

**Propiedades probabilísticas relacionadas  
con el envejecimiento de sistemas.  
Aplicaciones en fiabilidad.**



**Amaia Lopez de Dicastillo Echeverría**  
Trabajo de fin de grado en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Carmen Sangüesa Lafuente  
28 de junio de 2021



# Prólogo

Cuando una persona escucha la palabra fiabilidad le vienen a la mente distintos significados. Se utiliza coloquialmente para describir a una persona y también para describir un objeto. Además, la palabra fiabilidad se define como la probabilidad de buen funcionamiento de algo.

La teoría de la fiabilidad se aplica en diferentes áreas: en Medicina, para calcular la probabilidad de supervivencia de un paciente a un tratamiento, en Demografía para calcular el tiempo vida de una persona en un determinado país o en Ingeniería para estudiar la duración de un componente eléctrico. El siguiente trabajo se centra en una visión más ingenieril donde el objetivo es observar el comportamiento del producto fabricado. Más concretamente, al final del trabajo estudiaremos, el tiempo de vida de los aires acondicionados de los aviones Boeing 720, un artículo clásico en la teoría de la fiabilidad de Frank Proschan [5].

El estudio de la fiabilidad se basa en la observación de los tiempos de fallo de un mecanismo y dentro del área de la Estadística, se conoce como el análisis de supervivencia. La tasa de fallo es la información más valiosa para conocer la forma en la que una componente falla y en consecuencia conocer la fiabilidad de ese producto. Se distinguen de tres formas el comportamiento de los fallos: siguiendo una tasa de fallo creciente, tasa de fallo decreciente o tasa de fallo constante. Existen también tiempos de fallo cuya tasa no es monótona (por ejemplo, los seres humanos tienen tasa de fallo decreciente al principio de su vida y tasa de fallo creciente al superar la infancia). Pero en este trabajo nos centraremos en las tasas de fallo monótonas.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1, se tratan los conceptos previos que debemos conocer para entender y demostrar los resultados que describiremos a continuación. En el capítulo 2, definiremos el concepto de sistema coherente de  $n$  componentes y algunos resultados básicos en este contexto. En el capítulo 3, introduciremos el concepto de tiempo de vida y describiremos el comportamiento de los sistemas según su tasa de fallo. Analizaremos la tasa de fallo de algunas distribuciones que se utilizan habitualmente para describir tiempos de vida (Gamma o Weibull, por ejemplo). En el capítulo 4, describiremos la distribución de tiempos de vida para sistemas coherentes cuyas componentes tienen tiempos de vida con tasa de fallo monótona. En este capítulo, introduciremos el concepto de tasa de fallo monótona en media. Para estos capítulos de información más teórica nos hemos basado en los libros [1], [3] y [4]. Finalmente, en el capítulo 5, aplicaremos los conceptos estudiados para los datos recogidos del artículo [5]. El apéndice A es necesario para el capítulo 5 donde se ilustran algunos de los datos que se comentan a lo largo de este capítulo.



# Summary

Reliability theory is the discipline which studies the probability that a system works correctly. This theory is applied in many different areas such as Engineering, Medicine, and Economics, among others. The aim of this work is to study different systems and what class of life distribution they have.

This work is divided into five chapters. Chapter 1 describes general notions that are going to be useful along the project. It is divided into 3 sections.

- General notions about random variables, their definitions and different functions: distribution function and survival function. Apart from this, we introduce the concept and properties of independent random variables.
- Sections two and three contain general notions about convexity, concavity, log-convexity and log-concavity. Apart from those definitions, we also show some interesting properties that will be useful in chapters 3 and 4.

Chapter 2 describes the functioning of a reliability system. We denote by  $\phi$  the structure function of the system. This function brings back the value 1 if the system is working or 0 elsewhere. We will see some examples of the most commonly used systems: series, parallel and k-out-of-n. Then, we will define a coherent system, for this concept we need to define the concept of relevant component. Once this is defined, we will distinguish between deterministic coherent systems and random coherent systems. The first one happens when the state of each component is either 0 (failure) or 1 (working), and the second one happens when the state of each component is a random variable which takes the previous values with a certain probability. In addition, we introduce a general way to explain coherent systems which is representing them in terms of path sets and cut sets.

In chapter 3 we consider a random variable  $X$  that represents the life length of a unit. We will define the following concepts:

- Conditional survival function, this function is the survival function of a unit of age  $t$ .
- Failure rate, this is the frequency with which a component fails at time  $t$  and is represented by  $r(t)$ .
- Failure function which is the cumulative failure rate and is represented by  $R(t)$ .

Then, we distinguish between three types of aging. When a system aging is constant, when it has an increasing failure rate (IFR) and when it has a decreasing failure rate (DFR). Then, we consider the most important parametric families of life distribution with monotone failure rate, these are, Exponential Distribution, Weibull Distribution, Gamma Distribution and Truncated Normal Distribution. However, to be able to describe the monotonicity properties of the Truncated Normal density, we need to introduce the class of Pólya frequency functions of order 2 ( $PF_2$ ) and some properties which connect IFR and DFR properties with Pólya frequency functions.

At this moment, we realise that we have studied the reliability in a fixed moment of time, whereas in chapter 4, we will study the system reliability during the interval  $[0, t]$ . This chapter is composed of three sections. The main objective of the first section is to prove the IFRA Closure Theorem. In order to prove this theorem, we need to define the meaning of increasing failure rate average (IFRA) and decreasing failure rate average (DFRA) and prove some other properties to achieve the objective. The next two sections are focused on proving the preservation of life distribution class under reliability operations, the first operation is the addition of life lengths, and the second one is the mixture of distributions.

Finally, the last chapter is the most practical one. We will take data shown in the article written by Frank Proschan in 1963 [5]. This article focuses on a pooled data on the times of successive failures of the air conditioning system of Boeing 720 jet airplanes. We will analyze this data to confirm that each airplane separately has an exponential distribution and the life distribution of the whole data has a decreasing failure rate. We will introduce the Epstein Test to check these assumptions.

