



Universidad
Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**Aplicación de teoría de control en el diseño de estrategias
epidemiológicas**

Autor:

Jorge Sancho Eguiluz

Director:

Dr. Jesús Gómez Gardeñes

Co-Director:

Sergio Faci Lázaro

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

FACULTAD DE CIENCIAS

24 JUNIO 2021

Índice

1. Introducción	1
2. Modelos epidemiológicos	2
2.1. Definición de modelo epidemiológico	3
2.2. Modelo SIR	3
2.2.1. Número reproductivo básico	4
2.3. Modelo utilizado	5
2.3.1. Modelo epidemiológico	5
2.3.2. Número reproductivo efectivo	7
3. Estrategias de control	8
3.1. Supresión Total	9
3.2. Control Constante	9
3.3. Control Óptimo	9
4. Implementación de las medidas de control en el modelo	9
4.1. Marco teórico y objetivos	9
4.2. Determinación de τ óptima	11
4.3. Elección de estrategia de control	13
5. Resultados finales	15
6. Otros resultados	17
6.1. Medidas dirigidas a grupos de población	18
6.2. Medidas dirigidas a ámbitos de contacto	19
7. Conclusiones	21

1. Introducción

Académicamente, estamos acostumbrados a estudiar problemas que suelen plantearse mediante sistemas lineales (1), debido principalmente a la sencillez que se encuentra en su análisis, donde la solución general está dada por una combinación de soluciones lineales. Otro hecho que suele ser característico de los problemas académicos es que suelen ser pequeños tanto dimensionalmente como en número de elementos a estudiar, algo que permite facilitar también su resolución y comprensión o, en el caso de estudiar sistemas de muchos elementos, utilizando hipótesis que simplifiquen el sistema como la interacción de campo medio (red homogénea). Para problemas como el que nos interesa, surgió la Física de Sistemas Complejos, cuya principal función es el estudio de sistemas no lineales de muchos elementos y donde las interacciones no tienen un patrón sino que existe homogeneidad.

La Física de Sistemas Complejos utiliza las redes complejas para abordar una infinidad de problemas, ya que existen muchos sistemas de interés científico cuya estructura de interacciones se puede describir mediante un grafo (2). Esto provoca que la Física de Sistemas Complejos pueda abordar campos tan diversos como la economía (3), sociología (4)(5), epidemias (6) y sincronización (7).

Podemos introducir dos conceptos interesantes en la Física de Sistemas Complejos. Estos son el de la ruptura de simetría y el de criticalidad auto-organizada. El primero de ellos es tratado en el artículo '*More is different*' (8), de Philip W. Anderson, quien fue uno de los primeros en dar la importancia merecida a esta nueva disciplina de la física, que rompía el enfoque reduccionista que temperaba en la primera mitad del siglo XX. Esta ruptura de la simetría se manifiesta en el paso de un sistema microscópico a otro macroscópico, donde, debido a la interacción, podrían perderse simetrías de los sistemas individuales y por contra aparecer fenómenos colectivos con nuevas propiedades que no pueden ser explicadas mediante los individuos que lo componen. Anderson mantiene que la ruptura de simetría en sistemas de muchos cuerpos es un fenómeno generalizado que da lugar a diferentes comportamientos emergentes en función de la simetría que se haya roto. Por otro lado, la criticalidad auto-organizada se trata de uno de los mayores logros alcanzados en el estudio de sistemas complejos. Este concepto es introducido por Per Bak, Kurt Wiesenfeld y Chao Tang (9)(10) y constituye una gran explicación de la naturaleza de la complejidad, pues trata de explicar el comportamiento crítico de muchos sistemas naturales que carecen de unidad de control central.

Como conclusión de esta introducción, exponemos algunas de las propiedades que debe tener un sistema para ser considerado complejo (11).

- **No linealidad:** La mayoría de sistemas son no lineales. La necesidad de utilizar un modelo no lineal se plasma en una no respuesta no lineal a las perturbaciones y en el tipo de soluciones que presentan los sistemas reales.

- **Estructura de interacciones no regular:** La red de interacciones de los elementos de un sistema muestra que la cantidad de conexiones que tiene un elemento en el sistema no es homogénea.
- **Importancia del entorno:** Muchos sistemas complejos son sistemas abiertos. Estos pueden presentar un equilibrio entre el flujo de energía disipado y el entrante con su entorno para llegar a una estabilidad dinámica.

Estas propiedades no tienen por qué darse de forma simultánea para que el sistema sea considerado complejo, simplemente es necesario que se observe un comportamiento colectivo fruto de la interacción entre sus componentes.

En este trabajo vamos a estudiar una red social, pues nuestra intención es simular un modelo epidemiológico, que cumple la propiedad de estructura no regular y que por lo tanto se considera un sistema complejo. Más concretamente, nuestra intención es dirigir nuestro estudio a la implantación de distintos modelos de control a lo largo de la duración de una epidemia.

2. Modelos epidemiológicos

El fin de este trabajo es realizar un estudio de un modelo epidemiológico controlado sobre una red social que cumple la propiedad de estructura no regular, y que pueda ser útil en un futuro próximo. Nuestro principal objetivo será el de un modelo que evite el colapso sanitario en una situación de epidemia, similar a la actual.

El problema de mayor actualidad al que se ha tenido que enfrentar la sociedad, y más concretamente la comunidad científica, es el de la reciente pandemia causada por el COVID-19. Hasta el pasado año 2020, la mayoría los estudios relacionados con epidemias habían sido dedicados principalmente a la prevención de las mismas así como al estudio de su propagación (por ejemplo (12)), realizando hincapié en como afectaría la globalización y la mayor facilidad para el transporte que esta causa (13). En cambio, la rápida expansión del COVID-19 por todo el planeta ha provocado una gran cantidad de estudios acerca de la evolución de la enfermedad, así como de modelos de estrategias de control para frenarla.

A lo largo de este trabajo vamos a tratar de tomar las partes más útiles de dos artículos, concretamente de '*Modeling the Spatiotemporal Epidemic Spreading of COVID-19*' (14) y de '*Optimal, near-optimal and robust epidemic control*' (15), con el objetivo de encontrar una forma óptima de responder a una epidemia y siendo el objetivo principal evitar el colapso del sistema sanitario. Estos artículos realizan extraordinarios estudios acerca de la expansión espacial del virus SARS-CoV-2 y su impacto en el sistema de salud, y también sobre modelos de control en una epidemia con el fin de evitar el colapso sanitario.

Antes de indagar de una forma más completa en las partes que nos interesan de ambos artículos, vamos a realizar una introducción a los modelos epidemiológicos que vamos a encontrarnos en esta memoria.

2.1. Definición de modelo epidemiológico

Los modelos epidemiológicos se definen como una representación matemática de la transmisión de la enfermedad y de los procesos que van asociados con ella; ya sean entre personas o entre grupos, en el tiempo o en el espacio, o ambas cosas.

Asimismo, un modelo epidemiológico facilita la evaluación de la eficacia de las medidas potenciales de control y calcula la futura magnitud, duración y el alcance geográfico de una enfermedad, dada la aplicación de medidas de control específicas (2).

2.2. Modelo SIR

El modelo epidemiológico más básico y también el utilizado en el artículo (15) es el modelo SIR. El modelo SIR es un modelo muy sencillo matemáticamente y lo suficientemente completo para realizar los estudios que interesan en ese artículo. En el modelo SIR, los agentes de la población se clasificarán en tres grupos:

- ***Susceptible (S)***: Población susceptible a contraer la enfermedad, que no la ha pasado anteriormente.
- ***Infectado (I)***: Población infectada, con posibilidad de transmitir la enfermedad a la población susceptible.
- ***Recuperado (R)***: Población que ha pasado la enfermedad, independientemente de como la ha superado.

Este modelo sigue las siguientes ecuaciones diferenciales en función del tiempo, donde se cumple que $S(t) + I(t) + R(t) = N$, con N la población total de agentes:

$$S(t) = -\beta\langle k \rangle SI, \quad (1)$$

$$I(t) = \beta\langle k \rangle SI - \gamma I, \quad (2)$$

$$R(t) = \gamma I, \quad (3)$$

donde β es el parámetro de infección, que dependerá de la infectividad de la enfermedad, $\langle k \rangle$ es el número promedio de contactos de los agentes, y γ el parámetro de recuperación. Posteriormente introduciremos un parámetro de control b , cuyo valor se encontrará en el intervalo $[0, 1]$ y que se asignará en función de la medida de control implementada. Este

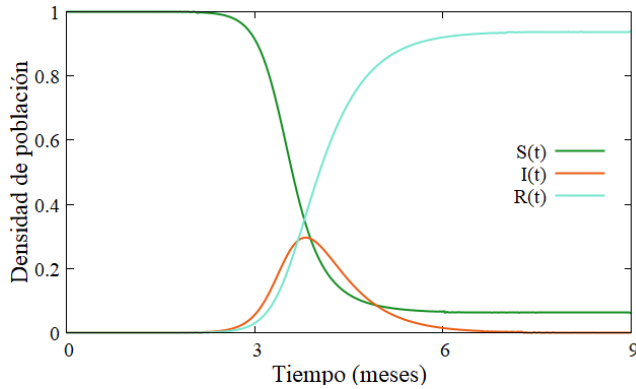


Figura 1: Evolución de los tres grupos de población en un modelo SIR, para $\beta = 3/14 = 0.214$ y $\gamma = 1/14 = 0.071$ y con $I(t=0)/N = 1 \cdot 10^{-5}$. Se puede observar un descenso muy pronunciado de población susceptible con el aumento de infectados, que provoca a su vez un aumento pronunciado y más tardío de población recuperada. Finalmente, cuando $I(t) = 0$ y $S(t) = cte$, se ha llegado a lo que conocemos como inmunidad de grupo o de rebaño.

parámetro se incluiría multiplicando a $\beta\langle k\rangle SI$, reduciendo el ritmo de infección de los agentes.

