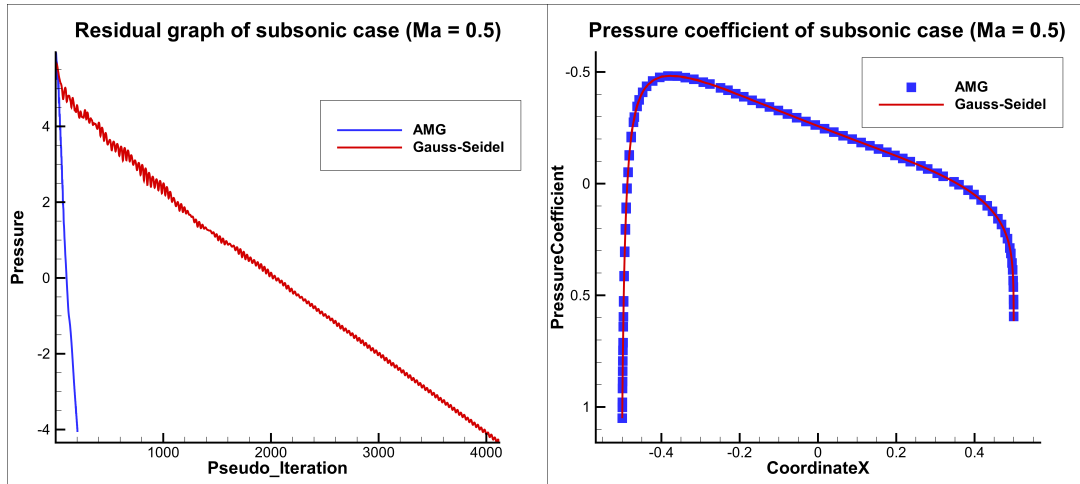


그림 3.8 아음속, 삼각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프

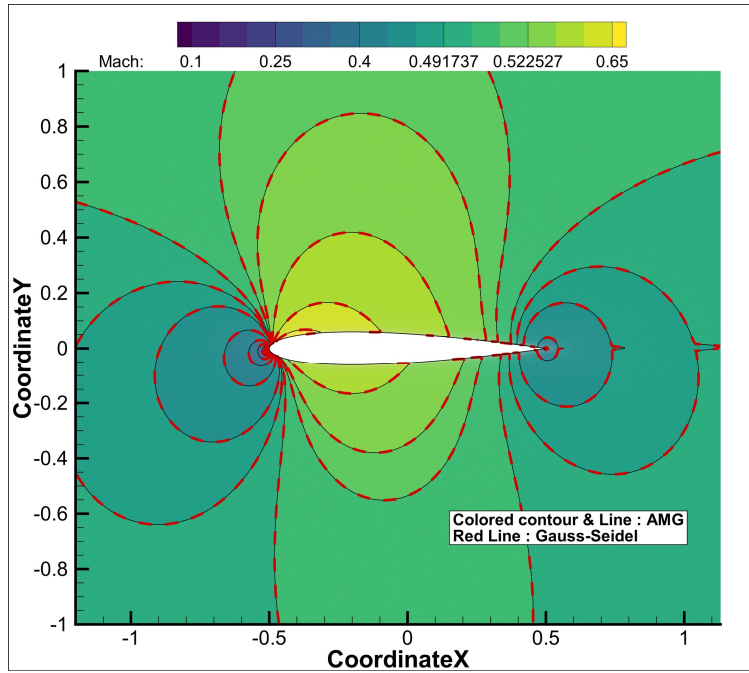


그림 3.9 받음각 1.25도, 아음속, 사각형 격자의 마하수 contour

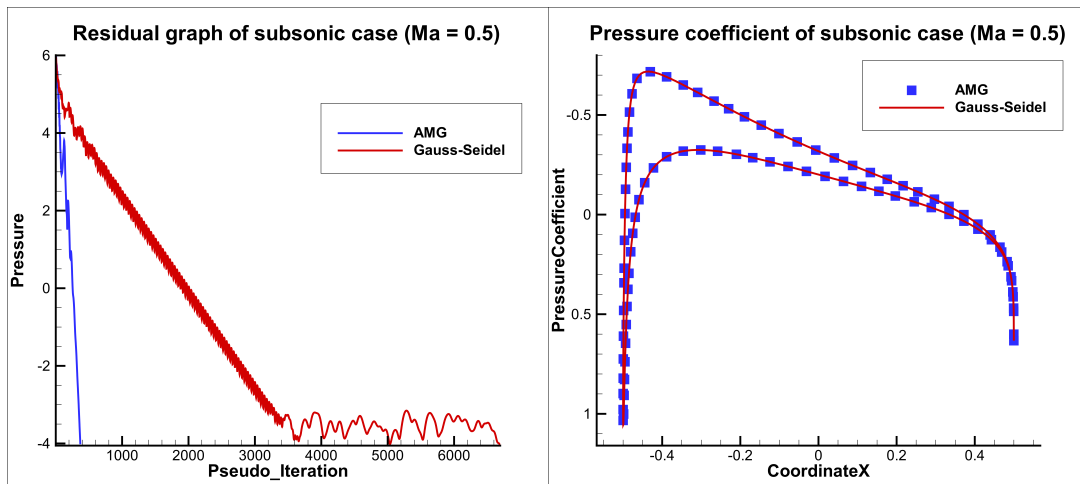


그림 3.10 받음각 1.25도, 아음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력 계수 그래프

표 3.4 아음속 영역 익형 계산 결과

Type (Grid/AOA)	Iteration	Elapsed time (sec)	Lift coefficient	Drag coefficient
AMG (Q/0.0)	368	284.309	1.3157e-09	9.3412e-06
Gauss Seidel (Q/0.0)	5555	1545.652	6.5005e-15	9.3412e-06
AMG (T/0.0)	203	103.750	-8.3224e-04	-3.2106e-04
Gauss Seidel (T/0.0)	4120	833.742	-8.3224e-04	-3.2106e-04
AMG (Q/1.25)	371	284.120	1.7683e-01	3.0908e-05
Gauss Seidel (Q/1.25)	6694	1848.797	1.7683e-01	3.0908e-05

3.3 천음속 영역 NACA0012 익형 해석

천음속 영역 문제는 마하수 0.8의 유동에서 NACA0012 익형 해석을 진행하였다. 격자 조건은 아음속 영역에서 사용한 것과 같으며, 차이점은 limiter freezing 기법이 사용되었다. 천음속 영역부터는 충격파의 발생으로 인하여 잔차 감소에서 진동이 일어나며 규정한 오차 기준까지 감소하지 않는 영역이 발생하기에, 잔차 그래프에서 해당 경우가 발생하는 경우 limiter가 이전 iteration에서 계산된 값으로 고정되어 계산에 사용되도록 코드를 작성하였다. 이때 사용된 limiter는 Venkatakrisshnan limiter이다.