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>III</b>
<b>Summary</b>	<b>V</b>
<b>1. Conceptos básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Nociones básicas acerca de variables aleatorias . . . . .	1
1.2. Nociones básicas acerca de concavidad y convexidad . . . . .	2
1.3. Nociones básicas acerca de log-concavidad y log-convexidad . . . . .	3
<b>2. Sistemas coherentes determinísticos y aleatorios</b>	<b>5</b>
2.1. Sistemas de componentes . . . . .	5
2.1.1. Tipos de estructuras . . . . .	5
2.2. Sistemas coherentes determinísticos . . . . .	7
2.2.1. Representación de sistemas coherentes en función de caminos y cortes. . . . .	8
2.3. Sistemas coherentes aleatorios . . . . .	10
<b>3. Distribuciones de tiempos de vida</b>	<b>13</b>
3.1. Distribuciones de tiempos de fallo . . . . .	13
3.1.1. Tasa de fallo y función de fallo . . . . .	13
3.2. Familias paramétricas con tasa de fallo monótona. . . . .	15
3.2.1. Distribución Exponencial . . . . .	15
3.2.2. Distribución Weibull . . . . .	15
3.2.3. Distribución Gamma . . . . .	15
3.2.4. Distribución Normal truncada . . . . .	16
<b>4. Distribuciones de tiempos de vida para sistemas coherentes</b>	<b>19</b>
4.1. Notación para sistemas coherentes en un intervalo de tiempo . . . . .	19
4.2. Concepto de tasa de fallo en media . . . . .	20
4.3. Preservación de la propiedad IFR para sumas de tiempos de vida . . . . .	22
4.4. Preservación de la propiedad DFR para mixturas . . . . .	22
<b>5. Ejemplo real de datos con tasa de fallo decreciente</b>	<b>25</b>
<b>A. Datos necesarios para el capítulo 5</b>	<b>29</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>33</b>



# Capítulo 1

## Conceptos básicos

A continuación, introduciremos algunas de las nociones básicas necesarias a lo largo del trabajo. En lo que sigue  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio de probabilidad, esto es,  $\Omega$  representa el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio,  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de sucesos definida sobre  $\Omega$  y  $P$  es una función de probabilidad definida sobre la familia  $\mathcal{F}$ , es decir, a cada suceso se le asigna una probabilidad de que ocurra.

### 1.1. Nociones básicas acerca de variables aleatorias

**Definición 1.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Se dice que una aplicación  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una *variable aleatoria real* (v.a) si verifica  $\{X \leq x\} = \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.2.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Se dice que una v.a  $X : \Omega \rightarrow C$  es *discreta* con valores en  $C \subseteq \mathbb{R}$ , si  $C$  es finito o numerable.

**Definición 1.3.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Se dice que una v.a  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es *absolutamente continua* con función de densidad  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $f$  es medible y

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad -\infty \leq a \leq b \leq \infty.$$

**Definición 1.4.** Se llama *función de distribución* de  $X$  a la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$F(x) = P(X \leq x).$$

A partir de la función de distribución, se define la función de supervivencia, esta función la utilizaremos a lo largo de todo el trabajo para estudiar la probabilidad de que una componente sobreviva.

**Definición 1.5.** Se llama *función de supervivencia* a la siguiente función

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x).$$

La función de supervivencia también conocida como *función de fiabilidad*, representa la probabilidad de sobrevivir al instante  $x$ . Notar que,  $\bar{F} = 1 - F$  y que esta función es conveniente para el estudio de variables aleatorias no negativas, como por ejemplo, tiempos de vida.

**Definición 1.6.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad.

- a) Sea  $X$  una v.a que toma valores en  $C = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  un conjunto discreto y  $f : C \rightarrow [0, \infty)$ . Se llama *esperanza de  $f(X)$*  a la cantidad

$$E[f(X)] = \sum_{x_n \in C} f(x_n) P(X = x_n).$$

- b) Sea  $X$  una v.a con función de densidad  $f$ . Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ . Se llama *esperanza de  $g(X)$*  a la cantidad

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

### Independencia de variables aleatorias

**Definición 1.7.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Las v.a  $X_1, \dots, X_n$  se dicen *independientes* si dados los sucesos  $B_1, \dots, B_n \subseteq \mathcal{F}$  se tiene que

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2) \cdots P(X_n \in B_n).$$

La siguiente propiedad será de utilidad en el capítulo 2.

**Proposición 1.8.** Si  $X_1, \dots, X_n$  son independientes y existe  $E[X_i], \forall i = 1, \dots, n$ , entonces se cumple que existe  $E[X_1 \cdots X_n]$  y se verifica  $E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n]$ .

## 1.2. Nociones básicas acerca de concavidad y convexidad

La concavidad y convexidad son herramientas que utilizaremos en los capítulos 3 y 4. Utilizaremos la notación  $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$  a lo largo del trabajo.

**Definición 1.9.** Un conjunto  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice que es convexo si,  $\forall x, y \in \mathcal{A}$  se cumple:

$$\alpha x + \bar{\alpha} y \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Definición 1.10.** Una función real  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un conjunto convexo  $\mathcal{A}$  se dice *convexa* si:

$$\phi(\alpha x + \bar{\alpha} y) \leq \alpha \phi(x) + \bar{\alpha} \phi(y), \forall x, y \in \mathcal{A} \text{ y } \forall \alpha \in [0, 1].$$

Se dice *cóncava* si la desigualdad se invierte.

En otras palabras, se dice que la función  $\phi$  es cóncava si y solo si  $-\phi$  es convexa. Veamos ahora algunas propiedades que van a ser de utilidad, todas las propiedades se demuestran para funciones convexas ya que basta cambiar el signo para demostrarlo para funciones cóncavas.

**Proposición 1.11.** Sea  $n = 1$ , luego  $\mathcal{A} = I$  es un intervalo.

- a)  $\phi$  es convexa si y solo si

$$\frac{\phi(y_1) - \phi(x_1)}{y_1 - x_1} \leq \frac{\phi(y_2) - \phi(x_2)}{y_2 - x_2}, \text{ donde } x_1 < y_1 \leq y_2, x_1 \leq x_2 < y_2.$$

- b)  $\phi$  es convexa si y solo si  $\phi(x + \Delta) - \phi(x)$  es creciente en  $x, \forall \Delta > 0, x, x + \Delta \in I$ .

- c) Sea  $I = (a, b)$  un intervalo abierto y  $\phi$  diferenciable en  $(a, b)$ , entonces  $\phi$  es convexa si y solo si su derivada  $\phi'$  es creciente en  $(a, b)$ .

En el último apartado de la proposición anterior vemos que es necesaria la condición de que  $\phi$  sea diferenciable. En algunos casos conviene no asumir esta condición y para ello enunciamos la siguiente proposición.

