

Trabajo Fin de Grado

**Agujeros negros en teorías de
gravitación con altas derivadas**

Grado en Física

Autor

Miguel Pardina García

Director

Manuel Asorey Carballeira

Resumen

El objetivo principal de este trabajo consiste en analizar la existencia o no de singularidades en las soluciones de diversas teorías de gravitación con más derivadas que la teoría de Einstein. Hemos derivado las ecuaciones de campo que gobiernan la dinámica en esas teorías y hemos analizado las posibles singularidades que presentan sus soluciones de tipo agujero negro. En particular, hemos considerado teorías de cuarto orden en derivadas de la métrica y hemos analizado las soluciones de tipo agujero negro que presenta la teoría linealizada. También hemos mostrado como en el límite de bajas energías se recupera la teoría de gravitación de Einstein como una teoría efectiva. Un resultado sorprendente es que hemos encontrado soluciones de agujeros negros con dos horizontes.

Índice

1. Introducción	1
2. Teoría de la relatividad general de Einstein	2
3. Teorías de gravitación $f(R)$	7
4. Modelo de Starobinsky	10
5. Teoría con altas derivadas	11
6. Agujeros negros en altas derivadas	17
7. Conclusiones	23
Referencias	24

1. Introducción

Uno de los mayores logros en la carrera científica de Albert Einstein fue, sin lugar a dudas, el descubrimiento de la teoría de la relatividad general en 1915 [19]. Esta teoría generalizó la bien establecida teoría de gravitación de Newton, dotándola de una categoría de teoría de campos clásica y haciéndola compatible con los principios de la teoría de la relatividad especial que el mismo Einstein había publicado en 1905.

Con la perspectiva actual de la física teórica moderna, es bien conocido que una teoría de campos clásica se puede describir mediante el formalismo del principio variacional o principio de acción estacionaria. Este principio fundamental se basa en definir una cantidad llamada acción de la cual se obtienen las ecuaciones de campo de una teoría cuando dicha acción toma valores extremos o estacionarios.

La teoría de la relatividad general, al ser una teoría de campos clásica, no es una excepción a este tipo de formalismo. En particular, se considera que la métrica (o tensor métrico) es el campo dinámico que caracteriza al campo gravitatorio y, por tanto, es la variable con respecto a la cual la acción debe ser estacionaria.

En la formulación tradicional, la acción de la teoría de la relatividad general recibe el nombre de acción de Einstein-Hilbert. Dicha acción es la más simple posible que proporciona las ecuaciones de campo de Einstein y se trata de una acción que contiene derivadas segundas de la métrica. Sin embargo, no hay *a priori* una razón fundamental por la que no se puedan construir acciones más complejas que contengan derivadas de orden superior en la métrica.

Las teorías que modifican a la acción de Einstein-Hilbert con derivadas de orden superior son las denominadas teorías de gravitación con altas derivadas. Clásicamente, este tipo de teorías sufren del teorema de inestabilidad de Ostrogradsky. Un resultado de dicho teorema es que las teorías con altas derivadas dan lugar a inestabilidades [25], en el sentido de que su hamiltoniano no está acotado inferiormente, no siendo entonces posibles los estados de mínima energía o estados fundamentales que se observan en los sistemas físicos.

En una descripción cuántica, a diferencia de la relatividad general, las teorías de altas derivadas gozan del atractivo de ser renormalizables [1], esto es, permiten realizar predicciones físicas obteniendo resultados finitos en cálculos de amplitudes de dispersión, por lo que su estudio puede revelar comportamientos claves a la hora de cuantizar la interacción gravitatoria. En este régimen, el teorema de inestabilidad de Ostrogradsky se traduce también en la existencia de partículas o estados *ghost*, cuya norma es negativa, dando lugar a problemas en la unitariedad de la teoría [6].

La perspectiva cuántica en el contexto de la gravitación es importante, puesto que existen sistemas físicos de escalas de energía y distancia muy grandes, como los agujeros negros, que poseen una singularidad donde toda la densidad de energía

se concentra a distancias muy pequeñas, coexistiendo así los regímenes gravitatorio clásico y cuántico.

Otra de las ventajas que poseen las teorías de altas derivadas tiene que ver precisamente con este tipo de singularidades que aparecen en la relatividad general, ya sea en los agujeros negros o en el ámbito cosmológico (el *Big Bang*, instante inicial del universo). Ocurre que las teorías de altas derivadas mejoran con éxito el comportamiento en el ultravioleta (a cortas distancias) de estos sistemas, siendo capaces incluso de hacer desaparecer por completo las singularidades que en la relatividad general se presentan [7][8].

En cuanto a la estructura del presente trabajo, primero presentaremos a la relatividad general como una teoría de campos y posteriormente trataremos con modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert, mostrando además cómo se recupera la teoría de Einstein en los límites apropiados. Por último, en el marco de la teoría con derivadas de orden cuatro, buscaremos soluciones aproximadas de agujero negro y discutiremos el comportamiento de su singularidad y horizontes.

Trabajaremos con un sistema de unidades que verifique $\hbar = c = 1$, de manera que $E = M = L^{-1} = T^{-1}$ donde E , M , L y T son, respectivamente, dimensiones de energía, masa, longitud y tiempo. Emplearemos también el convenio de sumación de Einstein, asumiendo siempre una suma sobre un índice cuando el mismo aparezca repetido arriba (contravariante) y abajo (covariante). Por último, las letras griegas (indicando índices espaciotemporales) μ, ν, α, \dots tomarán valores de 0 a 3 y las letras latinas (indicando índices espaciales) i, j, k, \dots tomarán valores de 1 a 3.

2. Teoría de la relatividad general de Einstein

La teoría de la relatividad general de Einstein surge fundamentalmente de dos pilares conceptuales: el principio de covariancia general y el principio de equivalencia. El principio de covariancia general establece que las leyes de la física deben tomar la misma forma matemática en todos los sistemas de coordenadas, lo cual conduce de manera natural a una formulación tensorial de la teoría. El principio de equivalencia afirma que cualquier sistema inmerso en un campo gravitatorio es localmente indistinguible de un sistema de referencia acelerado.

Estas dos ideas clave le bastaron a Einstein para deducir las ecuaciones que gobiernan la teoría de la relatividad general, denominadas ecuaciones de campo de Einstein, que vienen dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa = 8\pi G. \quad (1)$$

En el lado derecho de (1), κ es una constante proporcional a la constante de gravitación universal de Newton G y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento. En cuanto

al lado izquierdo, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico que describe la interacción gravitatoria y permite definir distancias. Este campo tensorial es no degenerado, de signatura $(-, +, +, +)$ y corresponde a una variedad pseudoriemanniana (o lorentziana) que modeliza el espaciotiempo. Esta métrica tiene asociada una conexión afín, o conexión de Levi-Civita o símbolos de Christoffel, simétrica y que viene dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} (\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) . \quad (2)$$

A partir de la conexión se puede construir el tensor de curvatura de Riemann como

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} , \quad (3)$$

que contrayendo su primer y tercer índice da lugar al tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, cuya traza proporciona la curvatura escalar del espaciotiempo R :

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} , \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} . \quad (4)$$

Con estas definiciones en mano, la interpretación física de las ecuaciones de campo de Einstein (1) es directa, pues la parte derecha representa la contribución de toda la energía y materia en una región del espaciotiempo y la parte izquierda representa la curvatura de dicha región. De esta forma, en palabras de John Wheeler, “*el espaciotiempo le dice a la materia cómo moverse y la materia le dice al espaciotiempo cómo curvarse*” [29].

Para trasladar las ecuaciones de Einstein (1) al formalismo de la mecánica lagrangiana de campos, debemos considerar la forma que tiene que tomar la acción de la teoría. En la teoría de campos relativista la acción se suele definir como la integral a las cuatro coordenadas del espaciotiempo de una densidad lagrangiana escalar. Debido a la naturaleza intrínseca de la relatividad general, hay una incompatibilidad entre esta definición previa y la covariancia que debe presentar la acción. Esto ocurre porque la medida d^4x es invariante bajo transformaciones de Lorentz al ser todas ellas de determinante unidad, pero no es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. Para solucionar esto basta con añadir el jacobiano de la transformación general de coordenadas, que no es más que $\sqrt{-g}$ con g el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, de manera que el hipervolumen o medida de integración en este contexto será $\sqrt{-g} d^4x$. En cuanto a la densidad lagrangiana, el escalar más simple que depende de la métrica y sus derivadas hasta segundo orden es la curvatura escalar de Ricci R , así que la acción más simple para la teoría relativista de la gravitación debe ser

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R . \quad (5)$$

La integral de acción (5) es la conocida acción de Einstein-Hilbert, la cual caracteriza a la relatividad general en el vacío (sin fuentes del campo) y sin constante cosmológica.

