AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 1 April 2022
e-ISSN 2579-7646

Stabilitas metode runge-kutta dengan interpolasi *cubic-spline* untuk menyelesaikan *delay differential equations* (dde)

[1]Rahma Qudsi, [2]Agus Dahlia

[1]Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Islam Riau
[2] Fakultas Teknik, Universitas Islam Riau
Email korespondensi: agus.dahlia@edu.uir.ac.id

Abstrak

Algoritma dari suatu metode numerik terkadang menghasilkan hasil yang tidak konvergen ketika input yang dimasukkan berubah-ubah. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu sifat kestabilan dari metode numerik dalam menyelesaikan Delay Differential Equations (DDE). Menentukan kestabilan dari suatu metode numerik dalam menyelesaikan persamaan diferensial merupakan suatu hal yang penting agar memperoleh solusi yang diinginkan, yaitu nilai besarnya kesalahan selalu stabil atau konvergen. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis sifat kestabilan dari Runge-Kutta dengan Interpolasi Cubic-Spline dalam menentukan solusi dari Delay Differential Equation. Dalam penelitian ini, analisa kestabilan menggunakan metode step-by-step untuk solusi numerik dari Delay Differential Equation. Penelitian ini dibatasi hanya pada satu persamaan uji Linear Delay Differential Equations yaitu persamaan yang berbentuk $\boldsymbol{y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t-\tau)}$ *dengan* $\boldsymbol{\tau > 0}$ *serta* $\boldsymbol{\lambda}$ *dan* $\boldsymbol{\mu}$ *adalah bilangan kompleks. Metode yang digunakan oleh penelitian ini merupakan kajian literatur dengan menemukan bentuk P-stability dari metode tersebut. Kestabilan dari metode yang diajukan dapat dilihat dari sifat P-stability dan A- Stability metode tersebut. Dari hasil penelitian diperoleh bahwa Metode Runge-Kutta dengan interpolasi Cubic-Spline memenuhi sifat-sifat kestabilan dari metode numerik dalam menyelesaikan Delay Differential Equations, dimana P-stability dan A- Stability dipenuhi oleh metode numerik tersebut. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode Runge-Kutta dengan interpolasi Cubic-Spline dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu Delay Differential Equations (DDE) dalam berbagai kondisi.*

Kata kunci: *Cubic-Spline; DDE; Runge-Kutta; stabilitas*

Abstract

Algorithms of numerical methods sometimes produce non-converging results when the inputs are variable. Therefore, a stable numerical method is needed to solve Delay Differential Equations. Determining the stability of a numerical method in solving differential equations is important to obtaining the desired solution. The value of the magnitude of the error is always stable and convergent. This study aims to analyze the stability properties of the Runge-Kutta method with Cubic-Spline Interpolation in determining the solution of the Delay Differential Equation. In this study, the stability analysis uses a step-by-step method for the numerical solution of the Delay Differential Equation. This research is limited to the Linear Delay Differential Equations test equation in the form of $\boldsymbol{y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t-\tau)}$ *Where* $\boldsymbol{\tau > 0}$ *and* $\boldsymbol{\lambda}$ *and* $\boldsymbol{\mu}$ *are complex numbers, the method used in this study is a literature review by finding the P-stability form of the method. The stability of the proposed method can be seen from the P-stability and A- Stability properties of the method. From the study results, it was found that the Runge-Kutta method with Cubic-Spline interpolation met the stability properties of the numerical method in solving*

Delay Differential Equations, namely P-st A-Stability. So it can be concluded that this method can be used to solve Delay Differential Equations in various conditions.

