

# **El Teorema del Punto Fijo de Brouwer y algunas aplicaciones a la Teoría de Juegos**



**Sergio Anglada Salvanés**  
Trabajo de fin de grado en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo:  
Luciano Abadías Ullod y  
Luis Carlos García Lirola  
2021



# Abstract

When we talk about the Fixed Point Theorem we are not really referring to a single fixed point theorem, but to a whole theory. The importance of a theory is given by the history, the aesthetics and the depth of the results that connect testable hypotheses with surprising theses, the different applications to diverse areas, the time that the theory is alive... The Fixed Point Theory has its origin in the 19th century with Henri Poincaré. In 1886, Poincaré proved a result that is equivalent to Brouwer Fixed Point Theorem, although the connection with the subject of this article was not yet apparent. However, it was not until the 20th century that theory was developed. Mathematicians such as Stefan Banach, Shizuo Kakutani, Juliusz Schauder, L. E. J. Brouwer, Rangachary Kannan, among others, demonstrated the existence of fixed points for specific functions in concrete domains, thus giving rise to the famous Fixed Point Theorems that are known today. Also, due to the great utility of these theorems in the search for equilibria, fields such as Physics, Engineering, Game Theory or Biology are areas in which the Fixed Point Theory has great relevance. Therefore, this theory has become a tool essential in mathematics and science in general.

But, what is a Fixed Point Theorem? Let  $D$  be a set and  $f : D \rightarrow D$  a map. A fixed point is a point  $x_0$  in  $D$  which satisfies  $f(x_0) = x_0$ . So, a Fixed Point Theorem looks for conditions on  $D$  and  $f$  that guarantee the existence of a fixed point; conditions that guarantee (if possible) uniqueness. The first Fixed Point Theorem that is usually studied says that if  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  is a continuous function with  $a, b$  in  $\mathbb{R}$  and  $a < b$ , then there exists a fixed point  $c$  in  $[a, b]$ . The proof is very simple and it just involves applying Bolzano's Theorem.

In this document, we will focus on one of these Fixed Point Theorems: the Brouwer Fixed Point Theorem or the Brouwer Theorem. The theorem states that all continuous functions from the closed unit ball of finite dimension euclidean space onto itself has at least one fixed point. It can be proved in many ways; the first proof was given by Brouwer in 1912. In [3] John Milnor gives a proof of the "Hairy Dog Theorem" and deduces the Brouwer Fixed Point Theorem as a consequence. However, he describes his proof as elementary but strange. In the first chapter we give a less strange and more direct proof based on a theorem which states that it does not exist a continuous function from the closed unit ball of finite dimension euclidean space onto the unit sphere such that the function fixes the points of the sphere. These type of functions are called *retractions*. We follow the ideas of [4]. To finish the chapter, we extend the theorem to more generic sets: a closed ball with arbitrary radius and a compact convex set in  $\mathbb{R}^n$ .

In chapter 2, we introduce the  $n$  people Game Theory based on the absence of coalitions, in the sense that each participant is assumed to act independently, without collaboration or communication with any of the others. The notion of *Nash equilibrium point* is the basic ingredient of this theory. In order to understand the Nash equilibrium concept we present some necessary concepts in Game Theory. Later, thanks to Brouwer Fixed Point Theorem, we will show that a non-cooperative finite game always has at least one Nash equilibrium point. We follow the ideas of [8] and the key of the proof is to construct an appropriate continuous function from the product of the mixed strategies sets of the  $n$  players onto itself and show that this product set is compact and convex. Thus, we can apply the extension of the Brouwer Fixed Point Theorem for compact and convex sets and finally we will see that this fixed point is indeed

a Nash equilibrium point.

Nash equilibria have multiple applications; hence the importance of this existence theorem. The concept has been used to analyze hostile situations such as wars and arms races. It has also been used to study to what extent people with different preferences can cooperate and whether they will take risks to achieve a cooperative outcome. Other applications include traffic flow, how to organize auctions, the result of efforts made by multiple parties in the educational process, natural resource management, analysis of marketing strategies, even penalty kicks in soccer. For all this, in 1994, John Nash received the Commemorative Nobel Prize in Economics for his work on Game Theory.

It is common to apply mathematics to strategy games (Rubik's cube, Sudoku, chess...). However, in chapter 3 we will go in the other direction, using known facts about games to obtain mathematical results in other areas. We will introduce the board game Hex. The game board is shaped like a diamond with opposite sides of the same color (blue and red) and its interior is made up of  $k \times k$  hexagons. The game is intended for two players represented by the colors blue and red. The players participate alternately and each turn consists of coloring one of the hexagons with the color corresponding to the player. The aim of the game is to build a colored path that joins two sides of the same color. We will prove that in this game it is not possible to end in a draw. This fact is intuitively quite obvious. Nevertheless, a rigorous proof is something more mathematically complex. This fact is of great interest because thanks to this property of the game, the impossibility of a tie, it is possible to prove the Brouwer Fixed Point Theorem in its two-dimensional version. In this last chapter we follow the ideas described by David Gale in [11].

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>1. El Teorema de Brouwer</b>	<b>1</b>
1.1. Enunciado y conceptos previos . . . . .	1
1.2. Demostración del Teorema de Brouwer . . . . .	2
1.3. Extensiones del teorema . . . . .	7
<b>2. Juegos No-Cooperativos</b>	<b>11</b>
2.1. Definiciones y terminología . . . . .	11
2.2. Existencia de Equilibrios de Nash . . . . .	13
<b>3. El juego Hex</b>	<b>17</b>
3.1. Descripción del juego . . . . .	17
3.2. Teorema de Hex . . . . .	18
3.3. Demostración del Teorema de Brouwer . . . . .	20
<b>Bibliografía</b>	<b>25</b>



# Capítulo 1

## El Teorema de Brouwer

En este capítulo demostraremos el Teorema de Brouwer y algunas extensiones del mismo a conjuntos más generales. Nos hemos basado en la exposición de [4].

### 1.1. Enunciado y conceptos previos

Con la finalidad de entender bien la demostración del Teorema de Brouwer, es necesario repasar unos conceptos previos. Conceptos básicos de análisis matemático pueden consultarse en [1].

Durante todo el capítulo trabajaremos en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $n \in \mathbb{N}$  dotado de la norma euclídea, comúnmente denotada por  $\|\cdot\|_2$  pero que, por comodidad, denotaremos por  $\|\cdot\|$ , esto es,

$$\|x\| := \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Además, dos conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  de bastante relevancia en este trabajo serán la bola unidad y la esfera unidad,

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}, \quad \mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Notar que cuando hablemos de bolas, nos referiremos a bolas cerradas; en el caso de que tratemos con una bola abierta se especificará expresamente. Dicho esto, ya podemos enunciar el teorema principal del capítulo.

**Teorema 1.1** (Teorema de Brouwer). *Sea  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  una aplicación continua. Entonces,  $f$  tiene un punto fijo en  $\mathbb{B}^n$ , es decir, existe  $x \in \mathbb{B}^n$  tal que  $f(x) = x$ .*

La demostración del Teorema de Brouwer implicará manejar una clase de aplicaciones llamadas *retracciones*.

**Definición 1.1.** Sea  $S$  un espacio topológico y  $A$  un subconjunto de  $S$ . Una aplicación continua  $r : S \rightarrow A$  se dice *retracción* de  $S$  sobre  $A$  si  $r(S) = A$  y la restricción de  $r$  a  $A$  es la aplicación identidad,  $r|_A = Id$ . En ese caso, diremos que  $A$  es un *retracto* de  $S$ .

Por ejemplo, la aplicación  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$  es una retracción de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Por otro lado, un resultado que utilizaremos es un corolario del Teorema del Valor Medio Vectorial.

**Corolario 1.2.** Si  $\Omega$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $x, y \in \Omega$  tales que el segmento  $[x, y] \subseteq \Omega$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $\Omega$ , entonces existe algún  $z \in (x, y)$  tal que

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|df(z)(y - x)\|,$$

donde  $df(\cdot)$  es la función diferencial de  $f$ .

## 1.2. Demostración del Teorema de Brouwer

En esta sección demostraremos el Teorema del Punto Fijo de Brouwer a través del siguiente teorema de retracción. Las ideas seguidas en esta sección pueden verse en [4].

**Teorema 1.3.** No existe una retracción de la bola unidad  $\mathbb{B}^n$  sobre la esfera unidad  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Dicho teorema es consecuencia directa de los dos siguientes lemas:

**Lema 1.4.** Si existe una retracción de la bola unidad  $\mathbb{B}^n$  sobre la esfera unidad  $\mathbb{S}^{n-1}$ , entonces también existe una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\mathbb{B}^n \subseteq \Omega$  abierto, continuamente diferenciable tal que  $f|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  también es retracción.

**Lema 1.5.** No existe una aplicación  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciable, con  $\mathbb{B}^n \subseteq \Omega$  abierto, tal que  $f|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  sea retracción.

Notemos que es claro que el Teorema 1.3 quedará demostrado una vez se prueben estos dos lemas.

*Demostración del Lema 1.4:* Sea  $f$  una retracción de  $\mathbb{B}^n$  sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ , es decir, una aplicación continua de  $\mathbb{B}^n$  a  $\mathbb{S}^{n-1}$  tal que  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Definimos la función  $F(x) = f(x) - x$ , que es continua en  $\mathbb{B}^n$  y que se anula en  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Además, cumple

$$\|F(x)\| = \|f(x) - x\| \leq \|f(x)\| + \|x\| \leq 1 + 1 = 2, \quad \forall x \in \mathbb{B}^n.$$

Como  $\mathbb{B}^n$  es un compacto y  $\mathbb{B}^n$  y  $\mathbb{S}^{n-1}$  son espacios métricos, por el Teorema de Heine (ver [1, Theorem 4.47, p.91]),  $f$  es uniformemente continua y, análogamente,  $F$  también lo es. Entonces, podemos elegir  $\theta$  con  $\frac{3}{4} \leq \theta \leq 1$  tal que

$$\|F(x)\| = \|f(x) - x\| < \frac{1}{4}, \quad \text{para } \theta \leq \|x\| \leq 1.$$

Por otro lado, sean  $e_1, \dots, e_n$  los vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas. Aplicando el Teorema de Aproximación de Weierstrass [5] existen polinomios  $P_i$  con  $1 \leq i \leq n$  tales que

$$|P_i(x) - F_i(x)| < \frac{1}{4\sqrt{n}}, \quad \forall x \in \mathbb{B}^n.$$

Denotando  $P(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)e_i$  y  $F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x)e_i = \sum_{i=1}^n (f_i(x) - x_i)e_i$  tenemos que para todo  $x \in \mathbb{B}^n$  se sigue

$$\begin{aligned} \|P(x) - F(x)\| &= \|(P_1(x) - F_1(x), \dots, P_n(x) - F_n(x))\| \\ &= \sqrt{[P_1(x) - F_1(x)]^2 + \dots + [P_n(x) - F_n(x)]^2} \\ &< \sqrt{\frac{1}{16n} + \dots + \frac{1}{16n}} = \sqrt{\frac{n}{16n}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{1.1}$$