En la Fig. 1 mostramos un ejemplo de ola epidémica en un modelo SIR y vemos que, tras un aumento significativo de los casos, la epidemia concluye cuando un gran porcentaje de población es inmune a la enfermedad, de forma que la poca población susceptible que se mantiene en ese momento es prácticamente imposible que se contagie. A este estado se le denomina inmunidad de grupo.

2.2.1. Número reproductivo básico

En los modelos epidemiológicos existe un parámetro básico en el estudio de la evolución de una epidemia. Se trata del número reproductivo básico, R_0 , el cuál estima el número de contagios promedio que un individuo infectado causa en una población susceptible durante su periodo infeccioso. La estimación de este parámetro tiene gran utilidad para comprender de mejor manera la transmisión de una enfermedad en una población (2). En un modelo SIR, el número reproductivo básico viene dado por

$$R_0 = \frac{\beta\langle k\rangle}{\gamma}. \quad (4)$$

A grandes rasgos, podemos ver que la expresión cumple con la definición de R_0 , ya que β es la probabilidad de infección por individuo, $\langle k\rangle$ el número medio de contactos y γ^{-1} el tiempo promedio en el estado infeccioso. Es por esto que en una epidemia las medidas de contención persiguen que R_0 sea menor que 1, de forma que el número de infectados se reduzca en el tiempo. Para ello, una solución consiste en disminuir el valor de $\langle k\rangle$, para lo que podremos implementar medidas de control a la población con el fin de reducir el número de contactos, además de trabajar en diferentes vías para el aislamiento de individuos infectados (como el rastreo de contactos) que provoquen un aumento de la tasa de recuperación γ .

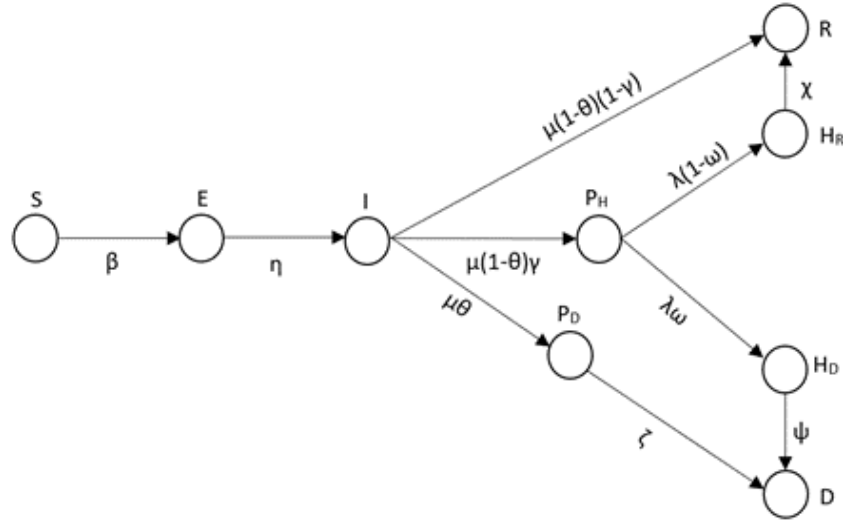


Figura 2: Modelo epidemiológico utilizado, en el que se muestran tanto los grupos de población como el parámetro de paso de un grupo a otro. Los grupos de población serán: S (Susceptible), población que todavía no ha contraído la enfermedad; E (Expuesto), población que ha sido contagiada pero no es infecciosa; I (Infectado); R (Recuperado); P_H (Pre-Hospitalizado), población que va a entrar en UCI en un futuro próximo; H_R (Hospitalizado que va a recuperarse); H_D (Hospitalizado que va a fallecer); P_D (Pre-Deceso), población que va a fallecer sin llegar a ser hospitalizada; D (Deceso).

2.3. Modelo utilizado

2.3.1. Modelo epidemiológico

El modelo utilizado en este trabajo es una variación al modelo epidemiológico que se utiliza en el artículo (14). En nuestro caso, hemos evitado la utilización del grupo de asintomáticos. La inclusión de este grupo tiene sentido si el modelo se utiliza para estimar los contagios reales, algo que no está incluido entre los objetivos de este trabajo, o en el caso de estudiar la eficacia de medidas de rastreo. Por lo tanto, el modelo utilizado queda como vemos en la la Fig. 2.

En este modelo podemos ver los siguientes grupos de población:

- **Susceptible (S):** Población susceptible a ser infectada de la enfermedad. Tiene una probabilidad β de pasar al estado *Expuesto* por contacto con un infectado (I).
- **Expuesto (E):** Población ya infectada pero que todavía no es infecciosa. Esta población pasa al grupo de infectados tras un periodo de tiempo, con η el tiempo medio para hacerlo.
- **Infectado (I):** Población infectada por la enfermedad y potencialmente infecciosa. Puede pasar a distintos grupos de población como veíamos en la Fig. 2, con distintas probabilidades.

- **Recuperado (R):** Población que se ha recuperado de la enfermedad sin consecuencias fatales. Existe una probabilidad $\mu(1 - \theta)(1 - \gamma)$ de que una persona del grupo I se recupere, donde μ es el ratio de tiempo en estado infectado, θ la probabilidad de fallecer directamente y γ la de ser hospitalizado en UCI. También consideraremos pertenecientes a este grupo a aquella población que se recupere tras estar hospitalizada.
- **Pre-Hospitalizado (P_H):** Población que va a ser hospitalizada en UCI, con una probabilidad $\mu(1 - \theta)\gamma$. Este grupo de población tendrá una probabilidad $\lambda\omega$ de fallecer y una probabilidad $\lambda(1 - \omega)$ de recuperarse.
- **Hospitalizado que va a recuperarse (H_R):** Grupo de población que tras ser hospitalizada en UCI, saldrá de ella tras un periodo de tiempo χ^{-1} , que es el ratio temporal de recuperación en UCI.
- **Hospitalizado que va a fallecer (H_D):** Grupo de población que fallecerá tras ser hospitalizada en un periodo de tiempo Ψ^{-1} , que será el periodo medio para fallecer en UCI.
- **Pre-Deceso (P_D):** Población que va a fallecer sin ser hospitalizada tras un periodo de tiempo, con la probabilidad dada por $\mu\theta$. Tras un periodo medio de tiempo ζ^{-1} , el sujeto fallece.
- **Deceso (D):** Población que ha fallecido tras contraer la enfermedad.

Asimismo, no solo diferenciaremos a los individuos en los compartimentos epidemiológicos ya comentados (cuyas poblaciones variarán en el tiempo conforme se desarrolle la epidemia), sino que también vamos a considerar una partición de la población en tres grupos de edad (joven (Y), de 0 a 24 años, adulto (A), de 25 a 64 años, y mayor (O), por encima de 65 años). Consideramos esta partición constante en el tiempo y tiene como objetivo hacer uso de los patrones de contacto de los que disponemos para cada edad así como de la diferente prevalencia de COVID-19 severo en función de la edad del paciente (14). Trabajamos por tanto con dos compartimentaciones de la sociedad (epidemiológica y etaria), por lo que dispondremos de un conjunto de 9×3 variables que denotaremos como ρ_X^g , con $X = S, E, I, R...$ y $g = Y, A, O$, que cuantifican la probabilidad de que un agente del grupo de edad g se encuentre epidemiológicamente en el estado X . Estas probabilidades ρ_X^g evolucionan con el tiempo y, de acuerdo a (14), dan lugar a las expresiones de evolución dadas por

$$\rho_S^g(t+1) = \rho_S^g(t)(1 - \Pi^g(t)) , \quad (5)$$

$$\rho_E^g(t+1) = \rho_S^g(t)\Pi^g(t) + (1 - \eta^g)\rho_E^g(t) , \quad (6)$$

$$\rho_I^g(t+1) = \eta^g\rho_E^g(t) + (1 - \mu^g)\rho_I^g(t) , \quad (7)$$

$$\rho_R^g(t+1) = \mu^g(1 - \theta^g)(1 - \gamma^g)\rho_I^g(t) + \chi^g\rho_{HR}^g(t) + \rho_R^g(t) , \quad (8)$$

$$\rho_{P_H}^g(t+1) = \mu^g(1 - \theta^g \gamma^g \rho_I^g(t) + (1 - \lambda^g) \rho_{P_H}^g(t) , \quad (9)$$

$$\rho_{H_R}(t+1) = \lambda^g(1 - \omega^g) \rho_{P_H}^g(t) + (1 - \chi^g) \rho_{H_R}^g(t) , \quad (10)$$

$$\rho_{H_D}(t+1) = \lambda^g \omega^g \rho_{P_H}^g(t) + (1 - \Psi^g) \rho_{H_D}^g(t) , \quad (11)$$

$$\rho_{P_D}(t+1) = \mu^g \theta^g \rho_I^g(t) + (1 - \zeta^g) \rho_{P_D}^g(t) , \quad (12)$$

$$\rho_D(t+1) = \zeta^g \rho_{P_D}^g(t) + \Psi^g \rho_{H_D}^g(t) + \rho_D^g(t) . \quad (13)$$