아음속 영역에서의 경우와 마찬가지로 AMG 기법을 사용한 계산과 사용하지 않은 계산을 진행 후 그림(3.11)에 마하수에 대한 contour를,

그림(3.12)에 압력에 대한 잔차 그래프, 압력계수 그래프를 작성하였다. 사각형 격자와 삼각형 격자 모두 AMG 기법을 사용한 계산과 사용하지 않은 계산의 결과가 같음을 확인할 수 있었으며 받음각 1.25도를 적용한 사각형 격자의 경우 역시 동일한 결과를 보여주었다. 천음속 영역 문제에서 AMG 기법 사용 여부에 따라 사각형 격자의 경우 47%, 삼각형 격자의 경우 61%의 계산시간이 감소하였다. 표(3.5)에 각 격자에 대하여 계산 시 걸린 iteration과 계산시간을 작성하였다.

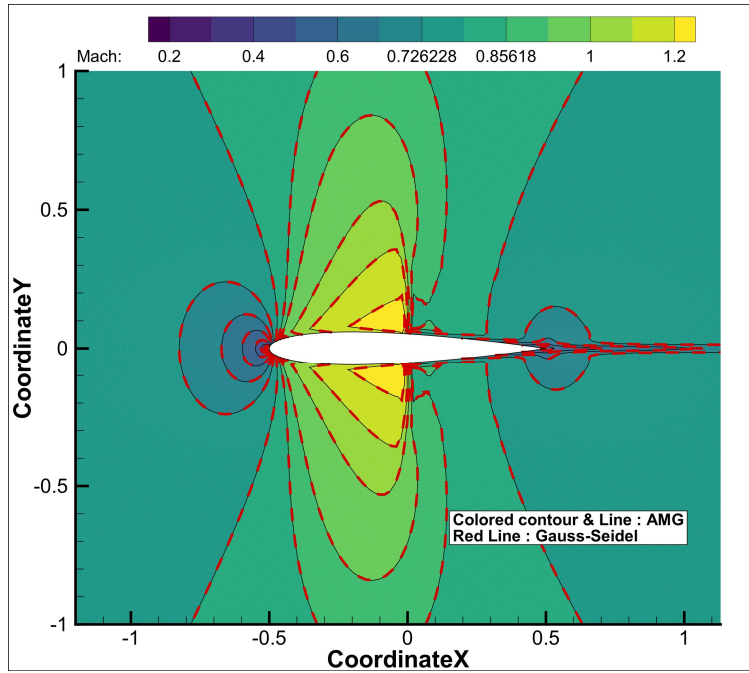


그림 3.11 천음속, 사각형 격자의 마하수 contour

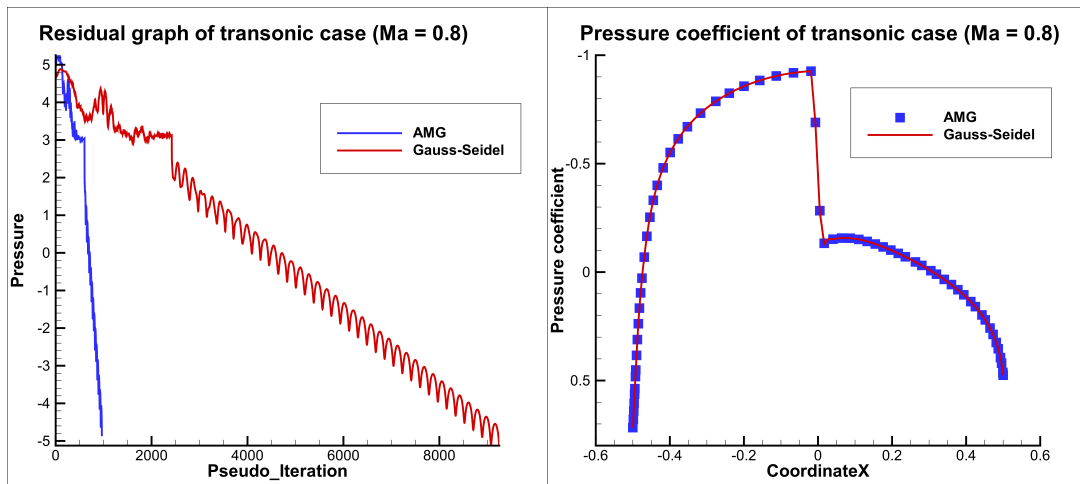