Definimos ahora la función  $r$  continua en  $[0, 1]$  de la Figura 1.1 dada por

$$r(x) = \begin{cases} \frac{7}{8}, & \text{si } 0 \leq s \leq \theta^2, \\ \frac{7/8}{\theta^2 - 1}(x - 1), & \text{si } \theta^2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

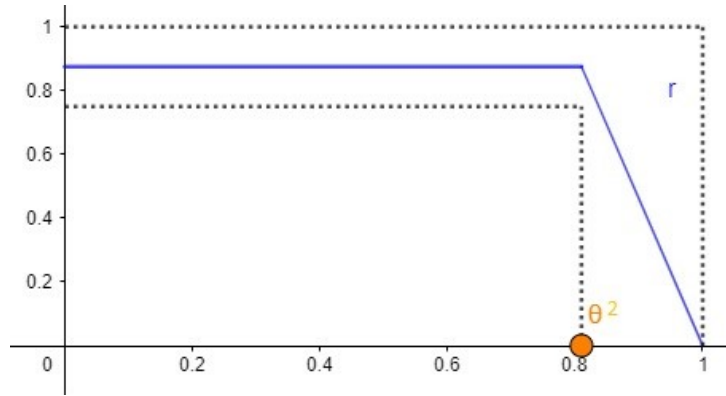


Figura 1.1: Definición de la función  $r$ .

Como es una función continua en el intervalo  $[0, 1]$ , aplicando el Teorema de Aproximación de Weierstrass, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un polinomio  $q$  tal que para todo  $s \in [0, 1]$  cumple  $|q(s) - r(s)| < \varepsilon$ . Además, podemos tomar el  $\varepsilon$  suficientemente pequeño para que el polinomio  $q$  cumpla también

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \leq q(s) \leq 1, & \text{si } 0 \leq s \leq \theta^2, \\ |q(s)| \leq 1, & \text{si } \theta^2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Estas condiciones se ven reflejadas en la Figura 1.2. El polinomio  $q$  queda dentro de la zona azul.

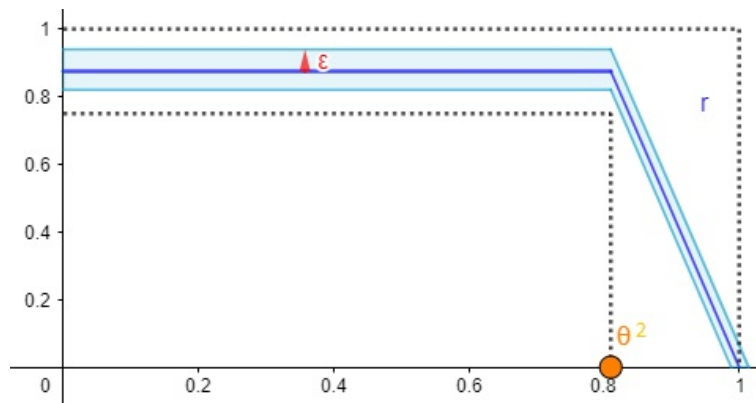


Figura 1.2: Aplicación del Teorema de Aproximación de Weierstrass a la función  $r$ .

Supongamos ahora que  $q(1) \geq 0$  (el caso  $q(1) < 0$  análogo) y definimos el polinomio  $Q(s) = q(s) - q(1)$ , que cumple  $Q(1) = 0$ . Observemos que  $\varepsilon$  se puede haber elegido suficientemente pequeño para que este nuevo polinomio siga cumpliendo

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \leq Q(s) \leq 1, & \text{para } 0 \leq s \leq \theta^2, \\ |Q(s)| \leq 1, & \text{para } \theta^2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \leq Q(s^2) \leq 1, & \text{para } 0 \leq s \leq \theta, \\ |Q(s^2)| \leq 1, & \text{para } \theta \leq s \leq 1, \\ Q(1) = 0. \end{cases}$$

Con esto, definimos la función

$$g(x) = x + Q(\|x\|^2)P(x),$$

que es un polinomio en  $n$  variables. Para  $0 \leq \|x\| \leq \theta$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|x + Q(\|x\|^2)P(x)\| \\ &= \|f(x) + Q(\|x\|^2)(P(x) - f(x) + x) + (Q(\|x\|^2) - 1)(f(x) - x)\| \\ &\geq \|f(x)\| - |Q(\|x\|^2)| \cdot \|P(x) - f(x) + x\| - |1 - Q(\|x\|^2)| \cdot \|f(x) - x\| \\ &\geq 1 - 1 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

gracias a 1.1. Análogamente, para  $\theta \leq \|x\| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|x + Q(\|x\|^2)(P(x) - f(x) + x) + Q(\|x\|^2)(f(x) - x)\| \\ &= \|x\| - |Q(\|x\|^2)| \cdot (\|P(x) - f(x) + x\| + \|f(x) - x\|) \\ &\geq \theta - 1 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\|g(x)\| \geq \frac{1}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{B}^n.$$

Además, para  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  tenemos

$$g(x) = x.$$

Por tanto, tenemos una función  $g$  que no se anula en  $\mathbb{B}^n$  y que deja fijos los puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Ahora, cada componente de  $g$  es un polinomio en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , luego  $g$  es continua en  $\mathbb{B}^n$ . Si definimos una nueva función  $h$  como

$$h(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}, \quad \forall x \in \mathbb{B}^n,$$

entonces  $h$  es una función continuamente diferenciable de  $\mathbb{B}^n$  a  $\mathbb{S}^{n-1}$  que deja fijos todos los puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Además, al ser  $g(x)$  un polinomio está definido en  $\mathbb{R}^n$ , y como  $\|g(x)\| \geq \frac{1}{4}$  en  $\mathbb{B}^n$ , y tanto  $g$  como la norma de  $g$  son continuas, podemos asegurar que existe un abierto  $\Omega$  con  $\mathbb{B}^n \subseteq \Omega$  tal que  $\|g(x)\| \geq \frac{1}{8}$  en  $\Omega$ . Luego  $h(x)$  es continuamente diferenciable en  $\Omega$  y  $h|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  ya hemos visto que deja fijos los puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , es decir, es retracción. □

*Demostración del Lema 1.5:* Suponemos que existe una aplicación  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciable, con  $\mathbb{B}^n \subseteq \Omega$  abierto, tal que  $f|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  sea retracción. Definimos las funciones

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x, \\ f_t(x) &= x + tg(x) = (1-t)x + tf(x), \end{aligned}$$

para  $x \in \mathbb{B}^n$  y  $0 \leq t \leq 1$ . Notar que  $f_t(x)$  es una combinación convexa de los puntos  $x, f(x) \in \mathbb{B}^n$  y, como la bola unidad es convexa, se tiene que  $f_t(x) \in \mathbb{B}^n$  para todo  $x \in \mathbb{B}^n$ . Ahora veamos que la función  $f_t$  es biyectiva para  $t$  suficientemente pequeño.

Como  $f$  es continuamente diferenciable en  $\Omega$ , también lo son  $g$  y  $f_t$ . Además, por el Corolario 1.2, existe una constante  $C = \sup_{z \in \mathbb{B}^n} \|df(z)\|$  tal que

$$\|g(y) - g(x)\| \leq C\|y - x\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{B}^n.$$

Si  $0 \leq t < 1/C$ , y supongamos que  $f_t(x) = f_t(y)$ , entonces

$$\begin{aligned} tg(y) - tg(x) &= t(f(y) - y) - t(f(x) - x) \\ &= f_t(y) - (1-t)y - (f_t(x) - (1-t)x) + t(x - y) \\ &= -y + ty + x - tx + tx - ty \\ &= x - y. \end{aligned}$$

Aplicando normas

$$\|x - y\| = \|tg(y) - tg(x)\| = t\|g(y) - g(x)\| \leq tC\|y - x\|,$$

luego  $x = y$  ya que  $0 \leq tC < 1$ . Por tanto, ya tenemos que la función  $f_t$  de  $\mathbb{B}^n$  a  $\mathbb{B}^n$  es inyectiva para  $0 \leq t < 1/C$ .

Por otro lado, llamando  $A$  a la matriz Jacobiana de  $g$  y  $Jf_t$  al determinante de la matriz Jacobiana de la función  $f_t$ , como  $f_t(x) = x + tg(x)$  tenemos

$$Jf_t = \det \left( \frac{\partial f_t}{\partial x_1}, \frac{\partial f_t}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_t}{\partial x_n} \right) = |I_n + tA|. \tag{1.2}$$

Notar que para  $t = 0$  se tiene  $Jf_t = 1$ . Ahora, podemos mirar dicho determinante como un polinomio en función de  $t$ . Luego, por continuidad, existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $0 \leq t \leq \varepsilon$  se cumple que

$$Jf_t > \frac{1}{2} \neq 0.$$

Aplicando el Teorema de la Función Inversa (disponible en [1, Theorem 13.6, p. 372]) a  $f_t$  para un  $t$  fijo tal que  $0 \leq t \leq \varepsilon$ , se tiene que  $f_t$  envía el interior de  $\mathbb{B}^n$  a un conjunto abierto, lo llamamos  $A_t$ , contenido en  $\mathbb{B}^n$ . Sea ahora un punto  $e$  de  $\mathbb{B}^n$  que no está en  $A_t$ . Unimos el punto  $e$  con un punto  $a \in A_t$  cualquiera y elegimos el punto  $b$  del segmento de la recta que une los puntos  $e$  y  $a$  en el frontera de  $A_t$  (ver Figura 1.3).

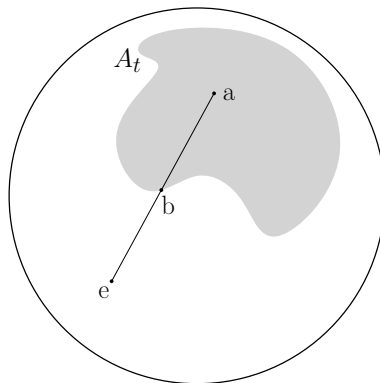


Figura 1.3: Conjuntos  $\mathbb{B}^n$  y  $A_t$ .

