

Grafos planos



Álvaro Garijo Álvarez
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Alfredo Martín García Olaverri
25 de junio de 2021

Prólogo

La teoría de grafos nace en 1736 cuando el matemático suizo Leonhard Euler resolvió el problema conocido como los puentes de Königsberg. El problema consistía en pasar por los siete puentes de la ciudad sin repetir ninguno. Las conclusiones de Euler fueron que era imposible cruzar todos los puentes una sola vez. Más adelante, se han realizado otros estudios importantes que han ido dando forma a la teoría de grafos, como las investigaciones de Gustav Kirchhoff en 1845 sobre los circuitos eléctricos o las investigaciones de Francis Guthrie en 1852 respecto al conocido teorema de los cuatro colores.

Hay que tener en cuenta que existen varios tipos de grafos, dirigidos o no dirigidos, simples o no simples, conexos o no conexos, planos o no planos. En particular, este trabajo va a centrarse en los grafos planos.

Los grafos planos son aquellos que se pueden dibujar en el plano sin que se corten sus ejes. Uno de los estudios más significantes en la teoría de grafos planos fue tratar de caracterizar qué grafos son planos y cuales no. Al igual que ha ocurrido con otros problemas relacionados con la teoría de grafos, los inicios de las preguntas relacionadas con la caracterización de los grafos planos se dan en las matemáticas que se usaban como entretenimiento.

Dos problemas relacionados con los grafos planos que precedieron al resultado de caracterización de grafos planos de Kuratowski en los años 20 fueron la escalera de Möbius y el acertijo de los trenes de Dudeney. Más adelante, el teorema de Kuratowski inspiró a otros matemáticos a proponer otras caracterizaciones de grafos planos.

En el primer capítulo del trabajo se va a hacer una introducción a la teoría de grafos, dando las definiciones más importantes y utilizadas en esta materia y que se van a usar a lo largo del trabajo. Una de ellas será la definición de árbol acompañada de un resultado que nos dice que un árbol es plano y su trazado plano sólo tiene una cara. Gracias a esta propiedad de los árboles seremos capaces de enunciar y demostrar la fórmula de Euler para grafos planos, que relaciona el número de caras, de ejes y de vértices de un grafo plano conexo. La fórmula dice que el número de vértices más el número de caras de un grafo plano conexo es igual a su número de ejes más dos.

Otra de las definiciones que veremos será la de inmersión de un grafo, que se define como un trazado del grafo en el plano cuyos ejes no se intersecan. Además, se dirá cuándo un grafo tiene una única inmersión o si por el contrario puede tener más de una. Esta definición será de utilidad a lo largo del trabajo ya que se utilizará en varios resultados.

Por último, en este primer capítulo veremos las definiciones de grafo completo y de grafo bipartito. Un resultado conocido respecto a grafos de este segundo tipo dice que un grafo es bipartito si y solo si no contiene ciclos de longitud impar y demostraremos que los grafos K_5 y $K_{3,3}$ (grafos completo y bipartito completo respectivamente) no son planos.

En el segundo capítulo se van a enunciar y demostrar dos resultados importantes relacionados con

los grafos planos, el teorema de Fáry y el teorema de Whitney. El primero nos dice que todo grafo plano tiene un trazado plano en el que sus ejes son líneas rectas, mientras que el teorema de Whitney nos asegura que todo grafo plano 3-conexo tiene una única inmersión. Para poder demostrarlos, primero tendremos que definir y enunciar todos aquellos resultados que se van a emplear en la demostración de cada uno de los teoremas. Dos de los teoremas más importantes que enunciaremos y utilizaremos en la demostración del teorema de Whitney son el teorema de la curva de Jordan y su extensión conocida como el teorema de Jordan-Schonflies.

Por último, en el tercer capítulo se va a presentar el teorema principal del trabajo así como el más importante relacionado con los grafos planos, el teorema de Kuratowski. Este nos dice que un grafo es plano si y solo si no contiene ninguna subdivisión de los grafos K_5 o $K_{3,3}$. Para poder demostrarlo rigurosamente, primero tendremos que enunciar una serie de resultados y dar varias definiciones que se utilizarán para demostrar con detalle el teorema en cuestión. Entre las definiciones que vamos a ver cabe destacar la de subdivisión de un eje que se definirá como el resultado de sustituir un eje por un camino de longitud dos.

Summary

Graph theory was born in 1736, when the Swiss mathematician Leonhard Euler solved the "Königsberg bridges" problem, aimed at creating a path through the seven bridges of the city crossing each of them only once. Euler represented the problem with a graph, where every bridge was represented by an edge and every region of the city was represented by a vertex. Euler concluded that it was unfeasible, since the vertices in the middle of the river had to be connected to an even number of bridges. Therefore, the only vertices that could be connected to an odd number of bridges were the initial and the final vertices. Later studies, however, developed the theory of graphs from this starting point. Two of the most notable examples are Gustav Kirchhoff's 1845 research on electrical circuits, and Francis Guthrie's 1852 research, which translated into the well-known theorem of the four colors.

Graphs can be classified into different types: directed or undirected, simple or not simple, connected or not connected, and planar or non-planar. In particular, this dissertation will focus on planar graphs.

Planar graphs are those that can be drawn in the plane in such a way that the edges do not intersect each other. One of the most significant studies in the field of planar graph theory attempted to establish which graphs could be considered planar. As is the case with other problems related to graph theory, questions related to the characterization of planar graphs were first tackled merely for entertainment purposes.

Further noteworthy problems concerning planar graphs prior to Kuratowski's characterization were the Möbius ladder and the Dudeney train puzzle, proposed in the 1920s. Later on, Kuratowski's theorem inspired other mathematicians to propose alternative characterizations of planar graphs.

The first chapter of this dissertation will offer an introduction to the theory of graphs, presenting the most relevant definitions in this field, which will be used throughout the dissertation. One of them will be the definition of a tree, together with a result that tells us that a tree is planar and its planar drawing only has one face. Subsequently, Euler's formula for planar graphs will be stated and proved. This theorem relates the number of faces, edges and vertices of a connected planar graph. In particular, it tells us that the number of vertices plus the number of faces of a connected planar graph is equal to its number of edges plus two. Another important definition that we will see is the embedding of a planar graph, that is, a drawing of the graph in the plane whose edges do not intersect. This will be pertinent throughout the dissertation, as we will use it in several results.

Finally, in this first chapter we will see the definitions of complete graph and bipartite graph. We will look at a known result with respect to graphs of this second type: A graph is bipartite if and only if it does not contain cycles of odd length. Then, we will prove that the graphs K_5 and $K_{3,3}$ (complete and bipartite complete graphs respectively) are not planar.

In the second chapter, two important results related to plane graphs, Fary's theorem and Whitney's theorem, will be stated and proven. The first one states that every planar graph has a planar drawing in which its edges are straight lines, while Whitney's theorem claims that every 3-connected planar graph

has a unique embedding. We will say that two embeddings in the sphere of a planar graph are the same if there exists a continuous and bijective map that takes every vertex of one embedding to every vertex of the other embedding, every edge of one embedding to every edge of the other embedding, and every face of one embedding to every face of the other embedding.

In order to prove both theorems, first we will have to define and state all the necessary results that are going to be used in their proofs. Two of the most significant theorems that will be stated and used in the proof of Whitney's theorem are the Jordan curve theorem and the Jordan-Schonflies theorem.

Finally, in the third chapter we will expound the major theorem of the dissertation, which is considered the most important result related with planar graphs, Kuratowski's theorem. It tells us that a graph is planar if and only if it does not contain any subdivision of the non-planar graphs K_5 or $K_{3,3}$. In order to prove this theorem in detail, a series of results and definitions will be stated. Among the definitions that we are going to see, it is worth highlighting the subdivision of an edge, that will be defined as the result of substituting an edge for a path of length two. At the end of Kuratowski's proof theorem, we will see all the different cases for which the theorem does not hold if we suppose that there exists a non-planar graph that does not contain any subdivision of K_5 or $K_{3,3}$.

Índice general

Prólogo	III
Summary	V
1. Introducción a la teoría de grafos. Fórmula de Euler. Grafos K_5 y $K_{3,3}$.	1
1.1. Primeras definiciones	1
1.2. Fórmula de Euler	3
1.3. Los grafos K_5 y $K_{3,3}$	4
2. Teoremas de Fáry y de Whitney	7
2.1. El teorema de Fáry	7
2.2. El teorema de Whitney	9
3. Teorema de Kuratowski	15
3.1. Resultados previos	15
3.2. El teorema de Kuratowski	20
Bibliografía	25

Capítulo 1

Introducción a la teoría de grafos. Fórmula de Euler. Grafos K_5 y $K_{3,3}$.

En este primer capítulo, vamos a ver los primeros conceptos sobre la teoría de grafos que utilizaremos a lo largo del trabajo. Además, enunciaremos y demostraremos la fórmula de Euler para grafos planos e introduciremos los conceptos de grafos completos y bipartitos y veremos que los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no son planos, propiedad importante que se utilizará en el teorema de Kuratowski que veremos en el tercer capítulo.

1.1. Primeras definiciones

Definición 1.1. Un **grafo no dirigido** G es una estructura matemática formada por dos conjuntos, V y E , donde V es un conjunto finito, cuyos elementos se llaman **vértices** y E es un conjunto de pares no ordenados de vértices, cuyos elementos se llaman **ejes**.

Un **grafo dirigido** G es una estructura matemática formada por dos conjuntos, V y A , donde V es un conjunto finito, cuyos elementos se llaman **vértices** y A es un subconjunto de $V \times V$ cuyos elementos se llaman **arcos**.

Un **subgrafo** de G es un grafo cuyos vértices y ejes pertenecen a G .

Llamaremos **orden** de un grafo al número de sus vértices.

El **grado** de un vértice es el número de ejes incidentes con él.

Un **bucle** es un eje que conecta un vértice consigo mismo.

Un grafo es **simple** si no tiene bucles ni ejes repetidos.

A lo largo del trabajo vamos a tratar únicamente con grafos simples no dirigidos, por lo tanto cada vez que consideremos un grafo este será no dirigido a menos que digamos lo contrario.

Definición 1.2. Sea G un grafo.

Un **recorrido** (walk) del vértice i al j es una sucesión de vértices (i_0, i_1, \dots, i_l) tal que $i_0 = i$, $i_l = j$ y $(i_{k-1}, i_k) \in E$ para $k = 1, \dots, l$.