Mostramos ahora como podemos obtener las ecuaciones de campo de Einstein (1) a

partir de la acción de Einstein-Hilbert (5). Si tratamos a la métrica $g_{\mu\nu}$ como un campo dinámico sobre el que variamos infinitesimalmente y aplicamos el cálculo variacional a la acción de Einstein-Hilbert obtenemos

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta R. \quad (6)$$

Para calcular la variación del determinante de la métrica en la primera contribución de (6) podemos emplear la formula de Jacobi. La fórmula de Jacobi afirma que para una matriz invertible A se verifica la identidad $\delta(\det(A)) = \det(A)\text{Tr}(A^{-1} \cdot \delta A)$. La aplicación directa de esta fórmula a la métrica nos da $\delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})$, y por lo tanto se cumplirá

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (7)$$

teniendo así la primera parte de (6) expresada en términos de la variación del campo dinámico sobre el que variamos infinitesimalmente, la métrica.

En cuanto a la segunda contribución de (6) podemos aplicar de nuevo la regla de Leibniz para la variación y la definición del escalar de curvatura, obteniendo

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (8)$$

Introduciendo la identidad de Palatini [21] en el segundo sumando de (8) podemos escribir

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - g^{\alpha\lambda}\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\mu) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda J^\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

donde hemos usado que la derivada covariante de la métrica es 0[†] y hemos reetiquetado los índices mudos para agrupar las dos derivadas covariantes en una sola. En la igualdad final de (9) hemos definido $J^\lambda = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - g^{\alpha\lambda}\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\mu$, que es un tensor puesto que se trata de una resta de tensores (la conexión afín no es un tensor pero su variación sí).

Con todo esto, llevando los resultados (7) y (9) a la variación (6) llegamos a

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right) R + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda J^\lambda) \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda J^\lambda. \end{aligned} \quad (10)$$

[†]Esta propiedad se denomina compatibilidad de la métrica. De hecho, la definición de los símbolos de Christoffel (2) está escogida justamente para que la derivada covariante de la métrica se anule [10].

Lo interesante de haber reescrito el último término de (10) como una cuatridivergencia o derivada total es que podemos aplicar un importante resultado de la teoría del principio variacional [28]. Si a la densidad lagrangiana le añadimos una cuatridivergencia, para derivadas de la métrica cuya variación en la frontera $\partial\mathcal{M}$ del recinto de integración \mathcal{M} permanezca constante, entonces obtenemos las mismas ecuaciones del movimiento. Esto significa que la densidad lagrangiana con cuatridivergencia adicional proporciona las mismas ecuaciones de campo que la densidad lagrangiana sin dicha cuatridivergencia, por lo que la situación física es equivalente. El motivo profundo de esta afirmación reside en el teorema de la divergencia de Gauss, en virtud del cual podemos convertir la integral en el recinto en una integral sobre la frontera. De todas formas, la última integral nos informa sobre la frontera de la variedad (nuestro espaciotiempo) y no es trivial de manejar, puesto que tiene relación con el famoso término de Gibbons-Hawking-York (GHY), que se escapa del objetivo de este trabajo pese a que tenga propiedades muy interesantes [9].

Admitiendo entonces que una cuatridivergencia no modifica las ecuaciones del campo, aplicamos el principio de acción estacionaria $\delta\mathcal{S} = 0$ para variaciones infinitesimales de la métrica en (10) y obtenemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (11)$$

que no son más que las ecuaciones de campo de Einstein (1) en el vacío (puesto que el tensor energía-momento es nulo).

Si disponemos de fuentes del campo gravitatorio, es decir, cualquier tipo de masa y energía, se debe añadir a la acción (5) una densidad lagrangiana escalar \mathcal{L}_m que de cuenta de cualquier contribución de materia. Podemos calcular la variación de dicha acción de materia añadida \mathcal{S}_m sigue

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_m &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) = \int d^4x [\mathcal{L}_m \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \delta\mathcal{L}_m] \\ &= \int d^4x \left[\mathcal{L}_m \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) + \sqrt{-g} \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right] \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \right) \left[g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

donde hemos usado la regla de Leibniz, la expresión (7) y la regla de la cadena. A partir de esta acción de materia[†] se define el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (13)$$

de manera que construyendo la acción total como suma de la acción de Einstein-Hilbert

[†]El motivo por el que se ha sacado un 1/2 factor común en (12) es convencional. La razón por la que aparece también un signo menos es que, con la signatura elegida en este trabajo para la métrica, nos aseguramos de que la densidad de energía sea positiva.

y la acción de materia, es inmediato ver que se recuperan las ecuaciones de campo de Einstein (1) al aplicar el principio de acción estacionaria.

La última sencilla modificación que se puede realizar a la acción total consiste en añadir una constante -2Λ integrada en el hipervolumen, siendo Λ la famosa constante cosmológica. Al ser un término constante, se puede definir una curvatura escalar efectiva dada por $R' = R - 2\Lambda$, de modo que las ecuaciones del movimiento serán las mismas que en el caso anterior sustituyendo R por R' :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (14)$$

La constante cosmológica Λ es el recurso que se inventó Einstein para intentar reproducir que el universo fuera estático y sin principio ni fin. Se le ocurrió introducir dicha constante para que cuando se tratase un modelo de universo isótropo y homogéneo, se pudiera elegir un valor de Λ de tal forma que el universo permaneciera estático. Años más tarde se vio que ese equilibrio del modelo de Einstein era inestable y producía una contracción o una expansión del universo, cosa que hizo retroceder a Einstein y hacerle pensar que introducir la constante cosmológica fue el error más grande de su vida [19]. Sin embargo, a finales de los años 90, se observó que el universo estaba en una fase de expansión acelerada, dando un sentido total a la constante cosmológica [10].

Por último, cabe destacar que la relatividad general de Einstein ha logrado pasar con éxito todas las pruebas experimentales a las que ha sido sometida hasta la fecha. La teoría predice el efecto de lente gravitacional, el efecto Doppler gravitatorio, las ondas gravitacionales o la precesión del perihelio de Mercurio, entre otros [15]. No obstante, a pesar de sus múltiples éxitos, la relatividad general también predice singularidades o divergencias en la propia estructura del espaciotiempo. Inicialmente se pensó que estas singularidades eran anomalías o fenómenos que ocurrían en escenarios muy concretos. Sin embargo, gracias a los teoremas de singularidades de Penrose-Hawking, se encontró que la relatividad general no puede escapar de singularidades bajo unas condiciones concretas de energía [9].

Otro problema teórico que presenta la teoría es la no renormalizabilidad de la relatividad general cuando esta se cuantiza [5], dando lugar a una teoría cuántica de campos que no permite hacer predicciones finitas.

Este tipo de patologías han motivado la investigación de teorías que modifiquen la acción de Einstein-Hilbert de manera consistente, convirtiendo así a la relatividad general en una teoría efectiva que funciona correctamente en su escala de energías pero que precisa de correcciones en las escalas donde aparecen los problemas comentados.

3. Teorías de gravitación $f(R)$

La modificación más simple que podemos realizar a la acción de Einstein-Hilbert (5) consiste en mantener la dependencia en el escalar de Ricci R , pero reemplazando la dependencia lineal por una dependencia arbitraria $f(R)$. La acción de las llamadas teorías de gravitación $f(R)$ viene dada por

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (15)$$

donde $f(R)$ es una función suave del escalar de Ricci R y $\kappa = 8\pi G$. En virtud del principio de acción estacionaria, las ecuaciones de campo de la teoría $f(R)$ vendrán dadas por las configuraciones de la métrica para las cuales la variación de la acción (15) con respecto a variaciones infinitesimales de la métrica es nula, $\delta\mathcal{S} = 0$.