**Proposición 1.12.** Sea  $\phi$  una función convexa y finita definida en un intervalo abierto  $I \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $\phi$  es diferenciable salvo para un subconjunto contable de  $I$ . Además,  $\phi'$  es continua y creciente respecto al subconjunto denso  $D$  de  $I$ , donde  $\phi$  es diferenciable.

### 1.3. Nociones básicas acerca de log-concavidad y log-convexidad

Introducimos las funciones *log-cóncava* y *log-convexa* que aplicaremos en el capítulo 4.

**Definición 1.13.** Una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$  definida en un conjunto convexo  $\mathcal{A}$  se dice que es *log-convexa* si verifica:

$$f(\alpha x + \bar{\alpha}y) \leq f(x)^\alpha f(y)^{\bar{\alpha}}, \quad \forall x, y \in \mathcal{A} \text{ y } \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (1.1)$$

Se dice *log-cóncava* si la desigualdad se invierte.

Observar que decir que una función  $f$  es log-cóncava equivale a decir que  $\log(f)$  es cóncava.

Notar que si  $f$  es unidimensional, se puede tratar de diferente forma la log-concavidad y la log-convexidad. La log-concavidad puede extenderse a todo  $\mathbb{R}$ , de hecho, si  $\log(f)$  es cóncava en  $[0, \infty)$ , podemos considerar, por ejemplo,  $f(x) = 0$ ,  $x < 0$ , y la función extendida continúa siendo log-cóncava. Esto no lo podemos hacer con funciones log-convexas, como es fácil verificar a partir de la definición.

La siguiente propiedad será de utilidad en el capítulo 4. Nos indica que las funciones log-convexas se preservan bajo mixturas.

**Proposición 1.14.** Sea  $G$  una función de distribución con soporte  $\Theta$ . Supongamos que para cada  $\theta \in \Theta$  tenemos una función  $f(\cdot, \theta)$  que es log-convexa en  $(0, \infty)$ . Entonces, la función  $f$  dada por

$$f(x) = \int_{\Theta} f(\cdot, \theta) dG(\theta), \quad x > 0,$$

es log-convexa en  $(0, \infty)$ .

*Demostración.* Tenemos que probar que  $f(\alpha x + \bar{\alpha}y) \leq f^\alpha(x) f^{\bar{\alpha}}(y)$ ,  $\forall x, y \in (0, \infty)$ . Observar que tenemos:

$$f(\alpha x + \bar{\alpha}y) = \int_{\Theta} f(\alpha x + \bar{\alpha}y, \theta) dG(\theta),$$

y teniendo en cuenta que  $f(\cdot, \theta)$  es log-convexa, entonces podemos acotar la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\int_{\Theta} f(\alpha x + \bar{\alpha}y, \theta) dG(\theta) \leq \int_{\Theta} f^\alpha(x, \theta) f^{\bar{\alpha}}(y, \theta) dG(\theta).$$

Aplicando la *Desigualdad de Hölder* se tiene que:

$$\int_{\Theta} f^\alpha(x, \theta) f^{\bar{\alpha}}(y, \theta) dG(\theta) \leq \left( \int_{\Theta} f(x, \theta)^{\alpha/\alpha} dG(\theta) \right)^\alpha \left( \int_{\Theta} f(y, \theta)^{\bar{\alpha}/\bar{\alpha}} dG(\theta) \right)^{\bar{\alpha}} = f^\alpha(x) f^{\bar{\alpha}}(y).$$

Y por tanto, se sigue la log-convexidad de  $f$ . □



## Capítulo 2

# Sistemas coherentes determinísticos y aleatorios

A lo largo de este capítulo trataremos de describir el funcionamiento o no de un sistema, como, por ejemplo, un circuito, un avión, etc. Introduciremos el concepto de sistema coherente y comentaremos distintas propiedades de este. Además, caracterizaremos los sistemas en dos nuevos grupos llamados caminos y cortes.

### 2.1. Sistemas de componentes

Un sistema o una estructura es un conjunto de  $n$  componentes. El sistema puede encontrarse en dos estados diferentes: en funcionamiento o fallo.

En primer lugar, se trata de dar una relación determinística entre el sistema y sus componentes. Para ello, consideraremos el sistema en un instante de tiempo fijo.

**Definición 2.1.** Consideramos un sistema de  $n$  componentes. Sea  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$  el vector de estados que verifica:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la componente } i \text{ funciona,} \\ 0 & \text{si la componente } i \text{ no funciona.} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Teniendo en cuenta que el sistema depende únicamente de los estados actuales de sus componentes, definimos la **función de estructura** del sistema como  $\phi(\mathbf{x})$ ,

$$\phi : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

que toma, para cada vector  $(x_1, \dots, x_n)$  que representa el estado de las componentes, valor 1 si el sistema funciona y 0 en otro caso. El número de componentes  $n$  en el sistema se llama *orden* del sistema.

#### 2.1.1. Tipos de estructuras

Veamos algunas de las estructuras más interesantes para los sistemas de fiabilidad.

- **Estructura en serie:** Funciona si y solo si cada componente funciona. Su función de estructura viene dada de la siguiente manera:

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i = \text{mín}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.1)$$

Por ejemplo, las pilas de un dispositivo. Supongamos el mando de la televisión, cuando una de las pilas falla el mando no funciona. Es decir, todas sus pilas (componentes) deben funcionar para que el mando funcione.

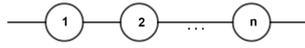


Figura 2.1: Estructura en serie

- **Estructura en paralelo:** Funciona si y solo si al menos una de las componentes funciona. Su función de estructura viene dada de la siguiente manera:

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i = \text{máx}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.2)$$

Un ejemplo muy sencillo es una lámpara con varias bombillas encendidas al mismo tiempo. Si alguna de estas se funde (falla), las bombillas restantes siguen funcionando ya que cada una de ellas posee su línea de suministro de energía.

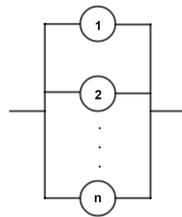


Figura 2.2: Estructura en paralelo

- **Estructura k-out-of-n:** Funciona si y solo si al menos k componentes funcionan. Su función de estructura viene dada de la siguiente manera:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \geq k, \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i < k. \end{cases}$$

Un ejemplo de una estructura 2-out-of-3 podría ser un avión de 3 motores y donde bastaría que 2 de ellos funcionen para que el avión pueda volar.

Es fácil ver que una estructura en serie es una estructura "n-out-of-n" y que una estructura en paralelo es una estructura "1-out-of-n". Además, combinando ambas estructuras se pueden dar sistemas más complejos.