Un **camino** (trial) es un recorrido que no repite ejes. Si además no aparecen vértices repetidos se dice que el camino es **simple** (path).

Dos caminos se dicen **disjuntos** si no tienen ningún vértice interno en común.

Un **ciclo** es un camino que tiene al menos un eje y que el vértice inicial es el mismo que el vértice final. Si además no aparecen vértices repetidos se dice que el ciclo es **simple**.

Definición 1.3. Un grafo G se dice **conexo** si todo par de vértices distintos están unidos por un camino.

Una **componente** de un grafo es un subgrafo conexo maximal.

Se llama **vértice de corte** (cut-vertex) de un grafo a un vértice que si lo eliminas aumenta el número de componentes.

Se dice que un grafo G es **biconexo** (**2-conexo**) si al eliminar de G cualquier vértice el grafo obtenido sigue siendo conexo. Si al eliminar de G dos vértices cualesquiera el grafo obtenido sigue siendo conexo, se dice que G es **triconexo** (**3-conexo**).

Definición 1.4. Un **árbol** es un grafo conexo que no tiene ciclos. Sea G un árbol con n vértices, veamos algunas de sus propiedades.

- Cualquier par de vértices de G están conectados por un solo camino.
- El árbol G tiene $n - 1$ ejes.
- Si se elimina un eje, G deja de ser conexo.
- Si se añade un eje, el nuevo grafo tendrá un ciclo.

Definición 1.5. Un **trazado** (drawing) de un grafo es una representación de sus vértices y ejes en una superficie (plano, esfera, toro,...). Los vértices son puntos y los ejes curvas simples.

Una **inmersión** (embedding) de un grafo en una superficie es un trazado del grafo en esa superficie S de forma que sus ejes no se intersecan. No todos los grafos tienen una inmersión en una superficie dada. Además, consideraremos que dos inmersiones son idénticas si existe una aplicación continua y biyectiva

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow S \\ G &\longmapsto G' \end{aligned}$$

que transforma una inmersión en otra de manera que lleva cada vértice de G a cada vértice de G' , cada eje de G a cada eje de G' y cada cara de G a cada cara de G' .

Un grafo **geométrico** es un trazado de un grafo en el plano donde los ejes son líneas rectas.

Ejemplo 1.6. Como hemos dicho antes, un grafo puede tener varias inmersiones idénticas. Por ejemplo las siguientes inmersiones en el plano del mismo grafo son idénticas debido a que existe una aplicación continua y biyectiva que transforma una en otra:

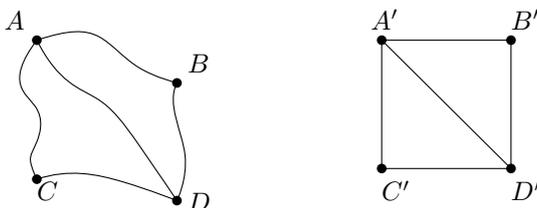


Figura 1.1: Dos inmersiones iguales de un grafo

Sin embargo, un grafo puede tener varias inmersiones distintas. Veamos un ejemplo:

Sea $G = (V, E)$ donde $V = \{A, B, C, D, E\}$ y $E = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (D, E)\}$, existe más de una inmersión de G en el plano:

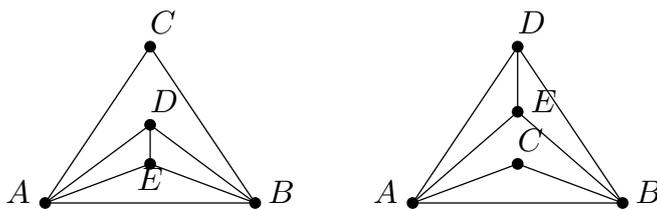


Figura 1.2: Dos posibles inmersiones distintas del grafo G

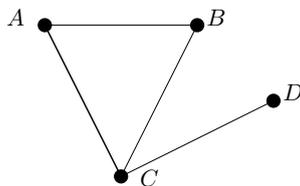
Estas dos inmersiones son distintas pues en la primera no se pueden unir los vértices C y E sin cortar ningún eje, mientras que en la segunda sí que se puede.

Definición 1.7. Un grafo $G = (V, E)$ es **plano** si se puede trazar en el plano de forma que los ejes no se corten, es decir, tiene una inmersión plana.

Al grafo abstracto se le llama **grafo abstracto plano** (planar graph) y al trazado en el plano se le llama **grafo plano** (plane graph). Normalmente, los vértices de esa inmersión (puntos) se denotan también por V , y los ejes de esa inmersión (un conjunto de curvas simples) también por E .

Un ejemplo de grafo abstracto plano es $G = (V, E)$ donde $V = \{A, B, C, D\}$ y $E = \{(A, B), (A, C), (B, C), (C, D)\}$.

La siguiente figura nos muestra un grafo plano (inmersión) de este grafo abstracto plano.



Definición 1.8. Una **cara** F de un grafo plano $G = (V, E)$ es una componente de $\mathbb{R}^2 \setminus \{E, V\}$.

La cara no acotada de un grafo plano se llama **cara exterior** y los vértices y ejes que son incidentes a una cara son la **frontera** de la cara.

1.2. Fórmula de Euler

A continuación, vamos a enunciar y demostrar la fórmula de Euler para grafos planos. Sin embargo, antes vamos a enunciar y demostrar una propiedad sobre árboles.

Proposición 1.9. Un árbol es plano y su trazado plano sólo tiene una cara.

Demostración. Sea $T = (V, E)$ un árbol con n vértices. Vamos a probar que T es plano y su trazado plano sólo tiene una cara por inducción sobre el número de vértices.

Si $n = 1$ o 2 el resultado es trivial.

Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$ vértices.

A continuación, vamos a ver que existe en T al menos un vértice de grado 1. Para ello, escogemos un vértice cualquiera y seguimos un camino en cualquier dirección.

Como T no tiene ciclos (por ser árbol), el camino no puede volver a ningún vértice que ya se haya visitado, por lo tanto, al final llegaremos a un vértice con grado 1. Vamos a llamar a este vértice v .

Si eliminamos el vértice v y su único eje incidente vw , tendremos un nuevo árbol $T' = T - \{v\}$ con $n - 1$ vértices. Por inducción, T' es plano y su trazado plano tiene una sola cara.

Por último, es posible añadir el eje vw eliminado anteriormente al trazado de T' de manera que no corte a ningún otro eje, obteniendo un trazado plano de T . Por lo tanto, se tiene que T es plano y su trazado plano tiene una sola cara.

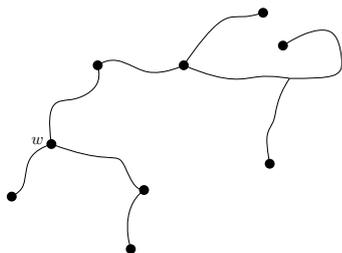


Figura 1.3: Trazado plano de T'

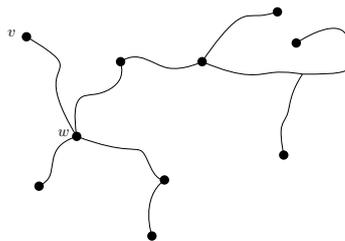


Figura 1.4: Trazado plano de T

□

Teorema 1.10. (de Euler para grafos planos). Sea G un grafo plano conexo con $|V|$ vértices, $|E|$ ejes y $|F|$ caras. Entonces $|V| + |F| = |E| + 2$.

Demostración. Vamos a probar el teorema por inducción sobre el número de ejes $|E|$. Supongamos que el grafo G es simple.

- Si $|E| = 1$ entonces por ser G simple, será el grafo árbol de un solo eje, entonces $|V| = 2$ y por 1.9 $|F| = 1$, luego $|V| + |F| = 2 + 1 = 3$ y por otro lado $|E| + 2 = 1 + 2 = 3$.
- Supongamos que es cierto para todos los grafos con $|E| - 1$ ejes.
- Vamos a probarlo para un grafo G con $|E|$ ejes. Tenemos dos casos:
 1. Si podemos eliminar un eje e del grafo tal que el nuevo grafo G' sigue siendo conexo, entonces el eje e está en un ciclo en el grafo G , por lo tanto hay dos caras distintas a ambos lados del eje e en G , así que G' tendrá $|E| - 1$ ejes, $|V|$ vértices y $|F| - 1$ caras. Luego por nuestra hipótesis de inducción, como se cumple para $|E| - 1$ ejes se sigue que $|V| + |F| - 1 = |E| - 1 + 2 \Rightarrow |V| + |F| = |E| + 2$.
 2. Si ningún eje de G cumple la propiedad anterior, entonces G es un grafo conexo sin ciclos, luego es un árbol. Por lo tanto, tenemos que $|V| = |E| + 1$ pues tiene $|E|$ ejes y además, por 1.9, $|F| = 1$. Así $|V| + |F| = |E| + 1 + 1 = |E| + 2$.

□

1.3. Los grafos K_5 y $K_{3,3}$

Ahora vamos a demostrar que los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no son planos. Sin embargo, antes vamos a enunciar varias definiciones y varios resultados.

Definición 1.11. El grafo **completo** K_n es el grafo no dirigido que tiene n vértices y en el que aparecen todos los ejes.

Definición 1.12. Un grafo no dirigido se dice **bipartito** si podemos dividir el conjunto de los vértices en dos subconjuntos no vacíos V_1 y V_2 de manera que todos los ejes unen un vértice de V_1 con otro de V_2 .

Además, si $|V_1| = x$ y $|V_2| = y$ y en el grafo aparecen todos los ejes de V_1 a V_2 , el grafo se llama **bipartito completo** y se denota por $K_{x,y}$.

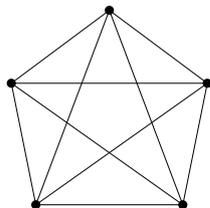


Figura 1.5: El grafo K_5 es un grafo completo.

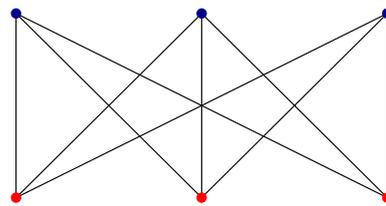


Figura 1.6: El grafo $K_{3,3}$ es un grafo bipartito completo.

Un resultado bien conocido sobre grafos bipartitos es el siguiente:

Teorema 1.13. Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.