Como la imagen de  $\mathbb{B}^n$  por  $f_t$  es compacta, existe  $x \in \mathbb{B}^n$  tal que  $b = f_t(x)$ . Como  $b$  no está en  $A_t$ , ya que  $A_t$  es un abierto y  $b$  está en su frontera,  $x$  no está en el interior de  $\mathbb{B}^n$ , luego  $\|x\| = 1$ . Por tanto, como  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , se tiene que  $b = f_t(x) = x$  y los puntos  $e$  y  $b$  están en la frontera de  $\mathbb{B}^n$ . Esto prueba que  $A_t$  coincide con el interior de  $\mathbb{B}^n$  y, como  $f_t$  manda la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  a ella misma, vemos que, cuando  $0 \leq t \leq \varepsilon$ ,  $f_t$  manda de manera biyectiva  $\mathbb{B}^n$  a ella misma.

Por otro lado, el volumen de la bola unidad  $\mathbb{B}^n$ ,  $V_n$ , puede calcularse de manera integral de la siguiente manera

$$V_n = \int \cdots \int_{\mathbb{B}^n} 1 \, dx_1 \cdots dx_n.$$

Aplicando el Teorema de Cambio de Variables (disponible en [1, Theorem 1.36, p. 164]) para la función  $f_t$  con  $0 \leq t \leq \varepsilon$  se tiene

$$V_n = \int \cdots \int_{\mathbb{B}^n} 1 \, dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{\mathbb{B}^n} Jf_t \, dx_1 \cdots dx_n =: I(t).$$

Luego la segunda integral  $I(t)$ , que es un polinomio en  $t$ , es constante con valor positivo  $V_n$  para todo  $t$ .

Pero, en el caso  $t = 1$ , como  $f_1(x) = f(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$  para todo  $x \in \mathbb{B}^n$ , tenemos que

$$\langle f_1(x), f_1(x) \rangle = \|f_1(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 = 1,$$

para todo  $x \in \mathbb{B}^n$ . Si hacemos la derivada parcial respecto de  $x_i$  a ambos lados nos queda

$$0 = \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), f_1(x) \right\rangle + \langle f_1(x), \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \rangle = 2 \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), f_1(x) \right\rangle, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Luego  $\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), f_1(x) \rangle = 0$  para todo  $i$ . Es decir,  $\{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)\}$  son  $n$  vectores ortogonales a  $f_1(x)$ . Como estamos en un espacio de dimensión  $n$  se tiene que  $\{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)\}$  son linealmente dependientes para todo  $x$  en  $\mathbb{B}^n$ , ya que no puede haber  $n + 1$  vectores independientes en un espacio  $n$ -dimensional. Por tanto

$$Jf_t = \det \left( \frac{\partial f_t}{\partial x_1}, \frac{\partial f_t}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_t}{\partial x_n} \right) = 0.$$

Luego,  $I(1) = 0$  y ya tenemos la contradicción. □

Acabamos de probar el Teorema 1.3. Por tanto, como último paso, nos quedaría demostrar el Teorema de Brouwer.

*Demostración del Teorema de Brouwer.* Supongamos que existe una función  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  continua sin ningún punto fijo. Entonces, como para todo  $x \in \mathbb{B}^n$  se tiene que  $f(x) \neq x$ , podemos construir una semirrecta empezando en  $f(x)$  y que pasa por  $x$ . Ahora definimos la función  $P : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  donde el punto  $P(x)$  lo definimos como el punto de intersección de la semirrecta con  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Notar que  $P(x) = x$  si y sólo si  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Vamos a probar que  $P$  es una retracción de  $\mathbb{B}^n$  a  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Notemos que  $P(\mathbb{B}^n) = \mathbb{S}^{n-1}$  y  $P|_{\mathbb{S}^{n-1}} = Id$ . Veamos ahora que  $P$  es continua.

Sea  $x \in \mathbb{B}^n$ . Entonces,

$$P(x) = x + \lambda(x)u(x),$$

donde  $u(x)$  es el vector unitario con dirección desde  $f(x)$  hasta  $x$ ,

$$u(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|},$$

y  $\lambda(x)$  es el escalar no negativo tal que  $\|P(x)\| = 1$  (si  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  entonces  $\lambda(x) = 0$ ).

Notar que la función  $x \mapsto x - f(x)$  en  $\mathbb{B}^n$  es continua y nunca se anula, por lo que  $u(x)$  está bien definida y es continua.

Para ver la continuidad de  $\lambda(x)$ , denotamos  $\lambda(x) = \lambda$  y resolvemos la ecuación

$$0 = \|P(x)\|^2 - 1 = \|x + \lambda u(x)\|^2 - 1 = \lambda^2 + 2b\lambda - c,$$

donde  $b = \langle x, u(x) \rangle$  y  $c = 1 - \|x\|^2$ . Resolviendo la anterior ecuación cuadrática obtenemos las soluciones  $-b \pm \sqrt{b^2 + c}$ . Como  $c \geq 0$  ambas soluciones son reales y como  $\sqrt{b^2 + c} \geq \sqrt{b^2} = |b|$  sabemos que la solución no negativa es  $-b + \sqrt{b^2 + c}$ . Luego,

$$\lambda(x) = -\langle x, u(x) \rangle + \sqrt{\langle x, u(x) \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)},$$

donde observamos la continuidad de  $\lambda$  por ser composición de funciones continuas y, con ello, la continuidad de  $P$ .

Luego tenemos una retracción de la bola unidad  $\mathbb{B}^n$  a la esfera unidad  $\mathbb{S}^{n-1}$ , lo que contradice el Teorema 1.3 demostrado anteriormente. Por tanto, nuestra hipótesis del principio es falsa y se tiene que la función  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  tiene algún punto fijo.  $\square$

*Observación:* De hecho el Teorema de Brouwer y el Teorema 1.3 son equivalentes:

Supongamos que existe una retracción  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  y definimos ahora la función continua  $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  dada por  $g(x) = -x$ . La composición de ambas funciones  $f \circ g : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$ , que es continua por ser composición de funciones continuas, sólo puede tener puntos fijos en la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  ya que su imagen está contenida en ella. Sin embargo, todo punto de la esfera queda fijo al ser evaluado por  $f$  pero al ser evaluados por  $g$ , por definición de la función, éstos no quedan fijos. Luego tenemos una función continua de  $\mathbb{B}^n$  en  $\mathbb{B}^n$  sin ningún punto fijo, lo que contradice el Teorema de Brouwer y, por tanto, nuestra hipótesis de la existencia de una retracción de  $\mathbb{B}^n$  a  $\mathbb{S}^{n-1}$  es falsa.

### 1.3. Extensiones del teorema

El Teorema de Brouwer asegura la existencia de un punto fijo de una función continua de la bola unidad en sí misma. Ahora nuestro objetivo es extenderlo a conjuntos más generales. Las ideas seguidas en este sección pueden consultarse en [6, Chapter 4, p. 41-50]. Comenzamos con una bola de radio  $r > 0$  centrada en el punto  $0 \in \mathbb{R}^n$  que denotaremos por  $\mathbb{B}_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Corolario 1.6.** *Si  $f : \mathbb{B}_r^n \rightarrow \mathbb{B}_r^n$  es una aplicación continua, entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{B}_r^n \rightarrow \mathbb{B}_r^n$  una función continua. Definimos la función  $h : \mathbb{B}_r^n \rightarrow \mathbb{B}_r^n$  dada por  $h(x) = rx$  claramente continua y, además, su inversa  $h^{-1} : \mathbb{B}_r^n \rightarrow \mathbb{B}_r^n$  dada por  $h^{-1}(x) = \frac{x}{r}$  también lo es, es decir,  $h$  es un homeomorfismo.

Definimos ahora la función

$$g : \mathbb{B}_r^n \rightarrow \mathbb{B}_r^n \\ x \mapsto g(x) = h^{-1}(f(h(x))).$$

Tenemos que  $g$  es continua por ser composición de funciones continuas. Aplicando el Teorema de Brouwer,

$$\exists x \in \mathbb{B}_r^n \text{ tal que } g(x) = h^{-1}(f(h(x))) = x.$$

Aplicando  $h$  a esa última igualdad,

$$f(h(x)) = h(x).$$

Por tanto, el punto  $h(x) \in \mathbb{B}_r^n$  es un punto fijo de  $f$ .  $\square$

Ahora vamos a ver otro corolario del Teorema de Brouwer que asegura la existencia de un punto fijo de una función continua de un conjunto compacto y convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$  en sí mismo. Para ello, vamos a construir una retracción de  $\mathbb{R}^n$  a  $K$ .

**Lema 1.7.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto y convexo. Entonces, la función distancia de un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $K$  definida por*

$$d_K(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto d_K(x) := \inf\{\|x - k\| \mid k \in K\},$$

es continua. Además, existe una retracción de  $\mathbb{R}^n$  a  $K$  dada por

$$R : \mathbb{R}^n \longrightarrow K \\ x \longmapsto k_0,$$

donde  $k_0$  es el punto de  $K$  en el que se alcanza el ínfimo de la función  $d_K(x)$  para el correspondiente  $x$ .

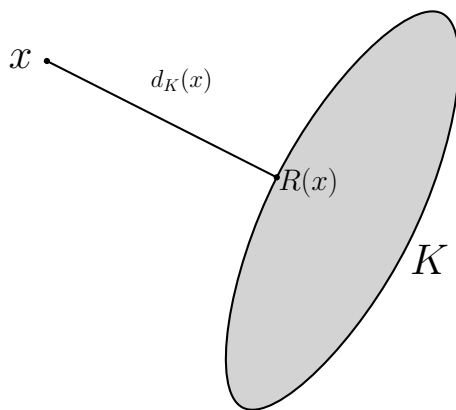


Figura 1.4: Retracción  $R$ .

*Demostración.* Veamos que la función  $R$  está bien definida. Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ .

La función  $k \longrightarrow \|x - k\|$  es continua, luego alcanza su mínimo sobre el compacto  $K$ . Además, como  $K$  es convexo dicho punto es único: sean  $k_1, k_2 \in K$  tales que

$$d := \inf\{\|x - k\| \mid k \in K\} = \|x - k_1\| = \|x - k_2\|.$$

Definimos ahora  $v = x - k_1$ ,  $w = x - k_2$ . Por la ley del paralelogramo, se tiene

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = 4d^2.$$

Por otro lado, por la convexidad de  $K$ , el punto  $\frac{k_1 + k_2}{2}$  pertenece a  $K$ . Por la definición de ínfimo se tiene

$$d \leq \left\| \frac{k_1 + k_2}{2} - x \right\| = \left\| \frac{v + w}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|v + w\|.$$

Multiplicando por dos y elevando al cuadrado nos queda

$$4d^2 \leq \|v + w\|^2.$$

Sustituyendo  $4d^2 = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2$  en la desigualdad anterior se sigue

$$0 = \|v - w\|^2 = \|k_1 - k_2\|^2, \text{ luego } k_1 = k_2.$$

Así, el punto que alcanza dicho ínfimo es único. Por tanto, la función  $R$  está bien definida. Veamos ahora su continuidad. De hecho, vamos a ver que es una función contractiva, lo cual es más fuerte que la continuidad. Para ello, tenemos que ver que

$$|d_K(x) - d_K(y)| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $d_K(x) \geq d_K(y)$ . Por la desigualdad triangular, se tiene que

$$d_K(x) \leq \|x - k\| \leq \|x - y\| + \|y - k\|, \quad \forall k \in K.$$

Gracias a la arbitrariedad de  $k$ ,

$$d_K(x) \leq \|x - y\| + d_K(y), \quad \text{luego } d_K(x) - d_K(y) \leq \|x - y\|.$$

Por tanto, la función  $d_K$  es contractiva y, en particular, continua.