En estas ecuaciones aparecen todas las probabilidades descritas anteriormente, junto a la probabilidad $\Pi^g(t)$ en las ecuaciones Ec. 5 y Ec. 6. $\Pi^g(t)$ es la probabilidad dependiente del tiempo de que un agente susceptible del grupo g se infecte a tiempo t . Su expresión es

$$\Pi^g(t) = 1 - \prod_{h=1}^{N_G=3} (1 - \beta)^{\langle k^g \rangle C^{gh} n_i^h} \simeq 1 - \prod_{h=1}^{N_G=3} (1 - \beta \langle k^g \rangle C^{gh} n_i^h) . \quad (14)$$

La probabilidad dada por Ec. 14 puede entenderse como el complementario de la probabilidad de que no ocurra el evento de infección. La probabilidad asociada a la no infección vendrá dada por el término con el producto $\langle k^g \rangle C^{gh} n_i^h$, que es el número de contactos promedio que tiene cada agente multiplicado por la probabilidad de que un agente de edad g mantenga contacto con uno de edad h , y por el número de infectados del grupo de edad h con el que interacciona.

Cabe añadir que estas ecuaciones son deterministas y, como se demostraba en (16), sus resultados coinciden con los resultados de simulaciones Monte-Carlo. Esto permitirá una mayor posibilidad de estudiar el comportamiento del sistema al variar los parámetros.

2.3.2. Número reproductivo efectivo

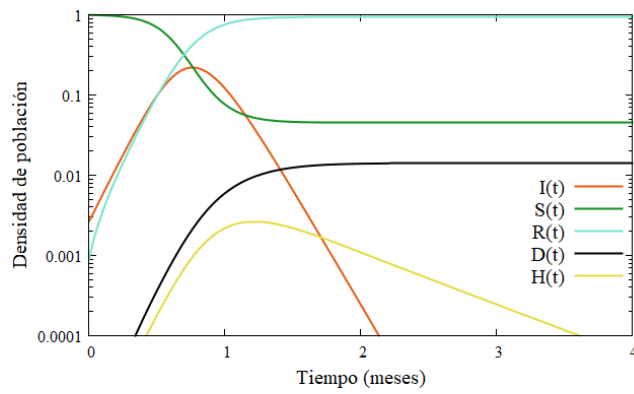
Anteriormente se introdujo el número reproductivo básico R_0 . Sin embargo, este parámetro solo es válido cuando toda la población es susceptible, pues como veíamos en la Ec. 4, se tenían en cuenta únicamente los parámetros iniciales y constantes de β , $\langle k \rangle$ y μ . Para llevar un control del número medio de agentes susceptibles infectados por cada agente infeccioso a lo largo del tiempo, se introduce el número reproductivo efectivo $R_e(t)$, dependiente del tiempo y que incluye la densidad de población susceptible.

En el caso de nuestro modelo, los contactos son los considerados en la Ec. 14, de forma que la expresión de $R_e(t)$ será

$$R_e(t) = \frac{\beta \sum_h^{N_G=3} \langle k^g \rangle C^{gh} \rho_S^g(t)}{\mu} . \quad (15)$$

Antes de proceder con la introducción de las estrategias de control, ilustramos en Fig. 3 el desarrollo de una epidemia en la que no se ha implementado ningún tipo de estrategia de contención. Para ello, se ha utilizado el modelo epidemiológico y de población expuestos en este apartado, tomando como valor de los parámetros los mostrados en (14) y que se pueden ver en el Anexo *'Parámetros epidemiológicos'*. En esta simulación se alcanza la inmunidad de grupo de forma rápida a cambio de un gran número de infectados de forma simultánea y de un gran número de fallecidos, en torno a un 2% de la población. Además de la elevada cantidad de fallecidos, esta simulación acarrearía probablemente un colapso sanitario debido a la gran cantidad de infectados simultáneos y de densidad de población en UCI.

Figura 3: Epidemia bajo condiciones iniciales aleatorias en cuanto a número de infectados en la población, con una densidad menor de 0.005 a $t = 0$. Mostramos las densidades totales de agentes susceptibles, infectados, recuperados, ingresados en UCI y fallecidos en escala logarítmica. La epidemia se ha desarrollado sin medidas de intervención. Los parámetros utilizados son los pertenecientes a (14) y aparecen en el Anexo *'Parámetros epidemiológicos'*.



3. Estrategias de control

A continuación, expondremos brevemente tres modelos de control siguiendo la Ref. (15), y que implementaremos en nuestro modelo. Las estrategias de control que vamos a implementar afectan al producto $\beta\langle k \rangle$, que multiplicamos por un parámetro de control b , acotado de forma: $b \in [0, 1]$, cuyo valor será el máximo en caso de encontrarnos en situación de completa libertad y el mínimo en caso de suprimir todas las libertades de los agentes.

Otros dos puntos importantes de las estrategias de control son el periodo de aplicación de las medidas restrictivas, τ , y el umbral de intervención que escojamos. Este último hace referencia al punto temporal en el que se implementarán las medidas de control, que se aplicarán cuando se supere ese umbral de intervención. El umbral es la cantidad máxima de infectados simultáneos (o de cualquier otro estado) que permitimos antes de implementar las medidas de control. En los ejemplos utilizados para ilustrar las 3 estrategias de control, este está fijado en $\rho_I = 0.15$.

3.1. Supresión Total

Esta estrategia de control establece $b = 0$ durante la totalidad del periodo de aplicación de medidas, lo que implica una anulación total de la libertad de la población, fijando a 0 los contactos de cada individuo.

3.2. Control Constante

La estrategia de Control Constante establece restricciones durante un periodo de tiempo, manteniendo el parámetro b fijo en un valor entre 0 y 1. El parámetro que controla esta estrategia de control se denomina *strictness*, σ , e indica lo severas que son las medidas de control. Basándonos en la Ref. (15), el valor de σ aumenta con el valor de τ , manteniéndose constante en 0.40 para $\tau \simeq 30$. A pesar de ello, tras ver los resultados, consideraremos $\sigma = 0.40$ independientemente de τ , pues los picos de infección son igualmente muy grandes.

3.3. Control Óptimo

Este sistema combina los dos anteriores, comenzando con la implantación de restricciones con el fin de conseguir un parámetro $R_e(t) = 1$ (Ec. 15). Tras el paso de un periodo de tiempo, que dependerá de τ , se realiza una supresión total disminuyendo el parámetro b a 0 hasta finalizar el periodo de intervención.

Este método introduce un nuevo parámetro, f , que mide cómo se reparten los días de restricciones con $b \in (0, 1]$ y los días con $b = 0$. Para ello, desde el momento de implementación de las restricciones hasta $f \cdot \tau$, se tratará de obtener $R_e(t)$ igual a la unidad. Desde ese momento hasta el final del periodo de aplicación, se realiza una supresión total de los contactos de cada agente.

4. Implementación de las medidas de control en el modelo

4.1. Marco teórico y objetivos

Ahora que hemos explicado tanto el modelo epidemiológico compartimental que vamos a usar, como las posibles medidas de control que se van a considerar, pasamos a explicar como introducir las medidas en el modelo. Nuestro objetivo ahora es comprobar qué tipo de estrategia de control se adecúa más a nuestro modelo, con el fin de realizar más tarde un estudio más exhaustivo de esa estrategia escogida para optimizarla lo más posible.