Demostración. \Rightarrow : Sea G un grafo bipartito y sea $v_0, v_1, \dots, v_n = v_0$ un ciclo de G . Como G es bipartito, V se puede dividir en dos subconjuntos no vacíos V_0 y V_1 .

Supongamos sin pérdida de generalidad que $v_0 \in V_0$. Entonces v_1 es adyacente a v_0 , por lo tanto $v_1 \in V_1$. Análogamente se sigue que $v_2 \in V_0, v_3 \in V_1$ y así sucesivamente. Como $v_n = v_0 \in V_0$ podemos concluir que n es un número par, por lo tanto cualquier ciclo de G será de longitud par.

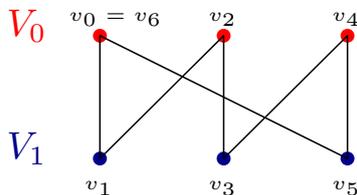


Figura 1.7: Ejemplo de un grafo bipartito con un ciclo de longitud par.

\Leftarrow : Supongamos que G no posee ciclos de longitud impar y sean V_0 y V_1 dos subconjuntos de V no vacíos. Sea $v \in V$ tal que lo pintamos de rojo. A continuación, se va a definir el color de cualquier otro vértice w de G como sigue:

Si el camino más corto de v a w es de longitud par, entonces pintaremos w de rojo, mientras que si el camino más corto de v a w es de longitud impar pintaremos w de azul. Vamos a probar que de esta manera no hay dos vértices adyacentes del mismo color. Además, vamos a considerar que los vértices rojos pertenecen a V_0 y los azules a V_1 , es decir vamos a probar que no hay dos vértices adyacentes que pertenecen al mismo subconjunto. Vamos a demostrarlo por contradicción.

Supongamos que p y q son dos vértices rojos adyacentes. Sea P el camino más corto de v a p y sea Q el camino más corto de v a q . Entonces tanto P como Q tienen un número par de ejes, luego si tomamos un recorrido que empiece en v y continúe por P hasta p , siga por el eje pq y vuelva a v a través de Q , habremos obtenido un recorrido C con un número impar de ejes, pues tenemos dos caminos P y Q con un número par de ejes cada uno más el eje pq .

Ahora, si quitamos los ejes que se usan tanto en P como en Q , este recorrido C se separará en una unión de ciclos con ejes disjuntos. Como el número total de ejes de estos ciclos sigue siendo impar (pues al contar los ejes repetidos se estaban contando dos veces), tiene que haber al menos un ciclo con un número impar de ejes, llegando a una contradicción.

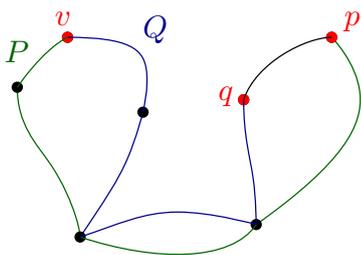


Figura 1.8: Recorrido con un número impar de ejes.

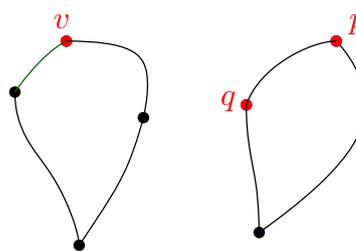


Figura 1.9: Hay al menos un ciclo con un número impar de ejes.

Si suponemos que p y q son ambos azules, nos sirve la misma demostración teniendo en cuenta que la suma de dos números impares sigue siendo par, por lo tanto C va a seguir teniendo un número impar de ejes.

Así hemos probado que no puede haber dos vértices adyacentes del mismo color, es decir, que no puede haber dos vértices adyacentes pertenecientes al mismo subconjunto V_0 o V_1 , por lo tanto G tiene que ser bipartito.

□

Lema 1.14. Si G es un grafo plano conexo y $|V| > 2$, entonces $|E| \leq 3|V| - 6$.

Demostración. ■ Si $|E| \leq 3$ entonces es claro que $|E| \leq 3 \leq 3|V| - 6$ pues el mínimo número de vértices que puede haber es $|V| = 3$.

- Si $|E| > 3$, cada cara estará acotada al menos por 3 ejes. Por lo tanto, cada eje acotará por lo menos 2 caras. Así tenemos la relación $3|F| \leq 2|E| \Rightarrow |F| \leq \frac{2}{3}|E|$.

Ahora aplicando el Teorema de Euler y sustituyendo obtenemos que $|E| + 2 = |V| + |F| \leq |V| + \frac{2}{3}|E| \Rightarrow \frac{1}{3}|E| \leq |V| - 2 \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6$.

□

Lema 1.15. Si G es un grafo plano conexo bipartito y $|V| > 2$ entonces $|E| \leq 2|V| - 4$.

Demostración. En un grafo bipartito cada cara está formada por al menos 4 ejes y cada eje está en 2 caras, por lo tanto $2|E| \geq 4|F| \Rightarrow |F| \leq \frac{1}{2}|E|$. Así, por el Teorema de Euler $|E| + 2 = |V| + |F| \leq |V| + \frac{1}{2}|E| \Rightarrow \frac{1}{2}|E| \leq |V| - 2 \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$.

□

Teorema 1.16. Los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no son planos.

Demostración. Primero vamos a probarlo para el grafo $K_{3,3}$. Supongamos que es plano. Sabemos que tiene 6 vértices y 9 ejes, por lo tanto como es un grafo conexo y bipartito y $|V| > 2$ podemos aplicar el Lema 1.15. Así $|E| \leq 2|V| - 4 \Rightarrow 9 \leq 12 - 4 = 8$ lo que es una contradicción. Por lo tanto el grafo $K_{3,3}$ no es plano.

A continuación, vamos a probar que K_5 no es plano. Supongamos que es plano. Sabemos que tiene 5 vértices y 10 ejes. Por lo tanto, como es conexo y $|V| > 2$ podemos aplicar el Lema 1.14. Por lo tanto, $|E| \leq 3|V| - 6 \Rightarrow 10 \leq 15 - 6 = 9$ lo que es una contradicción. Así el grafo K_5 no es plano.

□

Capítulo 2

Teoremas de Fáry y de Whitney

En este capítulo vamos a enunciar y demostrar el teorema de Fáry y el teorema de Whitney.

2.1. El teorema de Fáry

Lo primero de todo vamos a enunciar y demostrar el teorema de Fáry. Pero antes vamos a definir varios conceptos.

Definición 2.1. Un grafo plano $G = (V, E)$ es **maximal** (en ejes) si el grafo $G' = (V, E \cup \{e'\})$, con e' cualquier eje que no esté en E , no es plano. Podemos observar lo siguiente:

- En cualquier trazado plano de un grafo plano maximal todas las caras tienen que ser triángulos. Por esta razón, a los grafos planos maximales se les llama también **triangulaciones**.
- Cada eje de una triangulación está en la frontera de dos caras.
- Como consecuencia, aplicando la fórmula de Euler, cualquier grafo plano maximal tiene $3n - 6$ ejes y $2n - 4$ caras, siendo n el número de vértices.
- Todo grafo plano tiene al menos cuatro vértices de grado ≤ 5 .

Algunos autores llaman triangulación a un trazado plano de un grafo plano maximal y **casi-triangulación** a un trazado plano de un grafo plano cuyas caras son todas triángulos excepto la cara externa (aunque algunos autores le llaman también triangulación de un conjunto de puntos).

Definición 2.2. Sea G un grafo, llamamos **contracción de un eje** (v, w) a una operación que reemplaza los vértices v y w por un solo vértice tal que los ejes incidentes al nuevo vértice son todos los ejes incidentes a v ó w (quitando los ejes repetidos) excepto el propio eje (v, w) .

Teorema 2.3. (de Fáry). *Todo grafo plano tiene un trazado plano en el que sus ejes son líneas rectas.*

Demostración. Es suficiente probar el teorema para una triangulación G ya que se pueden añadir ejes a un grafo plano hasta obtener una triangulación.

Vamos a demostrarlo por inducción sobre el número de vértices de G .

Si $|V| = 3$ el resultado es trivial.

Supongamos que $|V| \geq 4$. Un triángulo separador de G es un ciclo de longitud 3 que contiene al menos un vértice en su interior y al menos un vértice en su exterior.

Si G no tiene ningún triángulo separador, sea vw cualquier eje de G .

Si existen triángulos separadores, consideremos un triángulo separador T_0 que no contiene en su interior ningún otro triángulo separador. Notar que T_0 existe por ser G un grafo finito. Si w es un punto en el interior de T_0 , consideremos vw un eje incidente a w .

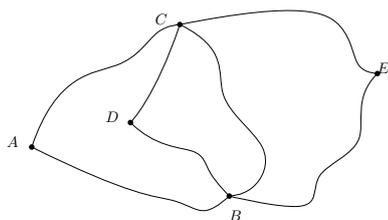


Figura 2.1: ABC es un triángulo separador

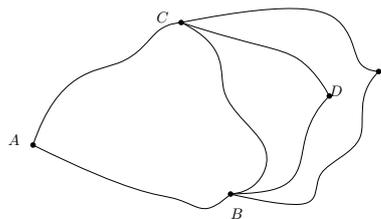
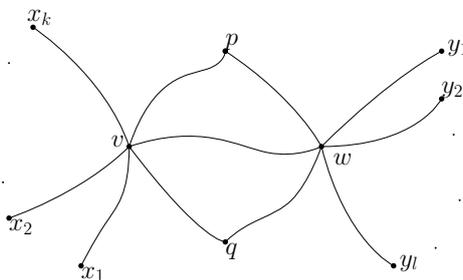


Figura 2.2: ABC no es un triángulo separador

Notar que $vw p$ y $vw q$ son dos triángulos adyacentes a vw (o son dos caras con el eje vw como frontera). Como vw no se encuentra en un triángulo separador, p y q serán los únicos vecinos comunes de v y w .

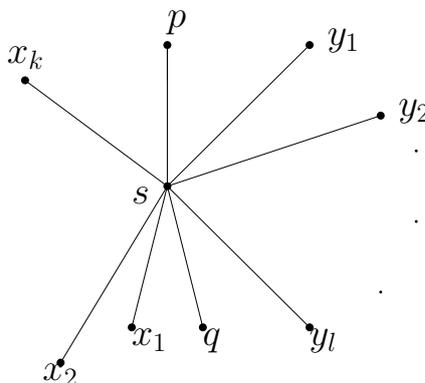
Sean $(vp, vw, vq, vx_1, vx_2, \dots, vx_k)$ y $(wq, wv, wp, wy_1, wy_2, \dots, wy_l)$ los ejes incidentes a v y a w respectivamente, ordenados en el sentido de las agujas del reloj.