Keywords: *Cubic-Spline; DDE; Runge-Kutta; Stability*

A. Pendahuluan

Salah satu persamaan matematika yang paling sering digunakan dalam berbagai pemodelan masalah nyata adalah *Delay Differential Equations* (DDE). DDE memiliki suatu bentuk yang unik, dimana persamaan ini tidak hanya bergantung kepada waktu sekarang tetapi juga bergantung kepada waktu sebelumnya. Beberapa penelitian mengenai metode penyelesaian DDE telah banyak diteliti, diantaranya Oberle & Pesch (1981) mengenalkan metode modifikasi Runge-Kutta dengan interpolasi Hermite untuk menyelesaikan DDE, selanjutnya Ponnammal (2017) menggunakan *Singly Diagonally Implicit* Runge-Kutta untuk menyelesaikan DDE. Ditahun yang sama, Yaghoobi *et. al.* (2017) menggunakan *Cubic-Spline* untuk mengaproksimasi waktu tunda di DDE. Dimana *Cubic-Spline* adalah suatu metode interpolasi yang mengaproksimasi fungsi berdasarkan kumpulan data atau titik-titik koordinat, dimana setiap pasangan titik diinterpolasi dengan persamaan polinomial berorde 3.

Metode Runge-Kutta dengan interpolasi *Cubic-Spline* merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan DDE. Persamaan Runge-Kutta yang digunakan tertuang dalam persamaan (1).

$$\begin{cases} Y_{n+1}^{i} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_i , & i = 1, \dots , s \\ k_i = f\left(t_{n+1}^{j}, Y_{n+1}^{j}, \eta\left(t_{n+1}^{j} - \alpha\left(t_{n+1}^{j}, Y_{n+1}^{j}\right)\right)\right) \end{cases} \tag{1}$$

dengan interpolasi *Cubic-Spline* ditampilkan dalam persamaan (2).

$$\eta''(t) = \frac{(t_{i+1} - t)M_i + (t - t_i)M_{i+1}}{h_i}, \qquad i = 0, 1, \dots , n-1 \tag{2}$$

Dalam penyelesaian numerik terdapat sifat yang harus dipenuhi oleh persamaan yaitu *well posed*, yang artinya jika persamaan tersebut dikenai sedikit gangguan maka akan mempengaruhi solusi yang diperoleh. Oleh karena itu, metode yang baik untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial harus memenuhi tiga sifat utama berikut: stabil, konvergen, dan konsisten. Namun dalam penelitian ini, hanya berfokus pada sifat kestabilan dari metode Runge-Kutta dengan interpolasi *Cubic-Spline* untuk memperoleh solusi dari *Delay Differential Equations* (DDE).

Adapun bentuk umum dari masalah nilai awal untuk *Delay Differential Equations* (DDE) diberikan pada persamaan (3).

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y, y(t-\alpha)\big), \qquad t \geq t_0 \\ y(t_0) &= y_0 \\ y(t) &= \varphi(t), \qquad t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 \end{aligned} \tag{3}$$

dengan $y(t)$ fungsi bernilai vektor-n, $\alpha > 0$ adalah konstanta *delay*, dan $\varphi(t)$ adalah fungsi nilai awal, yang diasumsikan kontinu terus menerus (*piecewise continuous*) pada interval $t_0 - \alpha \leq t \leq t_0$, untuk kasus $\varphi(t) \neq t_0$ juga termasuk.

Solusi dari persamaan (1) adalah suatu fungsi diferensial *piecewise* $y(t)$ yang terdefinisi pada interval $t_0 - \alpha \leq t \leq t_f\big(t_f > t_0\big)$ yang kontinu untuk semua $t > t_0$ dan memenuhi persamaan diferensial. DDE hanya memenuhi limit kiri-kanan titik $t_0 + \alpha$ dan titik $\xi + \alpha$, dimana ξ adalah suatu titik lompatan pada φ. Namun, kemulusan dari grafik f dan φ tidak mengakibatkan solusinya juga mulus, walaupun $\varphi(t_0) = y_0$ dipenuhi.

Definisi 1. DDE (3) dikatakan **stabil** jika untuk setiap solusi fungsi awal yang kecil $y(t)$ mendekati nol ketika $t \to \infty$, sehingga untuk semua konstanta yang sangat kecil $\delta > 0$, $t \to \infty$ untuk $\|u(t)\| < \delta, -d \leq t \leq t_0$.(Al-Mutib, 1984)

Definisi 2. Suatu metode numerik dikatakan **stabil** jika untuk setiap solusi $y(t)$ memenuhi $y(t) = 0$ jika $t \to \infty$. (Al-Mutib, 1984)

Suatu sistem DDE $x'(t) = f(t, x_t)$ yang memenuhi $f(t, 0) = 0, t \in \mathbb{R}$ sehingga $x(t) = 0$ adalah solusinya. Solusi $x = 0$ dikatakan **stabil** jika untuk setiap $\sigma \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta = (\sigma, \varepsilon) > 0$ sehingga $\phi \in C$ dan $\|\phi\| < \delta$ mengakibatkan $\|x_t(\sigma, \phi)\| < \varepsilon, t \geq \sigma$ dengan $x(t, \sigma, \phi) \to 0, t \to \infty$.