Realizamos pues la variación de la acción (15) sabiendo que la integral y la variación conmutan y aplicando la regla de Leibniz

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta [\sqrt{-g} f(R)] = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [\delta(\sqrt{-g}) f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R)]. \quad (16)$$

La variación de la raíz de menos el determinante de la métrica es un resultado conocido (7), mientras que la variación de la función $f(R)$ se puede escribir, por la regla de la cadena, como

$$\delta f(R) = \frac{df(R)}{dR} \delta R = f'(R) \delta R. \quad (17)$$

Introduciendo estos resultados parciales en (16) tenemos

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \delta g^{\mu\nu} + f'(R) \delta R \right], \quad (18)$$

de manera que lo único que nos falta es escribir δR en términos de $\delta g^{\mu\nu}$. Para ello, partimos de la expresión (9) en su forma inicial y nos damos cuenta de que necesitamos calcular la variación de los símbolos de Christoffel. La variación de la conexión afín es un tensor (pues es la resta de conexiones y se cancela la parte que no transforma como tal), y viene dada por [10]

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu} + \nabla_{\nu} \delta g_{\mu\rho} - \nabla_{\rho} \delta g_{\mu\nu}), \quad (19)$$

luego la variación de la contracción de los símbolos de Christoffel será

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \nabla_{\lambda} \delta g_{\rho\mu} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \nabla_{\mu} \delta g_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \nabla_{\rho} \delta g_{\lambda\mu} \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \nabla_{\lambda} \delta g_{\rho\mu} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \nabla_{\mu} \delta g_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \nabla_{\lambda} \delta g_{\rho\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \nabla_{\mu} \delta g_{\lambda\rho}. \end{aligned} \quad (20)$$

Incorporando (19) y (20) en la primera igualdad de (9), teniendo en cuenta la

compatibilidad de la métrica, obtenemos

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\nabla_\lambda(\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\lambda\rho}. \quad (21)$$

Recordamos ahora las dos siguientes propiedades de la métrica [9]

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad \delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (22)$$

de manera que desglosando cada contribución de (21) podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} &= -\frac{1}{2}\delta_\beta^\mu\delta_\alpha^\lambda\nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\mu\delta g^{\alpha\mu}, \\ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\nabla_\nu\delta g_{\mu\rho} &= -\frac{1}{2}\delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\lambda\nabla_\lambda\nabla_\nu\delta g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\nabla_\beta\nabla_\alpha\delta g^{\alpha\beta}, \\ -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\delta_\alpha^\nu g^{\lambda\rho}g_{\nu\beta}\nabla_\lambda\nabla_\rho\delta g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}g_{\alpha\beta}\nabla_\lambda\nabla_\rho\delta g^{\alpha\beta}, \\ -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\lambda\rho} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\lambda\alpha}\delta_\beta^\lambda\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (23)$$

re Etiquetando índices mudos vemos como la primera y segunda contribución son idénticas, así como también lo son la tercera y cuarta contribución. Introduciendo estas simplificaciones en (21), la variación del escalar de Ricci se expresa finalmente como

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\alpha\beta}. \quad (24)$$

De esta forma, basta con sustituir (24) en la variación de la acción (18) para obtener

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \\ &\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R) + R_{\mu\nu}f'(R)\delta g^{\mu\nu} - f'(R)\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\alpha\beta} + f'(R)g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Disponemos ahora de la variación de la acción expresada en términos de variaciones de la métrica, pero necesitamos sacar factor común estas últimas para poder aplicar el principio variacional. Para ello, realizamos dos integraciones por partes en el tercer término de (25)

$$\begin{aligned} - \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta g^{\alpha\beta} &= -f'(R) \nabla_\beta \delta g^{\alpha\beta} \Big|_{\partial\mathcal{M}} + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\beta \delta g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha f'(R) \\ &= -f'(R) \nabla_\beta \delta g^{\alpha\beta} \Big|_{\partial\mathcal{M}} + \nabla_\alpha f'(R) \delta g^{\alpha\beta} \Big|_{\partial\mathcal{M}} - \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha f'(R) \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha f'(R), \end{aligned} \quad (26)$$

donde hemos tenido en cuenta la discusión anterior sobre la naturaleza de los términos de frontera y su contribución nula. Cabe recalcar que, aunque no hay un cambio de signo global por el hecho de haber realizado dos integraciones por partes iteradas, el

orden de las derivadas covariantes se ve alterado. Si hacemos el mismo procedimiento con el cuarto término de (25) obtenemos un resultado similar

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\alpha\beta} = \int d^4x \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu f'(R). \quad (27)$$

Llevando (26) y (27) a (25), reetiquetando índices mudos y factorizando las variaciones de la métrica podemos escribir

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \left[-\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} f(R) + R_{\alpha\beta} f'(R) - \nabla_\beta \nabla_\alpha f'(R) + g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu f'(R) \right]. \quad (28)$$

En virtud del principio de mínima acción $\delta\mathcal{S} = 0$ para variaciones infinitesimales de la métrica, así que el integrando de (28) debe anularse

$$-\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} f(R) + R_{\alpha\beta} f'(R) - \nabla_\beta \nabla_\alpha f'(R) + g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu f'(R). \quad (29)$$

Introduciendo el operador d'Alembertiano $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = \nabla^\mu \nabla_\mu$, podemos escribir las ecuaciones de campo en el vacío de una teoría $f(R)$ general de forma compacta como

$$R_{\mu\nu} f'(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - \nabla_\nu \nabla_\mu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = 0. \quad (30)$$

Para extender estas ecuaciones en presencia de fuentes del campo, basta con añadir el tensor energía-momento en el lado derecho

$$R_{\mu\nu} f'(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - \nabla_\nu \nabla_\mu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (31)$$

naturalmente, para $f(R) = R$ recuperamos la acción de Einstein-Hilbert (5) y obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein ordinarias (1).

En términos generales, la consecuencia directa de modificar la acción de Einstein-Hilbert con una función arbitraria $f(R)$ es poder explicar la expansión acelerada del universo, su estructura y formación sin tener que recurrir a formas desconocidas de energía como la energía oscura o la materia oscura.

Uno de los mejores y más exitosos ejemplos de la utilidad de las teorías $f(R)$ es el modelo de inflación cósmica Starobinsky [24], del cual hablaremos en la siguiente sección sin adentrarnos en sus interesantes implicaciones cosmológicas. Starobinsky modificó la acción de Einstein-Hilbert con un término R^2 que actuaba como una constante cosmológica efectiva, dando lugar a una expansión de tipo de Sitter en el universo temprano. Este modelo da correcciones en las predicciones de la radiación de fondo de microondas que son compatibles con los datos experimentales del 2018 del satélite Planck [3].

4. Modelo de Starobinsky

Nos proponemos estudiar el límite newtoniano en la teoría de Starobinsky, la cual contiene un término con derivadas de orden 4 en la métrica. Tomamos la integral de acción

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R + aR^2) , \quad (32)$$

donde a es una constante. La acción es adimensional como la métrica, y $[\kappa] = L^2 = M^{-2}$, así que el paréntesis en (32) debe tener dimensiones de L^{-2} . Al cumplirse $[R^2] = L^{-4}$, necesariamente a debe tener dimensiones $[a] = L^2 = M^{-2}$.

Está claro que podemos considerar el modelo de Starobinsky como una teoría $f(R)$ concreta por la estructura de la acción (32). Las ecuaciones de campo para esta teoría se obtienen entonces introduciendo la forma funcional $f(R) = R + aR^2$ en (31), obteniendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 2a \left[R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) - \nabla_\nu \nabla_\mu R + g_{\mu\nu} \square R \right] = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (33)$$

Para evaluar el límite newtoniano de las ecuaciones de campo debemos linealizar (33) a primer orden en perturbaciones, considerando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ la métrica de Minkowski y $h_{\mu\nu}$ la perturbación. En este régimen, el tensor de Ricci se escribe [10]

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\lambda + \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\mu \partial_\nu h_\lambda^\lambda - \square h_{\mu\nu} \right) , \quad (34)$$

con $h_\mu^\mu = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$. Su contracción, el escalar de Ricci, a primer orden de perturbaciones queda

$$R = \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h^\alpha_\alpha . \quad (35)$$

Observamos que tanto $R_{\mu\nu}$ como R son del orden de la perturbación h , luego su producto será de orden h^2 y lo despreciaremos. Introduciendo la expansión a primer orden de la métrica en (33), cambiando ∇_μ por ∂_μ (el espacio es plano en la linealización) y \square por ∇^2 (consideramos régimen estático), podemos escribir

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R + 2a \left(-\partial_\mu \partial_\nu R + \eta_{\mu\nu} \nabla^2 R \right) = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (36)$$

Tomando la traza de (36) contrayendo ambos lados con $\eta^{\mu\nu}$ da lugar a

$$-R + 6a \nabla^2 R = \kappa \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} . \quad (37)$$