그림 3.12 천음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프

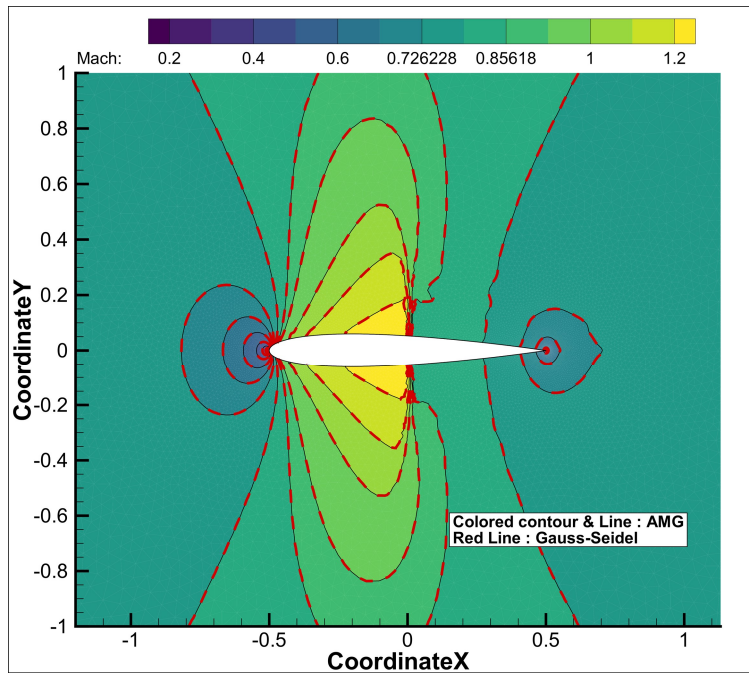


그림 3.13 천음속, 삼각형 격자의 마하수 contour

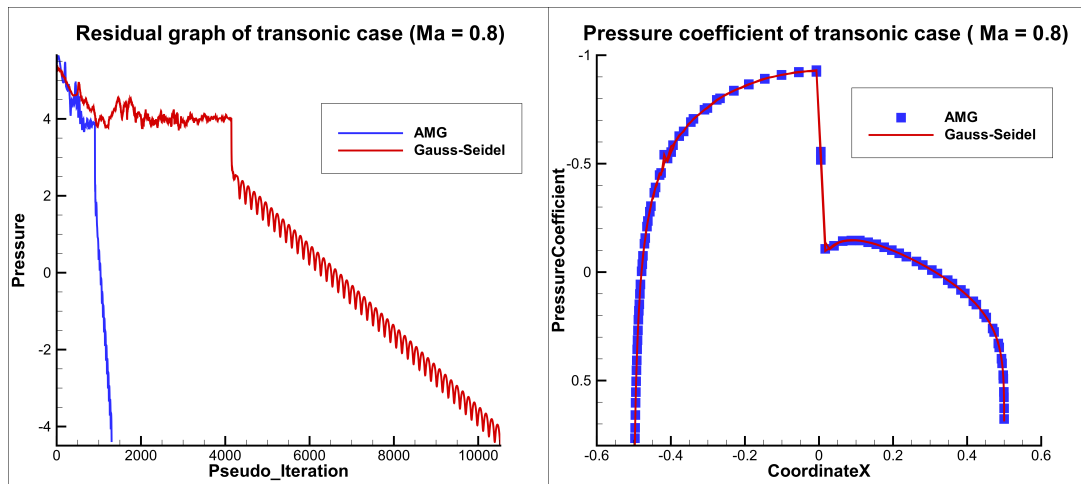


그림 3.14 천음속, 삼각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프

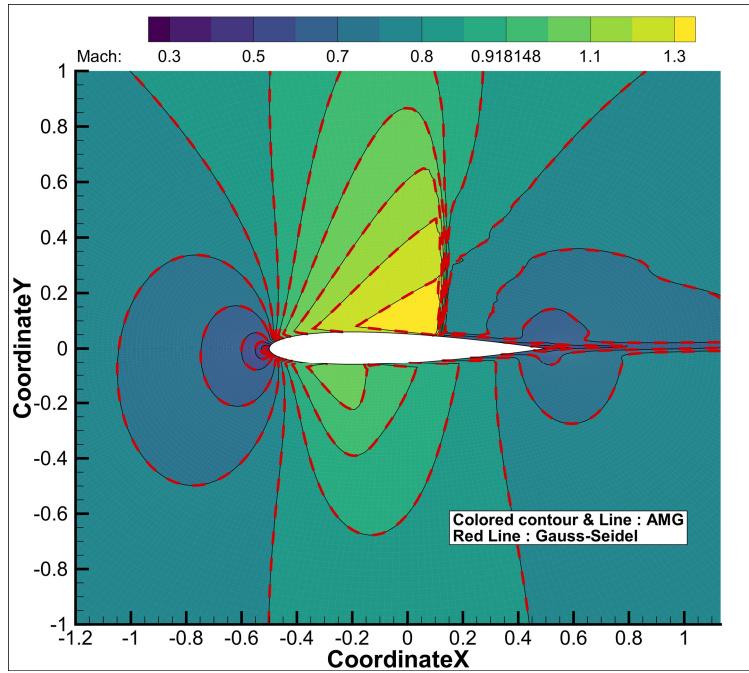


그림 3.15 받음각 1.25도, 천음속, 사각형 격자의 마하수 contour

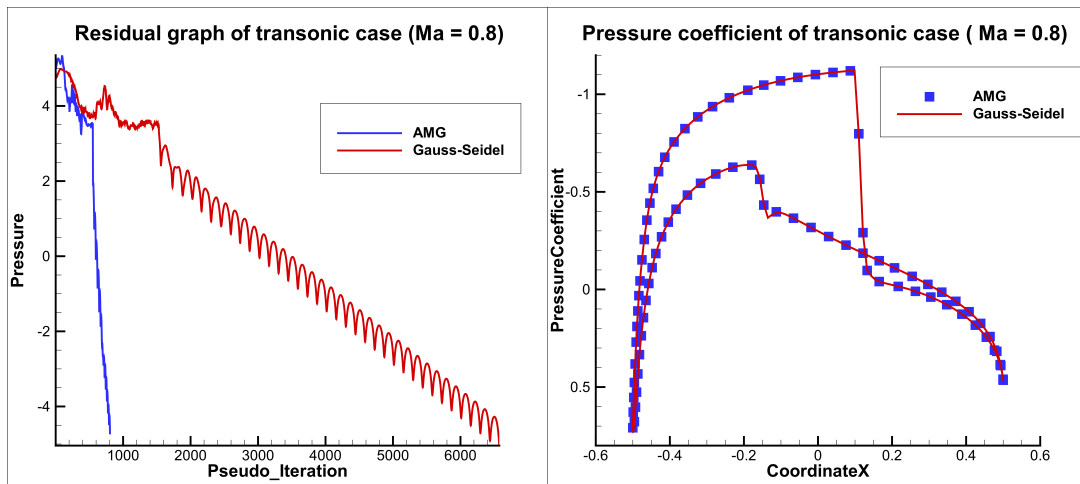


그림 3.16 받음각 1.25도, 천음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력 계수 그래프