Veamos que  $R$  es una retracción de  $\mathbb{R}^n$  a  $K$ . Claramente  $R(\mathbb{R}^n) = K$  y notemos que si  $x_0 \in K$  entonces  $R(x_0) = x_0$  ya que  $d_K(x_0) = \inf\{\|x_0 - k\| \mid k \in K\} = \|x_0 - x_0\| = 0$ ; luego  $R|_K \equiv Id$ . Por tanto, solo faltaría probar la continuidad de  $R$ .

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $(x_n)$  un sucesión en  $\mathbb{R}^n$  que converge a  $x_0$ . Para ver que  $R$  es continua, nuestro objetivo es demostrar que  $R(x_n) \rightarrow R(x_0)$ . Como  $K$  es compacto, la sucesión  $(R(x_n))$  tiene una subsucesión convergente a un punto de  $K$  que llamaremos  $y_0$ . Para ser prácticos con la notación, vamos a reemplazar, de manera temporal, la sucesión entera por la subsucesión, de tal modo que tenemos  $R(x_n) \rightarrow y_0$ . Entonces:

$$\begin{aligned} d_K(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_K(x_n) \quad (\text{por continuidad de } d_K) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - R(x_n)\| \quad (\text{por definición de } R) \\ &= \|x_0 - y_0\| \quad (\text{por definición de } y_0). \end{aligned}$$

Luego,  $R(x_0) = y_0$ . Hemos probado que si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $(x_n)$  es una sucesión que converge a  $x_0$ , entonces cada subsucesión de  $(x_n)$  tiene una subsucesión adicional cuya imagen por  $R$  converge a  $R(x_0)$ . Por tanto,  $R(x_n) \rightarrow R(x_0)$ , tal y como queríamos demostrar. Es decir, la función  $R$  es continua y, en particular, es una retracción.  $\square$

**Corolario 1.8.** *Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compacto y convexo y  $f : K \rightarrow K$  una función continua. Entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Observamos que el conjunto  $K$ , al ser compacto, es acotado por lo que estará contenido en una bola  $\mathbb{B}_r^n \subseteq \mathbb{R}^n$  de radio  $r > 0$  suficientemente grande. Consideramos la retracción  $R|_{\mathbb{B}_r^n} : \mathbb{B}_r^n \rightarrow K$  dada por el Lema 1.7 y definimos la función  $f \circ R : \mathbb{B}_r^n \rightarrow K \rightarrow K \subseteq \mathbb{B}_r^n$  que es continua por ser composición de funciones continuas. Aplicando el Corolario 1.6, existe  $x \in \mathbb{B}_r^n$  tal que  $f(R(x)) = x \in K$ . Pero si  $x \in K$  se tiene que  $R(x) = x$ . Por tanto, tenemos que existe  $x \in K$  tal que  $f(x) = x$ .  $\square$

Las hipótesis del Corolario 1.8 de continuidad, compacidad y convexidad son necesarias para la existencia de un punto fijo. A continuación se muestran ejemplos de funciones que no cumplen dichas hipótesis y, debido a ello, no tienen puntos fijos.

**Ejemplos 1.9.** a) La función  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = -x$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 1$  está definida en un conjunto compacto y convexo sin puntos fijos. No cumple con la hipótesis de continuidad.

b) La función  $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < 1\} \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < 1\}$  dada por  $f(x, y) = (x, \frac{y + \sqrt{1-x^2}}{2})$  es continua definida en un conjunto acotado y convexo sin puntos fijos. No cumple con la hipótesis de compacidad; el conjunto no es cerrado.

c) La función  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  dada por  $f(x) = x + 1$  es continua definida en un conjunto cerrado y convexo sin puntos fijos. No cumple con la hipótesis de compacidad; el conjunto no es acotado.

d) La función  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  dada por  $f(x) = -x$  es continua definida en un compacto sin puntos fijos. No cumple con la hipótesis de convexidad.

**Nota 1.10.** El Corolario 1.8 puede extenderse al caso de subconjuntos compactos convexos de un espacio normado, resultado que se conoce como Teorema del Punto Fijo de Schauder y que puede encontrarse en [7].



## Capítulo 2

# Juegos No-Cooperativos

Durante todo el capítulo seguiremos esencialmente la exposición de [8]. En las siguientes secciones, introduciremos la Teoría de Juegos de  $n$  personas basada en la ausencia de coaliciones, en el sentido de que se asume que cada participante actúa de forma independiente, sin colaboración ni comunicación con ninguno de los demás. La noción de *punto de equilibrio de Nash* es el ingrediente básico de esta teoría. Posteriormente, gracias al Teorema del Punto Fijo de Brouwer, demostraremos que un juego finito no cooperativo siempre tiene al menos un punto de equilibrio de Nash.

### 2.1. Definiciones y terminología

En esta sección definiremos los conceptos básicos de esta teoría y estableceremos la terminología y notación estándar. La idea de no-cooperación estará implícita a partir de ahora.

**Definición 2.1.** Un *juego no cooperativo de  $n$  personas* es una terna  $(N, A, p)$  donde  $N$  es el conjunto de los  $n$  jugadores,  $N = \{1, \dots, n\}$ ,  $A$  es el producto  $A = A_1 \times \dots \times A_n$  donde  $A_i$  es el conjunto de todas las acciones posibles del jugador  $i \in N$ , conocidas como *estrategias puras*, y  $p$  es la función  $p : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  conocida como la *función recompensa* donde cada componente  $p_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  es la *recompensa* del jugador  $i$  ( $p = (p_1, \dots, p_n)$ ). Si además todo los conjuntos  $A_i$  son finitos, se dice que  $(N, A, p)$  es un *juego finito no cooperativo de  $n$  personas*.

En un juego finito no cooperativo de  $n$  personas, para cada  $i \in N$  denotaremos como  $m_i$  al número de estrategias puras del jugador  $i$  y escribiremos  $A_i = \{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{m_i}^i\}$ . Una nueva clase de estrategias de un jugador será la clase de aquellas donde la elección de la acción se realiza mediante un procedimiento aleatorio.

**Definición 2.2.** En un juego finito no cooperativo de  $n$  personas, una *estrategia mixta* del jugador  $i$  es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de sus estrategias puras  $A_i$ . El conjunto de las estrategias mixtas del jugador  $i$  se denota por  $S_i$  y el producto  $S_1 \times \dots \times S_n$  se denota por  $S$ .

En un juego finito no cooperativo de  $n$  personas, para cada  $i \in N$  podemos representar el conjunto  $S_i$  como el subconjunto de  $\mathbb{R}^{m_i}$ ,  $S_i = \{s_i = (s_1^i, \dots, s_{m_i}^i) \in \mathbb{R}^{m_i} : \sum_{j=1}^{m_i} s_j^i = 1, s_j^i \geq 0 \ \forall j = 1, \dots, m_i\}$ . Análogamente,  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_n}$ . Escribiremos  $s$  para denotar una  $n$ -tupla de estrategias mixtas, es decir,  $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ .

Por otro lado, sea  $s_i = (s_1^i, \dots, s_{m_i}^i) \in S_i$  una estrategia mixta del jugador  $i$ . Cada componente  $s_j^i$  con  $1 \leq j \leq m_i$  representa la probabilidad de que el jugador  $i$  elija la estrategia pura  $a_j^i$ . Además, una estrategia pura se interpreta como la estrategia en la que un jugador utiliza siempre la misma acción. Luego, una estrategia pura  $a_j^i \in A_i$  puede verse como estrategia mixta en forma de  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  donde el 1

ocupa el lugar  $j$ -ésimo. Denotaremos como  $\delta_j^i$  a la estrategia mixta en la que el jugador  $i$  jugará con total probabilidad la estrategia pura  $a_j^i$ .

**Definición 2.3.** Sea  $(N, A, p)$  un juego finito no cooperativo de  $n$  personas y  $S$  el producto de los conjuntos de estrategias mixtas de cada jugador. Definimos la función  $\tilde{p} : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde cada componente,  $\tilde{p}_i$  con  $i \in N$ , es el valor esperado de  $p_i$  y viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i : S_1 \times \dots \times S_n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s_1, \dots, s_n) &\mapsto \sum_{a \in A} p_i(a)x(a), \end{aligned}$$

donde  $x(a)$  es la probabilidad de que la  $n$ -tupla de estrategias puras  $a \in A$  se juegue, es decir, para cada  $a = (a_{j_1}^1, \dots, a_{j_n}^n) \in A$  con  $1 \leq j_i \leq m_i$  para cada  $i \in N$  se tiene que  $x(a) = s_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot s_{j_n}^n$ . La expresión quedaría

$$\tilde{p}_i(s_1, \dots, s_n) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} s_{j_1}^1 \dots s_{j_n}^n p_i(a_{j_1}^1, \dots, a_{j_n}^n). \quad (2.1)$$

Notemos que la extensión  $\tilde{p}_i$  es una función continua que extiende a  $p$  en el siguiente sentido. Sea  $a^* = (a_{j_1}^1, \dots, a_{j_n}^n) \in A$  con  $0 \leq j_i \leq m_i$  para cada  $i \in N$  una  $n$ -tupla de estrategias puras. Sea la  $n$ -tupla de estrategias mixtas  $\mathfrak{s}^* = (\delta_{j_1}^1, \dots, \delta_{j_n}^n) \in S$ , es decir, cada jugador juega con total probabilidad la estrategia pura correspondiente de  $a^*$ . Entonces,  $\tilde{p}_i(\mathfrak{s}^*) = \tilde{p}_i(\delta_{j_1}^1, \dots, \delta_{j_n}^n) = \sum_{a \in A} p_i(a)x(a) = p_i(a^*)$  ya que  $x(a) = 0$  para todo  $a \in A$  excepto para  $a^*$ ,  $x(a^*) = 1$ . Sabiendo esto y para una notación más simple, cuando hablemos de función recompensa siempre la denotaremos por  $p$ , incluyendo la extensión al espacio  $S$ , y lo mismo para sus coordenadas  $p_i$  (función recompensa del jugador  $i$ ).