Primero, introducimos el parámetro b de forma que module β , al igual que en las estrategias de la sección 3. De esta forma la expresión de la probabilidad $\Pi^g(t)$ quedaría como

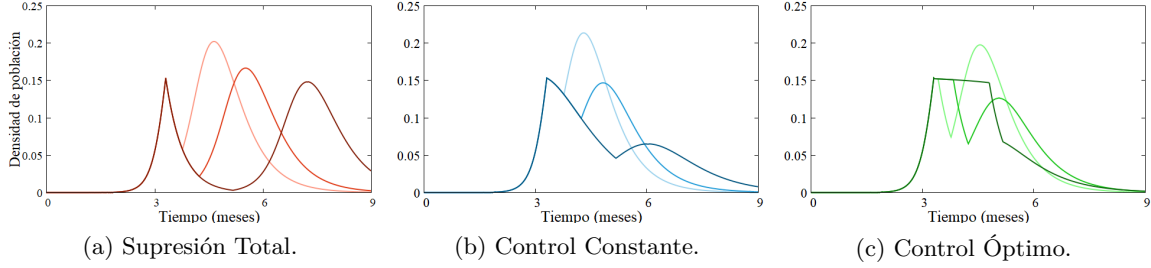


Figura 4: Métodos de control implementados en un modelo SIR con valores de $\tau = 14$ (claro), 28 (medio), 56 (oscuro). *a) Supresión Total:* Supresión total de los contactos, haciendo $b = 0$ durante todo el periodo de aplicación. Se observa una disminución muy abrupta de los infectados, que al finalizar la implantación vuelven a aumentar también de forma abrupta al no haberse llegado a la inmunidad de grupo, siendo mayor cuanto menor ha sido el primer pico de infectados. *b) Control Constante:* Establecimiento de b en $b = 0.40$ a lo largo de todo el periodo de control. La disminución de número de infectados lleva una forma más extraña que provoca un menor segundo pico ya que existe menor número de población susceptible. *c) Control Óptimo:* Combinación de las anteriores medidas de control, con la intención de obtener $R_e(t) = 1$ durante la primera parte del periodo de restricción, con $f = 0.25, 0.57, 0.8$, respectivamente (15). Se aprecia como la proporción de infectados se mantiene un periodo de tiempo en 1, símbolo de que se ha llegado a $R_e(t) = 1$. De nuevo, se aprecia un segundo pico mayor cuanto menor es el número de infectados en primera instancia.

en la expresión

$$\Pi^g(t) \simeq 1 - \prod_{h=1}^{N_G=3} (1 - b\beta \langle k^g \rangle C^{gh} n_i^h), \quad (16)$$

donde es importante notar que dado que el exponente es suficientemente pequeño y podemos aproximar a primer orden, modular β es formante equivalente a modular las conexiones.

En la Fig. 3 veíamos la necesidad de introducir una estrategia de control para evitar un gran pico de infectados y un elevado número de ingresos UCI y de fallecidos. Para mostrar la efectividad de las estrategias de control y el cambio que suponen en el desarrollo de la epidemia, observamos la Fig. 5 en la que se implementa la estrategia de Control Óptimo con $\tau = 14$ y $f = 0.25$.

En este punto consideramos que es necesario explicar la elección del tiempo máximo que vamos a simular nuestras epidemias, que será de 365 días (indicado en la Fig. 5 mediante una línea discontinua). Carece de sentido realizar una simulación hasta alcanzar la inmunidad de grupo, ya que las medidas de control que se implementan tienen como fin prolongar la epidemia mediante la reducción de contagios con el objetivo de dar tiempo al desarrollo de medidas farmacológicas, como podría ser una vacuna, que pongan fin al aumento de población infectada y por ende a la fallecida. La elección de simular durante un año se debe a la

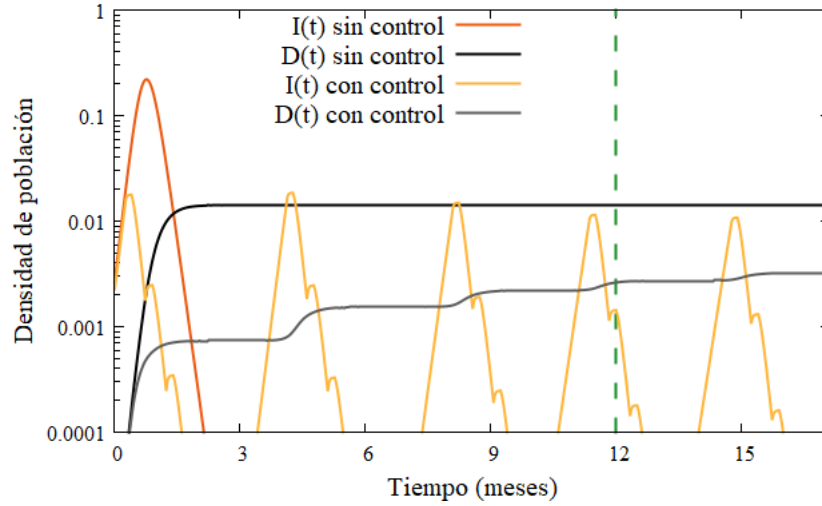


Figura 5: Se muestra una comparación de las densidades de infectados y fallecidos en una epidemia sin establecer medidas de control y una epidemia en la que se ha implementado la estrategia de Control Óptimo con parámetros $\tau = 14$ y $f = 0.25$, con escala logarítmica. Se observa claramente que la implantación de medidas de control disminuye drásticamente el número de infectados y fallecidos, aunque provoca un mayor número de picos de infectados provocados por no haber alcanzado la inmunidad de grupo que sí se alcanza en una epidemia sin control. Se muestra una línea discontinua a los 365 días, que será el tiempo máximo de epidemia que consideremos en adelante ya que se ha demostrado que puede existir ayuda farmacológica pasado ese periodo de tiempo.

reciente experiencia con la vacuna del COVID-19 y que se supone como el periodo necesario para desarrollo de una vacuna y vacunación a la población más vulnerable.

Tras esto, pasamos a determinar el tiempo de aplicación de medidas de control τ óptimo. Una vez escogido el tiempo de implementación de las medidas, trataremos de comprobar qué tipo de estrategia es mejor de cara a implementarla en nuestro modelo final.

4.2. Determinación de τ óptima

Como ya hemos explicado, nuestro primer objetivo es determinar el mejor valor de τ posible. Para ello, realizaremos diversas simulaciones de epidemias con distintos valores de τ , manteniendo todo el resto de parámetros fijos. De esta forma seremos capaces de juntar en una sola gráfica las distintas densidades de población fallecida de forma que podamos comprobar qué periodo de intervención se adecúa más a nuestros objetivos.

En primer lugar debemos decidir nuestra forma de implementar las restricciones. En la Fig. 4, podíamos ver que tras las implementaciones de las distintas estrategias de control, siempre existía un nuevo aumento descontrolado de infectados. Por ello, decidimos implemen-

tar las medidas de control siempre y cuando se supere el umbral, pudiendo existir así varias intervenciones consecutivas en el tiempo, como, por otra parte, se ha observado durante el transcurso de la pandemia en nuestro país.

El otro aspecto que quedará por determinar, entonces, es el del umbral a partir del cual aplicamos las medidas de control. En el caso de la Fig. 4, el umbral se encontraba en el número de infectados, concretamente, $\rho_I = 0.15$. Al ser nuestro objetivo el de reducir el colapso del sistema sanitario, implementaremos nuestro umbral de intervención en la densidad de población en UCI, controlando así el número de agentes que precisen de asistencia sanitaria y descargando por tanto el sistema sanitario. Es decir, nuestro umbral se centra en el valor de: $\rho_H = \rho_{H_R} + \rho_{H_D}$.

Las razones de la elección del umbral en el grupo de hospitalizados y no en el de infectados o muertos potenciales las exponemos a continuación. Por un lado, existe una gran dificultad de determinar concretamente la cantidad de infectados, ya que existe también el estado de expuestos y el tiempo de prevalencia en ambos estados no es fijo. Además, la seriedad de la enfermedad muestra gran relación con la edad del agente que la contrae, mientras que la de un hospitalizado en UCI no lo hace tanto. Por otro lado, no tiene sentido que el umbral se encuentre en el número de fallecidos ya que éste no deja de aumentar. Podríamos colocarlo en ρ_{H_D} , pues es prácticamente el ritmo al que va a aumentar el número de fallecidos. En cambio, a efectos prácticos, la diferenciación de los agentes ingresados en UCI que van a fallecer (ρ_{H_D}) de los que se van a recuperar (ρ_{H_R}) no es fácil ni lo suficientemente rápida como para limitar el control a ρ_{H_D} (a pesar de que en nuestro modelo sean compartimentos separados con probabilidades definidas). Por último, cabe añadir que nuestro principal objetivo es evitar el colapso sanitario, por lo que tener un mayor control en la población ingresada puede ser muy útil de cara a cumplir nuestro objetivo.

A partir de los resultados de la Fig. 6, concluimos con la elección de $\tau = 14$ días. Este valor de τ se comporta de forma similar al resto de valores posibles tanto en la estrategia de Supresión Total como en la de Control Constante, mientras que en la estrategia de Control Óptimo es la que menor cantidad de fallecidos muestra con diferencia. La opción escogida se corresponde a la del valor de τ más pequeño utilizado, hecho que se corresponde a la posibilidad de tener una mayor resolución del estado del sistema. Consideramos que, a efectos prácticos, cambiar la política de control en un intervalo menor a 2 semanas no es viable de cara a una situación real, a pesar de que podría ocurrir que los resultados fuesen todavía más favorables.

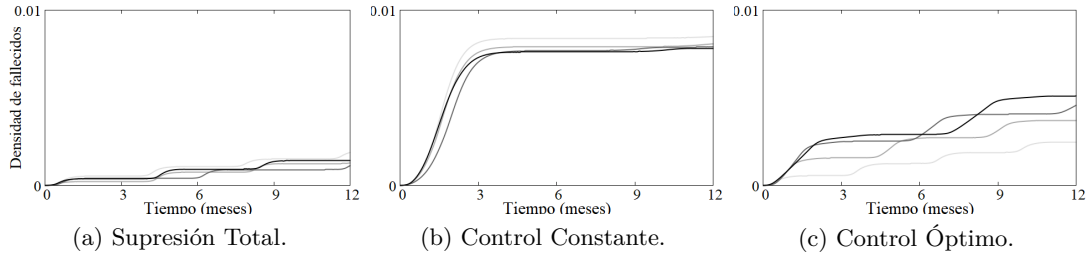


Figura 6: Se muestra la densidad de fallecidos en cada estrategia de control para un umbral establecido en $\rho_H = 2.5 \cdot 10^{-5}$ y en función de los valores de $\tau = 14, 28, 40, 56$ (de más claro a más oscuro). En *a) Supresión Total*, se puede ver que el número de fallecidos varía en función de τ , aunque no de una forma muy determinante. En *b) Control Constante*, se muestra que el número de fallecidos es prácticamente independiente del parámetro τ . En *c) Control Óptimo*, se observa un claro aumento de número de fallecidos conforme mayor es el tiempo de implementación de restricciones τ . Esta gran diferencia que se aprecia en la estrategia de Control Óptimo condiciona la elección de τ en un valor de 14 días, a pesar de que en *b)* se observe que es ligeramente peor que el resto de valores τ utilizados.