표 3.5 초음속 영역 익형 계산 결과

Type (Grid/AOA)	Iteration	Elapsed time (sec)	Lift coefficient	Drag coefficient
AMG (Q/0.0)	1530	1132.123	-1.8793e-06	5.3655e-03
Gauss Seidel (Q/0.0)	9249	2122.931	7.6066e-05	5.3372e-03
AMG (T/0.0)	1304	636.024	-1.3118e-01	8.6059e-03
Gauss Seidel (T/0.0)	10523	1642.910	-1.3115e-01	8.5867e-03
AMG (Q/1.25)	806	584.836	3.1018e-01	1.7753e-02
Gauss Seidel (Q/1.25)	6575	1494.864	3.1018e-01	1.7733e-02

3.4 초음속 영역 NACA0012 익형 해석

초음속 영역 계산은 마하수 1.2의 유동에 대하여 NACA0012 익형 해석을 수행하였으며 이전 계산들과 마찬가지로 사각형 격자의 경우 받음각 1.25도를 넣어 추가적인 계산을 진행하였다. 마하수에 대한 contour, 잔차, 압력계수 그래프를 아래 그림(3.17) ~ 그림(3.22)으로 작성되었고 각 contour와 압력계수 그래프를 통해서 AMG 기법을 사용한 계산과 AMG 기법을 사용하지 않은 각 계산의 결과가 동일함을 확인하였다. 계산시간은 AMG 기법을 사용한 계산이 AMG 기법을 사용하지 않은 계산보다 사각형 격자의 경우 44%, 삼각형 격자의 경우 27% 감소하였다.