Sea G' la triangulación obtenida al contraer el eje vw de G en un solo vértice s . Así, en el nuevo grafo $G' = (V', E')$ tenemos $V' = \{V - \{v, w\} + \{s\}\}$ y $E' = E - \{vx_i, wy_j, vp, vq, wp, wq, vw\} + \{sx_i, sy_j, sp, sq\} \forall i = 1, \dots, k$ y $j = 1, \dots, l$, donde hemos reemplazado los ejes vp, wp y vq, wq en G por los ejes sp y sq en G' . Así, el orden en el sentido de las agujas del reloj de los ejes de G' incidentes a s será $(sp, sy_1, sy_2, \dots, sy_l, sq, sx_1, sx_2, \dots, sx_k)$.

Como G es plano, notar que el nuevo grafo G' sigue siendo plano ya que se pueden trazar los ejes de G' incidentes al eje s de manera que vayan al lado de los ejes de G sin que se corten entre ellos, es decir, que salgan de s y vayan hasta donde antes se encontraban los ejes v o w y a partir de ahí continúen por donde iban los ejes de G .

Por inducción, G' tiene un trazado cuyos ejes son líneas rectas y el orden de los ejes incidentes a s se mantiene.

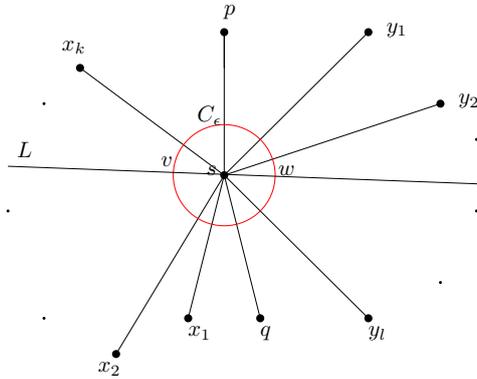


Ahora, dado un $\epsilon > 0$, sea $C_\epsilon(s)$ la circunferencia de radio ϵ y centro el vértice s . Para cada vértice vecino de s en G' , t , sea $R_\epsilon(t)$ la región formada por la unión de todos los segmentos que unen t con un punto de $C_\epsilon(s)$. Notar que $\exists \epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que todos los t vecinos de s están en el exterior de $C_\epsilon(s)$ y los únicos ejes de G' que intersecan a $R_\epsilon(t)$ son los incidentes a s (si esto no

ocurriera se puede tomar un ε más pequeño hasta que se cumpla).

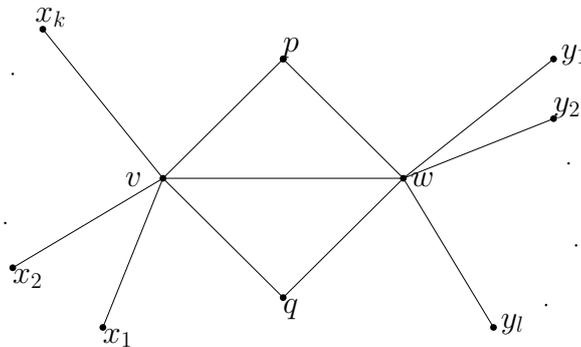
Por otra parte, notar que existe una línea L que pasa por s y que deja a p a un lado de L y a q en el otro lado.

Notar que los ejes sp y sq dividen a $C_\varepsilon(s)$ en dos arcos de circunferencia, uno que interseca los ejes $(sx_1, sx_2, \dots, sx_k)$ y otro que interseca los ejes $(sy_1, sy_2, \dots, sy_l)$. Además, es claro que el conjunto $L \cap C_\varepsilon(s)$ está formado solamente por dos puntos, que vamos a llamar v y w . Así tenemos que el punto v se encuentra en el arco de circunferencia de $C_\varepsilon(s)$ que interseca con los ejes $(sx_1, sx_2, \dots, sx_k)$ y w en el otro arco de circunferencia.



A continuación, trazamos los ejes $(vp, vw, vq, vx_1, vx_2, \dots, vx_k)$ y $(wq, wp, wy_1, wy_2, \dots, wy_l)$ como líneas rectas. Como p y q están en lados distintos de L , los ejes incidentes a v o a w no se cortan entre sí. Notar que estos ejes sí cortarán a los ejes incidentes a s , pero para poder construir el nuevo trazado de G , hay que eliminar el vértice s y sus ejes incidentes. Además, notar que al eliminar el vértice s y sus ejes incidentes, el eje vw está contenido en L .

Además, por la elección de un ε suficientemente pequeño, los ejes incidentes a v o a w no intersecan con otros ejes de G , por lo tanto ningún eje se intersecará con otros ejes y así habremos obtenido un trazado plano de G en el que sus ejes son líneas rectas.



□

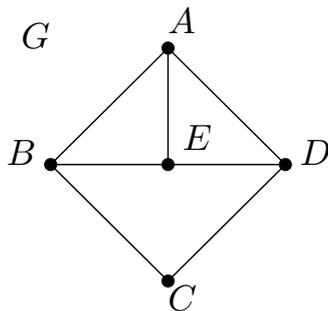
2.2. El teorema de Whitney

A continuación, vamos a enunciar y demostrar el Teorema de Whitney. Sin embargo, antes debemos dar varias definiciones y enunciar dos teoremas.

Definición 2.4. Sea G el trazado de un grafo. La **rotación** de un vértice v de G es una lista ordenada en orden cíclico (vamos a considerar el orden en el sentido de las agujas del reloj) de los ejes incidentes a ese vértice.

El **sistema de rotación** de G es el conjunto de rotaciones de cada vértice. Podemos comprobar que en trazados planos, el sistema de rotación define el orden de los ejes de todas las caras de G .

Ejemplo 2.5. Veamos un ejemplo de sistema de rotación del trazado de un grafo.



Sistema de rotación de G :

$A : BDE$

$B : AEC$

$C : BD$

$D : ACE$

$E : ADB$

Notar que cómo hemos dicho antes, un sistema de rotación define el orden de los ejes de las caras del trazado, por lo tanto, en el trazado anterior, la cara externa vendría definida por el siguiente orden (en el sentido de las agujas del reloj): $ADCB$. Esto mismo se podría hacer con todas las caras del trazado.

Definición 2.6. Una curva en el plano se dice **cerrada** si el origen y el extremo de la curva coinciden.

Una curva en el plano es **simple** si no se corta consigo misma.

Una curva en el plano es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema 2.7. (de la curva de Jordan). Toda curva cerrada en el plano (o en la esfera) separa el plano (o la esfera) en dos regiones. Además, cada región es homeomorfa al disco unidad plano.

Definición 2.8. Si C y C' son curvas cerradas simples y G y G' son dos inmersiones de un grafo 2-conexo que están formadas por C (respectivamente por C') y ejes simples en el interior de C (respectivamente en el interior de C'), entonces G y G' son **plano-isomorfos** si existe un isomorfismo de G a G' tal que un ciclo en G es la frontera de una cara de G si y solo si la imagen del ciclo es la frontera de una cara de G' y tal que la imagen de C es C' .

El teorema de la curva de Jordan se puede generalizar para grafos planos de la siguiente manera:

Teorema 2.9. (Jordan-Schonflies). Sean G y G' dos inmersiones de un grafo plano 2-conexo tales que g es un homeomorfismo y es plano-isomorfo de G a G' . Entonces g se puede extender a un homeomorfismo en el plano.

Por último, antes de comenzar con el teorema de Whitney vamos a tener en cuenta las siguientes observaciones:

- En cada vértice u del grafo plano G hay un orden cíclico (la rotación) de los ejes (u, \cdot) . Vamos a considerar que es en el sentido de las agujas del reloj.
- Vamos a denotar por $nx(e)$ el siguiente eje a e en el orden considerado anteriormente. El grafo plano inverso (mirror), el que se obtiene mirando la superficie en la orientación opuesta, lo denotaremos por G^{-1} y tendrá el orden de los ejes en el sentido contrario. Diremos que el conjunto $\{e, nx(e)\}$ forma un ángulo de G y vemos que son consecutivos en una cara de G .
- Notar que por la definición de inmersión que vimos en el capítulo 1 la inmersión G y la G^{-1} se consideran idénticas. Ver figuras 2.3 y 2.4. Como hemos dicho antes, las caras de ambas inmersiones están acotadas por los mismos ejes no dirigidos, por ejemplo, la cara externa de ambas inmersiones está acotada por los ejes no dirigidos AB , AC y BC .

Por otra parte, el orden de los ejes incidentes al vértice A en la inmersión G será, en el sentido de las agujas del reloj, CDB mientras que en la inmersión G^{-1} será CBD .

Además, si consideramos $e = AC$ entonces $nx(e) = AD$. Así, el conjunto $\{AC, AD\}$ forma un ángulo de G .

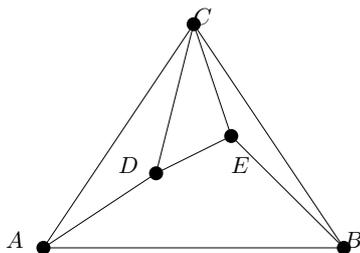


Figura 2.3: Inmersión G

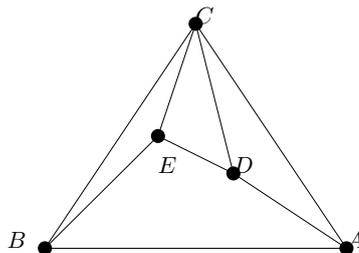


Figura 2.4: Inmersión G^{-1}

Teniendo en cuenta todas estas observaciones vamos a enunciar y demostrar el teorema de Whitney.

Teorema 2.10. (de Whitney). *Un grafo plano 3-conexo tiene una única inmersión en la esfera.*

Demostración. Sea G la inmersión en la esfera de un grafo plano 3-conexo con grafo inverso G^{-1} y sea G' otra inmersión diferente de G y de G^{-1} .