Supongamos que disponemos de una partícula puntual de masa M localizada en el origen $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. El tensor energía-momento correspondiente a esta masa puntual es

$$T_{\mu\nu} = M \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \delta^3(\mathbf{r}) \implies T_{00} = M \delta^3(\mathbf{r}) , \quad T_{ij} = 0 , \quad (38)$$

de modo que (37) queda

$$6a\nabla^2 R - R = -\kappa M\delta^3(\mathbf{r}), \quad (39)$$

cuya solución viene dada por

$$R = \frac{2GM}{6ar} e^{-\sqrt{\frac{1}{6a}}r}. \quad (40)$$

Introduciendo (40) en (36) y particularizando a la componente 00 obtenemos

$$R_{00} = -\frac{1}{6} \frac{2GM}{6ar} e^{-\sqrt{\frac{1}{6a}}r} + \frac{2}{3} \kappa M\delta^3(\mathbf{r}). \quad (41)$$

Recuperando que $R_{\mu\nu}$ a orden lineal en $h_{\mu\nu}$ viene dado por (34) y considerando la componente 00 de dicha ecuación, teniendo en cuenta que la perturbación es estática, se llega a

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}, \quad (42)$$

por lo que obtenemos la ecuación diferencial

$$\nabla^2 h_{00} = \frac{GM}{9ar} e^{-\sqrt{\frac{1}{6a}}r} - \frac{4}{3} \kappa M\delta^3(\mathbf{r}), \quad (43)$$

la cual se puede resolver por el método de transformada de Fourier, dando lugar a

$$h_{00} = \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{1}{3} e^{-\sqrt{\frac{1}{6a}}r} \right). \quad (44)$$

Teniendo en cuenta que la componente temporal de la perturbación y el potencial gravitatorio de Newton ϕ están relacionados mediante $h_{00} = -2\phi$, obtenemos que el potencial gravitatorio newtoniano en la teoría $f(R) = R + aR^2$ se recupera como

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{1}{3} e^{-\sqrt{\frac{1}{6a}}r} \right). \quad (45)$$

Este potencial es el potencial ordinario de Newton más un término del tipo Yukawa, decreciente con la distancia exponencialmente. Así, este potencial modifica al potencial de Newton a muy cortas distancias, siendo a largas distancias despreciable el término exponencial. El hecho de que el potencial efectivo sea divergente a cortas distancias es un reflejo de que la correspondiente teoría cuántica presenta divergencias ultravioletas. El problema que presenta entonces la teoría de Starobinsky es que su realización cuántica no es renormalizable. En el ámbito experimental, las pruebas que se han realizado arrojan cotas al valor de a y estiman $|a| < 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2$ [26].

5. Teoría con altas derivadas

La siguiente modificación que podemos realizar a la acción de Einstein-Hilbert (5) es la adición de términos que sean contracciones tensoriales con derivadas de orden 4

en la métrica. En particular, emplearemos la acción

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R + aR^2 - bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) , \quad (46)$$

donde a y b son constantes de dimensiones $[a] = [b] = L^2 = M^{-2}$. No hemos incluido el invariante de Kretschmann $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ debido al teorema de Chern-Gauss-Bonnet en 4D [9], que afirma

$$T = \sqrt{-g} (R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2) , \quad (47)$$

siendo T un invariante topológico, constante, que no afecta a las ecuaciones del movimiento [25]. Como el invariante de Kretschmann es claramente el invariante más complejo de los tres que aparecen en el teorema, decidimos eliminar este escribiéndolo en función de los otros dos para no tener que tratar con él. Así, la acción (46) es la acción más general que contiene altas derivadas hasta cuarto orden en la métrica. En virtud del principio variacional, la variación de la acción con respecto a variaciones infinitesimales de la métrica debe ser anularse, $\delta\mathcal{S} = 0$, para derivar las ecuaciones de campo.

Una de las grandes ventajas de la acción (46) es que podemos separar la acción en dos partes, una que solamente contiene al escalar de Ricci y otra que contiene la contracción parte tensorial, de modo que

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{escalar}} + \mathcal{S}_{\text{tensorial}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R + aR^2) - \frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} . \quad (48)$$

Esta separación es muy beneficiosa porque la primera parte de (48) es simplemente una teoría $f(R)$ escalar, en particular, es el modelo de Starobinsky ya estudiado y sus ecuaciones de campo son conocidas, por lo que la variación de ese término ya está resuelta. Nos centramos entonces en la parte tensorial, de forma que la variación que nos incumbe es

$$\delta\mathcal{S}_{\text{tensorial}} = -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) . \quad (49)$$

Fijándonos únicamente en el integrando de (49) y aplicando la regla de Leibniz tenemos

$$\delta(\sqrt{-g} R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = \delta(\sqrt{-g}) R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \sqrt{-g} (R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu}) , \quad (50)$$

donde en la primera contribución solamente interviene la variación de menos el determinante de la métrica, que es el resultado (7). Por otra parte, la segunda contribución puede expresarse como

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu} &= R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}R_{\rho\sigma}) \\ &= R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}R_{\rho\sigma} + R_{\mu\nu}g^{\mu\rho}\delta g^{\nu\sigma}R_{\rho\sigma} + R^{\rho\sigma}\delta R_{\rho\sigma} \\ &= 2(R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + g^{\rho\sigma}R_{\sigma\nu}R_{\mu\rho}\delta g^{\mu\nu}) , \end{aligned} \quad (51)$$

donde hemos reetiquetado índices mudos para agrupar los sumandos.

La variación de la acción tensorial con estos resultados parciales queda

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{\text{tensorial}} = & -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + 2g^{\rho\sigma} R_{\sigma\beta} R_{\alpha\rho} \right) \\ & - \frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (52)$$

siendo nuestro objetivo ahora desarrollar la última integral, al estar el resto de la forma que deseamos. De la ecuación (21) podemos identificar que todo salvo el primer término debe corresponderse con $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ por la regla de Leibniz, de modo que la variación del tensor de Ricci queda

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_\lambda \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} + \nabla_\lambda \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\lambda \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\lambda\rho}) . \quad (53)$$

Tomando la última integral de (52) e introduciendo (53), podemos desglosar cada término y subir índices para escribir

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = & -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} \\ & - \frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} \\ & + \frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} \\ & + \frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\lambda\rho} , \end{aligned} \quad (54)$$

que reetiquetando con los índices mudos el resultado queda

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = & -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\rho} \nabla^\nu \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} \\ & + \frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} \\ & + \frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (55)$$

De la misma forma que en el desarrollo de la variación de la acción para la teoría $f(R)$, usamos ahora dos integraciones por partes iteradas para mover las derivadas covariantes, teniendo en cuenta que los términos de frontera se anulan y que el orden de las derivadas covariantes se invierte. Además empleamos (22) para escribir (55) en

términos de la variación de la métrica contravariante

$$\begin{aligned}
-\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= +\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} 2\nabla_\rho \nabla_\beta R_\alpha^\rho \\
&\quad -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \square R_{\alpha\beta} \\
&\quad -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \nabla_\lambda \nabla_\rho R^{\lambda\rho} . \quad (56)
\end{aligned}$$

Llevando el resultado (56) a la variación de la acción tensorial (52) obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_{\text{tensorial}} &= -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \\
&\quad \left[-\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + 2g^{\rho\sigma} R_{\sigma\beta} R_{\alpha\rho} - 2\nabla_\rho \nabla_\beta R_\alpha^\rho + \square R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla_\lambda \nabla_\rho R^{\lambda\rho} \right], \quad (57)
\end{aligned}$$

cuyo último término se puede simplificar por la identidad contraída de Bianchi [9]

$$g_{\alpha\beta} \nabla_\lambda \nabla_\rho R^{\lambda\rho} = g_{\alpha\beta} \nabla_\lambda \nabla_\rho (g^{\lambda\mu} R_\mu^\rho) = g_{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \frac{1}{2} \nabla_\mu R = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \square R, \quad (58)$$

mientras que el tercer término se puede expresar a partir de la conmutación de derivadas covariantes y la definición con el tensor de Riemann

$$[\nabla_\rho, \nabla_\beta] R_\alpha^\rho = \nabla_\rho \nabla_\beta R_\alpha^\rho - \nabla_\beta \nabla_\rho R_\alpha^\rho = R_{\sigma\rho\beta}^\rho R_\alpha^\sigma - R_{\alpha\rho\beta}^\sigma R_\sigma^\rho. \quad (59)$$