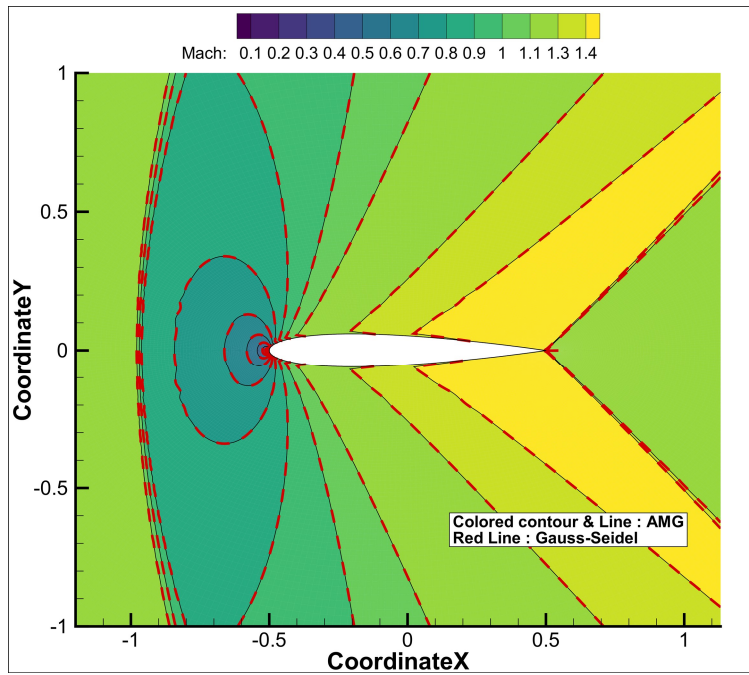


그림 3.17 초음속, 사각형 격자의 마하수 contour

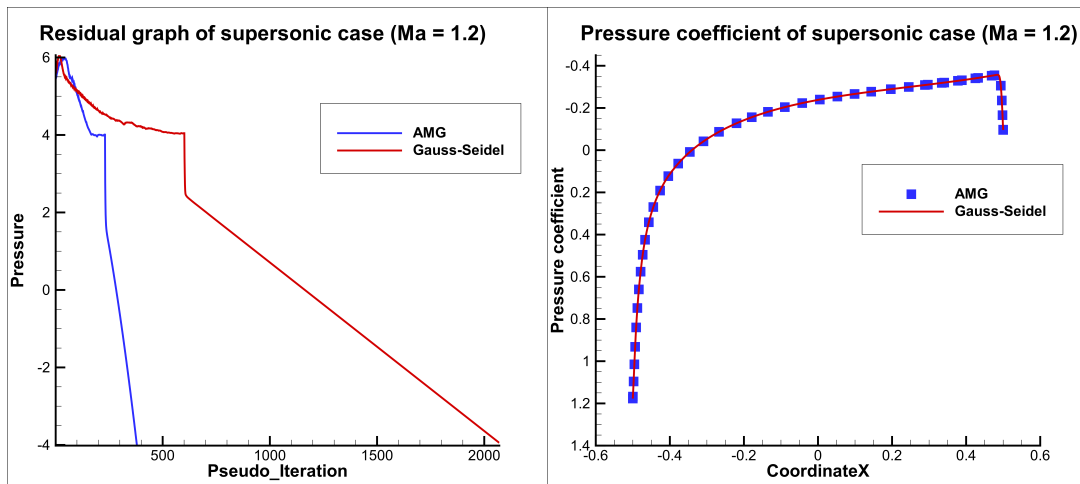


그림 3.18 초음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프

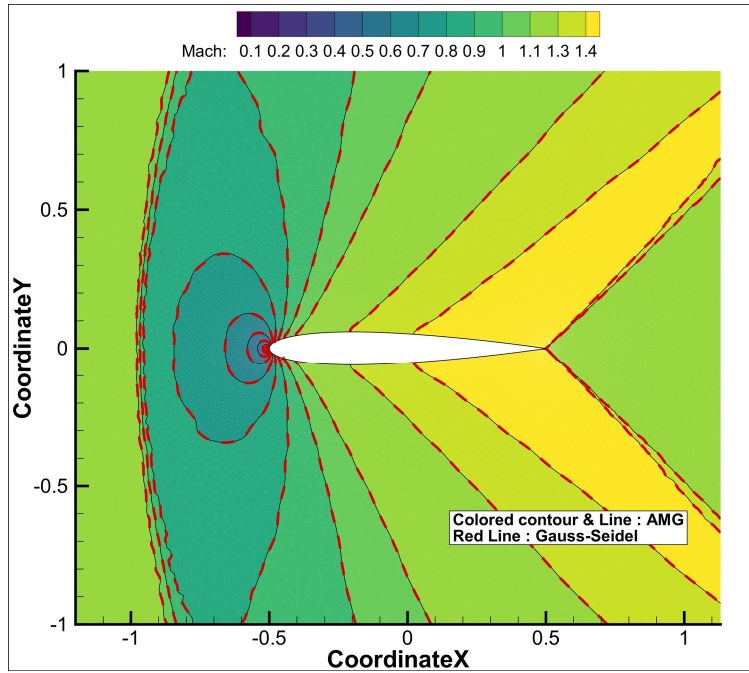


그림 3.19 초음속, 삼각형 격자의 마하수 contour

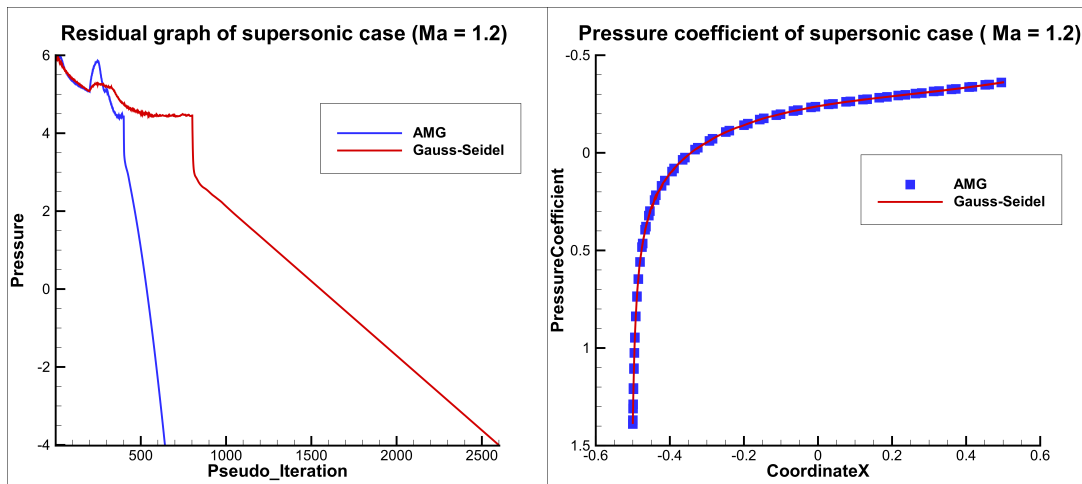


그림 3.20 초음속, 삼각형 격자의 잔차 그래프 및 압력계수 그래프

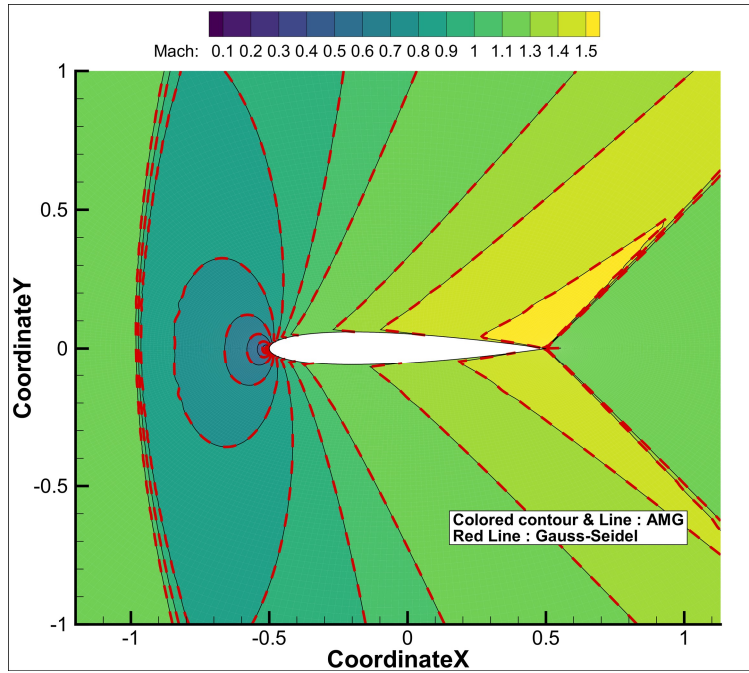


그림 3.21 받음각 1.25도, 초음속, 사각형 격자의 마하수 contour

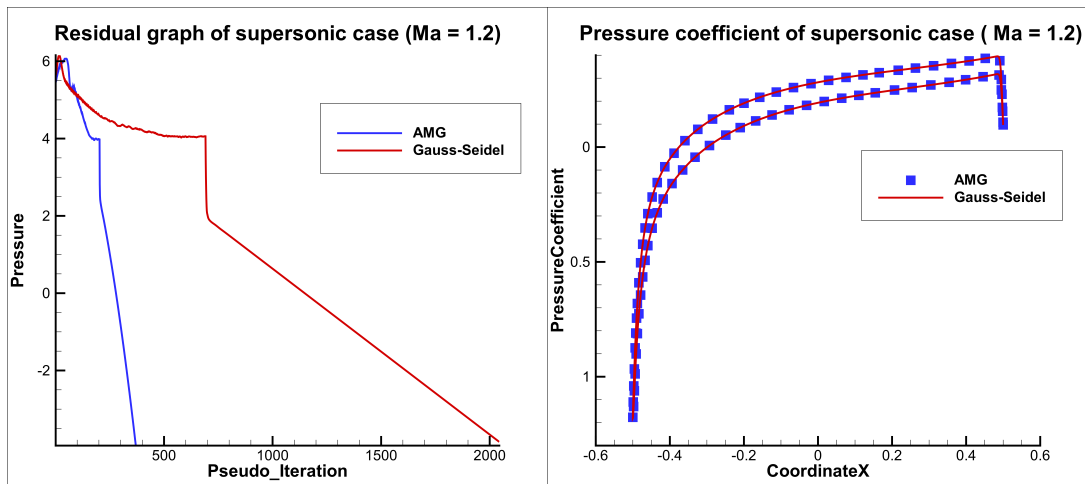


그림 3.22 받음각 1.25도, 초음속, 사각형 격자의 잔차 그래프 및 압력 계수 그래프

표 3.6 초음속 영역 익형 계산 결과

Type (Grid/AOA)	Iteration	Elapsed time (sec)	Lift coefficient	Drag coefficient
AMG (Q/0.0)	380	275.076	-2.8420e-07	9.5420e-02
Gauss Seidel (Q/0.0)	2070	487.966	6.6607e-06	9.5420e-02
AMG (T/0.0)	642	287.049	-3.2778e-04	9.6787e-02
Gauss Seidel (T/0.0)	2602	395.323	-3.2834e-04	9.6790e-02
AMG (Q/1.25)	370	265.680	9.2409e-02	9.7278e-02
Gauss Seidel (Q/1.25)	2044	476.402	9.2409e-02	9.7278e-02