Notemos que una estructura en paralelo se puede escribir como,

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i).$$

Para  $n = 2$ , escribimos

$$x_1 \wedge x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2).$$

Una vez que conocemos cómo distinguir el funcionamiento de los sistemas, podemos explicar la noción de sistema coherente. Estudiaremos los sistemas coherentes tanto determinísticos como aleatorios.

## 2.2. Sistemas coherentes determinísticos

Dado un sistema con  $n$  componentes tal que su vector de estado del sistema viene dado por  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , distinguiremos el estado de la componente  $i$ -ésima de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(1_i, \mathbf{x}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ (0_i, \mathbf{x}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ (\cdot_i, \mathbf{x}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n).\end{aligned}$$

**Definición 2.2.** Se dice que la componente  $i$ -ésima es *irrelevante* para la estructura  $\phi$ , si  $\phi$  es constante en  $x_i$ , es decir,  $\phi(1_i, \mathbf{x}) = \phi(0_i, \mathbf{x})$ ,  $\forall (\cdot_i, \mathbf{x})$ . En caso contrario, se dice que la componente  $i$ -ésima es *relevante*.

En otras palabras, una componente es relevante si su estado influye en el sistema.

**Lema 2.3.** Sea  $\phi$  la función de estructura de un sistema de  $n$  componentes. Esta función se puede descomponer como

$$\phi(\mathbf{x}) = x_i \phi(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i) \phi(0_i, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

*Demostración.* Si la componente  $i$ -ésima funciona se verifica  $\phi(\mathbf{x}) = x_i \phi(1_i, \mathbf{x})$  y en caso contrario,  $\phi(\mathbf{x}) = (1 - x_i) \phi(0_i, \mathbf{x})$ .  $\square$

**Ejemplo 2.4.** Sea  $\phi(\mathbf{x})$  una estructura en serie de orden 4, es decir, su función de estructura viene dada por  $\phi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^4 x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ .

Aplicamos la identidad 2.3 para la primera componente, por ejemplo.

$$\phi(\mathbf{x}) = x_1 \phi(1_1, \mathbf{x}) + (1 - x_1) \phi(0_1, \mathbf{x}) = x_1 (1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) + (1 - x_1) (0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

La idea principal de un sistema coherente que introduciremos a continuación nace de pensar que si reemplazamos una componente fallida por una componente en funcionamiento el sistema no empeora. En otras palabras, que cambiar esta componente mejoraría la fiabilidad del sistema.

**Definición 2.5.** Se dice que una función multidimensional  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  es no decreciente, si  $f$  es no decreciente en cada uno de sus argumentos.

**Definición 2.6.** Un sistema de componentes es *coherente* si:

- Su función de estructura  $\phi$  es no decreciente,
- Cada componente es relevante.

Notar que todo sistema coherente verifica  $\phi(\mathbf{0}) = \phi(0, \dots, 0) = 0$  y  $\phi(\mathbf{1}) = \phi(1, \dots, 1) = 1$ , ya que el sistema es relevante. Es decir, si  $\phi(\mathbf{0}) = 1$ , y alguna de las componentes del vector fuera reemplazada por 1, por ejemplo,  $(0, 1, \dots, 0)$ , entonces  $\phi(0, 1, \dots, 0) = 1$  por monotonía, luego la componente sería irrelevante. De manera análoga se comprobaría que  $\phi(\mathbf{1}) = 1$ .

Existen dos resultados importantes para comparar dos funciones de estructuras diferentes. El primero indica que el rendimiento de un sistema coherente está acotado inferiormente por un sistema en serie y superiormente por un sistema en paralelo.

**Teorema 2.7.** Sea  $\phi$  un sistema coherente de  $n$  componentes. Entonces,

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \phi(\mathbf{x}) \leq \prod_{i=1}^n x_i. \quad (2.4)$$

*Demostración.* La cota inferior, siendo trivial para  $\phi(\mathbf{x}) = 1$ , la debemos comprobar cuando  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ . Como  $\phi$  es un sistema coherente,  $\mathbf{x}$  tiene que tener alguna componente 0, y de ahí que el producto de las componentes también sea 0. Análogamente, debemos comprobar la cota superior cuando  $\phi(\mathbf{x}) = 1$ . En este caso tenemos que alguna de las componentes tiene que ser 1, y de ahí que el máximo de sus componentes también lo sea. □

El segundo resultado se centra en cómo mejorar la fiabilidad de un sistema. Supongamos que el sistema tiene  $n$  componentes y tenemos la oportunidad de mejorar su rendimiento añadiendo componentes adicionales que no son estrictamente necesarias para el funcionamiento de este, pero servirían como protección ante el fallo de otras componentes. Podríamos pensar en dos planteamientos diferentes, el primer planteamiento es sustituir cada componente por un nuevo sistema de dos componentes en paralelo, o añadir a todo el sistema completo otro exactamente igual en paralelo. El siguiente resultado asegura que es más conveniente el primer planteamiento.

Consideramos la siguiente notación para las componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cup \mathbf{y} &\equiv (x_1 \cup y_1, \dots, x_n \cup y_n), \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &\equiv (x_1 y_1, \dots, x_n y_n).\end{aligned}$$

**Teorema 2.8.** *Sea  $\phi$  una estructura coherente. Entonces para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0, 1\}^n$ , se tiene:*

- a)  $\phi(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \geq \phi(\mathbf{x}) \cup \phi(\mathbf{y})$ ,
- b)  $\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y})$ .

La igualdad en a) se obtiene si la estructura es en paralelo y la igualdad en b) se obtiene si la estructura es en serie.

*Demostración.* a) Como  $x_i \cup y_i = 1 - (1 - x_i)(1 - y_i) = x_i + y_i - x_i y_i \geq x_i$ ,  $\forall i$  ya que  $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ , entonces  $\phi(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \geq \phi(\mathbf{x})$  ya que  $\phi$  es una función no decreciente. De manera análoga se obtiene que  $x_i \cup y_i \geq y_i$ ,  $\forall i$ , así que,  $\phi(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \geq \phi(\mathbf{y})$ . Por tanto,  $\phi(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \geq \max[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] \equiv \phi(\mathbf{x}) \cup \phi(\mathbf{y})$ .

b) Como  $x_i y_i \leq x_i$   $\forall i$ , entonces  $\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x})$  y de manera análoga se tiene  $\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{y})$ , por tanto,  $\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \min[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] \equiv \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y})$ . Veamos ahora la última afirmación:

- Supongamos que las componentes del sistema están en paralelo:  $\phi(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) = 1 \Leftrightarrow$  algún elemento de los dos vectores es 1  $\Leftrightarrow \phi(\mathbf{x}) = 1$  o  $\phi(\mathbf{y}) = 1 \Leftrightarrow \phi(\mathbf{x}) \cup \phi(\mathbf{y}) = 1$ , por lo que se tiene el resultado.
- Supongamos ahora que las componentes del sistema están en serie:  $\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n x_i y_i = \prod_{i=1}^n x_i \prod_{i=1}^n y_i = \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y})$ .