Explotando la antisimetría del tensor de Riemann en sus últimos dos índices y usando la identidad contraída de Bianchi escribimos

$$\nabla_\rho \nabla_\beta R_\alpha^\rho = \nabla_\beta \nabla_\rho R_\alpha^\rho + R_{\sigma\rho\beta}^\rho R_\alpha^\sigma + g^{\sigma\lambda} R_{\lambda\alpha\beta\rho} R_\sigma^\rho = \frac{1}{2} \nabla_\beta \nabla_\alpha R + R_{\sigma\beta} R_\alpha^\sigma + R_{\lambda\alpha\beta\rho} R^{\lambda\rho}. \quad (60)$$

Incorporando los resultados (58) y (60) a la variación de la acción tensorial (57) finalmente tenemos

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_{\text{tensorial}} &= -\frac{b}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \\
&\quad \left[-\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \nabla_\beta \nabla_\alpha R - 2R_{\lambda\alpha\beta\rho} R^{\lambda\rho} + \square R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \square R \right]. \quad (61)
\end{aligned}$$

Por otro lado, la acción escalar en (48) contiene un integrando que es idéntico al del modelo de Starobinsky ya visto

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + a \left(2R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 - 2\nabla_\mu \nabla_\nu R + 2g_{\mu\nu} \square R \right). \quad (62)$$

De esta forma, aplicar el principio de mínima acción a (46) consiste en sumar las dos contribuciones escalar (62) y tensorial (61) e igualar a cero, obteniendo así que las

ecuaciones de campo en el vacío para la teoría de altas son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + a \left(2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 - 2\nabla_\mu \nabla_\nu R + 2g_{\mu\nu}\square R \right) - b \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \nabla_\nu \nabla_\mu R + \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square R - 2R_{\alpha\mu\nu\beta}R^{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (63)$$

Para extender estas ecuaciones en presencia de fuentes del campo, basta con añadir el tensor energía-momento en el lado derecho de la forma usual

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + a \left(2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 - 2\nabla_\mu \nabla_\nu R + 2g_{\mu\nu}\square R \right) - b \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \nabla_\nu \nabla_\mu R + \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square R - 2R_{\alpha\mu\nu\beta}R^{\alpha\beta} \right) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (64)$$

Nos disponemos ahora a evaluar el límite newtoniano de la teoría de altas derivadas. Se trata de linealizar la ecuación (46) a primer orden en perturbaciones, empleando el mismo procedimiento que en el modelo de Starobinsky. Teniendo en cuenta la expansión $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, que a primer orden en perturbaciones el tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci R son de orden h (por lo que despreciamos sus productos) y las consideraciones de espacio plano y estático, escribimos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R + 2a(-\partial_\mu\partial_\nu R + \eta_{\mu\nu}\nabla^2 R) - b\left(-\partial_\nu\partial_\mu R + \nabla^2 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\nabla^2 R\right) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (65)$$

Tomando la traza de (65) y considerando una partícula puntual de masa M localizada en el origen $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, cuyo su tensor energía-momento es (38), la ecuación anterior queda

$$(6a - 2b)\nabla^2 R - R = -\kappa M\delta^3(\mathbf{r}), \quad (66)$$

que es exactamente la misma que (39) salvo la constante, de manera que

$$R = \frac{2GM}{r}m_0^2 e^{-m_0 r}, \quad m_0 = \sqrt{\frac{1}{6a - 2b}}. \quad (67)$$

Introduciendo (67) en la componente 00 de la ecuación linealizada (65) obtenemos la ecuación diferencial

$$\nabla^2 h_{00} - b\nabla^4 h_{00} - \frac{2GM}{r}m_0^4(2a - b)e^{-m_0 r} = -(8a - 3b)\kappa m_0^2 M\delta^3(\mathbf{r}), \quad (68)$$

la cual resolviendo mediante el método de transformadas de Fourier y recordando la relación $h_{00} = -2\phi$, concluimos que el potencial gravitatorio newtoniano en la teoría de altas derivadas hasta cuarto orden en la métrica se recupera como

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{1}{3}e^{-m_0 r} - \frac{4}{3}e^{-m_2 r} \right), \quad (69)$$

donde hemos realizado el cambio de variable $m_2 = \sqrt{\frac{1}{b}}$.

De forma análoga a lo visto en el modelo de Starobinsky, este potencial es el potencial ordinario de Newton más dos términos del tipo Yukawa decrecientes con la distancia exponencialmente. La gran diferencia es que en el presente caso el potencial Newtoniano no diverge a cortas distancias, lo cual es un indicio de que la teoría cuántica es renormalizable.

Naturalmente, cuando las constantes de acoplamiento de los términos R^2 y $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ se anulan, las exponenciales en (69) se ven altamente suprimidas y la densidad lagrangiana es R , recuperando exactamente el potencial de Newton de la relatividad general. Si solamente anulamos la constante de acoplo del término tensorial, $b \rightarrow 0$, obtenemos el potencial ya estudiado en el caso del modelo de Starobinsky.

El potencial (69) modifica al potencial de Newton a muy cortas distancias, pues a largas distancias es despreciable el término exponencial. Es interesante notar que el término Yukawa que proviene de la parte tensorial tiene signo opuesto al potencial gravitatorio ordinario y al proveniente de R^2 . Esto implica que el término Yukawa asociado a la parte tensorial es repulsivo, lo que significa que su energía asociada es negativa.

A la vista de las definiciones de m_0 y m_2 , debe verificarse $b > 0$ y $a > b/3$ para las constantes de acoplamiento, garantizando así que las exponenciales sean reales. En cualquier otro caso, se obtendría un potencial con un débil comportamiento oscilatorio que no permitiría una planitud asintótica en el infinito [18]. En una interpretación cuántica, m_0 corresponde a la masa de una partícula de spin 0 y m_2 corresponde a la masa de un *ghost* de spin 2, ambas acompañando al gravitón de spin 2 y masa 0 ya existente en relatividad general [25].

Para ver si este potencial newtoniano modificado por altas derivadas es patológico en el único punto aparentemente singular, $r = 0$, hacemos un desarrollo de Taylor a primer orden

$$\phi(r \rightarrow 0) = \frac{GM}{3} (m_0 - 4m_2) , \quad (70)$$

por lo que la singularidad ultravioleta (a cortas distancias) se suaviza totalmente debido al efecto de las altas derivadas, tendiendo a un valor constante en el origen.

A partir del potencial podemos derivar la fuerza gravitatoria como $\mathbf{F} = -m\nabla\phi$, que teniendo en cuenta el carácter puramente radial de la interacción se escribe

$$\mathbf{F}(r) = -m \frac{d\phi}{dr} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 + \frac{1}{3} (1 + m_0 r) e^{-m_0 r} - \frac{4}{3} (1 + m_2 r) e^{-m_2 r} \right] \hat{\mathbf{r}} . \quad (71)$$

Particularizando a distancias muy pequeñas entre las dos partículas, el módulo de la

fuerza queda

$$F(r \rightarrow 0) = \frac{GMm}{6} (4m_2^2 - m_0^2) ,$$

dando lugar a una fuerza constante y finita del mismo modo que el potencial.

Esta finitud tanto del potencial newtoniano como de la fuerza asociada a cortas distancias está relacionado con la renormazibilidad ultravioleta de la teoría. Por lo tanto cabe preguntarse, dado el comportamiento ultravioleta tan regular de la nueva teoría, ¿Es posible que los agujeros negros de la misma no sean singulares?