4.3. Elección de estrategia de control

Una vez escogido el valor de τ , lo siguiente que debemos hacer es comprobar qué estrategia de control podemos optimizar, constituyendo la base de nuestro estudio. Para ello, comprobaremos de qué manera se ve afectado el número de fallecidos en función del umbral, el cuál iremos variando desde un valor inicial 0 hasta $10 \cdot 10^{-5}$.

En la Fig. 7 se observa una tendencia ascendente de la mortalidad en función del umbral para las estrategias de Supresión Total y de Control Óptimo. Este hecho era esperable, ya que el aumento del umbral de intervención provoca que exista un mayor número de población ingresada en UCI. Es sorprendente el comportamiento que toma la estrategia de Control Constante, la cual mantiene prácticamente el mismo número de fallecidos a pesar del aumento del umbral. Este hecho deja claro que es necesario un periodo de supresión total de libertades para evitar el colapso sanitario y un gran número de fallecidos, lo que sería equivalente a un confinamiento de la población. Por esta razón, esta estrategia de control queda completamente descartada.

Ahora debemos discurrir qué estrategia escogemos, entre la Supresión Total y el Control Óptimo, para utilizar en nuestro estudio final. Es factible pensar que una situación epidémica como la originada por el COVID-19 dé lugar a una crisis económica, además de tener una carga social y emocional muy fuerte para la población. Realizar medidas de control basándose en el modelo de Supresión Total provocaría una parálisis completa de la actividad económica, agravando aún más la situación económica y social. Optaremos por lo tanto por implementar la estrategia de Control Óptimo, la cual permitirá una continuidad, aunque sea ligera, de la

actividad económica y social de la región afectada durante los periodos en los que $b \neq 0$, con la intención de disminuir el impacto de la epidemia en la sociedad. Es decir, asumimos el pequeño aumento en el número de fallecidos que supone optar por la opción de Control Óptimo en vez de la Supresión Total con el fin de no caer en una parálisis total de la región durante un periodo de tiempo más largo.

La estrategia de Control Óptimo nos permite una mayor flexibilidad en su estudio, pudiendo experimentar con los valores de f además de con el umbral de intervención, recuperando la Supresión Total con $f = 0$ y una variante del Control Constante para $f = 1$, visualizando así las tres estrategias de control en un solo estudio. Esto, además, nos permitirá establecer un parámetro que mida la libertad de la población a lo largo de lo que dure la epidemia, haciendo perfecta esta estrategia de control para estudiar todas sus posibilidades.

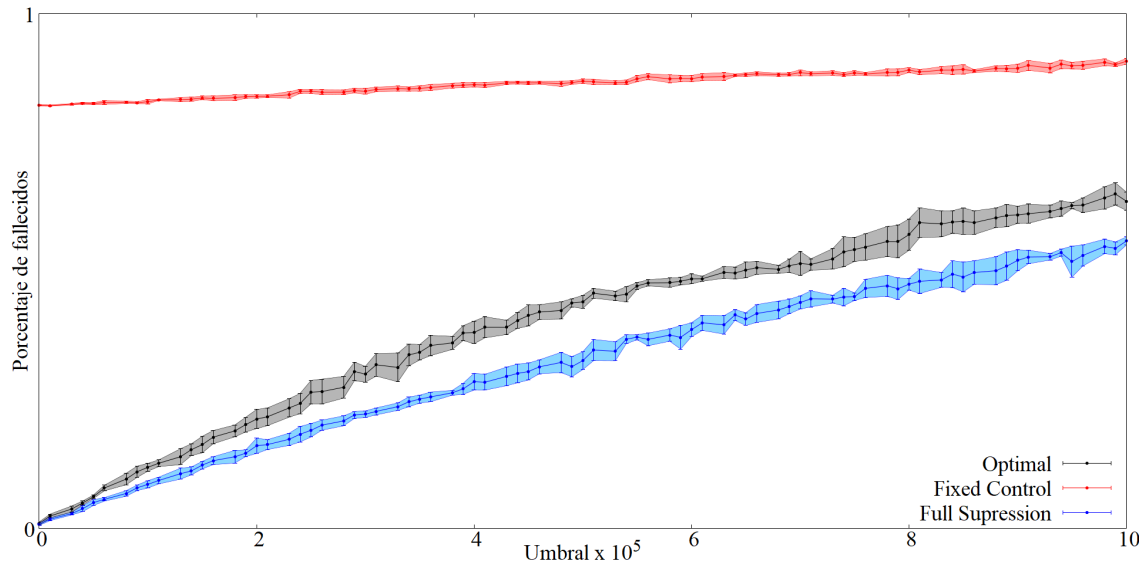


Figura 7: Se muestran la densidad de fallecidos en función del umbral de intervención, establecido en densidad de población ingresada en UCI, y en función de la estrategia de control empleada tras 365 días de epidemia. Coloreado se observa el rango de error en el que se movería cada estrategia. Se aprecia un aumento de densidad de fallecidos conforme aumenta el umbral de intervención, como era de esperar pues mayor es la población que se encuentra ingresada en UCI antes de aplicar cualquier tipo de restricción. La estrategia de Supresión Total se muestra como la más efectiva para la reducción de número de fallecidos, pero al tratarse de medidas muy restrictivas en comparación con el Control Óptimo, que se separa escasamente de la densidad de fallecidos la Supresión Total, se escoge el Control Óptimo como estrategia a emplear. La estrategia de Control Constante queda directamente descartada al tratar con un gran número de fallecidos en comparación a las demás medidas, independientemente del umbral de intervención escogido.

5. Resultados finales

Hasta el momento hemos expuesto el modelo poblacional y epidemiológico que hemos utilizado, además de explicar brevemente los tipos de estrategias de control que podíamos encontrar en Ref. (15). Tras seleccionar el tiempo τ óptimo para nuestros intereses, además de la estrategia de control a implementar, procedemos ahora a la realización de un estudio final en el que trataremos de optimizar la estrategia de control escogida. Nuestro objetivo ahora es la obtención de un diagrama en el que expongamos la densidad de fallecidos y la libertad en función de el umbral de intervención y de f .

El nuevo parámetro que hemos introducido, denominado *Freedom*, trata de estimar lo duras que son las restricciones impuestas a la población a lo largo de la epidemia. Para ello, recuperaremos el parámetro b que utilizamos en las diferentes estrategias de control y que multiplica a la tasa de infección β . En la estrategia de Control Óptimo, este parámetro toma un valor en el intervalo $[0, 1]$ para tratar de establecer $R_e(t) = 1$, de forma que cuanto mayor deba ser la restricción necesaria para este propósito, menor sería la libertad de la población al igual que el valor de b . Consideraremos que la libertad es total cuando existe normalidad, es decir, cuando $b = 1$ y que la supresión total de libertades es lo equivalente a establecer $b = 0$. De esta forma, definimos el parámetro *Freedom* como $Freedom = \frac{\sum_{t=0}^{t_{MAX}} b_t}{t_{MAX}}$. Al tener un parámetro de control b para cada uno de nuestros grupos de edad, el parámetro de libertad queda definido mediante la expresión

$$Freedom = \frac{\sum_{g=1}^{N_G} \sum_{t=0}^{t_{MAX}} b_t^g}{N_G \cdot t_{MAX}}, \quad (17)$$

donde N^G es el número de grupos de edad y t_{MAX} es la duración máxima de las medidas. Al tratarse de una media del parámetro de control b , *Freedom* estará también definida en el intervalo $[0, 1]$.

También queremos representar la densidad de fallecidos en función de los parámetros que controlamos en nuestra simulación. Con el fin de poder discutir sobre qué densidades de fallecidos podemos movernos en función de la libertad total a lo largo de la epidemia, consideramos la opción de representar líneas de nivel que delimiten las regiones de parejas de parámetros f y umbral en las que la densidad de población fallecida sea menor que un valor fijo. De esta manera seremos capaces de discutir qué pareja, o parejas, de parámetros controlables a la hora de introducir las restricciones son las más adecuadas para alcanzar un equilibrio entre densidad de fallecidos y libertad de los agentes.