□

### 2.2.1. Representación de sistemas coherentes en función de caminos y cortes.

Otra forma de representar los sistemas coherentes es mediante sus caminos y cortes. Estos dos grupos diferencian entre las componentes necesarias para que el sistema funcione y las componentes para que el sistema no funcione.

Teniendo en cuenta que las componentes de un sistema coherente se pueden numerar como  $1, 2, \dots, n$ , cualquier subconjunto de componentes puede representarse como un subconjunto del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Llamaremos *conjunto de camino*  $P$  de una estructura coherente  $\phi$ , si  $\phi(\mathbf{x}) = 1$  cuando  $x_i = 1$ ,  $\forall i \in P$ . De manera análoga, llamaremos *conjunto de corte*  $C$  de una estructura coherente  $\phi$ , si  $\phi(\mathbf{x}) = 0$  cuando  $x_i = 0$ ,  $\forall i \in C$ . Un conjunto de camino  $P$  se llama *conjunto de camino mínimo* si ningún subconjunto de  $P$  es un conjunto de camino; y un conjunto de corte  $C$  se llama *conjunto de corte mínimo* si ningún subconjunto de  $C$  es un conjunto de corte.

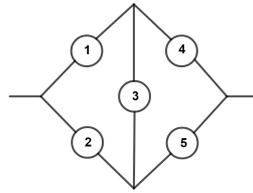


Figura 2.3: Estructura puente

**Ejemplo 2.9.** Se llama estructura puente a la representada en la figura 2.3.

Los conjuntos de camino mínimo son:

$$P_1 = \{1, 4\}, P_2 = \{2, 5\}, P_3 = \{1, 3, 5\}, P_4 = \{2, 3, 4\},$$

es claro que para que el sistema funcione alguno de estos caminos debe funcionar. Por otro lado, los conjuntos de corte mínimo son:

$$K_1 = \{1, 2\}, K_2 = \{4, 5\}, K_3 = \{1, 3, 5\}, K_4 = \{2, 3, 4\},$$

es decir, si alguno de estos conjuntos falla, entonces el sistema no funciona.

La representación de la estructura coherente  $\phi$  puede escribirse en forma de conjuntos de camino mínimo y conjuntos de corte mínimo.

Definimos la siguiente función  $\rho_j$  que la llamaremos *estructura en serie de camino mínimo*, para ello consideramos  $P_j$ , el  $j$ -ésimo conjunto de camino mínimo de una estructura coherente y definimos:

$$\rho_j(\mathbf{x}) = \prod_{i \in P_j} x_i = \begin{cases} 1 & \text{si todas las componentes en el } j\text{-ésimo conjunto del camino mínimo funcionan,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\forall j = 1, \dots, p$ , donde  $p$  es el número de conjuntos de camino mínimo. Además, teniendo en cuenta que la estructura anterior funciona si y solo si al menos una de las estructuras de camino mínimo funciona, podemos escribir la siguiente identidad,

$$\phi(\mathbf{x}) \equiv \prod_{j=1}^p \rho_j(\mathbf{x}) \equiv 1 - \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j(\mathbf{x})), \quad (2.5)$$

que representa una estructura en paralelo de los  $\rho_j$ .

De forma análoga, definimos la función  $\kappa_j$  que la llamaremos *estructura en paralelo de corte mínimo*, para ello consideramos  $K_j$ , el  $j$ -ésimo conjunto de corte mínimo de una estructura coherente y definimos:

$$\kappa_j(\mathbf{x}) = \prod_{i \in K_j} x_i = \begin{cases} 0 & \text{si todas las componentes en el } j\text{-ésimo conjunto del corte mínimo fallan,} \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\forall j = 1, \dots, k$ , donde  $k$  es el número de conjuntos de corte mínimo. Además, teniendo en cuenta que la estructura anterior falla si y solo si al menos una de las estructuras de corte mínimo falla, podemos escribir la siguiente identidad,

$$\phi(\mathbf{x}) \equiv \prod_{j=1}^k \kappa_j(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

que representa una estructura en serie de los  $\kappa_j$ .

**Ejemplo 2.10.** Teniendo en cuenta el ejemplo anterior 2.9, podemos representar la estructura puente como: “paralelo-serie” en términos de caminos mínimos y como “serie-paralelo” en términos de cortes mínimos. Su representación viene dada por las siguientes figuras:

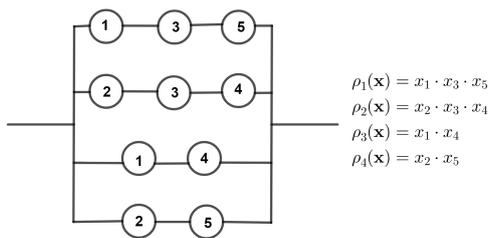


Figura 2.4: Representación en términos de caminos mínimos

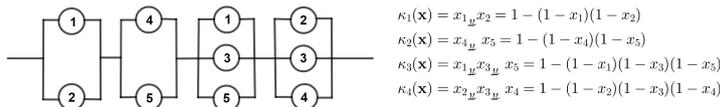


Figura 2.5: Representación en términos de cortes mínimos

### 2.3. Sistemas coherentes aleatorios

En segundo lugar, relacionaremos la fiabilidad del sistema con la fiabilidad de sus componentes. Supongamos que el estado  $X_i$  de la  $i$ -ésima componente es aleatorio. Esto es,  $X_i$  toma valores 1 si el sistema funciona y 0 en otro caso aleatoriamente, por tanto definimos,

$$p_i = P(X_i = 1) = E[X_i], \forall i = 1, \dots, n. \tag{2.7}$$

Supongamos que las componentes son independientes. Consideramos  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  el vector de estado de las componentes. Llamaremos *fiabilidad de  $i$*  a la probabilidad de que la componente  $i$ -ésima funcione ( $p_i$ ). De forma análoga podemos obtener la fiabilidad del sistema  $\phi$  que viene dada por:

$$P(\phi(\mathbf{X}) = 1) = E[\phi(\mathbf{X})] = h(p_1, \dots, p_n). \tag{2.8}$$

En el caso en el que  $p_1 = \dots = p_n = p$ , entonces utilizaremos la notación  $h = h(p)$ . A la función anterior  $h(\mathbf{p})$  la llamaremos **función de fiabilidad** de la estructura  $\phi$ .