Lo que queremos demostrar es que si un grafo es como dice el enunciado, es decir, plano y 3-conexo, entonces el sistema de rotación de las dos inmersiones del grafo (G y G') es el mismo o el contrario, demostrando así que ambas inmersiones son idénticas.

Supongamos por el contrario que las rotaciones en G y G' no son iguales.

Diremos que un vértice de G' es de tipo 1 si el orden de sus ejes en el sentido de las agujas del reloj es el mismo que en G , de tipo -1 si el orden de sus ejes en el sentido de las agujas del reloj es el mismo que en G^{-1} y de tipo 2 en otro caso.

Como G' es distinto de G y de G^{-1} , necesariamente tendrá un vértice de tipo 2 o un eje que une un vértice de tipo 1 con otro de tipo -1 .

Por lo tanto, vamos a suponer que en el primer caso existe un vértice cuyo orden de los ejes en G es distinto al orden de los ejes en G' y que en el segundo caso existe un vértice con el mismo orden de los ejes tanto en G como en G' , pero existe otro vértice adyacente cuyo orden de los ejes en G es el orden inverso en G' .

- Supongamos primero que v es un vértice de tipo 2 y veamos que no puede existir.

Sea e_0, \dots, e_{d-1} el orden de los ejes alrededor de v en G' , es decir, el sistema de rotación de G' en el vértice v .

Sea j el mínimo número tal que $nx(e_j) \neq e_{j+1 \pmod{d}}$ en G . Sin pérdida de generalidad, renumerando los ejes, podemos considerar que $j = 0$, es decir, que el siguiente eje que sigue a e_0 en el sentido de las agujas del reloj no es e_1 .

Así, el orden de los ejes alrededor de v en G será $e_0, e_{i_1}, \dots, e_{i_j}, e_1, e_{i_{j+1}}, \dots, e_{i_{d-2}}$, con $1 \leq j < d - 2$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $e_{d-1} \in \{e_{i_{j+1}}, \dots, e_{i_{d-2}}\}$. Ahora, sea $y = \max\{i_1, \dots, i_j\}$, entonces $y < d - 1$ e $y + 1 \in \{i_{j+1}, \dots, i_{d-2}\}$, lo que implica que $\{e_y, e_{y+1}\}$ forma un ángulo en G' con $e_y \in \{e_{i_1}, \dots, e_{i_j}\}$ y $e_{y+1} \in \{e_{i_{j+1}}, \dots, e_{i_{d-2}}\}$.

Por lo tanto, el orden circular de los ejes incidentes a v en G será $e_0, e_{i_1}, \dots, e_y, \dots, e_{i_j}, e_1, e_{i_{j+1}}, \dots, e_{y+1}, \dots, e_{i_{d-2}}$. Ver figura 2.5.

Como el grafo es 3-conexo, hay una cara cíclica F en G' que contiene al ángulo $\{e_0, e_1\}$ e igualmente otra cara cíclica F' que contiene al ángulo $\{e_y, e_{y+1}\}$. Así, se tiene que $F \neq F'$ pues en caso contrario las caras no serían ciclos simples.

En G estos ciclos, F y F' , no son caras cíclicas, pero sí son curvas de Jordan que se intersecan en v .

Así, por el teorema de la curva de Jordan, tiene que haber una segunda intersección, así F y F' son dos caras cíclicas que tienen al menos dos vértices en común que no son vértices finales de

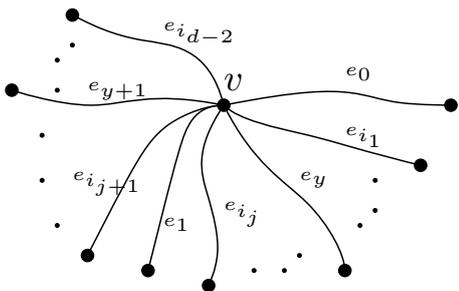


Figura 2.5: Vértice v de G

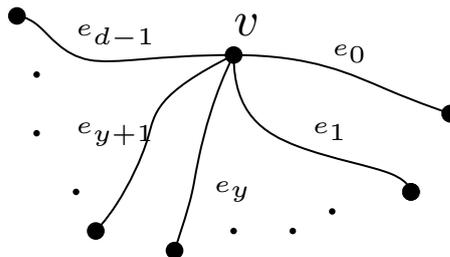


Figura 2.6: Vértice v de G'

un eje común, lo que contradice el teorema de Jordan-Schonflies ya que en G existe un vértice que tienen en común F y F' mientras que en F' este vértice no existe. Además, en G el eje e_0 está en el exterior de la cara F' y el eje e_1 está en el interior de F' , mientras que en G' tanto e_0 como e_1 se encuentran en el exterior de F' . Por lo tanto, no existe un isomorfismo de G a G' .

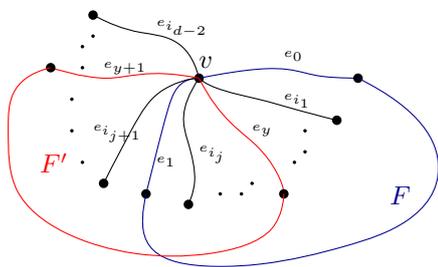


Figura 2.7: F y F' en G

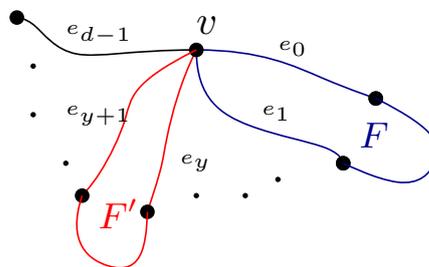


Figura 2.8: F y F' en G'

- Supongamos ahora que todos los vértices son de tipo 1 o -1 y veamos que esto tampoco puede suceder.

Supongamos que hay un eje e_0 con un vértice de tipo 1 y otro de tipo -1 . Sea $e_0 = uv$ donde u es el vértice de tipo 1 y v el de tipo -1 . Supongamos que en G la orientación alrededor de u es e_0, e_1, \dots, e_d y alrededor de v es e_0, e'_1, \dots, e'_f . Así en G' será e_0, e_1, \dots, e_d y $e'_f, e'_{f-1}, \dots, e_0$ respectivamente. Por lo tanto los vértices u y v estarán conectados como en las figuras 2.9 y 2.10.

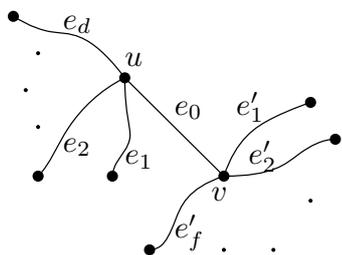


Figura 2.9: Vértices u y v de G

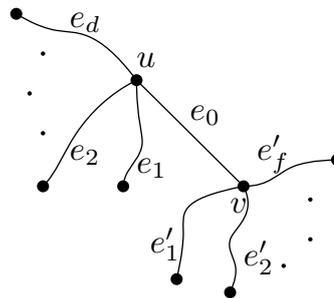


Figura 2.10: Vértices u y v de G'

En G' hay una cara F que contiene a e_d, e_0, e'_f y otra cara F' que contiene a e'_1, e_0, e_1 .

En G los correspondientes ciclos no son caras cíclicas pero sí son curvas de Jordan que se intersecan con un eje en común, así, al igual que en caso anterior, llegamos a una contradicción del hecho de que tiene que haber una segunda intersección entre F y F' en G , lo que contradice el teorema de Jordan-Schonflies, pues al igual que en el caso anterior, en G existe un vértice que tienen en común F y F' mientras que en G' no existe. Además, en G el eje e_1 se encuentra en

el interior de la cara F mientras que en G' se encuentra en el exterior. Por lo tanto, no existe un isomorfismo de G a G' .

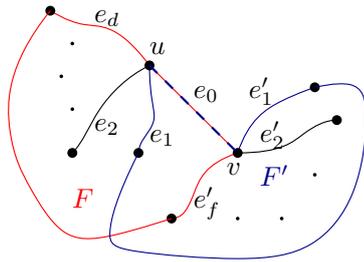


Figura 2.11: F y F' en G

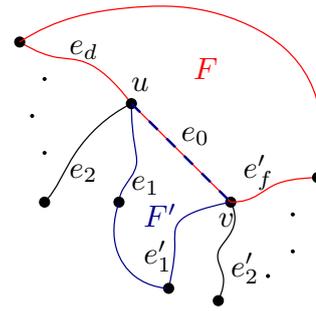


Figura 2.12: F y F' en G'

Por lo tanto, los sistemas de rotación de G y G' (o de G^{-1} y G') coinciden y las inmersiones G y G' son idénticas.

□

Capítulo 3

Teorema de Kuratowski

En este capítulo vamos a estudiar el teorema principal del trabajo, el teorema de Kuratowski. Este nos asegura que un grafo es plano si y solo si no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

3.1. Resultados previos

Para demostrar el teorema de Kuratowski, primero necesitamos definir varios conceptos y enunciar y demostrar una serie de resultados.

Definición 3.1. Una **subdivisión de un eje** $e = (u, v)$ es el resultado de sustituir el eje e por un camino de longitud dos, es decir, sustituir el eje e por los ejes $e' = (u, w)$ y $e'' = (w, v)$ y añadir el vértice w .

Una **subdivisión de un grafo** G es el grafo obtenido al añadir una sucesión de subdivisiones de ejes a G .

Definición 3.2. Dos grafos G y H se dicen **homeomorfos** si existe un isomorfismo de una subdivisión de G a otra de H .

Definición 3.3. Los grafos K_5 y $K_{3,3}$ se llaman **grafos de Kuratowski**. Cualquier subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$ se llama **subgrafo de Kuratowski**.

Observación 3.4. Todo subgrafo de un grafo plano es plano.

Demostración. Sea G un grafo plano. Para cada subgrafo H de G podemos encontrar los vértices y ejes de H en G , por lo tanto, H es plano. \square

Observación 3.5. Toda subdivisión de un grafo no plano es no plana.

Demostración. Sea G un grafo y G' una subdivisión de G . Supongamos que existe una inmersión plana de G' .

Si eliminamos los vértices que se añaden para crear las subdivisiones de los ejes y reconstruimos los ejes originales (sin cambiar la forma ni la posición de los caminos) obtenemos una inmersión plana de G , por lo tanto G sería plano. \square

A continuación, se quiere demostrar que si G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$ entonces G es plano. Esto es equivalente a demostrar que si G es no plano, entonces G tiene que contener alguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$.