Beberapa penelitian telah dilakukan untuk melihat kestabilan dari metode penyelesaian DDE diantaranya Metode Kutta-Merson, Metode Trapesium, dan Metode Implisit Runge-Kutta untuk menyelesaikan DDE telah diperiksa kestabilannya oleh Al-Mutib (1984). Bellen (2000) telah menyelesaikan masalah stabilitas metode Runge-Kutta untuk DDE. Kemudian Liu *et. al.* (2006) telah memeriksa stabilitas dari metode modifikasi Runge-Kutta untuk DDE, dan menghasilkan bahwa metode modifikasi Runge-Kutta lebih akurat dan stabil untuk menyelesaikan DDE. Penelitian ini akan melihat sifat-sifat dari metode numerik Runge-Kutta yang dimodifikasi dengan interpolasi *Cubic-Spline* yang digunakan untuk menentukan solusi DDE. Sifat yang diteliti adalah sifat kestabilan dari metode yang diperkenalkan.

B. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kajian literatur, untuk menganalisa kestabilan dari metode yang diperkenalkan digunakan metode *step-by-step* untuk metode numerik dalam menentukan solusi numerik dari *Delay Differential Equation* (DDE). Metode ini akan memperlihatkan apakah metode Runge-Kutta yang diperkenalkan memenuhi atau menunjukkan sifat kestabilan seperti dalam Definisi 1 dan Definisi 2 untuk menyelesaikan DDE, dimana waktu tunda dalam DDE akan diaproksimasi dengan menggunakan interpolasi *Cubic Spline*.

Untuk memperoleh hasil penelitian, dilakukan penurunan-penurunan dari teorema-teorema yang mendukung sifat kestabilan dari suatu persamaan diferensial, dimana teorema kestabilan yang digunakan adalah teorema *P-Stability* dan *A-Stability* yang juga berlaku untuk Persamaan Diferensial Biasa.

C. Hasil dan Pembahasan

Menurut Barwell (1975), kestabilan dari metode numerik yang diajukan dapat dilihat dari apakah metode tersebut memenuhi sifat *P-Stability*.

Definisi 3. Daerah *P-stability* dari metode numerik untuk DDE adalah himpunan S_P dari pasangan bilangan kompleks (α, β), $\alpha = h\lambda, \beta = h\mu$, sehingga solusi numerik $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dari (3), dapat ditulis dalam bentuk seperti yang ditampilan dalam persamaan (4).

$$h = \tau/m\,, \qquad m \geq 1, \quad m \text{ bilangan bulat} \tag{4}$$

yang memenuhi $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ untuk semua konstanta *delay* dan nilai awal $\varphi(t)$.

Salah satu cara untuk menganalisa stabilitas dari solusi numerik yang paling banyak digunakan adalah dengan menggunakan persamaan (5) yang dikenal sebagai persamaan uji

$$y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t-\tau), \quad t \geq t_0, \quad y(t) = y_0(t), \quad t \leq 0 \tag{5}$$

dengan $\tau > 0$ adalah *delay*, dan λ, μ melambangkan konstanta yang merupakan bilangan kompleks, dengan y_0 adalah fungsi bernilai kompleks dan kontinu. Dari Barwell (1975), solusi $y(t)$ dari persamaan (5) akan menuju ke nol dengan $t \to \infty$, untuk semua y_0, jika $Re(\lambda) < -|\mu|$

Aplikasikan persamaan (1) ke persamaan (5), diperoleh persamaan (6).