6. Agujeros negros en altas derivadas

En el modelo de altas derivadas que tratamos, las ecuaciones de campo asociadas en el vacío vienen dadas por (63). Para obtener una solución de tipo agujero negro a las ecuaciones, tomaremos como ansatz una métrica de tipo Schwarzschild, con simetría esférica y estática

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) . \quad (72)$$

Debemos calcular las componentes del tensor de Riemann, Ricci y el escalar de curvatura asociados a la métrica (72) para sustituirlos en (63). Denotando con primas a las derivadas con respecto de r , a partir de los símbolos de Christoffel extraemos las componentes del tensor de Riemann y, contrayendo, obtenemos las componentes del tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rA} , & R_{11} &= -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rA} , \\ R_{22} &= 1 - \frac{1}{A} - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) , & R_{33} &= \sin^2(\theta) \left[1 - \frac{1}{A} - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \right] , \end{aligned} \quad (73)$$

cuyo escalar de curvatura asociado es

$$R = -\frac{2}{Ar^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{B''}{AB} + \frac{B'}{2AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{2}{Ar} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) . \quad (74)$$

Para obtener una solución analítica, linealizamos la métrica (72) para resolver (63) a orden lineal. Como la métrica tiene que coincidir asintóticamente con la métrica de Minkowski, expresamos las funciones $A(r)$ y $B(r)$ como

$$\begin{aligned} A(r) &= 1 + W(r) + O(W^2) , & B(r) &= 1 + V(r) + O(V^2) , \\ A^{-1}(r) &= 1 - W(r) + O(W^2) , & B^{-1}(r) &= 1 - V(r) + O(V^2) , \end{aligned} \quad (75)$$

donde despreciamos términos cuadráticos en $W(r)$ y $V(r)$ (o cruzados). En este régimen lineal, las componentes del tensor de Ricci se escriben

$$R_{00} = \frac{V''}{2} + \frac{V'}{r} , \quad R_{11} = -\frac{V''}{2} + \frac{W'}{r} ,$$

$$R_{22} = W + \frac{r}{2}(W' - V') , \quad R_{33} = \sin^2(\theta) \left[W + \frac{r}{2}(W' - V') \right] , \quad (76)$$

y el escalar de Ricci será

$$R = \frac{2}{r^2}W + \frac{2}{r}(W' - V') - V'' . \quad (77)$$

Sustituyendo en (63) las expresiones lineales superiores, se pueden obtener [18] los siguientes coeficientes de la métrica linealizada

$$B(r) = 1 + C + \frac{C_1}{r} + C_{0-} \frac{e^{-m_0 r}}{r} + C_{0+} \frac{e^{m_0 r}}{r} + C_{2-} \frac{e^{-m_2 r}}{r} + C_{2+} \frac{e^{m_2 r}}{r} , \quad (78)$$

$$\begin{aligned} A(r) = 1 - \frac{C_1}{r} + C_{0-} \frac{e^{-m_0 r}}{r} (1 + m_0 r) + C_{0+} \frac{e^{m_0 r}}{r} (1 - m_0 r) \\ - C_{2-} \frac{e^{-m_2 r}}{2r} (1 + m_2 r) - C_{2+} \frac{e^{m_2 r}}{2r} (1 - m_2 r) , \end{aligned} \quad (79)$$

donde $m_0 = \sqrt{\frac{1}{6a - 2b}}$, $m_2 = \sqrt{\frac{1}{b}}$ y C , C_1 , $C_{0\pm}$ y $C_{2\pm}$ son constantes a determinar por condiciones de contorno.

En primer lugar, exigiremos que la métrica goce de planitud asintótica en el infinito, es decir, que cuando $r \rightarrow \infty$ la métrica tome la forma de la métrica de Minkowski. Para ello, es claro ver que se debe cumplir $C = C_{0+} = C_{2+} = 0$.

Por otro lado, debemos recuperar la métrica de Schwarzschild en el caso de relatividad general pura, esto es, cuando $a = b = 0$ o, equivalentemente, cuando $m_1, m_2 \rightarrow \infty$. Los coeficientes de la métrica linealizada en el límite de la relatividad general son

$$\lim_{m_1, m_2 \rightarrow \infty} B(r) = 1 + \frac{C_1}{r} , \quad \lim_{m_1, m_2 \rightarrow \infty} A(r) = 1 - \frac{C_1}{r} , \quad (80)$$

mientras que en la métrica de Schwarzschild tenemos $B(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$ y $A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{2GM}{r}$, de modo que se recupera dicha métrica a orden lineal si se verifica $C_1 = -2GM$.

Hasta ahora hemos hecho uso de las condiciones de vacío, pero la situación de agujero negro conlleva una masa puntual M en el origen $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ con tensor energía-momento (38). De esta manera, la solución en el origen determinará las constantes C_{0-} y C_{2-} restantes. Para el ansatz usado, $R_{\mu\nu\alpha\beta} \sim O(V)$, $R_{\mu\nu} \sim O(V)$ y $R \sim O(V)$, de modo que tomando la traza de (64) a orden lineal obtenemos

$$m_0^2 \nabla^2 R - R = -8\pi GM \delta^3(\mathbf{r}) , \quad (81)$$

que es una ecuación que ya hemos resuelto al evaluar el límite newtoniano teoría de

altas derivadas (66), cuya solución es

$$R = 2GMm_0^2 \frac{e^{-m_0 r}}{r}. \quad (82)$$

Basta ahora con calcular el escalar de curvatura (77) para los coeficientes (87) y (86) en función de las constantes desconocidas para compararlo con el obtenido en (82). El escalar de Ricci asociado a la solución linealizada es

$$R = -3C_{0-}m_0^2 \frac{e^{-m_0 r}}{r} - 3C_{0+}m_0^2 \frac{e^{m_0 r}}{r}, \quad (83)$$

que por comparación directa conduce a $C_{0-} = -\frac{2}{3}GM$.

Teniendo en cuenta la componente 00 de (64) llegamos a la ecuación diferencial también resuelta al estudiar la teoría de altas derivadas, que se puede escribir como $R_{00} = \nabla^2 \phi$ con ϕ dado por (69), y cuya solución se expresa

$$R_{00} = -\frac{1}{3}GMm_0^2 \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \frac{4}{3}GMm_2^2 \frac{e^{-m_2 r}}{r}. \quad (84)$$

Calculando la componente R_{00} para la métrica linealizada mediante (76) obtenemos

$$R_{00} = \frac{C_{0-}}{2}m_0^2 \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \frac{C_{0+}}{2}m_0^2 \frac{e^{m_0 r}}{r} + \frac{C_{2-}}{2}m_2^2 \frac{e^{-m_2 r}}{r} + \frac{C_{2+}}{2}m_2^2 \frac{e^{m_2 r}}{r}, \quad (85)$$

de lo que se deduce $C_{2-} = \frac{8}{3}GM$.

Habiendo fijado las constantes, los coeficientes temporal y radial de la métrica linealizada para la solución de agujero negro en la teoría de altas derivadas es

$$B(r) = 1 + V(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2}{3}GM \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \frac{8}{3}GM \frac{e^{-m_2 r}}{r}, \quad (86)$$

$$A(r) = 1 + W(r) = 1 + \frac{2GM}{r} - \frac{2}{3}GM \frac{e^{-m_0 r}}{r} (1 + m_0 r) - \frac{4}{3}GM \frac{e^{-m_2 r}}{r} (1 + m_2 r). \quad (87)$$

Esta métrica, por construcción, recupera Minkowski (es asintóticamente plana en el infinito) y recupera Schwarzschild para los límites en que las constantes de acoplo de los términos de altas derivadas se anulan. Además, los coeficientes $A(r)$ y $B(r)$ de la métrica son ambos finitos en el origen

$$B(r \rightarrow 0) = 1 + \frac{2}{3}GM (m_0 - 4m_2), \quad A(r \rightarrow 0) = 1. \quad (88)$$

Cabe mencionar que, pese a que no se presentan divergencias en el origen, las curvaturas sí explotan como se ve en (82) o (84). Esto es fruto de considerar una teoría con derivadas de orden 4 en la métrica. Si añadiéramos más derivadas en la acción, las curvaturas quedarían no singulares en el origen [14]; sin embargo, observamos que el orden de las divergencias se suaviza con respecto al caso de la relatividad general, existiendo finitud en el sentido newtoniano. Una prueba más consiste en calcular el invariante de curvatura $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, el cual es proporcional a r^{-2} mientras que en

Schwarzschild va como r^{-6} . De nuevo, los efectos de las altas derivadas suavizan el comportamiento singular.

Estudiamos ahora si esta solución linealizada de agujero negro presenta horizonte de eventos. El horizonte viene dado por la coordenada r_h en la que $B(r = r_h)$ se anula y a partir de la cual aparece un cambio de signatura característico. Como el efecto de los Yukawa supone una corrección pequeña, desarrollamos $B(r)$ (86) en serie de potencias en torno a $r_s = 2GM$ (que es el radio de Schwarzschild, donde aparece el horizonte en la métrica de Schwarzschild) y con la ayuda del software *Wolfram Mathematica* revertiremos la serie. Revertir la serie implica obtener r en términos de B , por lo que imponiendo $B = 0$ encontramos un r_h tal que $B(r = r_h) = 0$, siendo así r_h el radio del horizonte. Con este método, el radio del horizonte queda

$$r_h = r_s + \frac{3r_s e^{(m_0+m_2)r_s}}{3e^{(m_0+m_2)r_s} + e^{m_2 r_s}(1+m_0 r_s) - 4e^{m_0 r_s}(1+m_2 r_s)} \left(\frac{e^{-m_0 r_s}}{3} - \frac{4e^{-m_2 r_s}}{3} \right) + O \left(\left(\frac{e^{-m_0 r_s}}{3} - \frac{4e^{-m_2 r_s}}{3} \right)^2 \right). \quad (89)$$

Para que este argumento sea válido, es decir, para que solamente tengamos una solución (un horizonte) dado por (89) debe ocurrir necesariamente la condición $r_s(4m_2 - m_0) > 3$. Veamos el porqué de esto.