Vamos a ver primero un par de definiciones.

Definición 3.6. Sea G un grafo. Se dice que H es un subgrafo **propio** de G si $V(H) \subsetneq V(G)$ y $E(H) \subsetneq E(G)$.

Un grafo no plano **minimal** es un grafo no plano que no tiene ningún subgrafo no plano propio.

La estrategia para demostrar el resultado será la siguiente:

1. Probar que los grafos no planos minimales sin ninguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ son 3-conexos y simples.
2. Probar que todo grafo 3-conexo sin ninguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ es plano.

Para probar 1 tenemos que ver varios lemas:

Lema 3.7. Un grafo no plano minimal es 2-conexo.

Demostración. Para demostrar el resultado, primero vamos a ver que un grafo no plano minimal es conexo.

Supongamos que G es un grafo no plano que no es conexo pero que todas sus componentes son planas.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que G tiene dos componentes G_1 y G_2 . Como ambas componentes son planas podemos añadir una inmersión plana de G_1 a una de las caras de una inmersión plana de G_2 (por ejemplo a la cara exterior), lo que nos da una inmersión plana de G , contradicción. Por lo tanto, G es conexo.

Probemos ahora que G es 2-conexo.

Supongamos que G es no plano y no es 2-conexo.

Por definición de conectividad, existe un vértice v tal que $G \setminus \{v\}$ no es conexo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $G \setminus \{v\}$ tiene dos componentes H_1 y H_2 . Sabemos que $H_1 \cup \{v\}$ y $H_2 \cup \{v\}$ son planos.

En una inmersión plana de ambos podemos encontrar una cara f cuya frontera contiene a v .

Además, se puede obtener una inmersión plana para $H_1 \cup \{v\}$ y para $H_2 \cup \{v\}$ donde v se encuentra en la frontera de la cara exterior.

Así, se pueden juntar $H_1 \cup \{v\}$ y $H_2 \cup \{v\}$ uniendo v y así obtener una inmersión plana de G , contradicción.

Por lo tanto, si G es un grafo no plano minimal, será 2-conexo. □

Lema 3.8. Si G es un grafo que tiene el menor número de ejes posible entre todos los grafos no planos sin ninguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$, entonces G es 3-conexo.

Demostración. La hipótesis nos dice que G es un grafo no plano minimal. Así, por el lema (3.7), G es 2-conexo.

Supongamos que G no es 3-conexo, entonces existen dos vértices de corte u y v tal que $G \setminus \{u, v\}$ no es conexo.

Vamos a denotar a las componentes de $G \setminus \{u, v\}$ como H_1, H_2, \dots, H_k . Ahora construimos los grafos M_1, M_2, \dots, M_k siendo $M_i = H_i \cup \{u, v\} + uv$ + los ejes de G que unen $V(H_i)$ con u y v .

A continuación, veamos que entre todos los M_i , $1 \leq i \leq k$, existe al menos un M_i que no es plano:

Supongamos que todos los M_i son planos, $1 \leq i \leq k$. Entonces existe una inmersión plana para cada uno.

Como los vértices u y v y el eje uv son la única parte común de todos los M_i , podemos unir las inmersiones planas de los M_i y obtener una inmersión plana de $G + uv$, lo que implica que $G + uv$ es plano. Para unir las inmersiones planas de los M_i vamos a dibujar primero los vértices u y v y el eje uv y a continuación, iremos dibujando las inmersiones planas de los M_i una a una encima del eje uv quedando el grafo $G + uv$ como en la siguiente figura:

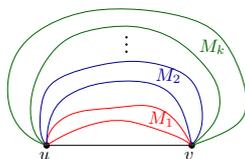


Figura 3.1: Grafo $G + uv$ formado por la unión de todas las inmersiones planas M_i

Así, por la observación (3.4) G es plano, contradicción. Por lo tanto, tiene que existir algún M_i , $1 \leq i \leq k$, que no sea plano.

Por otra parte es claro que $E(M_i) \leq E(G)$. Sin embargo, por hipótesis, G es el menor grafo no plano conexo que no tiene ninguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$, por lo tanto M_i tendrá alguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$.

Además, como G no tiene tal subdivisión, M_i no será subgrafo de G , lo que implica que G no tiene el eje uv .

Ahora, si juntamos $M_i - uv$ con $M_j - uv$ con $i \neq j$, $1 \leq j \leq k$, uniendo los vértices u y v obtendremos un subgrafo de G .

Como $M_j - uv$ es conexo, existe un camino entre u y v . Si juntamos este camino con $M_i - uv$, obtenemos una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ ya que antes hemos visto que M_i tiene alguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$. Esto significa que G tiene una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$, contradicción.

Por lo tanto, G será 3-conexo. □

Así, gracias a estos dos últimos lemas hemos demostrado 1.

Para probar 2 necesitaremos también varios resultados.

Teorema 3.9. *Sea G un grafo con tres o más vértices. Entonces G es 2-conexo si y solo si para cada par de vértices u y v de G existen al menos dos caminos disjuntos en vértices entre ellos.*

Demostración. \Leftarrow : Si dos vértices de G están unidos por al menos dos caminos disjuntos entonces es obvio que no existe un único vértice de corte (ya que no importa qué vértice elimines, pues entre otros dos vértices existirá al menos un camino). Por lo tanto G es 2-conexo.

\Rightarrow : Supongamos que G es 2-conexo. Sean $u, v \in V(G)$. Vamos a denotar el número de ejes en el camino más corto entre u y v por $d(u, v)$. Vamos a demostrar esta implicación por inducción en $d(u, v)$.

Si solo hay un eje uniendo u y v , entonces $d(u, v) = 1$. Como G es 2-conexo, existe otro camino conectando u y v que no contiene al eje uv . Esto se debe a que si eliminamos el vértice u , como G es 2-conexo, $G - u$ tiene que ser conexo, luego desde todos los vecinos de u se debe poder llegar a v en $G - u$. Por lo tanto, es necesario que exista otro camino conectando u y v .

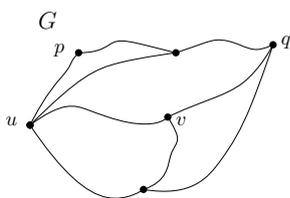


Figura 3.2: Grafo G

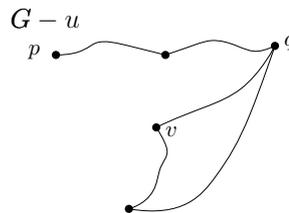


Figura 3.3: Grafo $G - u$

Notar que en las figuras anteriores el vértice p es vecino de u para que esté conectado con v en el grafo $G - u$ es necesario que haya otro camino.

Ahora supongamos que existen al menos dos caminos disjuntos para todo u y v con $d(u, v) \leq k$.

Ahora, para $x, y \in V(G)$ con $d(x, y) = k + 1$ buscamos un camino P_0 de longitud $d(x, y)$ entre x e y y sea z el vértice más cercano a y que se encuentre en P_0 ($d(y, z) = 1$). Entonces $d(x, z) = d(x, y) - 1$.

Por hipótesis de inducción, existen dos caminos disjuntos entre x y z que llamaremos P_1 y P_2 . Como G es 2-conexo, existe otro camino Q entre x e y que no contiene a z . Sabemos que existe otro camino ya que si no existiera, al eliminar el vértice z , el grafo resultante no sería conexo, contradiciendo la hipótesis de que nuestro grafo G es 2-conexo.

Sea w el vértice en $Q \cap (P_1 \cup P_2)$ que está más cerca de y en Q . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que w está en P_1 . Entonces podemos encontrar dos caminos disjuntos entre x e y .

El primero será la parte que va de x a w en P_1 junto con la parte que va de w a y en Q , y el segundo será P_2 junto con el eje zy . Ver las figuras siguientes. □

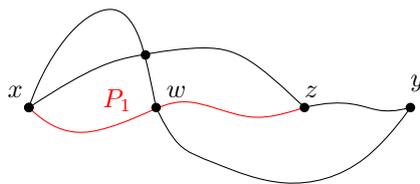


Figura 3.4: Camino P_1

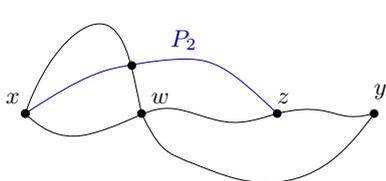


Figura 3.5: Camino P_2

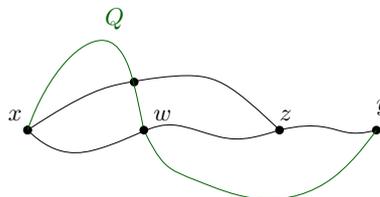


Figura 3.6: Camino Q

Lema 3.10. Sea uv un eje de G , si G es simple y 3-conexo entonces $G - uv$ es 2-conexo.

Demostración. Queremos ver que para todo par de vértices $a, b \in V(G - uv)$ existen al menos dos caminos disjuntos entre ellos. En otras palabras, queremos probar que para todo par de vértices de $G - uv$ existe un ciclo simple en el que se encuentran los dos vértices. Vamos a probarlo dividiéndolo en tres casos:

1. Si $\{a, b\} = \{u, v\}$. Es claro que $V(G) \geq 4$, pues si $V(G) = 3$ entonces es imposible encontrar dos caminos disjuntos entre u y v en $G - uv$ pues el único camino que existe es $u - w - v$, siendo w el tercer vértice de G . Tomamos otros dos vértices c y d de $G - uv$. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $u = a$.

Vamos a considerar u y c . Como G es 3-conexo, G no contiene ningún subconjunto formado por dos vértices de corte, lo que significa que si eliminamos v y d , u y c siguen estando conectados. En otras palabras, existe un camino P_1 entre u y c que no contiene a v ni a d .

Análogamente, existe un camino P_2 entre c y v que no contiene a u ni a d , un camino P_3 entre v y d que no contiene a u ni a c y un camino P_4 entre d y u que no contiene a v ni a c .

Por lo tanto, u y v se encuentran en el mismo recorrido cerrado, que será $u - P_1 - c - P_2 - v - P_3 - d - P_4 - u$. Ver figura 3.7.