Podemos representar en términos de la fiabilidad las estructuras estudiadas anteriormente.

- Estructura en serie:** Su función de estructura es  $\phi(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n X_i$ . Su función de fiabilidad viene dada por:

$$h(\mathbf{p}) = E[\phi(\mathbf{X})] = E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n E[X_i] = \prod_{i=1}^n p_i,$$

ya que cada componente es independiente.

- Estructura en paralelo:** Su función de estructura es  $\phi(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n X_i$ . Su función de fiabilidad viene dada por:

$$h(\mathbf{p}) = E[\phi(\mathbf{X})] = E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = E\left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right] = 1 - E\left[\prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right] = 1 - \prod_{i=1}^n E[1 - X_i] = \prod_{i=1}^n E[X_i] = \prod_{i=1}^n p_i,$$

ya que cada componente es independiente.

De forma análoga al lema 2.3 podemos obtener un resultado para la descomposición en términos de la función de fiabilidad.

**Lema 2.11.** Sea  $h$  la función de fiabilidad de una estructura  $\phi$ . Esta función se puede descomponer como

$$h(\mathbf{p}) = p_i h(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) h(0_i, \mathbf{p}), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta el lema 2.3, y que cada componente es independiente se tiene  $h(\mathbf{p}) = E[\phi(\mathbf{X})] = E[X_i \phi(1_i, \mathbf{X}) + (1 - X_i) \phi(0_i, \mathbf{X})] = E[X_i] E[\phi(1_i, \mathbf{X})] + (1 - E[X_i]) E[\phi(0_i, \mathbf{X})]$ .

Por tanto,  $h(\mathbf{p}) = E[X_i] E[\phi(1_i, \mathbf{X})] + (1 - E[X_i]) E[\phi(0_i, \mathbf{X})] = p_i h(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) h(0_i, \mathbf{p})$ .  $\square$

En lo que sigue consideraremos la siguiente notación:  $\mathbf{0} \ll \mathbf{p} \ll \mathbf{1} \Leftrightarrow 0 < p_i < 1, \forall i$ .

**Teorema 2.12.** Sea  $h(\mathbf{p})$  la función de fiabilidad de un sistema coherente. Entonces  $h(\mathbf{p})$  es estrictamente creciente en cada  $p_i$ , para  $\mathbf{0} \ll \mathbf{p} \ll \mathbf{1}$ .

*Demostración.* Por el lema 2.11, podemos descomponer  $h(\mathbf{p}) = p_i h(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) h(0_i, \mathbf{p}), \forall i = 1, \dots, n$ . De manera que derivando obtenemos,

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} = h(1_i, \mathbf{p}) - h(0_i, \mathbf{p}) = E[\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X})].$$

Ya que  $\phi$  es creciente, entonces se cumple  $\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X}) \geq 0$ . Además, para cualquier vector  $\mathbf{x}^0$  de  $n - 1$  componentes se cumple que  $\phi(1_i, \mathbf{x}^0) - \phi(0_i, \mathbf{x}^0) = 1$ , ya que cada componente es relevante por ser un sistema coherente. Como  $\mathbf{0} \ll \mathbf{p} \ll \mathbf{1}$ , entonces  $\mathbf{x}^0$  tiene probabilidad positiva de que ocurra. Por tanto,  $E[\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X})] > 0$ , así que la función de fiabilidad es estrictamente creciente para sistemas coherentes.  $\square$

El siguiente teorema es análogo al teorema 2.8 demostrado en la sección de sistemas coherentes determinísticos, en este caso en términos de la función de fiabilidad.

**Teorema 2.13.** Sea  $h$  la función de fiabilidad de un sistema coherente. Entonces,  $\forall \mathbf{0} \ll \mathbf{p}, \mathbf{p}' \ll \mathbf{1}$  se tiene:

$$a) \quad h(\mathbf{p} \vee \mathbf{p}') \geq h(\mathbf{p}) \vee h(\mathbf{p}'),$$

$$b) \quad h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') \leq h(\mathbf{p}) \cdot h(\mathbf{p}').$$

La igualdad en a) se obtiene si el sistema es paralelo y la igualdad en b) se obtiene si el sistema es en serie.

*Demostración.* Sean  $X_1, \dots, X_n$  y  $X'_1, \dots, X'_n$  mutuamente independientes tales que  $P(X_i = 1) = p_i$  y  $P(X'_i = 1) = p'_i$ . Recordar que  $h(\mathbf{p}) = E[\phi(X_1, \dots, X_n)]$ . Si aplicamos el apartado a) del teorema 2.8 se tiene

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p} \vee \mathbf{p}') - h(\mathbf{p}) \vee h(\mathbf{p}') &= E[\phi(\mathbf{X} \vee \mathbf{X}')] - E[\phi(\mathbf{X})] \vee E[\phi(\mathbf{X}')] = \\ &= \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}'} [\phi(\mathbf{x} \vee \mathbf{x}') - \phi(\mathbf{x}) \vee \phi(\mathbf{x}')] P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) P(\mathbf{X}' = \mathbf{x}') \geq 0. \end{aligned}$$

Basta utilizar los argumentos del teorema 2.8 para que se de la igualdad, ya que  $\mathbf{0} \ll \mathbf{p}, \mathbf{p}' \ll \mathbf{1}$  entonces  $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x}$  y  $P(\mathbf{X}' = \mathbf{x}') > 0, \forall \mathbf{x}'$ .  $\square$

**Ejemplo 2.14.** Supongamos que tenemos el siguiente sistema de componentes independientes, donde su función de estructura viene dada por  $\phi(\mathbf{X}) = X_1 (X_2 \vee X_3)$ .