Como $r = 0$ no es una solución de $-B(r)$, podemos definir $g(r) = -rB(r)$ y ver cuando $g(r) = 0$, que ocurrirá cuando

$$g(r) = -r + r_s + \frac{r_s}{3} e^{-m_0 r} - \frac{4r_s}{3} e^{-m_2 r} = 0 \implies -r + r_s = -\frac{r_s}{3} e^{-m_0 r} + \frac{4r_s}{3} e^{-m_2 r}. \quad (90)$$

El análisis del número de soluciones se extrae de la condición de que ambas funciones lineal y exponencial intersequen tangencialmente, lo cual exige que sus derivadas también sean iguales

$$-1 = \frac{r_s}{3} m_0 e^{-m_0 r} - \frac{4r_s}{3} m_2 e^{-m_2 r}. \quad (91)$$

Por construcción de $g(r)$ es claro que $r = 0$ verifica $g(r) = 0$ y, por lo tanto, cumplirá las dos ecuaciones superiores particularizadas a $r = 0$, dando lugar a

$$r_s = -\frac{r_s}{3} + \frac{4r_s}{3},$$

$$-1 = \frac{r_s}{3} m_0 - \frac{4r_s}{3} m_2 \implies r_s(4m_2 - m_0) = 3. \quad (92)$$

La primera ecuación se cumple siempre. La segunda ecuación de (92) nos indica que hay una bifurcación en $r = 0$ con punto de bifurcación dado por $r_s(4m_2 - m_0) = 3$. Cuando se verifica la condición $r_s(4m_2 - m_0) = 3$, la línea recta $-r + r_s$ y la función exponencial $-\frac{r_s}{3} e^{-m_0 r} + \frac{4r_s}{3} e^{-m_2 r}$ son tangentes en $r = 0$ (Figura 1). Bajo esta condición $B(r)$ tiene dos horizontes, uno cercano a r_s y otro con una discontinuidad evitable exactamente en 0. Si $r_s(4m_2 - m_0) > 3$ solo tenemos un horizonte (Figura 2)

cercano a r_s , puesto que el otro pasa a estar en un r menor que 0 (solución no física). Por último, si $r_s(4m_2 - m_0) < 3$ hay dos horizontes (Figura 3), ocurriendo que el horizonte que estaba en 0 pasa a estar en un r mayor que 0 (pero muy cercano a 0), o ninguno (Figura 4) si se verifica $-\frac{r_s}{3}e^{-m_0r} + \frac{4r_s}{3}e^{-m_2r} > -r + r_s$ para todo $r > 0$.

El radio del segundo horizonte emergente y cercano a 0 se puede estimar empleando el mismo método anterior de reversión de series, el cual proporciona

$$r_h = \frac{6}{r_s(m_0^2 - 4m_2^2)} \left[1 - \frac{1}{3}r_s(4m_2 - m_0) \right] + \frac{12(m_0^3 - 4m_2^3)}{r_s^2(m_0^2 - 4m_2^2)^3} \left[1 - \frac{1}{3}r_s(4m_2 - m_0) \right]^2 + O\left(\left(1 - \frac{1}{3}r_s(4m_2 - m_0)\right)^3\right). \quad (93)$$

Naturalmente, cuando estamos bajo la condición crítica $r_s(4m_2 - m_0) = 3$ se tiene que este horizonte secundario colapsa al origen.

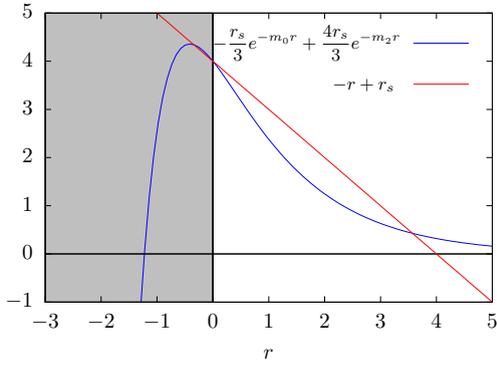


Figura 1: $r_s = 4$, $m_0 = 2$, $m_2 = 11/16$. Se cumple $r_s(4m_2 - m_0) = 3$, condición crítica.

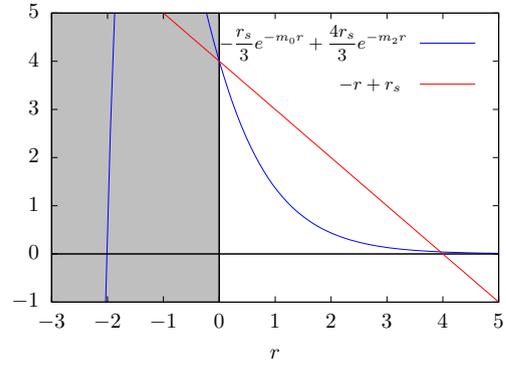


Figura 2: $r_s = 4$, $m_0 = 2$, $m_2 = 1.2$. Se cumple $r_s(4m_2 - m_0) > 3$, caso de un horizonte.

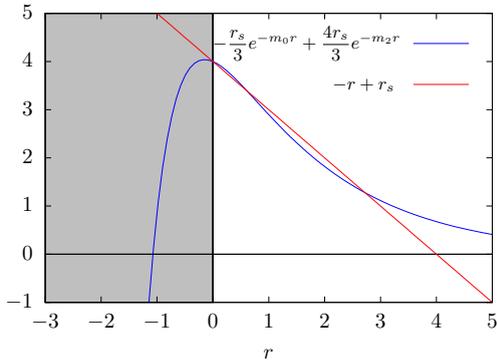


Figura 3: $r_s = 4$, $m_0 = 2$, $m_2 = 0.5$. Se cumple $r_s(4m_2 - m_0) < 3$, caso de dos horizontes.

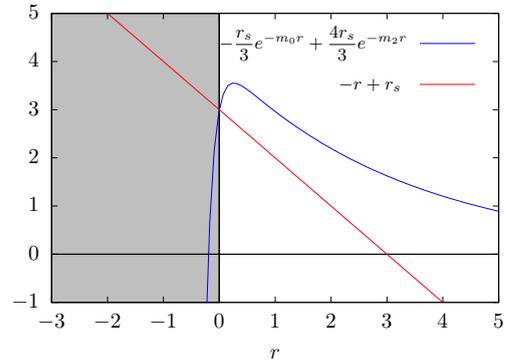


Figura 4: $r_s = 3$, $m_0 = 7.4$, $m_2 = 0.3$. Se cumple $r_s(4m_2 - m_0) < 3$, caso sin horizontes.

Un hecho remarcable es que los horizontes que surgen en la solución linealizada padecen de una anomalía de signatura. Sucede, a diferencia de Schwarzschild, que $B(r)$ cambia de signo al cruzar un horizonte y $A(r)$ no, pasando así de una signatura lorentziana $(-, +, +, +)$ a una signatura riemanniana $(+, +, +, +)$. Las ecuaciones a partir de las cuales se deriva la solución son obtenidas mediante un principio variacional compuesto de dos piezas: el conjunto de campos permitidos y sus dominios de definición. En este contexto, los campos son las métricas y tienen una signatura definida que se debe preservar (ley de inercia de Sylvester), por lo que el principio variacional está sujeto a dicha signatura. En dicho dominio, estas soluciones con horizonte no son soluciones validas al salirse del mismo, son extremos de la acción que están fuera del dominio de signatura permitida, por lo que en principio las soluciones con horizonte no son físicas aceptables. Sin embargo, si se admiten métricas degeneradas es posible que estos cambios de signatura no sean patológicos y presenten aplicaciones en teorías de gravedad cuántica [12].