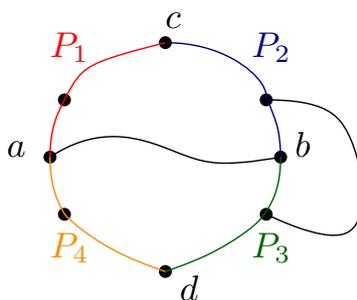


Figura 3.7: Caso 1

2. Si solo un vértice de $\{a, b\}$ es u o v . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = u$ y $b \neq v$. Sea $c \neq b$ que no es ni u ni v .

Siguiendo el mismo razonamiento que en 1, podemos encontrar un camino P_1 entre u y b que no contiene a c ni a v , un camino P_2 entre b y c que no contiene a u ni a a y un camino P_3 entre c y u que no contiene a v .

Así obtenemos un ciclo que contiene a u y a b que será $u - P_1 - b - P_2 - c - P_3 - u$. Ver figura 3.8.

3. Si ninguno de los vértices de $\{a, b\}$ es igual a u o a v . Siguiendo el mismo razonamiento que en 1, podemos encontrar un camino P_1 entre a y b que no contiene a u ni a v , un camino P_2 entre b y v que no contiene a u ni a a y un camino P_3 entre v y a que no contiene a u ni a b .

Así obtenemos un ciclo que contiene a a y a b que será $a - P_1 - b - P_2 - v - P_3 - a$. Ver figura 3.9.

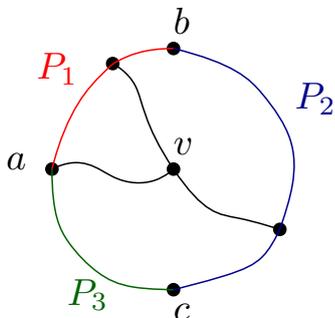


Figura 3.8: Caso 2

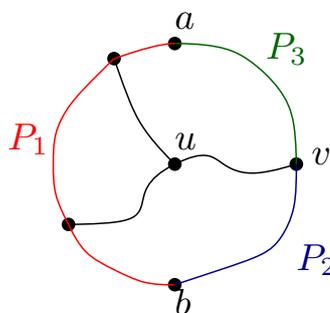


Figura 3.9: Caso 3

Como en los tres casos posibles hemos construido un ciclo simple (es obvio que son simples pues no se repite ningún vértice, excepto el vértice inicial y final) sin el eje uv que contiene a a y a b , estos mismos ciclos se podrán construir en $G - uv$, por lo tanto $G - uv$ es 2-conexo. \square

Definición 3.11. Sea G un grafo y H un subgrafo de G . Se define una **relación de equivalencia** \sim en $E(G) \setminus E(H)$ de la siguiente manera: $a \sim b$ si existe un recorrido W tal que a y b son el primer y último eje en W y que ningún vértice interno de W está en $V(H)$.

Un **apéndice** de H en G es un subgrafo de $G - E(H)$ inducido por una clase de equivalencia \sim . Para unapéndice B de H definimos **vértice de contacto** de B a H a los vértices del conjunto $V(B) \cap V(H)$.

Vamos a utilizar las definiciones anteriores solo para el caso en que el subgrafo H es un ciclo simple C en un grafo plano G .

Sea C un ciclo simple. Entonces dos apéndices de C , B_1 y B_2 , son **sesgados** si dos vértices de contacto de B_1 , u_1 y v_1 , y dos vértices de contacto de B_2 , u_2 y v_2 , aparecen en C en el siguiente orden: u_1, u_2, v_1, v_2 .

Definición 3.12. Supongamos que C es un ciclo simple de una inmersión plana de un grafo plano G . Entonces unapéndice B de C está contenido en $Int(C)$ (la región dentro de C) o en $Ext(C)$ (la región fuera de C). Unapéndice en $Int(C)$ es un **apéndice interno** mientras que unapéndice en $Ext(C)$ es un **apéndice externo**.

En una inmersión plana los apéndices internos (externos) se **evitan** entre ellos si para todo par de apéndices internos (externos) B_1, B_2 , todos los vértices de contacto en B_1 se encuentran en un arco uv de C que no contiene ningún vértice de contacto de B_2 distinto de u y v .

Definición 3.13. Sea C un ciclo de un grafo G . Se dice que los apéndices B_1 y B_2 se **superponen** si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- B_1 y B_2 son sesgados.
- B_1 y B_2 tienen tres vértices de contacto en común.

En las figuras 3.10 y 3.11 podemos ver un ejemplo de cada una de las condiciones necesarias para que dos apéndices se superpongan.

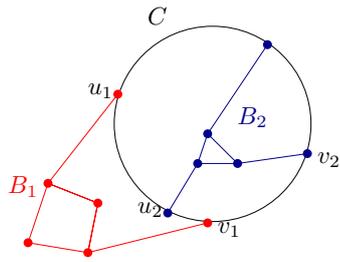


Figura 3.10: B_1 y B_2 se superponen pues son sesgados

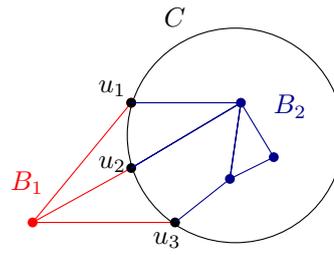
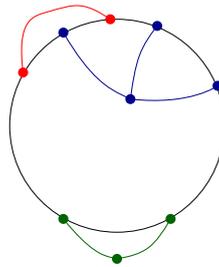


Figura 3.11: B_1 y B_2 se superponen pues tienen tres vértices de contacto en común

Definición 3.14. Sea G un grafo plano y C un ciclo de G . En una inmersión plana G_1 de G , un apéndice interno B de C es **transferible** si existe otra inmersión plana G_2 de G donde B es un apéndice externo pero el resto de la inmersión permanece igual que en G_1 .

Ejemplo 3.15. La siguiente figura nos muestra un ejemplo de tres apéndices en un ciclo. Observar que el rojo es sesgado al azul, el verde evita a los otros dos, el rojo y el verde son apéndices externos y el azul es un apéndice interno.



Teorema 3.16. Sea G un grafo plano y C un ciclo de G . Un apéndice interno B de C es transferible si B evita todos los apéndices externos de C .

Demostración. Sea B un apéndice interno que evita todos los apéndices externos. Entonces existe una cara de $Ext(C)$ cuyo contorno contiene a todos los vértices de contacto de B . Dibujando B en la nueva cara obtenemos otra inmersión plana, luego B es transferible. \square

3.2. El teorema de Kuratowski

Ahora ya tenemos todos los resultados necesarios para llevar a cabo la demostración del teorema de Kuratowski.

Teorema 3.17. (de Kuratowski). Un grafo es plano si y solo si no contiene ninguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$

Demostración. \Rightarrow : Esta implicación es cierta por la observación (3.4) y la observación (3.5).

\Leftarrow : Supongamos que existe un grafo no plano que no contiene ninguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$. Sin pérdida de generalidad, sea G un grafo no plano que no contiene ninguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ y que tiene el menor número posible de ejes. Entonces G es un grafo no plano minimal. Así, por el lema (3.8) G es 3-conexo.

Tomamos dos vértices adyacentes $u, v \in V(G)$ y consideramos el grafo $G - uv$. Por minimalidad $G - uv$ es plano. Además, por el lema (3.10) $G - uv$ es 2-conexo.

Por el teorema (3.9) existen al menos dos caminos disjuntos entre u y v , es decir, u y v están contenidos en el mismo ciclo simple. Vamos a tomar un ciclo simple conteniendo u y v , que llamaremos C_0 ,

con el mayor número de ejes en su interior entre todos los ciclos simples que contienen a u y v y entre todas las inmersiones de $G - uv$. A partir de ahora, cada vez que estemos considerando un ciclo, este será simple.

Por ejemplo en la figura siguiente, observar que el ciclo en rojo sería C_0 ya que es el ciclo que contiene a u y v con el mayor número de ejes en su interior.

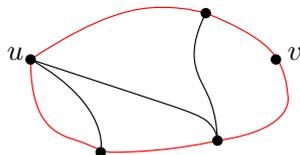


Figura 3.12: Ciclo C_0

Ahora consideremos los apéndices de C_0 en $G - uv$ (si $G - uv$ no tiene ningún apéndice de C_0 , entonces es claro que si añadimos el eje uv el grafo sigue siendo plano, luego G es plano, contradicción). Supongamos que existe un apéndice con un único vértice de contacto v_1 . Entonces v_1 es el único vértice de corte de $G - uv$, lo que contradice que G sea 2-conexo ya que si se eliminara, el nuevo grafo no sería conexo. Por lo tanto todos los apéndices de C_0 en $G - uv$ tienen al menos dos vértices de contacto.

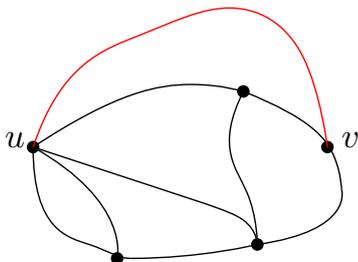


Figura 3.13: El grafo G sin ningún apéndice sería plano

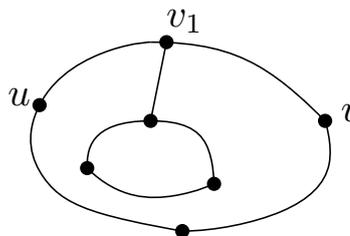


Figura 3.14: El grafo $G - uv$ con un solo vértice de contacto no sería 2-conexo

Además, si un apéndice externo de C_0 tiene más de dos vértices de contacto podremos encontrar un nuevo ciclo que tenga partes del apéndice externo y tenga más ejes en su interior.

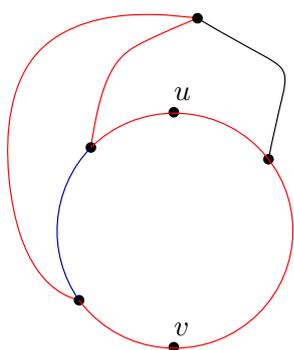


Figura 3.15: Primer posible apéndice externo

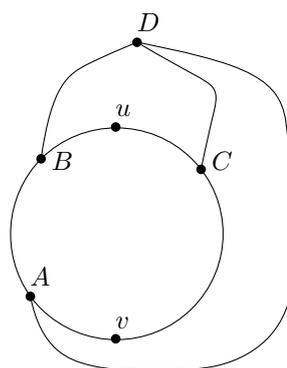


Figura 3.16: Segundo posible apéndice externo

Si el apéndice es como en la figura 3.15 entonces en nuevo ciclo sería el rojo, ya que habría un eje más en su interior (el eje azul).