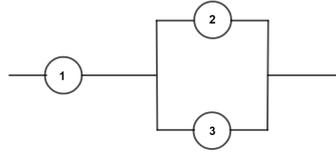


Figura 2.6: Sistema de tres componentes

Calculamos su función de fiabilidad que viene dada por

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= E[X_1(X_2 \vee X_3)] = E[X_1]E[(X_2 \vee X_3)] \\ &= E[X_1]E[1 - (1 - X_2)(1 - X_3)] \\ &= p[1 - (1 - p)(1 - p)] = p[2p - p^2]. \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso, podemos obtener la función de fiabilidad del sistema completo,

$$h(\mathbf{p}) \vee h(\mathbf{p}) = 1 - (1 - h(\mathbf{p}))(1 - h(\mathbf{p})) = 1 - [1 - p(2p - p^2)]^2.$$

Repitiendo el proceso a cada componente tenemos

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) &= E\phi[\mathbf{X} \vee \mathbf{X}'] = E[X_1 \vee X_1']E[(X_2 \vee X_2') \vee (X_3 \vee X_3')] \\ &= E[1 - (1 - X_1)(1 - X_1')]E[(1 - (1 - X_2)(1 - X_2')) \vee (1 - (1 - X_3)(1 - X_3'))] \\ &= E[X_1 + X_1' - X_1X_1']E[(X_2 + X_2' - X_2X_2') \vee (X_3 + X_3' - X_3X_3')] \\ &= E[X_1 + X_1' - X_1X_1']E[1 - (1 - (X_2 + X_2' - X_2X_2'))(1 - (X_3 + X_3' - X_3X_3'))] \\ &= (2p - p^2)(1 - (1 - (2p - p^2))(1 - (2p - p^2))) = [2p - p^2][1 - (1 - p)^4]. \end{aligned}$$

## Capítulo 3

# Distribuciones de tiempos de vida

En el siguiente capítulo estudiaremos sistemas en los que cada componente tiene tiempo de vida aleatorio. Para describir un sistema de modo realista, es conveniente estudiar algunas de las distribuciones más interesantes para describir tiempos de vida. Por ejemplo, la distribución exponencial. Estas distribuciones de probabilidad las clasificaremos según los criterios que introduciremos en este capítulo.

### 3.1. Distribuciones de tiempos de fallo

Sea  $X$  una variable aleatoria que representa el tiempo de vida de una unidad, con función de distribución  $F(x) = P(X \leq x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , y  $\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$ , la función de supervivencia.

**Definición 3.1.** La *función de supervivencia condicional* es la función de supervivencia de una unidad que ha alcanzado la edad  $t$ . Es decir, sea  $t$  tal que  $\bar{F}(t) > 0$ . Entonces,

$$\bar{F}(x|t) = P(X > x+t | X > t) = \frac{P(X > t+x, X > t)}{P(X > t)} = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}, \quad \forall x \geq 0.$$

#### 3.1.1. Tasa de fallo y función de fallo

La **tasa de fallo** es la probabilidad infinitesimal de fallo. Se define como:

$$r(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)}.$$

Notemos que la probabilidad de que una componente falle en el intervalo  $[t, t+x]$  dado que ha alcanzado la edad  $t$ , viene dada por:

$$P(t < X < t+x | X > t) = \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)},$$

y de ahí viene su nombre (fallo infinitesimal por unidad de tiempo).

Además, sea  $X$  una v.a absolutamente continua con densidad  $f$  y  $F(t) > 0$ , tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(t+x) - F(t)}{x} = f(t),$$

luego,

$$r(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P(t < X < t+x | X > t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}. \quad (3.1)$$

Notar que la tasa de fallo nos indicará cómo los artículos envejecen, ya que mide el riesgo que tiene una componente de fallar teniendo en cuenta que ha sobrevivido hasta el tiempo  $t$ . Por tanto, podemos distinguir tres tipos de envejecimiento, donde el paso de los años mejora, empeora o se mantiene constante.

Si integramos 3.1 y tomando exponenciales a cada lado de la ecuación, tenemos

$$\int_0^x r(t)dt = -\log \bar{F}(x) \Rightarrow \bar{F}(x) = \exp \left[ - \int_0^x r(t)dt \right]. \quad (3.2)$$

De esta manera, podemos representar la función de fiabilidad o de supervivencia como

$$\bar{F}(x) = e^{-R(x)}, \quad (3.3)$$

donde llamaremos **función de fallo** a la tasa de fallo acumulativa  $R(x) = \int_0^x r(t)dt$ .

Primero vamos a considerar un dispositivo que no envejece, es decir, que la probabilidad de supervivencia de un sistema que ha alcanzado la edad  $t$  es la misma que tenía al inicio. Se puede expresar de la siguiente manera,

$$\bar{F}(x|t) = \bar{F}(x), \quad \forall x, t \geq 0,$$

equivalentemente

$$\bar{F}(x+t) = \bar{F}(t)\bar{F}(x), \quad \forall x, t \geq 0.$$

Además, teniendo en cuenta que  $0 \leq \bar{F}(x) \leq 1$ , se podría comprobar que la única solución cuando la variable es absolutamente continua, es de la forma  $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ ,  $x \geq 0$ , es decir, que tiene una probabilidad exponencial de sobrevivir. La función de densidad de la distribución exponencial viene dada por  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , luego la tasa de fallo:

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

Por tanto, la distribución exponencial tiene tasa de fallo constante.

A continuación, introducimos las definiciones de tasa de fallo creciente y decreciente.

**Definición 3.2.**  $F$  es una función de distribución de *tasa de fallo creciente* (IFR) si  $F$  verifica que  $\bar{F}(x|t)$  es decreciente en  $t > 0$  para cada  $x \geq 0$ , en el intervalo donde  $\bar{F}(t) > 0$ .

**Definición 3.3.**  $F$  es una función de distribución de *tasa de fallo decreciente* (DFR) si  $F$  verifica que  $\bar{F}(x|t)$  es creciente en  $t \geq 0$  para cada  $x \geq 0$ , en el intervalo donde  $\bar{F}(t) > 0$ .

Notar que el nombre dado en estas definiciones es coherente con la definición de tasa de fallo.