제 4 장 수치해석

4.1 NACA0012 익형

본 장에서는 NACA0012 익형을 아음속(마하수 0.5), 천음속(마하수 0.8), 초음속(마하수 1.2) 영역에 대한 AMG 기법을 사용하여 해석하였다. 사용된 격자는 3장에서 사용된 사각형 격자를 사용하였으며 AMG 기법에서 격자의 연결 강도를 정의하는 방법을 표(2.2)의 10가지 응집 기법을 이용하여 어떠한 방법이 AMG 기법에서 사용되느냐에 따라 성능이 가장 좋은 성능을 발휘하는지 비교하였다.

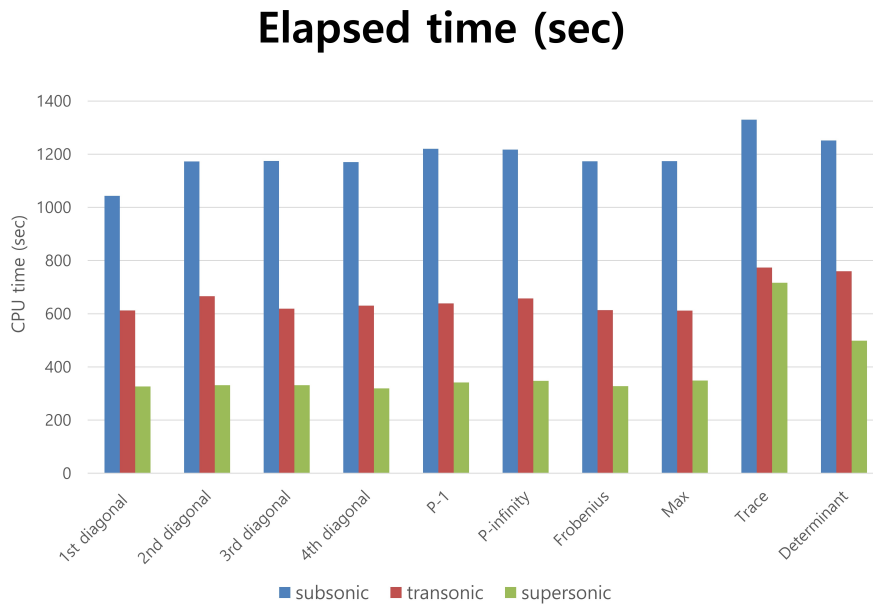


그림 4.1 각 연결 강도 정의 방법에 따른 계산시간

결과는 위 그림(4.1)과 같다. 10가지 응집 기법에 대한 시간을 그래프로 나타내었으며, trace of matrix와 matrix determinant로 격자의

연결 강도를 정의하는 것이 효율이 가장 낮게 나타난다는 것을 전체 유동 영역에 걸쳐 확인할 수 있었다. 이러한 성능 차이는 충격파의 영향이 커지는 천음속, 초음속 영역에서 큰 경향을 보였다.

4.2 가속화 분석

4.1절의 계산 결과를 확인하였을 때 trace of matrix와 matrix determinant를 응집 기법으로 사용하면 AMG 기법의 성능 하락이 나타났다. 원인 분석을 위해 가장 성능이 좋게 나온 첫 번째 대각 요소를 이용한 응집 기법과 trace of matrix, matrix determinant를 이용한 응집 기법의 평균 응집되는 격자 개수를 비교하여 격자가 고르게 응집되는지 확인하였다. 계산에서 사용한 AMG 계층 수는 5이고, mgbmax 값은 4를 이용하였다. 이것을 참고하여 각 계층에서 미세 격자가 하나의 성긴 격자로 응집될 때의 평균 개수 그래프로 표현하면 아래 그림(4.2)과 같다.