$$Y_{n+1}^{i} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\left(\lambda Y_{n+1}^{j} + \mu\eta\left(t_{n-m+1}^{j}\right)\right), \quad i = 1, \dots, s \tag{6}$$

dengan

$$\eta(t) = \frac{(t_{i+1}-t)^3 M_i + (t-t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1}-t)f_i + (t-t_i)f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1}-t)M_i + (t-t_i)M_{i+t}]$$

jika $\eta(t)$ disubtitusikan pada Y_{n+1}^{i} di persamaan (6) maka diperoleh persamaan (7).

$$Y_{n+1}^{i} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\left(\lambda Y_{n+1}^{j} + \mu\left(\frac{(t_{i+1}-t)^3 M_i + (t-t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1}-t)f_i + (t-t_i)f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1}-t)M_i + (t-t_i)M_{i+t}]\right)\right) \quad (7)$$

$\eta(t)$ pada persamaan (6) merupakan bagian dari k_i pada persamaan Runge-Kutta atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$k_i = f\left(t_{n+1}^{j}, Y_{n+1}^{j}, \eta\left(t_{n+1}^{j} - \alpha\left(t_{n+1}^{j}, Y_{n+1}^{j}\right)\right)\right)$$

$$k_i = f\left(t_{n+1}^{j}, Y_{n+1}^{j}, \frac{(t_{i+1}-t)^3 M_i + (t-t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1}-t)f_i + (t-t_i)f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1}-t)M_i + (t-t_i)M_{i+t}]\right) \quad (8)$$

Selanjutnya, misal didefinisikan $u = (1, \dots, 1)^T$ dan untuk $n \geq 1$, diperoleh

$$k_n = \left(k_n^{(1)}, \dots, k_n^{(q)}\right)^T$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_q)^T$$

$$t - t_n = (t - t_1, t - t_2, \dots, t - t_q)^T$$

$$t_{n+1} - t = (t_2 - t, t_3 - t, t_{q+1} - t)^T$$

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_q)^T$$

$$M = (M_1, M_2, \dots, M_q)^T$$

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{s}$$

untuk $n \geq m$, persamaan (7) menjadi persamaan (9) dan persamaan (8) menjadi persamaan (10).

$$Y_{n+1} = y_n + hAk_{n+1} \quad (9)$$

$$k_{n+1} = \lambda(y_n u + hAk_{n+1}) + \mu\left(\frac{(t_{i+1}-t)^3 M_i + (t-t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1}-t)f_i + (t-t_i)f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1}-t)M_i + (t-t_i)M_{i+t}]\right) \quad (10)$$

Dalam Bellen & Zennaro (2003), suatu fungsi rasional dikatakan fungsi *A-stability* jika dapat ditulis dalam bentuk ke dalam bentuk persamaan (11).

$$R(\alpha) = 1 + \alpha a^T (I - \alpha A)^{-1} u \tag{11}$$

atau bentuk ekuivalennya ditampilkan dalam persamaan (12).

$$R(\alpha) = \frac{\det[I - \alpha A + \alpha u a^T]}{\det[I - \alpha A]} \tag{12}$$

Agar diperoleh bentuk seperti persamaan (11), maka manipulasi bentuk persamaan (10) menjadi persamaan (13) berikut.

$$\begin{aligned} k_{n+1} = {} & \lambda y_n u + \lambda h A k_{n+1} \\ & + \mu\left(\frac{(t_{i+1} - t)^3 M_i + (t - t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1} - t) f_i + (t - t_i) f_{i+1}}{h_i} \right. \\ & \left. - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1} - t) M_i + (t - t_i) M_{i+t}]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{n+1} - \lambda h A k_{n+1} \\ = {} & \lambda y_n u \\ & + \mu\left(\frac{(t_{i+1} - t)^3 M_i + (t - t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1} - t) f_i + (t - t_i) f_{i+1}}{h_i} \right. \\ & \left. - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1} - t) M_i + (t - t_i) M_{i+t}]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I - h\lambda A) k_{n+1} \\ = {} & \lambda y_n u \\ & + \mu\left(\frac{(t_{i+1} - t)^3 M_i + (t - t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1} - t) f_i + (t - t_i) f_{i+1}}{h_i} \right. \\ & \left. - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1} - t) M_i + (t - t_i) M_{i+t}]\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Persamaan (11) dikali dengan $h(I - h\lambda A)^{-1}$ maka diperoleh persamaan (14) berikut.