Existe una interesante conexión entre los horizontes discutidos y el horizonte de la métrica de Schwarzschild. La solución de Schwarzschild presenta un horizonte cuyo valor se puede determinar empleando física exclusivamente newtoniana y, en particular, mediante la velocidad de escape aplicada a una partícula de luz. Este razonamiento también es extrapolable a la teoría de altas derivadas, puesto que usando el potencial (69) la velocidad de escape vendrá dada por

$$T + U = 0 \implies \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{r} \left(1 + \frac{1}{3}e^{-m_0r} - \frac{4}{3}e^{-m_2r} \right) = 0. \quad (94)$$

Imponiendo que la velocidad de escape sea exactamente la velocidad de la luz $v_e = c = 1$, resulta que un objeto del que la luz no puede escapar debe tener un radio r que verifique

$$1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2}{3} \frac{GM}{r} e^{-m_0r} + \frac{8}{3} \frac{GM}{r} e^{-m_2r} = 0, \quad (95)$$

que es justamente la ecuación para la componente temporal (86) de la que derivamos el radio del horizonte para este agujero negro de altas derivadas, $B(r) = 0$. El motivo de esta aparente coincidencia es que $B(r)$ en el límite de campo débil debe reducirse a $B(r) = 1 + 2\phi(r)$, pero la aproximación lineal usada es $B(r) = 1 + V(r)$ de forma que $V(r) = 2\phi(r)$ y así el horizonte $B(r) = 0$ conduce a $\phi(r) = -1/2$, que no es más que la conservación de la energía para $v_e = c = 1$.

La teoría de altas derivadas no lineal y completa ha sido estudiada en [18], [17] y [25], expandiendo la componente temporal y radial de la métrica en serie de Frobenius. Introduciendo las componentes expandidas en las ecuaciones de campo, para valores generales de las constantes de acoplo a y b , las únicas soluciones son tres familias distintas de agujeros negros. Una de ellas se corresponde con la solución clásica de Schwarzschild, mientras que las otras dos preservan la regularidad de la métrica en el origen igual que la solución linealizada aquí estudiada. Las familias de agujeros negros pueden presentar un horizonte, un número par de horizontes o ningún horizonte (singularidad desnuda), con la diferencia respecto al análisis lineal de que no aparece

la patología de cambio de signatura para densidades de energía positivas.

7. Conclusiones

En primer lugar, se ha mostrado el formalismo variacional de la relatividad general mediante la acción de Einstein-Hilbert. Tras derivar las ecuaciones de Einstein, se han puesto de manifiesto las luces y las sombras de la teoría, destacando sus éxitos experimentales hasta la fecha y mencionando los problemas formales de la misma en cuanto a cuantización y divergencias se refiere.

Estos problemas conceptuales conducen a modificar la acción de Einstein-Hilbert, introduciendo una dependencia general con el escalar de Ricci y dando lugar a las teorías de gravitación $f(R)$, que destacan por sus implicaciones cosmológicas.

El siguiente paso natural consiste en añadir términos con derivadas de orden superior en la métrica, cuya manifestación sea importante a cortas distancias. Nos hemos centrado en la modificación que induce la teoría cuártica en derivadas de la métrica en el potencial newtoniano, obteniendo un potencial libre de singularidades. Dicha teoría es además renormalizable, pero no unitaria por culpa de una partícula *ghost* emergente. Extensiones con un mayor número de derivadas (incluso infinitas) solucionan este problema y dan lugar teorías libres de singularidades que son unitarias, siendo así candidatas ideales a futuras teorías cuánticas de la gravedad.

Por último, hemos caracterizado la solución de tipo agujero negro que presenta la teoría de orden cuatro en derivadas de la métrica linealizada. Esta solución muestra un comportamiento singular más suave que la solución de Schwarzschild en la relatividad general, y en función de los parámetros de la teoría puede tener uno, dos o ningún horizonte. No obstante, esta solución presenta cambios de signo patológicos en los horizontes que no se manifiestan en la teoría completa, la cual también tiene variedad en el número de horizontes y comportamientos regulares en la métrica. Sería interesante de cara a futuras investigaciones tratar el comportamiento geodésico que presentan los horizontes de la solución linealizada, pudiendo así comparar sus fenómenos con los que aparecen en la conocida solución de Schwarzschild.

En definitiva, a lo largo del trabajo hemos explorado el comportamiento de las teorías con altas derivadas, analizado sus soluciones de tipo agujero negro a orden lineal y comentado sus virtudes para cuantizar consistentemente la gravedad. Este tipo de teorías son actuales candidatas a teorías de gravedad cuántica que, quizá no son las teorías definitivas, pero sin duda merece la pena estudiar puesto que nos iluminan el camino de la unificación de las interacciones fundamentales de la naturaleza.

Referencias

- [1] Accioly, A. J. (1988). A classical approach to higher-derivative gravity. *Revista brasileira de fisica*, 18(4), 593-608.
- [2] Accioly et al., (2017). Low-energy effects in a higher-derivative gravity model with real and complex massive poles. arXiv:1610.05260v4 [gr-qc] . Disponible en <https://arxiv.org/abs/1610.05260v4>
- [3] Akrami et al., (2019). Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. arXiv:1807.06211v2 [astro-ph.CO]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1807.06211>
- [4] Alvarez-Gaume et al., (2015). Aspects of Quadratic Gravity. arXiv:1505.07657v2 [hep-th]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1505.07657>
- [5] Asorey et al., (1996). Some remarks on high derivative quantum gravity. arXiv:hep-th/9610006v2. Disponible en <https://arxiv.org/abs/hep-th/9610006v2>
- [6] Asorey et al., (2018). Unitary Issues in Some Higher Derivative Field Theories. *Galaxies*, 6(1), 23.
- [7] Biswas et al., (2010). Towards a Resolution of the Cosmological Singularity in Non-local Higher Derivative Theories of Gravity. arXiv:1005.0590v2 [hep-th]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1005.0590v2>
- [8] Biswas et al., (2011). Towards singularity and ghost free theories of gravity. arXiv:1110.5249v2 [gr-qc]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1110.5249v2>
- [9] Blau, M., (2020), *Lecture Notes on General Relativity*, Bern, Switzerland. Disponible en <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>
- [10] Carroll, S. M., (2004), *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*, San Francisco, CA, USA: Addison Wesley.
- [11] Clifton et al., (2012). Modified Gravity and Cosmology. arXiv:1106.2476v3 [astro-ph.CO]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1106.2476>
- [12] Dray et al., (1996). Gravity and Signature Change. arXiv:gr-qc/9610063v1. Disponible en <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9610063>
- [13] Edholm et al., (2018). Behavior of the Newtonian potential for ghost-free gravity and singularity-free gravity. arXiv:1604.01989v3 [gr-qc]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1604.01989>
- [14] Giacchini, B. L. & de Paula Netto, T. (2019). Effective delta sources and regularity in higher-derivative and ghost-free gravity. arXiv:1809.05907v2 [gr-qc]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1809.05907>
- [15] Hartle, J. B., (2003), *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, San Francisco, CA, USA: The Benjamin Cummings.

- [16] Kanti et al., (1998). Singularity-free cosmological solutions in quadratic gravity. arXiv:gr-qc/9806085v2. Disponible en <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9806085v2>
- [17] Lu et al., (2015). Black Holes in Higher-Derivative Gravity. arXiv:1502.01028v2 [hep-th]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1502.01028>
- [18] Lu et al., (2015). Spherically symmetric solutions in higher-derivative gravity. *Phys. Rev. Lett.*, *92*(12), 124019.
- [19] Misner et al., (2017), *Gravitation*, Princeton, NJ, USA: Princeton University Press.
- [20] Myers, R. C. (1998). Black Holes in Higher Curvature Gravity. arXiv:gr-qc/9811042v1. Disponible en <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9811042v1>
- [21] Ortín, T., (2004), *Gravity and Strings*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [22] Schmidt, H. -J. (2006). Fourth order gravity: equations, history, and applications to cosmology. arXiv:gr-qc/0602017v2. Disponible en <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0602017v2>
- [23] Sotiriou, T. P. & Faraoni, V. (2010). $f(R)$ Theories Of Gravity. arXiv:0805.1726v4 [gr-qc]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/0805.1726v4>
- [24] Starobinsky, A. A. (1980). A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, *91*(1), 99-102.
- [25] Stelle, K. S. (1978). Classical Gravity with Higher Derivatives. *Gen. Rel. Grav.*, *9*(4), 353-371.
- [26] Tan et al., (2016). New Test of the Gravitational Inverse-Square Law at the Submillimeter Range with Dual Modulation and Compensation. *Phys. Rev. Lett.*, *116*(13), 131101.
- [27] Tian, S. (2018). 4G: Pure fourth-order gravity. arXiv:1807.06432v1 [gr-qc]. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1807.06432>
- [28] Weinberg, S., (1972), *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, New York, USA: John Wiley & Sons.
- [29] Wheeler, J. A., (2000), *Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics*, New York, USA: W. W. Norton & Company.