El estudio, por lo tanto, consistirá en la simulación de epidemias en función de los valores de f y el umbral de intervención. La cantidad de camas UCI que pueden ocuparse en una situación epidémica depende completamente de la región afectada así como de la dis-

ponibilidad de material y personal sanitario. El hecho de realizar simulaciones con una gran variedad de valores de umbral de intervención es lo que nos asegura una sustentación del sistema sanitario, pues permite escoger los parámetros de control sin exceder el punto en el que se consideraría un colapso sanitario. Es decir, a partir de ahora suponemos cumplido nuestro objetivo de evitar el colapso sanitario y podemos proceder a analizar los resultados sin limitaciones.

Una vez concluidas las aclaraciones, nos disponemos a realizar el diagrama con los resultados realizados. Abarcaremos los valores de f entre 0, que recordamos que implica una totalidad de supresión total de libertades a lo largo de todo el tiempo de intervención, y 1, que implica que todos los días de intervención sean con $b > 0$. Este intervalo lo cubriremos en pasos de 0.005. Por otro lado, el rango cubierto en los valores del umbral de intervención será $(0, 10^{-4})$ con intervalos de $6.25 \cdot 10^{-7}$.

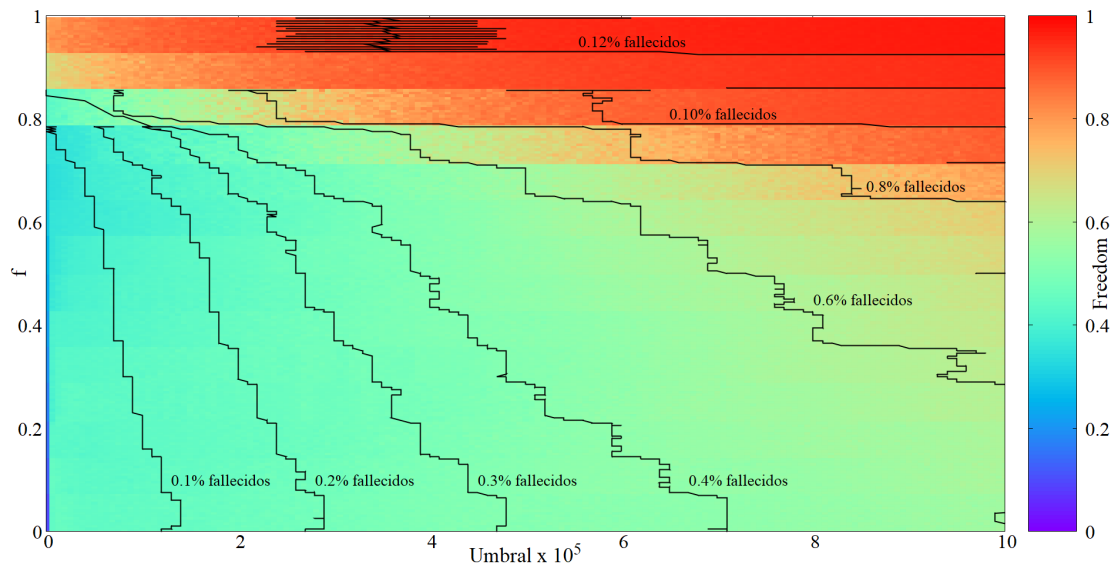


Figura 8: Se muestra el diagrama 3D del parámetro *Freedom* en función de f y del umbral de intervención, con líneas de nivel de densidad de fallecidos encerrando parejas de valores con una densidad menor. Para cada pareja de valores f y umbral de intervención, habremos realizado una estadística de 10 epidemias, con una densidad de infectados inicial aleatoria en el intervalo $(0, 0.005)$. Se observa un aumento de libertad con el aumento de los parámetros controlados. Para valores de f altos se observa un aumento brusco de la libertad de los agentes, pero las líneas de nivel desaparecen al acercarse a esa zona, indicando un aumento de fallecidos. Se observan también franjas que corresponden a, comenzando desde abajo, un día más de restricciones con $b > 0$. Se forman 14 franjas provocadas por la discretización del tiempo, cuyo paso temporal es de 1 día. Recordamos que las simulaciones realizadas son de 365 días, no hasta alcanzar la inmunidad de grupo, luego conforme mayor sea el parámetro *Freedom* mayor será la cantidad de población que se ha infectado.

En la Fig. 8 pueden observarse franjas en el diagrama de *Freedom*, las cuales están provocadas por la discretización del tiempo. En la estrategia de Control Óptimo, $f \cdot \tau$ indica el instante en el que cambiaremos de $b > 0$ a $b = 0$, siendo $f \cdot \tau \in \mathbb{R}$. Por otro lado, a lo largo de toda la memoria hemos considerado el tiempo discreto, con saltos de un día. Esto provoca que el cambio en las medidas de control propio de esta estrategia se realice en el paso de un día a otro, y no en un momento en concreto como exigiría el producto $f \cdot \tau$. No se considera la opción de discretizar el tiempo en pasos más cortos ya que en la práctica carece de sentido introducir cambios en las medidas de control a lo largo de un mismo día. Esto hará que aparezcan franjas en la Fig. 8, pues cada una de ellas equivale a un día más o menos de medidas de supresión completa en cada intervención realizada y por lo tanto a un cambio en la libertad de los agentes.

Podemos encontrar una similitud con la Fig. 7, donde la estrategia de Control Constante mostraba un alto porcentaje de fallecidos independientemente del umbral. En este diagrama se observa que para valores de f altos, que corresponderían a lo más cercano posible a esa estrategia de control (donde $f = 1$), el número de fallecidos es mucho mayor que para valores de f inferiores, además de existir prácticamente independencia con el umbral escogido. Nuevamente volvemos a comprobar la necesidad de realizar confinamientos en el desarrollo de una epidemia.

La Fig. 8 nos proporciona la posibilidad de escoger qué pareja de valores f y umbral de intervención escoger al principio de la epidemia, conociendo tanto la densidad de población fallecida tras la epidemia como la libertad que van a tener los agentes a lo largo de ella. Cabe recalcar que el hecho de encontrarnos ante un valor más alto de f no implica una mayor libertad, más concretamente para valores de umbral bajos (con la salvedad de las situaciones similares a la estrategia de Control Constante). Esto se debe a que la supresión total de contactos proporciona un descenso más brusco de infectados y también de ingresados en UCI, permitiendo un mayor número de días con libertad total ($b = 1$) durante el periodo de tiempo que dure la epidemia. Por ello, buscando optimizar la libertad proporcionada por la estrategia de control, permitiéndonos asumir un número de fallecidos inferior al 0.4%, preferiremos valores de f más bajos.

6. Otros resultados

A continuación procederemos a colocar el objetivo de nuestras restricciones en puntos distintos al tomado hasta ahora. Hasta el momento, se ha focalizado la intervención en el parámetro β de todos los grupos de edad, controlando así la probabilidad de infección mediante la reducción de contactos de toda la población.

Para ver como afecta el cambio de otros parámetros u otras formas de implementación de

las medidas, realizaremos simulaciones dirigiendo nuestra intervención de las dos siguientes formas:

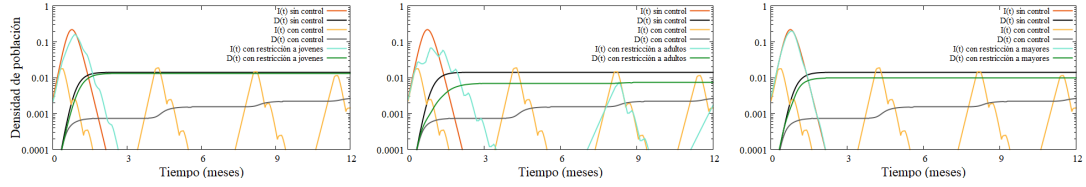
- **Restricción selectiva a un grupo de edad:** La intervención será dirigida a un grupo de edad concreto, permitiendo un valor mayor del parámetro *Freedom* a lo largo de la epidemia.
- **Restricción selectiva a un grupo de contacto:** La intervención es dirigida a un grupo de contacto en concreto, mediante el control en las escuelas o en el trabajo.

6.1. Medidas dirigidas a grupos de población

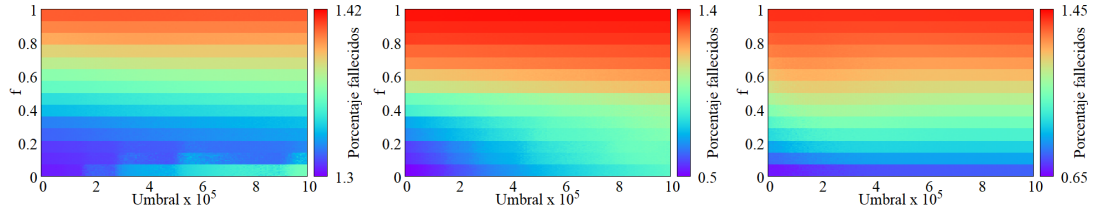
Nuestra primera intención es dirigir nuestras medidas de control a un grupo de edad en concreto. Focalizaremos nuestras medidas a cada uno de los 3 grupos de edad en los que hemos dividido nuestra población.

La finalidad de este ejercicio es comprobar si la restricción selectiva a un grupo de edad concreto no provoca un aumento de fallecidos sustancial que nos haga descartar esta idea. Queremos estudiar este aspecto ya que, en caso de no haber un aumento grande de fallecidos, estaría acompañada de un aumento sustancial del parámetro *Freedom*, calculado en la Ec. 17, ya que los parámetros b de las edades que no sean objeto de intervención se mantendrán en la unidad, es decir, aquellos grupos de edad a los que no afecten las medidas tendrán plena libertad a lo largo de la epidemia.