Vamos a introducir ahora una nueva notación para la sustitución en una  $n$ -tupla de estrategias mixtas de una de ellas. Sea  $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S$  y  $t_i \in S_i$  una estrategia mixta para algún  $i \in N$ . Denotaremos  $(\mathfrak{s}; t_i)$  para representar  $(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ . Si  $r_j \in S_j$  es otra estrategia mixta para algún  $j \in N$  y queremos representar una nueva sustitución  $((\mathfrak{s}; t_i); r_j)$  lo indicaremos como  $(\mathfrak{s}; t_i; r_j)$ , y así sucesivamente.

**Definición 2.4.** Sea  $(N, A, p)$  un juego finito no cooperativo de  $n$  personas y  $S$  el producto de los conjuntos de estrategias mixtas de cada jugador. Una  $n$ -tupla  $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S$  es un *punto de equilibrio de Nash* o *equilibrio de Nash* si para cada  $i \in N$

$$p_i(\mathfrak{s}) \geq p_i(\mathfrak{s}; t_i), \quad \forall t_i \in S_i. \quad (2.2)$$

Un equilibrio de Nash puede interpretarse como una  $n$  tupla de estrategias mixtas en la que la estrategia mixta de cada jugador maximiza su recompensa en el caso de que las estrategias de los demás jugadores estuvieran fijas.

**Ejemplo 2.1.** Vamos a ver cómo sería el clásico juego de '*piedra, papel o tijera*' entre dos jugadores con la notación que hemos determinado. En este caso,  $N = \{1, 2\}$  y los conjuntos de acciones o estrategias puras de los dos jugadores son los mismos,  $A_i = \{\text{piedra, papel, tijera}\}$  para  $i = 1, 2$ . Las recompensas de los jugadores las denotamos por 1 cuando el jugador gana, 0 cuando empatan y -1 cuando pierde. Con esto, la función recompensa  $p : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  queda expuesta en la siguiente matriz de recompensas.

	piedra	papel	tijera
piedra	0,0	-1,1	1,-1
papel	1,-1	0,0	-1,1
tijera	-1,1	1,-1	0,0

donde la primera coordenada corresponde a la recompensa del jugador 1 y la segunda coordenada a la recompensa del jugador 2. Si  $S = S_1 \times S_2$  donde los  $S_i$  son los conjuntos de estrategias mixtas del

jugador  $i = 1, 2$ , puede demostrarse que si un jugador otorga más probabilidad a una estrategia pura que a otra, entonces el otro jugador puede sacar ventaja de ello y mejorar su recompensa. De este modo, el juego tiene un único equilibrio de Nash y es  $\mathfrak{s} = (s_1, s_2)$  con  $s_i = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  para  $i = 1, 2$ , es decir, ambos jugadores juegan con igual probabilidad las tres estrategias puras.

**Ejemplo 2.2.** Un problema fundamental en la teoría de juegos es el '*Dilema del Prisionero*'. El enunciado clásico es:

*La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un año por un cargo menor.*

Lo que se resume en:

	confiesa	niega
confiesa	-6,-6	0,-10
niega	-10,0	-1,-1

Los signos negativos vienen de que pasar años en la cárcel no es algo bueno para los prisioneros, sino todo lo contrario; de ahí que se quiera maximizar los años de cárcel en negativo. Confesar es una estrategia dominante para ambos jugadores, es decir, sea cual sea la elección del otro jugador, pueden reducir siempre su sentencia confesando. Por desgracia para los prisioneros, esto conduce a un resultado regular, en el que si ambos confiesan, ambos reciben una condena de 1 año. Aquí se encuentra el punto clave del dilema. El resultado de las interacciones individuales produce un resultado que no es óptimo; existe una situación tal que la utilidad de uno de los detenidos podría mejorar (incluso la de ambos) sin que esto implique un empeoramiento para el resto. En otras palabras, el resultado en el cual ambos detenidos no confiesan domina al resultado en el cual los dos eligen confesar. En este caso, la estrategia en la que ambos confiesan con total probabilidad,  $((1, 0), (1, 0))$ , es un equilibrio de Nash.

## 2.2. Existencia de Equilibrios de Nash

En esta sección demostraremos que todo juego finito no cooperativo de  $n$  personas tiene al menos un equilibrio de Nash gracias al Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Antes vamos a ver dos resultados que nos ayudarán más adelante con la demostración del teorema de existencia.

**Lema 2.3.** *Sea  $(N, A, p)$  un juego finito no cooperativo de  $n$  personas. Sea  $S$  el producto de los conjuntos de estrategias mixtas de cada jugador y  $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S$  con  $s_i = (s_1^i, \dots, s_{m_i}^i)$  para cada  $1 \leq i \leq n$ . Entonces,*

$$p_i(\mathfrak{s}) = \sum_{k=1}^{m_j} s_k^j p_i(\mathfrak{s}; \delta_k^j), \quad \forall i, j \in N.$$

*Demostración.* Por la ecuación 2.1 tenemos

$$p_i(\mathfrak{s}) = p_i(s_1, \dots, s_n) = \sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l_n=1}^{m_n} s_{l_1}^1 \dots s_{l_n}^n p_i(a_{l_1}^1, \dots, a_{l_n}^n).$$

Por otro lado, recordad que  $(\mathfrak{s}; \delta_k^j) = (s_1, \dots, s_{j-1}, \delta_k^j, s_{j+1}, \dots, s_n)$  donde  $\delta_k^j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  con el 1 en el lugar  $k$ . Luego la expresión de  $p_i(\mathfrak{s}; \delta_k^j)$  quedaría

$$p_i(\mathfrak{s}; \delta_k^j) = \sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l_{j-1}=1}^{m_{j-1}} \sum_{l_{j+1}=1}^{m_{j+1}} \dots \sum_{l_n=1}^{m_n} s_{l_1}^1 \dots s_{l_{j-1}}^{j-1} 1 s_{l_{j+1}}^{j+1} \dots s_{l_n}^n p_i(a_{l_1}^1, \dots, a_{l_{j-1}}^{j-1}, a_k^j, a_{l_{j+1}}^{j+1}, \dots, a_{l_n}^n).$$

Claramente, si multiplicamos por  $s_k^j$  y añadimos el sumatorio en  $1 \leq k \leq m_j$  se cumple

$$\sum_{k=1}^{m_j} s_k^j p_i(\mathfrak{s}; \delta_k^i) = \sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l_n=1}^{m_n} s_{l_1}^1 \dots s_{l_n}^n p_i(a_{l_1}^1, \dots, a_{l_n}^n) = p_i(\mathfrak{s}).$$

□

Veamos ahora una condición necesaria y suficiente para que un punto sea equilibrio de Nash.

**Lema 2.4.** *Sea  $(N, A, p)$  un juego finito no cooperativo de  $n$  personas. Sea  $S$  el producto de los conjuntos de estrategias mixtas de cada jugador y  $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S$ . Entonces  $\mathfrak{s}$  es equilibrio de Nash si y sólo si para cada  $i \in N$  se tiene*

$$p_i(\mathfrak{s}) \geq p_i(\mathfrak{s}; \delta_k^i), \quad \forall k = 1, \dots, m_i. \quad (2.3)$$

*Demostración.* Si  $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S$  es un equilibrio de Nash la igualdad se cumple trivialmente. Recíprocamente, supongamos que  $\mathfrak{s}$  cumple la igualdad 2.3 y veamos que es equilibrio de Nash. Sea  $i \in N$  fijo y  $t_i = (t_1^i, \dots, t_n^i) \in S_i$  una estrategia mixta arbitraria. Como  $\mathfrak{s}$  satisface 2.3 también cumplirá  $t_k^i p_i(\mathfrak{s}) \geq t_k^i p_i(\mathfrak{s}; \delta_k^i)$  para todo  $k = 1, \dots, m_i$  ya que  $t_k^i \geq 0$ . Ahora haciendo sumatorios en  $k$  a ambos lados, por el Lema 2.3 y gracias a que  $\sum_{k=1}^{m_i} t_k^i = 1$ , se tiene

$$p_i(\mathfrak{s}) = \sum_{k=1}^{m_i} t_k^i p_i(\mathfrak{s}) \geq \sum_{k=1}^{m_i} t_k^i p_i(\mathfrak{s}; \delta_k^i) = p_i(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n) = p_i(\mathfrak{s}; t_i), \quad \forall t_i \in S_i.$$

Es decir,  $\mathfrak{s}$  es un punto de equilibrio de Nash.

□

**Teorema 2.5** (Nash, 1951 [8]). *Todo juego finito no cooperativo de  $n$  personas tiene al menos un equilibrio de Nash.*

*Demostración.* Sea  $(N, A, p)$  un juego finito no cooperativo de  $n$  personas y  $S$  el producto de los conjuntos de estrategias mixtas de cada jugador. Sea  $\mathfrak{s} \in S$ , para cada jugador  $i \in N = \{1, \dots, n\}$  y para cada una de sus posibles estrategias puras  $a_j^i \in A_i = \{a_1^i, \dots, a_{m_i}^i\}$  con  $1 \leq j \leq m_i$  definimos la función  $\varphi_{a_j^i} : S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi_{a_j^i}(\mathfrak{s}) = \max\{0, p_i(\mathfrak{s}; \delta_j^i) - p_i(\mathfrak{s})\}. \quad (2.4)$$

Recordemos que  $(\mathfrak{s}; \delta_j^i)$  lo que hace es substituir la estrategia mixta  $s_j$  de la  $n$ -tupla  $\mathfrak{s}$  por la estrategia mixta  $\delta_j^i$  en la que el jugador  $i$  juega con total probabilidad la estrategia pura  $a_j$ . Esta función es continua en  $S$  ya que  $p_i$  es continua y, como la diferencia y máximo entre funciones continuas son continuas, la función  $\varphi_{a_j^i}$  es continua.