$$\begin{aligned} h k_{n+1} = {} & h\lambda (I - h\lambda A)^{-1} y_n u \\ & + h\mu (I - h\lambda A)^{-1}\left(\frac{(t_{i+1} - t)^3 M_i + (t - t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} \right. \\ & \left. + \frac{(t_{i+1} - t) f_i + (t - t_i) f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1} - t) M_i + (t - t_i) M_{i+t}]\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Ganti persamaan (14) dengan memisalkan $\alpha = h\lambda$, $\beta = h\mu$, dan $\omega = (I - h\lambda A)^{-1}$, sehingga diperoleh persamaan (15).

$$hk_{n+1} = \alpha\omega y_n u + \beta\omega\left(\frac{(t_{i+1}-t)^3 M_i + (t-t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1}-t)f_i + (t-t_i)f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1}-t)M_i + (t-t_i)M_{i+t}]\right) \quad (15)$$

selanjutnya subtitusi persamaan (15) ke persamaan (9) sehingga didapat persamaan (16).

$$y_{n+1} = y_n + ha^T k_{n+1}$$

$$y_{n+1} = y_n + a^T hk_{n+1} = y_n + a^T\left(\alpha\omega y_n u + \beta\omega\left(\frac{(t_{i+1}-t)^3 M_i + (t-t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1}-t)f_i + (t-t_i)f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1}-t)M_i + (t-t_i)M_{i+t}]\right)\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \alpha a^T\omega y_n u + \beta a^T\omega\left(\frac{(t_{i+1}-t)^3 M_i + (t-t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1}-t)f_i + (t-t_i)f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1}-t)M_i + (t-t_i)M_{i+t}]\right)$$

$$y_{n+1} = y_n(1 + \alpha a^T\omega u) + \beta a^T\omega\left(\frac{(t_{i+1}-t)^3 M_i + (t-t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1}-t)f_i + (t-t_i)f_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(t_{i+1}-t)M_i + (t-t_i)M_{i+t}]\right) \quad (16)$$

Berdasarkan persamaan (14), maka fungsi *A-stability* diperoleh

$$R(\alpha) = 1 + \alpha a^T\omega u$$

Untuk melihat *P-Stability*, tulis ulang kembali persamaan (16) kedalam bentuk matriks, sehingga diperoleh

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ hk_{n+1} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, persamaan (15) dapat ditulis

AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 1 April 2022
e-ISSN 2579-7646

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix} Y_{n+1} = \begin{pmatrix}1+\alpha a^T\omega u & 0\\ \alpha\omega u & u\end{pmatrix} Y_n + \begin{pmatrix}\dfrac{\beta a^T\omega((t_{n+1}-t)^T)^3M^T + (t-t_n)^3M^T}{6h^T} & 0\\ \dfrac{\beta\omega((t_{n+1}-t)^T)^3M^T + (t-t_n)^3M^T}{6h^T} & 0\end{pmatrix}\\ + \begin{pmatrix}\beta a^T\omega\dfrac{(t_{n+1}-t)^T}{h^T} & 0\\ \beta\omega\dfrac{(t_{n+1}-t)^T}{h^T} & 0\end{pmatrix} Y_n + \begin{pmatrix}\beta a^T\omega\dfrac{(t_{n+1}-t)^T}{h^T} & 0\\ \beta\omega\dfrac{(t_{n+1}-t)^T}{h^T} & 0\end{pmatrix} Y_{n-1}\\ - \begin{pmatrix}\beta a^T\omega\dfrac{h^T}{6}[(t_{n+1}-t)^TM^T + (t-t_n)^TM^T] & 0\\ \beta\omega\dfrac{h^T}{6}[(t_{n+1}-t)^TM^T + (t-t_n)^TM^T] & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Kemudian, persamaankarakteristik dari persamaan (5)