En la Fig. 9 podemos observar los 3 diagramas en los que, en función de f y del umbral de intervención, mostramos el porcentaje de población fallecida tras un año de epidemia. Esta figura muestra que los porcentajes de fallecidos a los que nos enfrentaríamos sería prácticamente constante excepto en el caso de focalizar las medidas en el grupo de edad adulta, ya que este grupo es el de mayor número y el que mantiene un mayor contacto con los otros grupos de edad. Este hecho, además, es apoyado por los gráficos de las epidemias en los que se comparan las epidemias de la Fig. 5 con otra realizando las intervenciones comentadas en este punto, siendo las condiciones externas iguales a como lo eran en la Fig. 5. Llama la atención la poca dependencia de la densidad de fallecidos con el umbral de aplicación de las medidas, e incluso con f para el caso de restricciones a jóvenes y mayores. Este hecho está relacionado con que, al no establecer medidas a todos los grupos de población, independientemente de existir esas medidas, el número de infectados va a seguir aumentando descontroladamente ya que todos los grupos de edad tienen contacto con los demás. Esto nos indicaría además que, a pesar de existir un umbral de intervención, el número de hospitalizados UCI seguiría aumentando al estar descontrolado el número de infectados por no existir restricciones generales, lo que provocaría el colapso sanitario que desde un principio queríamos evitar. Este efecto no se observa tan claramente en la implementación de medidas al grupo adulto ya que, como hemos expuesto antes, es el grupo más numeroso y el que más contacto mantiene con los demás, provocando



(a) Epidemia con restricciones a jóvenes. (b) Epidemia con restricciones a adultos. (c) Epidemia con restricciones a mayores.



(d) Fallecidos con restricciones a jóvenes. (e) Fallecidos con restricciones a adultos. (f) Fallecidos con restricciones a mayores.

Figura 9: En *a*), *b*) y *c*) se observa la comparación de las dos epidemias, con control pleno y sin estrategias aplicadas, vistas en la Fig. 5 con una epidemia en la que se implementan medidas únicamente a un grupo de edad en concreto. Tanto al aplicar medidas únicamente a jóvenes como a mayores vemos que el impacto es pequeño en el transcurso de la epidemia, lo que provoca a su vez que *d*) y *f*), que muestran los fallecidos en función de f y el umbral, no cambien prácticamente en función de estos parámetros. Este hecho se debe al aumento descontrolado de infectados que provoca que el número de fallecidos sea prácticamente el de una epidemia sin restricciones, como se observa en *a*) y *c*), acompañado de un colapso sanitario al no ser capaz de controlar el número de fallecidos. Por otro lado, *b*) muestra una mayor variación de número de infectados simultáneos y fallecidos respecto a una epidemia descontrolada, debido al tamaño de población que tiene este grupo y a que se trata del que más contactos mantiene. Este hecho se traduce en un mayor intervalo de valores de fallecidos observados en *e*), que igualmente se siente lejano a los porcentajes de fallecidos que veíamos en la Fig. 8. También nos encontraríamos ante un colapso sanitario debido al elevado número de infectados simultáneos que contempla esta estrategia, aunque en menor medida que las anteriormente comentadas.

que sea más notorio el efecto de las restricciones. A pesar de ello, esta estrategia se enfrenta igualmente a un colapso sanitario aunque en menor medida que las otras dos consideradas.

6.2. Medidas dirigidas a ámbitos de contacto

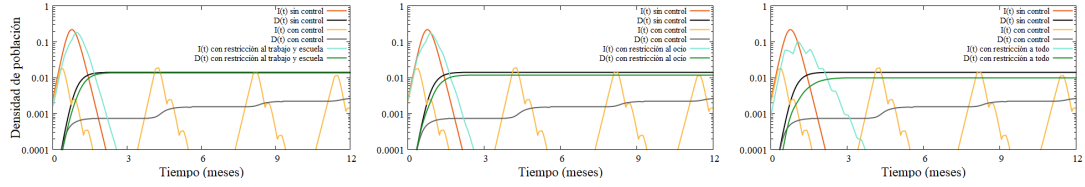
Para finalizar nuestro trabajo, vamos a dirigir nuestras intervenciones a la matriz de contactos C^{gh} , que utilizábamos en la Ec. 14. Esta matriz resultará de la suma de matrices de contacto correspondientes a diferentes ámbitos de contacto. Los ámbitos de contacto de los que poseemos información son el escolar, que engloba escuelas, institutos y universidades, el de trabajo, el de ocio y el del hogar.

Por lo tanto, nuestro objetivo será focalizar todas nuestras restricciones a los ámbitos de contacto de manera más directa. Para ello, calcularemos el parámetro b en cada instante de tiempo al igual que hacíamos antes, pero en este caso únicamente variaremos el valor de C^{gh} tal y como se muestra en el Anexo '*Parámetros epidemiológicos*'.

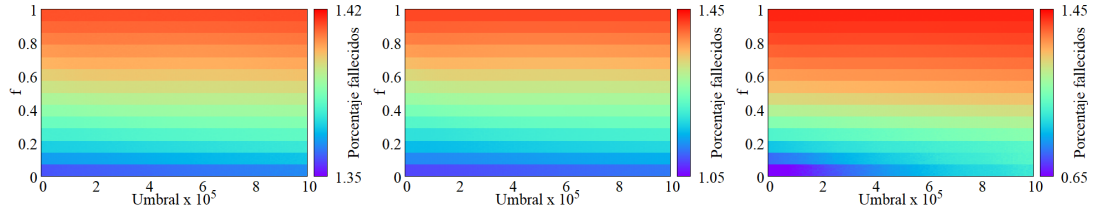
La forma de realizar cambios en la matriz de contactos obedecerá a lo siguiente: Se establece un umbral en el parámetro b para $b = 0.30$, escogido arbitrariamente. Si se supera este umbral, se aplicarán las restricciones pertinentes en función del ámbito de contacto al que se quiera atacar. En nuestro caso, comprobaremos qué ocurre si se cierran por completo escuelas y centros de trabajo, si se cierran centros de ocio, y qué impacto tiene el hecho de clausurar todos estos ámbitos simultáneamente.

En la Fig. 10 observamos los mapas de densidad de fallecidos en función de f y el umbral de intervención. Se repite prácticamente lo visto en la Fig. 9, pudiendo obtener entonces las mismas conclusiones. Ninguna de estas estrategias de control provocan una disminución de infectados acorde a la necesidad que se tiene en el momento, provocando que el número de infectados siga aumentando y por lo tanto el número de fallecidos sea similar a la situación sin ningún tipo de restricción. Esto hace que los mapas de color de fallecidos se muevan en intervalos de fallecidos muy pequeños, provocando prácticamente una independencia a los parámetros f y umbral de intervención salvo en el caso de que las medidas sean más restrictivas, aunque de mucha menor medida que al aplicarse las medidas de forma global.

Debemos añadir una salvedad respecto a los resultados que se observan en la Fig. 10. Nuestro modelo, al trabajar con una población compartimentada homogénea, contempla un número medio de contactos en el ámbito familiar y del hogar pero sin tener en cuenta que estos contactos serían los mismos continuamente. Es decir, al no disponer de más información de los agentes de nuestra población, no estamos teniendo en cuenta que en el ámbito familiar los contactos son siempre los mismos, sino que utilizamos un valor medio y una función de probabilidad. Este hecho provocará un aumento de infectados que realmente no se vería reflejado en caso de establecer estas estrategias de control. Este hecho lo hemos venido arrastrando todo el trabajo, pero no se hace realmente notorio hasta este punto en el que, teóricamente, estamos reduciendo los contactos al ámbito familiar. La conclusión que podemos extraer de lo expuesto es que, en caso de tratar con un modelo de población más complejo, estas estrategias de control y en especial la que clausura tanto el trabajo y las escuelas como el ocio serían mucho más útiles en el transcurso de una epidemia. Para realizar un estudio más correcto, sería necesario introducir una compartimentización extra que tuviese en cuenta los agentes convivientes, que diese cuenta de las interacciones de cada familia en particular, como se realiza en (14).



(a) Epidemia con restricciones al trabajo y a escuelas. (b) Epidemia con restricciones al ocio. (c) Epidemia con restricciones a todos los ámbitos.



(d) Fallecidos con restricciones al trabajo y a escuelas. (e) Fallecidos con restricciones al ocio. (f) Fallecidos con restricciones a todos los ámbitos.

Figura 10: En *a*), *b*) y *c*) se observa la comparación de las dos epidemias, con control pleno y sin estrategias aplicadas, vistas en la Fig. 5 con una epidemia en la que se implementan medidas únicamente a grupos de contacto en concreto. Se puede observar un efecto similar al visto en la Fig. 9, siendo las restricciones al trabajo y a la escuela y, por otro lado, al ocio, prácticamente irrelevantes en el transcurso de una epidemia si no vienen acompañadas de más restricciones. Al realizar la clausura completa de los 3 grupos de contacto, vemos que el efecto de estas medidas es más notorio que haciéndolo por separado pero nos enfrentaríamos de nuevo a un posible colapso sanitario. Estos aspectos se traducen en *d*), *e*) y *f*) provocando que, de nuevo, el número de fallecidos varíe escasamente en función de los parámetros externos. En el caso de *f*), nos encontramos un intervalo mayor de porcentajes de fallecidos y una dependencia mayor a estos parámetros ya que es la estrategia que afecta de mayor manera a los contactos de los agentes de nuestra población.