Consideramos ahora la siguiente modificación sobre cada componente  $s_j^i$  de  $s_i \in S_i$  dada por

$$(s_j^i)' = \frac{s_j^i + \varphi_{a_j^i}(\mathfrak{s})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{s})}, \quad (2.5)$$

llamando  $s_i' = ((s_1^i)', \dots, (s_{m_i}^i)')$ . Vamos a probar que  $s_i' \in S_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , es decir, tenemos que ver que  $\sum_{j=1}^{m_i} (s_j^i)' = 1$  y  $(s_j^i)' \geq 0$  para todo  $1 \leq j \leq m_i$ . Claramente  $\varphi_{a_j^i}(\mathfrak{s}) \geq 0$  por definición y  $s_j^i \geq 0$  por definición de  $S_i$ . Luego  $s_i'$  tiene como numerador un número no negativo y como denominador un número positivo, por tanto,  $(s_j^i)' \geq 0$  para todo  $1 \leq j \leq m_i$ . Para ver que  $\sum_{j=1}^{m_i} (s_j^i)' = 1$ , operamos

$$\sum_{j=1}^{m_i} (s_j^i)' = \frac{s_1^i + \varphi_{a_1^i}(\mathfrak{s})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{s})} + \dots + \frac{s_{m_i}^i + \varphi_{a_{m_i}^i}(\mathfrak{s})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{s})} = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} s_j^i + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{s})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{s})} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{s})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{s})} = 1.$$

Es decir,  $s'_i \in S_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Definimos ahora la función continua  $f : S \rightarrow S$  dada por  $f(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}'$  donde  $\mathfrak{s}' = (s'_1, \dots, s'_n)$ . Veamos ahora que  $S$  es convexo y compacto. Para ello, veamos que  $S_i$  lo es para todo  $i \in N$ ; ya que producto de compactos es compacto (Teorema de Tychonoff, disponible en [13, Theorem 1.4, p. 224]) y producto de convexos es convexo.

Tenemos  $S_i = \{(s_1^i, \dots, s_{m_i}^i) \in \mathbb{R}^{m_i} : s_j^i \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} s_j^i = 1\}$  para cada  $i \in N$ . Todos conjuntos  $S_i$  cumplen  $S_i \subseteq \{(x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : 0 \leq x_j \leq 1 \text{ para todo } 0 \leq j \leq m_i\}$  el cual es un conjunto acotado, por lo que todos los  $S_i$  está acotados.

Para ver que son cerrados definimos el conjunto cerrado  $B_i = \{(x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : x_1, \dots, x_{m_i} \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$  y la función continua  $F_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F_i(x_1, \dots, x_{m_i}) = x_1 + \dots + x_{m_i}$  para cada  $i \in N$ . Observamos que  $S_i = F_i^{-1}(\{1\})$ , es decir, es antiimagen de un cerrado por una función continua, por tanto,  $S_i$  es cerrado para todo  $i \in N$ .

Veamos ahora que todos los  $S_i$  son convexos. Sean  $s_i = (s_1^i, \dots, s_{m_i}^i)$  y  $t_i = (t_1^i, \dots, t_{m_i}^i)$  dos estrategias mixtas de  $S_i$  para algún  $i \in N$ . Tenemos que ver si la combinación convexa  $\alpha s_i + (1 - \alpha)t_i$  pertenece a  $S_i$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$ , es decir, si cada componente es no negativa y la suma de todas ellas es 1. Tenemos que

$$\alpha s_i + (1 - \alpha)t_i = (\alpha s_1^i + (1 - \alpha)t_1^i, \dots, \alpha s_{m_i}^i + (1 - \alpha)t_{m_i}^i).$$

Claramente  $\alpha s_j^i + (1 - \alpha)t_j^i \geq 0$  para todo  $0 \leq j \leq m_i$  ya que todos sus elementos son no negativos por definición. Además,

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\alpha s_j^i + (1 - \alpha)t_j^i) = \alpha \sum_{j=1}^{m_i} s_j^i + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^{m_i} t_j^i = \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

Luego,  $\alpha s_i + (1 - \alpha)t_i \in S_i$  para todo  $i \in N$ , es decir, todos los  $S_i$  con convexos. Ya hemos visto que  $S_i$  es convexo y compacto para todo  $i \in N$ . Por tanto, el conjunto  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  también es convexo y compacto.

Volvemos a nuestra función continua  $f : S \rightarrow S$ . Como acabamos de ver,  $S$  es compacto y convexo luego podemos aplicar el Corolario 1.8 y obtenemos que  $f$  tiene un punto fijo en  $S$ . El objetivo ahora es demostrar que este punto fijo es también punto de equilibrio de Nash.

Supongamos que  $\mathfrak{t} = (t_1, \dots, t_n) \in S$  es un punto fijo de  $f$ . Dado  $i \in N$ , sea  $0 \leq l \leq m_i$  tal que  $p_i(\mathfrak{t}; \delta_l^i) = \min\{p_i(\mathfrak{t}; \delta_k^i) : k = 1, \dots, m_i\}$ , es decir,  $\delta_l^i$  es la estrategia mixta en la que se juega con total probabilidad la estrategia pura  $a_l^i$  y que otorga la menor recompensa al jugador  $i$  de entre todas ellas.

Como, por definición, se tiene que  $p_i(\mathfrak{t}; \delta_l^i) \leq p_i(\mathfrak{t}; \delta_k^i)$  para todo  $k = 1, \dots, m_i$ , entonces también se cumplirá que  $p_i(\mathfrak{t}; \delta_l^i) \leq \sum_{j=1}^{m_i} s_j^i p_i(\mathfrak{t}; \delta_k^i)$  ya que  $\sum_{j=1}^{m_i} s_j^i = 1$ . Aplicando el Lema 2.3 obtenemos  $p_i(\mathfrak{t}; \delta_l^i) \leq p_i(\mathfrak{t})$  y, por tanto,  $\varphi_{a_l^i}(\mathfrak{t}) = \max\{0, p_i(\mathfrak{t}; \delta_l^i) - p_i(\mathfrak{t})\} = 0$ .

Con lo que acabamos de obtener y teniendo en cuenta que  $\mathfrak{t}$  es un punto fijo de  $f$  ( $f(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$ ) tenemos

$$(t_l^i)' = \frac{t_l^i + \varphi_{a_l^i}(\mathfrak{t})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{t})} = \frac{t_l^i}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{t})} = t_l^i, \tag{2.6}$$

luego  $\sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{a_k^i}(\mathfrak{t}) = 0$ , es decir,  $\varphi_{a_k^i}(\mathfrak{t}) = 0$  para todo  $0 \leq k \leq m_i$  con  $i \in N$ . Como la elección del jugador  $i$  fue arbitraria, esto último se cumple para todo jugador  $i \in N$ . Esto significa que partiendo de la estrategia mixta  $\mathfrak{t}$  ningún jugador puede mejorar su recompensa moviéndose a una estrategia pura. Es decir, para cada  $i \in N$  tenemos que  $p_i(\mathfrak{t}) \geq p_i(\mathfrak{t}; \delta_k^i)$  para todo  $k = 0, \dots, m_i$  y, aplicando el Lema 2.4, concluimos que  $\mathfrak{t}$  es un equilibrio de Nash.  $\square$

Los equilibrios de Nash tienen múltiples aplicaciones y muy variadas; de ahí la importancia de este teorema de existencia. El concepto se ha utilizado para analizar situaciones hostiles como guerras y carreras de armamentos (Ejemplo 2.2). También se ha utilizado para estudiar hasta qué punto las personas

con diferentes preferencias pueden cooperar y si se arriesgarán para lograr un resultado cooperativo. Otras aplicaciones incluyen el flujo de tráfico, cómo organizar subastas, el resultado de los esfuerzos realizados por múltiples partes en el proceso educativo, gestión de recursos naturales, análisis de estrategias de marketing, incluso tiros de penaltis en el fútbol. Por todo esto, en 1994, John Nash recibió el Premio Nobel Conmemorativo de Economía por su trabajo en la Teoría de Juegos.

## Capítulo 3

# El juego Hex

Es común aplicar las matemáticas a los juegos de estrategia (el cubo de Rubik, Sudoku, ajedrez...). Sin embargo, en este capítulo iremos en la otra dirección, utilizando hechos conocidos sobre juegos para obtener resultados matemáticos en otras áreas. Nuestro objetivo es mostrar que el Teorema del Punto Fijo de Brouwer en el cuadrado  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  es consecuencia de que el juego Hex no puede terminar en tablas. Nuestra referencia para todo el capítulo es [11]. Quiero agradecer a Antonín Procházka, matemático de la Universidad de Franche Comté, quien muy amablemente me ha dado permiso para usar los dibujos de su charla *'The Hex game and its mathematical side'*, disponible en [12].

### 3.1. Descripción del juego

El juego Hex fue inventado por el ingeniero y poeta danés Piet Hein en 1942 y redescubierto en Princeton por John Nash en 1948. La Figura 3.1 representa un tablero hexagonal del juego Hex de  $11 \times 11$ , que es el tamaño con el que se comercializó el juego en 1974.

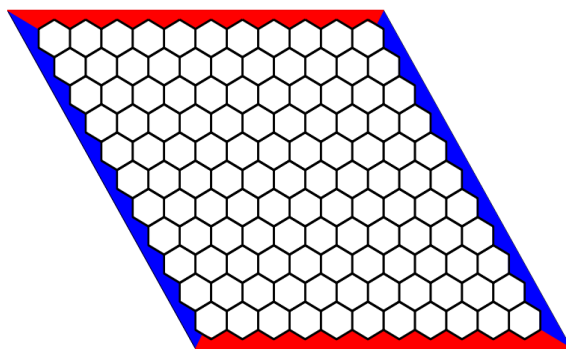


Figura 3.1: Tablero del juego Hex  $11 \times 11$ .

Vemos que el tablero está formado por un rombo cuyos lados opuestos son del mismo color (rojo y azul) y en cuyo interior se encuentran los  $11 \times 11$  hexágonos. Aunque en el ejemplo de la Figura 3.1 se juega en un tablero  $11 \times 11$ , el juego admite cualquier otro tamaño. De hecho, probaremos los resultados para tableros de tamaño arbitrario  $k \times k$ . Pese a que también se puedan jugar cuatro, es un juego ideado para dos jugadores los cuales están representados por un color; uno el color rojo y el otro el color azul.

Las reglas del Hex son muy sencillas. El juego funciona por turnos. En cada turno el jugador únicamente puede hacer un movimiento. Un movimiento consiste en que el jugador coloree cualquier casilla del tablero de su color.

**Definición 3.1.** Diremos que un conjunto de hexágonos  $S$  es *conexo* si para cualesquiera  $h$  y  $h'$  de  $S$  existe un *camino*  $P = (h = h_1, h_2, \dots, h_n = h')$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $h_i$  y  $h_{i+1}$  son adyacentes para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ .

El ganador del juego Hex es el primero que consiga un conjunto conexo de hexágonos uniendo los dos lados de su mismo color. Como curiosidad, en teoría, el jugador que empieza siempre puede ganar. Entonces, ¿qué gracia tiene jugar a un juego en el que el jugador que comienza siempre puede ganar? Para tableros de  $10 \times 10$  en adelante nadie conoce la estrategia ganadora. En 2002, Jing Yang, Simon Liao y Mirek Pawlak encontraron una estrategia ganadora explícita para el primer jugador en tableros Hex de tamaño  $7 \times 7$ , que puede consultarse en [15]. Más adelante en 2013, Jakub Pawlewicz y Ryan B. Hayward resolvieron todas las aperturas para tableros de  $9 \times 9$ , y un solo movimiento de apertura (el más central) en el tablero de  $10 \times 10$ , disponible en [16].