Si el apéndice es como en la figura 3.16 entonces existe una inmersion de $G - uv$ (la figura 3.17) con un ciclo (en rojo) con un eje más en su interior (el eje en azul).

Por lo tanto, todos los apéndices externos tienen exactamente dos vértices de contacto.

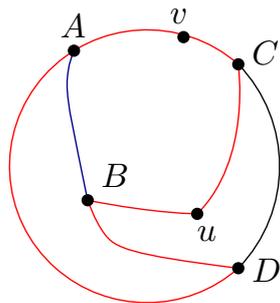


Figura 3.17: Otra inmersión de $G - uv$ con un ciclo con más ejes en su interior

Siguiendo el mismo razonamiento, si un apéndice externo evita el arco uv , entonces habrá otro ciclo con un número mayor de ejes en su interior. Por lo tanto, todos los apéndices exteriores se superponen al arco uv , es decir, para cualquier apéndice externo no todos los vértices de contacto se encuentran en el arco uv . Por lo tanto, si los vértices de contacto son v_1 y v_2 , estos aparecerán cada uno a un lado de u y de v , es decir, en C_0 el orden de estos cuatro vértices será v_1, u, v_2 y v .

Notar que si el tamaño de un apéndice externo es mayor que 1, existe un vértice que está en el apéndice pero no en C_0 . Entonces los dos vértices de contacto son vértices de corte tanto en $G - uv$ como en G , lo que contradice que G sea 3-conexo pues si quitáramos los dos vértices, el nuevo grafo dejaría de ser conexo.

Por lo tanto, todos los apéndices externos de C_0 tienen dos vértices de contacto, tienen tamaño 1 y se superponen al arco uv , es decir, son como en la siguiente figura.

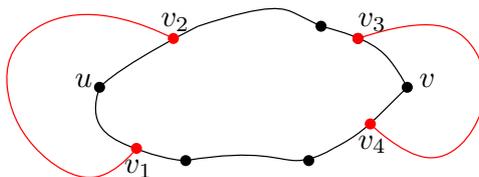


Figura 3.18: Posibles apéndices externos del ciclo C_0

A continuación, vamos a buscar un apéndice externo B_1 y un apéndice interno B_2 que se superpongan. Si todos los apéndices de C_0 son internos (externos) entonces podemos dibujar el eje uv en el exterior (interior) de C_0 y obtener una inmersión plana de G , lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, C_0 tendrá tanto apéndices internos como externos.

La razón por la que existe un par de apéndices que se superponen es porque sino todo apéndice interno de C_0 evitaría todo apéndice externo de C_0 y por el teorema (3.16), todos los apéndices internos de C_0 son transferibles.

Entonces podemos encontrar una inmersión plana de $G - uv$ donde C_0 solo tiene apéndices externos, lo que contradice la hipótesis.

Ahora, podemos suponer que existen B_1 externo y B_2 interno tal que B_2 se superpone al arco uv y es sesgado con respecto a B_1 . Si todos los internos no se superpusieran al arco uv entonces se podría dibujar el eje uv de manera que no se cortara con ningún eje, por lo tanto el grafo sería plano. Y si B_2 interno, superpuesto a uv , no fuera sesgado con respecto a algún B_1 entonces el apéndice B_2 sería transferible. Si lo transferimos, igual que hemos razonado antes, y repitiendo el proceso llegaríamos a una inmersión plana de $G - uv$ donde en C_0 puede trazarse uv por el interior. Así, llegaríamos a una contradicción.

Sean ahora x_1, x_2 los vértices de contacto de B_1 e y_1, y_2, y_3, \dots los de B_2 .

Vamos a considerar varios casos en función de la posición de B_1 y B_2 . Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que u, x_2, v, x_1 se encuentran en un ciclo en el orden del sentido de las agujas del reloj.

- Caso 1: Primero supongamos que el apéndice B_2 tiene al menos un vértice de contacto y_1 distinto

de u, v, x_1 y x_2 .

Por simetría de la configuración del ciclo C_0 junto con el apéndice B_1 y el eje uv , es suficiente suponer que el vértice de contacto y_1 se encuentra entre los vértices u y x_1 en el ciclo C_0 . Para que B_2 se superponga a uv , B_2 tiene que tener un vértice de contacto y_2 en el camino de u a v en el que no se encuentra y_1 . Para que B_2 se superponga a B_1 , B_2 tiene que tener un vértice de contacto y_3 en el camino de x_1 a x_2 en el que no se encuentra y_1 .

- Subcaso 1.a: El vértice de contacto y_2 se encuentra en el ciclo C_0 entre v y x_2 . En este caso se considera que $y_2 = y_3$. Entonces G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$, lo que contradice nuestra hipótesis. Ver figura 3.19.

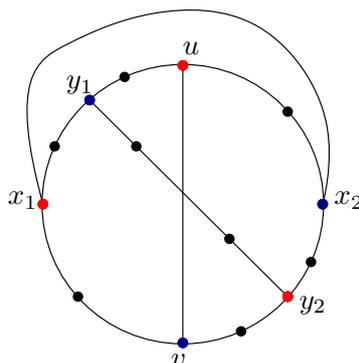


Figura 3.19: Subcaso 1.a

- Subcaso 1.b : El vértice de contacto y_2 se encuentra entre u y x_2 y el vértice de contacto y_3 se encuentra entre v y x_1 . Sea $y_2 - y_3$ un camino en B_2 , P_1 y sea z un vértice en P_1 tal que existe un camino $y_1 - z$ en B_2 (este camino existe pues si no existiera G no sería 3-conexo). Entonces G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$, lo que contradice nuestra hipótesis. Ver figura 3.20.

Notar que no importa si $y_2 = x_2$ o $y_3 = v$ pues G seguirá conteniendo una subdivisión de $K_{3,3}$.

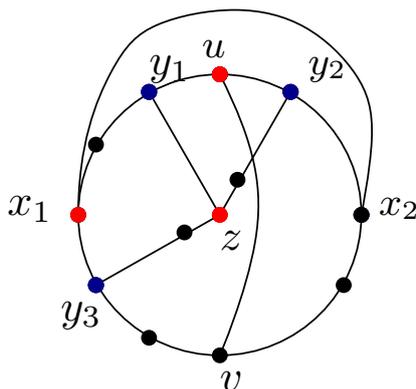


Figura 3.20: Subcaso 1.b

- Caso 2: Ahora, supongamos que los únicos vértices de contacto del apéndice B_2 están en el conjunto $\{x_1, x_2, u, v\}$. Notar que u y v tienen que ser vértices de contacto de B_2 para que B_2 se superponga a B_1 y x_1 y x_2 tienen que ser vértices de contacto de B_2 para que B_2 se superponga a uv . Por lo tanto, los cuatro vértices x_1, x_2, u y v tienen que ser vértices de contacto del apéndice B_2 . El apéndice B_2 tiene que tener un camino P_1 de u a v y otro camino P_2 de x_1 a x_2 cuyos vértices internos no son vértices de contacto.

- Subcaso 2.a : Tiene que ser $\{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{x_1, x_2, u, v\}$. Supongamos que los caminos P_1 y P_2 se intersecan únicamente en un vértice z . Entonces, G contiene una subdivisión de K_5 , lo que contradice nuestra hipótesis. Ver figura 3.21.
- Subcaso 2.b : Tiene que ser $\{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{x_1, x_2, u, v\}$. Supongamos que P_1 y P_2 se intersecan en más de un vértice. Sea z_1 el vértice más cercano a u por el que pasan tanto P_1 como P_2 y z_2 el vértice más cercano a v por el que pasan tanto P_1 como P_2 . Entonces G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$, lo que contradice nuestra hipótesis. Ver figura 3.22.

Notar que si tuvieran más de dos vértices en común, la subdivisión de $K_{3,3}$ sería la misma que hay cuando tienen únicamente dos vértices en común.

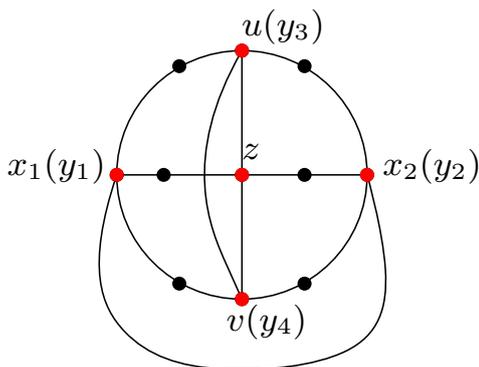


Figura 3.21: Subcaso 2.a

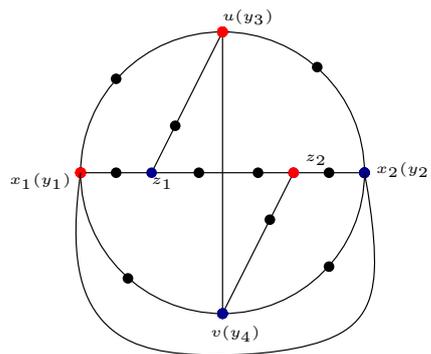


Figura 3.22: Subcaso 2.b

Así, hemos estudiado todos los posibles casos llegando a una contradicción en todos ellos. Por lo tanto, G tiene que ser plano. \square

Bibliografía

- [1] S. KOPPARTY, *Planar Graphs*, Rutgers University, 2011.
- [2] D.R. WOOD, *A simple proof of the Fáry-Wagner Theorem*, Monash University, 2005.
- [3] Y. XU, *Kuratowski's Theorem*, Chicago University, 2017.
- [4] G. BRINKMANN, *A simple and elementary proof of Whitney's Unique Embedding Theorem*, Ghent University, 2010.
- [5] M. BÓNA, *A Walk Through Combinatorics. An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006.
- [6] J. GROSS, J. YELLEN, *Graph Theory and its Applications*, CRC Press, 1999.
- [7] R. BALAKRISHNAN, K. RANGANATHAN, *A Textbook of Graph Theory*, Springer New York, 2012.
- [8] C. THOMASSEN, *The Jordan-Schonflies Theorem and the Classification of Surface*, Taylor & Francis, Ltd. on behalf of the Mathematical Association of America, 1992.
- [9] A. GARCÍA, *Teoría de grafos*, Universidad de Zaragoza.
- [10] R. A. HUDSON, *Planar Graphs: A Historical Perspective*, University of Louisville, 2004.