7. Conclusiones

El principal objetivo de este trabajo era encontrar una manera óptima de responder a una epidemia evitando en cualquier caso el colapso del sistema sanitario. Para ello nos hemos basado principalmente en dos artículos que muestran un estudio muy detallado de la reciente pandemia provocada por el COVID-19 en España, (14), y diferentes estrategias de control, (15), que podremos implementar en nuestro modelo. Particularmente hemos utilizado una población compartimentada en 3 grupos de edad, siguiendo un modelo epidemiológico sencillo (16), similar al visto en (14) pero con una mayor generalidad. Sobre este modelo hemos establecido las diversas estrategias de control sobre la tasa de infección de (15), Supresión Total, Control Constante y Control Óptimo. Se ha establecido un umbral de intervención en la densidad de población que se encuentra hospitalizada en UCI, ρ_H , con el fin de reducir el impacto en el ámbito hospitalario.

Una vez comprobado como actúan las distintas estrategias en nuestro modelo epidemiológico y asegurada la sustentación del sistema sanitario, tratamos de reducir el número de fallecidos a lo largo de la epidemia. Para ello, estudiamos el efecto de cada uno de estos métodos de control en el número de fallecidos en función del umbral de intervención ya que este será el parámetro a controlar. Mediante este estudio hemos obtenido el tiempo de intervención τ óptimo así como la estrategia de control a utilizar. Tras esto hemos pasado a simular epidemias en función de los parámetros posibles de controlar, como son f y el umbral de intervención, realizando además diversos cambios en la forma de implementar el control sobre los agentes que forman nuestra población compartimentada.

- I** El estudio sobre el tiempo de implementación τ para un umbral de intervención arbitrario muestra que utilizar un periodo $\tau = 14$ días proporciona una menor cantidad de fallecidos en la estrategia de Control Óptimo. En cambio, en las otras dos estrategias de control estudiadas la diferencia entre los valores de τ es prácticamente despreciable, lo que nos lleva a la elección final de $\tau = 14$.
- II** Asimismo, hemos comprobado qué estrategia de control se ajusta de mejor manera a la obtención de un menor número de fallecidos conforme variamos el valor del umbral. De esta forma se ha podido comprobar que el método de Supresión Total es el que menor cantidad de fallecidos acarrea a lo largo de la epidemia, mientras que el método de Control Constante muestra prácticamente una independencia el umbral de intervención. A pesar de ello, se ha escogido la estrategia de Control Óptimo, ya que le número de fallecidos es similar al de Supresión Total y este tipo de control acarreará una gran ventaja en el ámbito social y económico.
- III** Realizamos un estudio completo de estrategias de Control Óptimo, controlando los parámetros f y umbral de intervención y obteniendo un mapa 3D en el que se muestra un nuevo parámetro denominado *Freedom*, que cuantifica la libertad de los agentes a lo largo de la epidemia, junto a líneas de nivel de diferentes densidades de fallecidos.
- IV** Finalmente, consideramos focalizar nuestras intervenciones de una forma distinta a la empleada hasta el momento, decidiendo realizar un estudio de la efectividad de aplicar restricciones únicamente a un grupo de edad o de dirigir las medidas a ámbitos de contacto concretos como son la escuela, el trabajo y el ocio. Se han obtenido mapas 3D que muestran en este caso el porcentaje de fallecidos en las que se observa que estas medidas, a pesar de conllevar un gran aumento de *Freedom*, el número de fallecidos en los que se mueven estas estrategias empeoran en gran medida los vistos en **III**.

Podemos considerar que se ha cumplido el objetivo principal de implementar medidas de control que eviten el colapso sanitario, ya que al mostrar mapas en función del umbral de intervención estamos permitiendo escoger una estrategia con la pareja f y umbral deseada

dentro de los límites de cada región.

Es reseñable que los resultados obtenidos **I** y **II** han permitido una optimización de las medidas de control empleadas en **III** y **IV**, mostrando la necesidad de introducir medidas de supresión total durante algún periodo de tiempo. Podemos tomar los resultados **III** como el producto final del trabajo, que permite la elección de la pareja de parámetros controlables como son f y el umbral de intervención, de forma que **III** es capaz de predecir la libertad de la que dispondrán los agentes de nuestra población a lo largo del tiempo que dure la simulación, así como la cantidad de fallecidos que se está dispuesto a aceptar. En cualquier caso, la sustentación del sistema sanitario está asegurada siempre que se conozca el límite de la región en la que se aplique el estudio. Por último, los resultados de **IV** nos han demostrado que, al menos el hecho de dirigir las medidas de control únicamente a un grupo de población o solo cerrar escuelas y trabajos o el ocio, no son medidas de control válidas ya que no generan una ventaja respecto a las que hemos encontrado en **III**, junto al hecho de que no impiden el colapso sanitario como sí hacían los resultados de **III** al no tener tan controlado el número de infectados.

Este modelo permite el estudio de cualquier enfermedad en caso de disponer o simular los parámetros característicos de la enfermedad, permitiendo obtener resultados muy útiles para situaciones concretas de epidemias. Las principales limitaciones que tiene este modelo vienen dadas por de la utilización de una red de campo medio que, al ser muy simple, no tiene en cuenta ni la movilidad de los agentes ni los contactos estrechos de cada individuo. Este hecho habrá provocado una distorsión a lo largo de todo el trabajo y en especial en los resultados de **IV** donde las restricciones se dirigían a grupos concretos de población, siendo así la situación de clausura de todos los grupos de contacto excepto el familiar menos favorable de lo que sería realmente. Igualmente, este modelo se basa en la suposición de que existirá apoyo farmacológico al cabo de un año, hecho que en caso de adelantarse o atrasarse provocaría un cambio en los resultados obtenidos. A pesar de ello, consideramos que este trabajo tiene una base lo suficientemente sólida para poder ser utilizada en modelos más elaborados con las modificaciones que sean necesarias.

Referencias

- [1] Fieguth, P. 'An Introduction to Complex Systems: Society, Ecology, and Nonlinear Dynamics' Springer, 2016.
- [2] M. E. J. Newman 'Networks: An introduction', University of Michigan and Santa Fe Institute, 2010.
- [3] Mantegna, R. N., and Stanley, H. E. 'Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance' Cambridge University Press, 1999.
- [4] Galam, S., Gefen, Y. and Shapir., Y. 'Sociophysics: A new approach of sociological collective behaviour. I. Mean-behaviour description of a strike' *Journal of Mathematical Sociology* **9**, 1 (1982).
- [5] Galam, S. 'Sociophysics: A review of Galam models' *International Journal of Modern Physics C* **19**, 409 (2008).
- [6] Keeling, M. J. and Rohani, P. 'Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals' Princeton University Press, 2007.
- [7] Manrubia, S. C., Mikhailov, A. S. and Zanette, D. H. 'Emergence of Dynamical Order: Synchronization Phenomena in Complex Systems' World Scientific, 2004.
- [8] Anderson, P. W. 'More is different', *Science* **177**, 393, (1972).
- [9] Bak, P., Tang, C., Wiessenfeld, K., 'Self-organised criticality: an explanation of 1/f noise', *Physical Review Letters* **59**, 381, (1987).
- [10] Bak, P., Tang, C., Wiessenfeld, K., 'Self-organised criticality', *Phys. Rev. A.* **38**, 364 (1988).
- [11] Boccarra, N. 'Modeling Complex Systems', New York: Springer-Verlag, 2010.
- [12] Thiago das Virgens Santos, Rita de Cassia Macêdo Santos, Victor Hugo da Silva Martins, Sarah Alves Martins, Nadyr Cristina Bezerra, 'Prevalência e aspectos epidemiológicos de enteroparasitoses em crianças no Brasil' *Res. Soc. Dev.* **8**, 1-13 (2019).
- [13] Elga Mayo Montero, 'New Ebola outbreak. Further challenges for epidemiological surveillance' *Sanid. Mil.* **74**, (2018).
- [14] Alex Arenas, Wesley Cota, Jesús Gómez-Gardeñes, Sergio Gómez, Clara Granell, Joan T. Matamalas, David Soriano-Paños and Benjamin Steinegger, 'Modeling the Spatiotemporal Epidemic Spreading of COVID-19 and the Impact of Mobility and Social Distancing Interventions', *Phys. Rev. X* **10** 1-5, (2020).

- [15] Dylan H. Morris¹, Fernando W. Rossini¹, Joshua B. Plotkin, and Simon A. Levin, 'Optimal, near-optimal, and robust epidemic control', *Communication Physics* **4**, 1-6 (2020).
- [16] J. Gómez-Gardeñes, D. Soriano-Paños, and A. Arenas, 'Critical Regimes Driven by Recurrent Mobility Patterns of Reaction-Diffusion Processes in Networks', *Nat. Phys.* **14**, 391, (2018).