### 3.2. Teorema de Hex

El objetivo de esta sección es demostrar que no existe la posibilidad de terminar en tablas el juego Hex. Pero, ¿qué tendría que pasar para que el juego acabase en empate? Para ello, los jugadores deberían completar todo el tablero y, como resultado final, no tendría que existir ningún conjunto conexo de hexágonos uniendo dos lados de un mismo color. Vamos a demostrar que esto no es posible.

El hecho es intuitivamente obvio. Imaginemos, por ejemplo, que las regiones rojas son porciones de tierra separadas por el río azul y que en un lado del río se encuentra una persona cuyo objetivo es construir un camino de piedras que le permita cruzarlo. Está claro que solamente habrá conseguido su objetivo si coloca las piedras de manera que le permita caminar sobre ellas de una orilla a la otra (supongamos que no están permitidos los 'saltos'). No obstante, demostrar este hecho intuitivamente obvio de manera rigurosa es algo más matemáticamente profundo y complejo.

**Teorema 3.1** (Teorema de Hex, Gale 1979). *Si todos los hexágonos del tablero  $k \times k$  del juego Hex están coloreados por algún color, ya sea el color rojo o el azul, entonces existirá un conjunto conexo de hexágonos que une o bien los lados rojos, o bien los lados azules.*

*Demostración.* La idea de la demostración es construir un algoritmo que, dado un tablero de Hex de  $k \times k$  coloreado completamente, encuentre un conjunto conexo de hexágonos, es decir, un ganador. Supongamos que el tablero está completo, como en el ejemplo como se muestra en la Figura 3.2, y definimos los vértices  $u, u', v, v'$  que separan las regiones rojas y azules, tal y como se muestra en la figura.

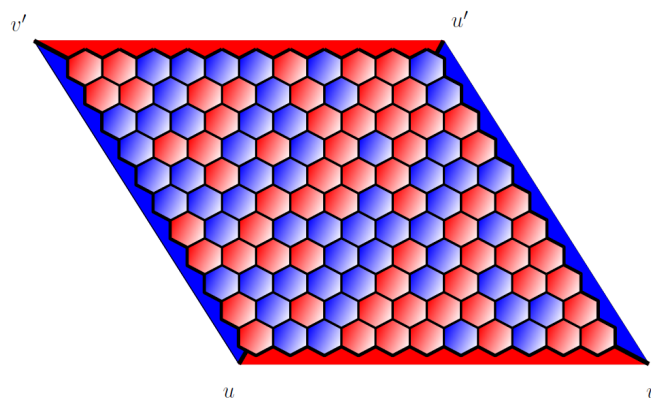


Figura 3.2: Tablero del juego Hex  $11 \times 11$  completo.



Ahora vamos a construir un grafo  $\Gamma$  partiendo de uno de los vértices  $u, u', v, v'$  y que recorra las *aristas* del tablero. Lo que en Teoría de Grafos se conoce por *nodos* en nuestro caso serán los vértices  $u, u', v, v'$  más los vértices de los propios hexágonos y las *aristas* del grafo serán los lados de los hexágonos que conforman el tablero más las cuatro aristas que unen el bloque de hexágonos con los cuatro vértices  $u, u', v, v'$  y que separan los lados de colores. Además, a partir de ahora diremos *casilla azul* para referirnos a un hexágono coloreado de azul o uno de los dos lados azules. Análogamente, definimos el término *casilla roja*.

La regla con la que vamos a construir el grafo es que siempre avance por aristas que a un lado tengan una casilla azul y al otro una roja. Es claro que la primera arista que parte de cualquier vértice de salida cumple dicha condición. Sin pérdida de generalidad, vamos a construir el grafo partiendo del vértice  $u$ . Notamos que a la izquierda tenemos una casilla azul y a la derecha una roja. A medida que vamos eligiendo aristas nos damos cuenta que esta distribución de casillas se mantiene constante en nuestro grafo. Para que las casillas se inviertan sería obligatorio romper la única condición con la que se construye el propio grafo y atravesar dos casillas del mismo color. Esto lo vamos a ver con la siguiente figura

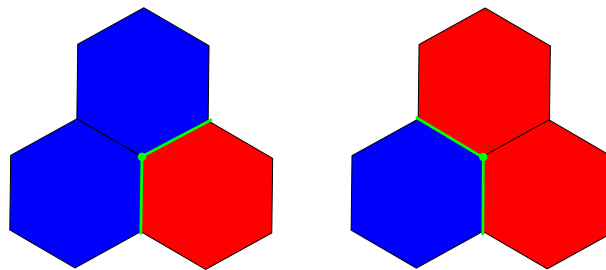


Figura 3.3: Llegada a un vértice.

La Figura 3.3 representa las únicas dos posibilidades a la llegada de un nuevo vértice a través del algoritmo. Está claro que para tener una casilla azul a la derecha del grafo o una roja a la izquierda haría falta romper la regla y atravesar dos casillas del mismo color. Con esto también vemos que el algoritmo describe un grafo único ya que siempre hay una única posibilidad de avanzar. Además, el algoritmo no terminará hasta la llegada a uno de los vértices  $u', v, v'$  ya que esta posibilidad de avanzar, además de ser única, existe siempre que el vértice de llegada tenga tres casillas adyacentes, tal y como se ve en la Figura 3.3. Pero notamos que el grafo no puede acabar en el vértice  $u'$  ya que estaría invirtiendo los colores de las casillas, lo que acabamos de ver que no es posible. Luego, el grafo que empieza en el vértice  $u$  solo puede terminar en los vértices  $v, v'$  (los demás casos son análogos). Por último, es claro también que el grafo generado es finito ya que el número de aristas de un tablero de Hex  $k \times k$  es finito. En la Figura 3.4 podemos ver cómo quedaría el grafo para nuestro ejemplo.

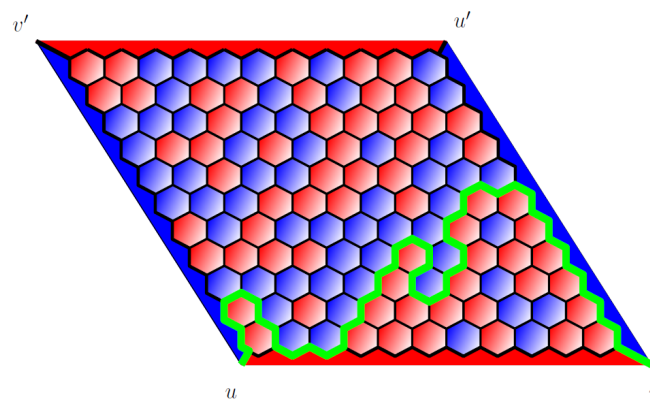


Figura 3.4: Tablero del juego Hex  $11 \times 11$  con grafo  $\Gamma$ .

Por tanto, el grafo generado siguiendo el algoritmo descrito es un grafo *simple* (una arista cualquiera es la única que une dos vértices específicos) que une el vértice  $u$  o bien con el vértice  $v$  o bien con  $v'$ . En el caso de que el grafo terminara en  $v$ , tal y como se ve en el ejemplo de la Figura 3.4, existiría un conjunto de hexágonos azules conexos uniendo los dos lados azules, es decir, el jugador azul sería el ganador. Análogamente, si el grafo acaba en  $v'$  el jugador rojo sería el ganador.

□

**Nota 3.2.** El Teorema de Zermelo es un resultado sobre juegos finitos de dos personas de información perfecta en los que los jugadores participan alternativamente y en los que el azar no afecta en el proceso de toma de decisiones. El resultado dice que si el juego no puede terminar en tablas, entonces uno de los dos jugadores debe tener una estrategia ganadora (es decir, forzar una victoria). Un enunciado alternativo es que para un juego con las mismas condiciones pero con la posibilidad de empate, se tiene que el primer jugador puede forzar una victoria, o el segundo jugador puede forzar una victoria, o ambos jugadores pueden forzar un empate. Por ejemplo, cuando se aplica al ajedrez, el Teorema de Zermelo afirma que o las blancas pueden forzar una victoria, o las negras pueden forzar una victoria, o ambos bandos pueden forzar al menos tablas. El Teorema de Hex afirma que no puede terminar en tablas el juego Hex, por tanto, aplicando el Teorema de Zermelo y la simetría del juego, existe una estrategia ganadora para el primer jugador en el juego Hex. Para más información acerca de este tema se puede consultar [14].

### 3.3. Demostración del Teorema de Brouwer

La versión del Teorema de Brouwer que queremos obtener en esta sección es la siguiente:

**Teorema 3.3** (Teorema de Brouwer). *Sea  $I = [0, 1]$  y  $f : I^2 \rightarrow I^2$  una función continua, entonces existe  $x \in I$  tal que  $f(x) = x$ .*

El hecho de considerar el cuadrado  $I^2$  se debe a su parecido con el tablero de juego Hex, y no es especialmente relevante; podríamos deducir el Teorema 3.3 de manera parecida a como lo hicimos con el Teorema 1.1. Durante toda la sección trabajaremos con la norma  $\|\cdot\|_\infty$  que denotaremos por  $\|x\| := \|x\|_\infty = \max_i x_i$  para todo  $x = (x_1, x_2) \in I^2$ .

*Teorema de Hex  $\implies$  Teorema de Brouwer.* Sea  $f : I^2 \rightarrow I^2$  una función continua,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ . Bastará probar que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un punto  $x$  en  $I^2$  tal que  $\|f(x) - x\| < \varepsilon$ . En efecto, supongamos que esto es cierto. Podemos construir una sucesión  $(x_n)_{n \geq 1} \subset I^2$  tal que para todo  $n \geq 1$  se tiene que  $\|f(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n}$ . Como  $I^2$  es un conjunto compacto la sucesión tiene una subsucesión convergente a un punto de  $I^2$ , digamos que  $\lim_k x_{n_k} = x_0$ . Por continuidad de la función  $f$  se tiene que  $\|f(x_0) - x_0\| = 0$ , es decir,  $f(x_0) = x_0$  y ya tendríamos un punto fijo de la función  $f$ . Luego, probemos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un punto  $x$  en  $I^2$  tal que  $\|f(x) - x\| < \varepsilon$ .

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|f(x) - x\| \geq \varepsilon$  para todo  $x$  en  $I^2$ . Es decir, todo punto de  $I^2$  evaluado por la función  $f$  se desplaza al menos  $\varepsilon$ . Como estamos trabajando con la norma infinito esto significa que para cada punto  $x$  de  $I^2$  el punto  $f(x)$  queda fuera del cuadrado de centro  $x$  y de lado  $2\varepsilon$ , como se muestra en el ejemplo de la Figura 3.5.