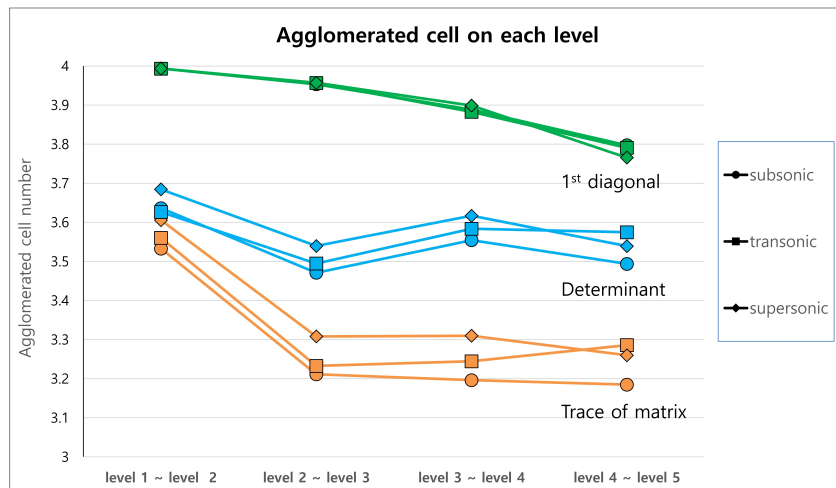


그림 4.2 응집 기법에 따라 하나의 성긴 격자로 응집되는 미세 격자의 평균 개수

그림(4.2)을 통해서 첫 번째 대각 요소를 이용하는 응집 기법이 설정

한 $mgbmax$ 값인 4에 가장 근접한 값으로 각 계층에서 미세 계층 격자들을 응집하였으며, determinant와 trace of matrix 응집 기법 순서로 상대적으로 4 값에 덜 가깝게 미세 격자를 응집하는 것을 확인하였다. 결과적으로 그림(4.2)를 통해 미세 격자들의 응집되는 개수가 미리 설정한 $mgbmax$ 값에 가깝게 접근할수록 AMG 기법의 가속 성능이 향상되며, 응집 기법이 효율적일수록 AMG 기법의 성능이 향상된다는 것을 알 수 있었다.

다음으로 3장과 4장의 계산 결과로부터 AMG 기법의 성능이 아음속, 천음속, 초음속 영역 순으로 높은 경향이 나타났는데, 이는 천음속과 초음속 영역의 경우 불연속적인 충격파가 발생하기에 2차 정확도를 위한 limiter가 사용되고, limiter 내 max 함수와 min 함수로 인하여 발생한 불연속적인 특성으로 인하여 CFL 수를 상대적으로 크게 설정하지 못한 것이 원인으로 확인되었다.

충격파가 존재하는 유동에 대한 AMG 기법 성능 저하의 또 다른 원인은 AMG 기법에서 coarsening 되어 나타나는 격자의 경우 생성되는 하위 계층 격자가 충격파가 존재하는 경우 이를 파악하여 충격파를 기점으로 격자가 분리되어 제작되어야 하는데, 아래 그림(4.3)과 같이 충격파를 포함하는 형태로 격자 블록이 생성되었다는 것이다. 이것이 원인으로 지목된 이유는 additive correction method 기반 AMG 기법의 특성상 생성되는 하위 계층 격자를 통해 계산되는 오차가 상위 계층의 격자에 보정되는 것을 기반으로 가속화가 진행되는데, 충격파를 포함하여 하위 계층 격자가 생성되면 충격파의 전후로 물리적 내용이 다른 특성에 대하여 미세 격자에 대한 효과적인 보정이 어려워지고 결국 이것이 AMG 기법 성능의 저하로 귀결되기 때문이다.

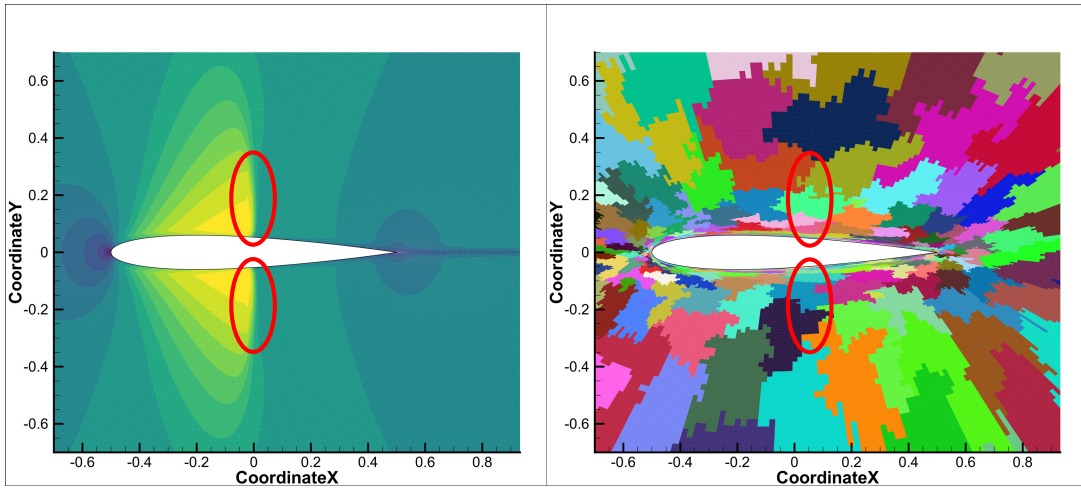


그림 4.3 천음속 유동 익형에서의 충격파 위치와 하위 계층 격자 형상

제 5 장 결론

본 논문에서는 additive correction method 기반 AMG 기법을 압축성 유동 해석자에 적용하였으며 이를 이용하여 익형에 대한 유동해석을 진행하여 AMG 기법을 사용하지 않는 계산과 계산시간 및 계산 결과를 비교하였다. AMG 기법 사용 여부에 따른 계산 결과는 동일하게 나타났으며, AMG 기법적용을 진행한 결과 최대 아음속 영역의 경우에는 87%, 천음속 영역의 경우에서 61%, 초음속 영역의 경우에서 44%의 계산시간이 감소하였다.

다음으로 격자들의 연결 강도를 블록 행렬 요소로부터 규정하는 응집 기법을 10가지 선정하여 이 기법들에 대한 AMG 기법의 성능이 각 아음속, 천음속, 초음속 영역에서 어떠한 경향을 나타내는지 비교, 분석하였다. 전체 영역에서 사용한 응집 기법 중 첫 번째 대각 요소를 사용하는 방법이 가장 준수한 결과를 보였던 반면, matrix determinant, trace of matrix 순서로 AMG 기법 성능 저하가 확인되었으며 AMG 기법 성능 저하의 주된 원인은 미리 설정한 mgbmax 값에 가깝게 균일한 격자들의 coarsening이 이루어지지 않는 것이 원인으로 분석되었다.