$$\begin{aligned}S(\alpha,\beta,\zeta) = \det\Bigg(&\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\zeta^{n+1} - \begin{pmatrix}1+\alpha a^T\omega u & 0\\ \alpha\omega u & u\end{pmatrix}\zeta^n\\ &- \begin{pmatrix}\dfrac{\beta a^T\omega((t_{n+1}-t)^T)^3M^T + (t-t_n)^3M^T}{6h^T} & 0\\ \dfrac{\beta\omega((t_{n+1}-t)^T)^3M^T + (t-t_n)^3M^T}{6h^T} & u\end{pmatrix}\\ &- \begin{pmatrix}\beta a^T\omega\dfrac{(t_{n+1}-t)^T}{h^T} & 0\\ \beta\omega\dfrac{(t_{n+1}-t)^T}{h^T} & 0\end{pmatrix}\zeta^n - \begin{pmatrix}\beta a^T\omega\dfrac{(t_{n+1}-t)^T}{h^T} & 0\\ \beta\omega\dfrac{(t_{n+1}-t)^T}{h^T} & 0\end{pmatrix}\zeta^{n-1}\\ &+ \begin{pmatrix}\beta a^T\omega\dfrac{h^T}{6}[(t_{n+1}-t)^TM^T + (t-t_n)^TM^T] & 0\\ \beta\omega\dfrac{h^T}{6}[(t_{n+1}-t)^TM^T + (t-t_n)^TM^T] & 0\end{pmatrix}\Bigg)\end{aligned}$$

dengan I adalah matriks identitas, maka relasi rekurensinya ditampilkan dalam persamaan (17).

$$\begin{aligned}S(\alpha,\beta,\zeta) = \varsigma^{n+1} &- (1+\alpha a^T\omega u)\varsigma^n\\ &- (\beta a^T\omega((t_{n+1}-t)^T)^3M^T + \beta a^T\omega((t-t_n)^T)^3M^T)\\ &- \beta a^T\omega\left(\frac{(t_{n+1}-t)^T}{h^T}\right)\varsigma^n - \beta a^T\omega\left(\frac{(t-t_n)^T}{h^T}\right)\zeta^{n-1}\\ &+ \beta a^T\omega\frac{h^T}{6}[(t_{n+1}-t)^TM^T + (t-t_n)^TM^T] \qquad (17)\end{aligned}$$

Sehingga dapat dilihat bahwa persamaan (17) memenuhi bentuk dari fungsi rasional (11), oleh karena itu, persamaan polinomial (17) dikatakan *P-Stability*.

D. Simpulan

Dari hasil analisis kestabilan metode Runge-Kutta dengan *Cubic-Spline* untuk menyelesaikan DDE diperoleh bahwa metode ini memenuhi sifat $P-$ *stability*, sehingga dapat digunakan untuk menyelesaikan DDE dengan nilai kesalahan (*error)* stabil atau solusi yang diperoleh akan konvergen. Sehingga solusi yang diperoleh dapat digunakan.

E. Daftar Pustaka

Al-Mutib, A. N. (1984). Stability properties of numerical methods for solving delay differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **10**(1), 71–79. doi:10.1016/0377-0427(84)90071-2.

Barwell, V. K. (1975). Special functional stability problems for equations. *BIT*, **15**, 2–7.

Bellen, A. (2000). Numerical methods for delay differential equations: Accuracy and stability problems. *IFAC Proceedings Volumes*, **33**(23), 127–128. doi:10.1016/s1474-6670(17)36928-8.

Bellen, A. & Zennaro, M. (2003). *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Oxford: Clarendon Press.

Liu, M. Z., Yang, Z. W., & Xu, Y. (2006). The stability of modified Runge-Kutta methods for the pantograph equation. *Mathematics of Computation*, **75**(255), 1201–1216. doi: 10.1090/s0025-5718-06-01844-8.

Oberle, H. J. & Pesch, H. J. (1981). Numerical treatment of delay differential equations by Hermite Interpolation. *Numerische Mathematik*, **37**(2), 235–255. doi:10.1007/BF01398255.

Ponnammal, K. (2017). *Singly Diagonally Implicit Runge-Kutta fourth and fifth order methods for Solving Delay Differential Equations*. **6**(7), 182–197.

Yaghoobi, S., Moghaddam, B. P., & Ivaz, K. (2017). An efficient cubic spline approximation for variable-order fractional differential equations with time delay. *Nonlinear Dynamics*, **87**(2), 815–826. doi:10.1007/s11071-016-3079-4.