Ahora vamos a definir cuatro subconjuntos de  $I^2$  agrupando sus puntos dependiendo de la posición de su imagen por  $f$  dentro de  $I^2$ :

$$\begin{aligned} H^+ &= \{x \in I^2 : f_1(x) - x_1 > \varepsilon\}, \\ H^- &= \{x \in I^2 : x_1 - f_1(x) > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

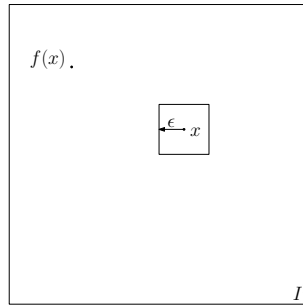


Figura 3.5: Evaluación de  $f(x)$ .

Es decir, los puntos de  $H^+$  son aquellos cuya imagen se desplaza horizontalmente a la derecha y los puntos de  $H^-$  los que lo hacen a la izquierda. Denotamos  $H = H^- \cup H^+$  y definimos los dos últimos conjuntos:

$$V^+ = \{x \in I^2 \setminus H : f_2(x) - x_2 > \varepsilon\},$$

$$V^- = \{x \in I^2 \setminus H : x_2 - f_2(x) > \varepsilon\}.$$

Los puntos de  $V^+$  son aquellos que no están en  $H$  y cuya imagen por  $f$  se desplaza verticalmente hacia arriba y los de  $V^-$  los que lo hacen hacia abajo. Para tener una idea más visual, para cada  $x$  en  $I^2$  vamos a dividir el conjunto por zonas de colores (ver Figura 3.6).

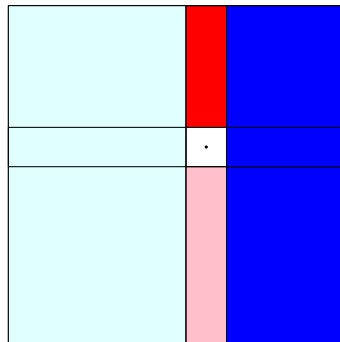


Figura 3.6: Conjunto  $I^2$  dividido por zonas.

De tal manera que los conjuntos  $H^+$ ,  $H^-$ ,  $V^+$  y  $V^-$  corresponden a los puntos cuya imagen por  $f$  pertenece a las zonas azul oscuro, azul claro, rojo oscuro y rojo claro respectivamente.

Vamos a suponer que la función  $f$  actúa en un tablero de Hex de lado 1 y tamaño  $n \times n$ , donde  $n$  depende de  $\varepsilon$  y es suficientemente grande tal que cada hexágono quede dentro del cuadrado de centro el propio centro del hexágono y de lado  $2\varepsilon$ , tal y como se muestra en la Figura 3.7.

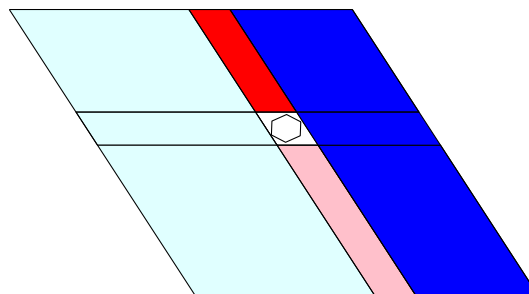


Figura 3.7: Tablero de Hex dividido por zonas.

Por otro lado, como  $f$  es una función continua en un compacto, por el Teorema de Heine (ver [1, Theorem 4.47, p.91]), sabemos que  $f$  es uniformemente continua, es decir, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  (que podemos suponer menor que  $\varepsilon$ ,  $\delta < \varepsilon$ ) tal que si  $\|x - x'\| < \delta$  entonces  $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$ . De nuevo, el  $n$  elegido se puede tomar suficientemente grande de manera que los centros de los hexágonos adyacentes disten entre sí menos que  $\delta$ .

Para demostrar el Teorema de Brouwer, tomamos el tablero que hemos definido y vamos a colorear cada hexágono dependiendo del conjunto al que pertenezca su centro. Esto es, si el centro del hexágono pertenece a  $H^+$ ,  $H^-$ ,  $V^+$  o  $V^-$  el hexágono se coloreará de color azul oscuro, azul claro, rojo oscuro o rojo claro respectivamente. El objetivo es demostrar que existe algún hexágono cuyo centro no pertenece a ninguno de los cuatro conjuntos. De esta manera, existiría un punto  $x$  en  $I^2$  (el centro del hexágono) tal que  $\|f(x) - x\| < \varepsilon$  y, como hemos visto al principio de la demostración, esto equivale a probar el Teorema de Brouwer.

Nos fijamos que los hexágonos del borde derecho del tablero no se podrán pintar de azul oscuro ya que  $f$  estaría mandando el centro de los hexágonos fuera del tablero y la imagen de  $f$  está contenida en él. Análogamente, los hexágonos del borde izquierdo del tablero no podrán ser pintados de azul claro. Además, y aquí está la clave del argumento, un hexágono azul oscuro no podrá ser adyacente a uno azul claro debido a la continuidad uniforme. En efecto, sean  $x \in H^+$ ,  $y \in H^-$  dos centros de hexágonos adyacentes. Esto significa que  $\|x - y\| < \delta$  (por elección de  $n$ ) y, por continuidad uniforme, se tiene que  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ . Por definición de los conjuntos  $H^+$ ,  $H^-$  se tiene que

$$f_1(x) - x_1 > \varepsilon, \quad y_1 - f_1(y) > \varepsilon.$$

Sumando ambas inecuaciones se obtiene

$$f_1(x) - f_1(y) + y_1 - x_1 > 2\varepsilon.$$

Como  $f_1(x) - f_1(y) \leq \|f(x) - f(y)\|$  y  $y_1 - x_1 \leq \|x - y\| < \varepsilon$ , tenemos que

$$\|f(x) - f(y)\| + \varepsilon > 2\varepsilon,$$

es decir,

$$\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon.$$

lo que contradice la continuidad uniforme. Por tanto, los hexágonos con centros  $x, y$  no pueden ser adyacentes.

Argumentando de la misma manera, se tiene que los hexágonos del borde superior del tablero no pueden ser de color rojo oscuro y los del borde inferior no pueden ser rojo claro. Además, no es posible que un hexágono rojo oscuro sea adyacente a uno rojo claro. En la Figura 3.8 se muestra un ejemplo para un tablero  $11 \times 11$ .

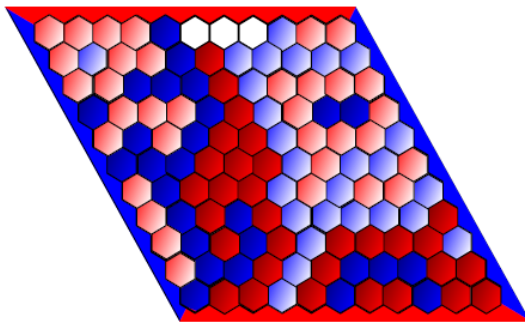


Figura 3.8: Tablero Hex  $11 \times 11$ .

Por tanto, no existe un conjunto conexo de hexágonos azules (claros y oscuros) o rojos (claros y oscuros) conectando los lados azules o rojos respectivamente. Es decir, no existe un ganador del juego Hex y, por el Teorema de Hex, existe algún hexágono cuyo centro no pertenece a ningún conjunto  $H^+$ ,  $H^-$ ,  $V^+$ ,  $V^-$ .

□

**Observación 3.4.** Puede demostrarse que el Teorema de Hex y el Teorema de Brouwer son equivalentes. Este hecho tiene cierto interés tanto práctico como teórico, ya que resulta que el juego bidimensional de dos jugadores de Hex tiene una generalización natural a un juego de  $n$  jugadores y  $n$  dimensiones, y la prueba de que este juego siempre debe tener un ganador conduce a un algoritmo simple para encontrar puntos fijos aproximados de funciones continuas. Puede consultarse una prueba detallada en [11]. Por último, os animo a que probéis el juego Hex disponible online en <http://www.lutanho.net/play/hex.html>. Para jugar a la versión clásica simplemente hay que acceder a la página y desactivar la opción 'swap rule'. ¡Suerte!



# Bibliografía

- [1] T. M. APOSTOL, *Mathematical analysis*, Addison-Wesley Publishing Co., 1974.
- [2] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 3rd ed., 1976.
- [3] J. MILNOR, *Analytic Proofs of the “Hairy Ball Theorem” and the Brouwer Fixed Point Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 7, 1978, pp. 521-524.
- [4] C. A. ROGERS, *A Less Strange Version of Milnor’s Proof of Brouwer’s Fixed-Point Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 7, 1980, pp. 525-527.
- [5] J. BERNUÉS, *El Teorema de Stone Weierstrass*, La Gaceta de la RSME, Vol. 13, No. 4 , 2010, pp. 705-711.
- [6] J.H. SAPHIRO, *A Fixed-Point Farrago*, Springer 1st ed., 2016.
- [7] J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2, 1930, pp. 171–180.
- [8] J. NASH, *Non-Cooperative Games*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 54, No. 2, 1951, pp. 286-295.
- [9] WIKIPEDIA, *Equilibrio de Nash* ([https://es.wikipedia.org/wiki/Equilibrio\\_de\\_Nash](https://es.wikipedia.org/wiki/Equilibrio_de_Nash)).
- [10] WIKIPEDIA, *Dilema del Prisionero* ([https://es.wikipedia.org/wiki/Dilema\\_del\\_prisionero](https://es.wikipedia.org/wiki/Dilema_del_prisionero)).
- [11] D. GALE, *The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 10, 1979, pp. 818-827.
- [12] A. PROCHÁZKA, *Talk on the Hex game at lycée Jules Haag*, Université de Franche Comté ([http://lmb.univ-fcomte.fr/IMG/pdf/A-\\_Prochazka\\_19-3-13.pdf](http://lmb.univ-fcomte.fr/IMG/pdf/A-_Prochazka_19-3-13.pdf)).
- [13] J. DUGUNDJI, *Topology*, Allyn and Bacon series in Advanced Mathematics, University of Chicago, 1966.
- [14] U. SCHWALBE AND P. WALKER, *Zermelo and the Early History of Game Theory*, Games Economy Behaviour, 2001, pp. 123-137.
- [15] J. YANG, S. LIAO AND M. PAWLAK, *On a decomposition method for finding winning strategy in Hex game*, Wayback Machine, 2002.
- [16] J. PAWLEWICZ AND R. HAYWARD, *Scalable Parallel DFPN Search*, Springer International Publishing Switzerland, 2014, pp. 138-150.