위 계산에서 전반적으로 연속적이며, 충격파가 없는 아음속 영역 문제에서는 AMG 기법의 성능이 상대적으로 높게 나타났던 반면, 충격파가 발생하는 천음속 영역과 초음속 영역 문제에서는 AMG 기법 성능이 낮게 나타났다. 이는 크게 두 가지의 요인으로 인한 결과로써, 첫 번째 요인은 충격파의 불연속적인 특성에서 기인한 가용 CFL 수의 범위의 감소이며, 두 번째 요인은 충격파를 인식하여 하위 계층으로 응집을 진행하지 못한 AMG 기법의 응집 알고리즘의 불완전성 때문이었다. 이 두 요인으로 인해 충격파가 존재하는 천음속, 초음속 영역에서 AMG 기법이 아음속 영역과 비교해 상대적인 성능감소를 보였다.

위 결과를 통해 additive correction method 기반 AMG 기법을 밀도

기반의 비점성 유동해석자에 적용하여 전 유동 영역에 대한 NACA0012 익형을 해석할 경우 격자의 연결 관계를 첫 번째 대각 요소의 절댓값을 이용하는 것이 가장 효율적임을 확인하였다. 또한, 계산 결과로부터 충격파의 위치를 정확하게 인식하여 coarsening을 진행하며, 최대한 설정된 mgbmax 값에 근접한 개수의 미세 계층 격자가 전 영역에 균일하게 응집되어 성긴 계층 격자로 생성될수록 AMG 기법의 성능향상을 기대할 수 있음을 예상할 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Fedorenko, R. P. (1964). The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(3), 227–235.
- [2] Wesseling, P., & Oosterlee, C. W. (2001). Geometric multigrid with applications to computational fluid dynamics. *Journal of computational and applied mathematics*, 128(1–2), 311–334.
- [3] Koren, B. (1990). Multigrid and defect correction for the steady Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 87(1), 25–46.
- [4] Weiss, J. M., Maruszewski, J. P., & Smith, W. A. (1999). Implicit solution of preconditioned Navier–Stokes equations using algebraic multigrid. *AIAA journal*, 37(1), 29–36.
- [5] Raw, M. (1996, January). Robustness of coupled algebraic multigrid for the Navier–Stokes equations. In *34th Aerospace sciences meeting and exhibit* (p. 297).
- [6] Stueben, K. (2001). An introduction to algebraic multigrid. *Multigrid*, 413–532.
- [7] Hutchinson, B. R., & Raithby, G. D. (1986). A multigrid method based on the additive correction strategy. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 9(5), 511–537.
- [8] Settari, A., & Aziz, K. (1973). A generalization of the additive correction methods for the iterative solution of matrix equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(3), 506–521.

- [9] Susie, C. Keller., & Clovis R. Maliska. (2012). Agglomeration schemes studies in the additive correction multigrid method applied to numerical solution of Navier–Stokes equations with unstructured grids. 14th Brazilian congress of thermal science and engineering.
- [10] Lee, C., Kim, E., Yune, K., & Kim, C. (2021). ACTFlow: A Target–Oriented Finite Volume Solver for All–Speed Compressible Turbulent Flow Simulations. In AIAA Scitech 2021 Forum (p. 1533).
- [11] Briggs, W. L., Henson, V. E., & McCormick, S. F. (2000). A multigrid tutorial. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [12] Cleary, A. J., Falgout, R. D., Henson, V. E., Jones, J. E., Manteuffel, T. A., McCormick, S. F., ... & Ruge, J. W. (2000). Robustness and scalability of algebraic multigrid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(5), 1886–1908.
- [13] Falgout, R. D. (2006). An introduction to algebraic multigrid (No. UCRL–JRNL–220851). Lawrence Livermore National Lab.(LLNL), Livermore, CA (United States).
- [14] Cordazzo, J., Karpinski, L., Keller, S., Silva, A. F., & Maliska, C. R. (2007). ADDITIVE CORRECTION MULTIGRID APPLIED TO PETROLEUM RESERVOIR SIMULATION.
- [15] Keller, S. C., Cordazzo, J., Hinckel, P. H., & Maliska, C. R. THE ADDITIVE CORRECTION MULTIGRID METHOD FOR UNSTRUCTURED GRIDS.
- [16] Gjesdal, T. (1996). A note on the additive correction multigrid method. *International communications in heat and mass transfer*, 23(2), 293–298.

Abstract

Implementation of algebraic
multigrid method and
performance analysis on
unstructured flow solver

Seunghyeon Kim

Department of Aerospace Engineering

The Graduate School

Seoul National University

Present study implemented convergence acceleration method on unstructured grid based compressible flow solver. The convergence acceleration and accuracy of the calculation were verified by solving the symmetrical airfoil problems based on unstructured and structured grid for the two-dimensional subsonic, transonic, and supersonic flow regions. In the transonic and supersonic flow regions where the shock wave occurs, the limiter freezing method was used. The calculation was carried out by making the limiter uses the values from the previous iteration when the residual reduction stalls.

The coarsening method of the algebraic multigrid (AMG) was based on the additive correction method, and coarsening was performed through agglomeration according to the grid connection strength given at each levels of equations. By conducting case study changing the agglomeration method which defines the connection, transonic and supersonic flow region simulations were performed for the symmetrical airfoil.

In addition, the difference of each agglomeration method based AMG performance was analyzed accordingly. In the case study, the absolute value of the diagonal element of the Jacobian matrix, trace of matrix, matrix norm (P-1, P-infinity, Max, Frobenius), and matrix determinant were used as agglomeration methods. As a result of the performance analysis, it was analyzed that the cause of the performance difference between the calculation with the best performance of the AMG and the calculation with the worst performance was due to the difference in coarsening performance.

keywords : Computational fluid dynamics (CFD), Convergence acceleration method, Algebraic multigrid, Additive correction method, Inviscid flow, Compressible flow

Student Number : 2019-26635