**Lema 3.4.** Una v.a  $X$  con función de densidad  $f$ . Tiene tasa de fallo creciente (IFR)  $\Leftrightarrow r(t)$  es creciente. Análogamente tiene tasa de fallo decreciente (DFR)  $\Leftrightarrow r(t)$  es decreciente.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $X$  es IFR, es decir,

$$\bar{F}(x|t) = P[X > x+t | X > t] = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \text{ es decreciente en } 0 < t < \infty \text{ para cada } x \geq 0. \quad (3.4)$$

Como  $X$  es una v.a absolutamente continua con función de densidad  $f$ , entonces esto significa que la tasa de fallo es creciente para  $t \geq 0$  ya que

$$r(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ 1 - \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \right].$$

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $r(t)$  es creciente, así que teniendo en cuenta la igualdad 3.3:

$$\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} = e^{-\int_t^{t+x} r(u)du},$$

es decreciente en  $t$ . De manera análoga se obtiene el segundo resultado.  $\square$

## 3.2. Familias paramétricas con tasa de fallo monótona.

En esta sección introduciremos algunas de las familias paramétricas con tasa de fallo monótona (creciente o decreciente) que se utilizan para describir tiempos de vida.

### 3.2.1. Distribución Exponencial

La distribución exponencial es una distribución continua con función de densidad,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \forall t \geq 0,$$

donde  $\lambda > 0$  es la tasa de fallo.

Recordar además que la distribución exponencial es la única distribución continua con la propiedad de ausencia de memoria. Y verifica que es *IFR* y *DFR*.

### 3.2.2. Distribución Weibull

La distribución Weibull es una distribución continua con función de densidad  $f_\alpha(t) = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha}$ ,  $t > 0$ . Su función de distribución viene dada por la siguiente expresión:

$$F_\alpha(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha}, t \geq 0,$$

donde  $\lambda > 0$  es el parámetro de escala y  $\alpha > 0$  es el parámetro de forma de la distribución. La tasa de fallo viene dada por:

$$r(t) = \frac{f_\alpha(t)}{F_\alpha(t)} = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha-1}, \text{ para } t > 0.$$

de manera que  $F_\alpha$  es *IFR* para  $\alpha \geq 1$  y es *DFR* para  $0 < \alpha \leq 1$ . Notar que si  $\alpha = 1$ , entonces  $F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda t)}$  es la distribución exponencial que sabemos que es *IFR* y *DFR*.

### 3.2.3. Distribución Gamma

La distribución gamma es una distribución continua con función de densidad  $g_{\lambda, \alpha}(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ , donde  $\alpha, \lambda > 0$  y  $\Gamma(\alpha)$  es la función gamma.

La función de distribución para cada  $\alpha$  viene dada por:

$$G_{\lambda, \alpha}(t) = \int_0^t g_{\lambda, \alpha}(x) dx.$$

Notar que no existe expresión explícita salvo para  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Veamos ahora qué forma tiene la tasa de fallo de la distribución gamma. Para ello nos fijamos en la tasa de fallo inversa de la gamma que viene dada por:

$$[r(t)]^{-1} = \frac{\bar{G}_{\lambda, \alpha}(t)}{g_{\lambda, \alpha}(t)} = \int_t^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda(x-t)} dx.$$

Mediante el cambio de variable  $u = x - t$ , se tiene que:

$$[r(t)]^{-1} = \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du,$$

es claro que  $r(t)^{-1}$  crece si  $0 < \alpha \leq 1$  y decrece para  $\alpha \geq 1$ . Notar que si  $\alpha = 1$ , entonces  $G_{\lambda, 1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  es la distribución exponencial. Por tanto, la distribución  $G_{\lambda, \alpha}$  es *DFR* para  $0 < \alpha \leq 1$  y *IFR* para  $\alpha \geq 1$ .

### 3.2.4. Distribución Normal truncada

La distribución normal truncada es una distribución continua con función de densidad

$$f(t) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad 0 \leq t < \infty,$$

donde  $\sigma > 0$ ,  $-\infty < \mu < \infty$  y  $a = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2} dt$ .

Notar que la única diferencia con la distribución normal es el parámetro  $a$  y su soporte. Este parámetro  $a$  asegura que  $\int_0^\infty f(t)dt = 1$ , es decir,  $f$  es un función de densidad.

Para poder estudiar la monotonía de la tasa de fallo de la distribución normal truncada necesitamos introducir el concepto de *función de frecuencia de Pólya* que veremos a continuación.

#### Función de frecuencia Pólya de orden 2.

**Definición 3.5.** Una función  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función de frecuencia Pólya de orden 2* ( $PF_2$ ) si verifica

- a)  $h(x) \geq 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,
- b)  $\left| \frac{h(x_1 - y_1)}{h(x_2 - y_1)} - \frac{h(x_1 - y_2)}{h(x_2 - y_2)} \right| \geq 0$ ,  $\forall -\infty < x_1 < x_2 < \infty$  y  $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$ , equivalentemente,
- b')  $\log h(x)$  es una función cóncava en  $(-\infty, \infty)$ , equivalentemente,
- b'') Fijado  $\Delta$ ,  $\frac{h(x+\Delta)}{h(x)}$  es decreciente en  $x$  para  $\inf_{h(y)>0} y \leq x \leq \sup_{h(y)>0} y$ .

Una función de frecuencia de Pólya de orden 2 no es necesariamente una función de densidad, ya que  $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$  no es necesariamente 1, incluso ni siquiera tiene porque ser finito.

La equivalencia entre b') y b'') viene dada por la proposición 1,11 apartado a).

El hecho de que b'') implica b) se obtiene trivialmente teniendo en cuenta que, si el determinante es distinto de 0, b) se puede escribir como

$$\frac{h(x_1 - y_1)}{h(x_1 - y_2)} \geq \frac{h(x_2 - y_1)}{h(x_2 - y_2)},$$

y tomando  $x_1 - y_2 \leq x_2 - y_2$  y  $\Delta = y_2 - y_1$  se obtiene la desigualdad anterior.

Análogamente, b'') se obtiene de b) de manera trivial eligiendo  $y_1 = -\Delta$  e  $y_2 = 0$ . Por tanto, b) y b'') son equivalentes.

Veamos ahora las relaciones que existen entre una probabilidad de sobrevivir  $IFR$  y las funciones  $PF_2$ .

**Teorema 3.6.** Sea  $F$  una función de distribución. Entonces,  $F$   $IFR$  es equivalente a que  $\bar{F}$  sea  $PF_2$ .

*Demostración.* Por definición, si  $F$  es  $IFR$  verifica que  $\bar{F}(\Delta|t) = \bar{F}(t + \Delta)/\bar{F}(t)$  es decreciente en  $-\infty < t < \infty$  para cada  $\Delta \geq 0$ . Teniendo en cuenta que  $\bar{F} \geq 0$  y además se cumple 3.5 b''), así que, se obtiene la equivalencia. □

El siguiente resultado indica que si  $F$  es  $IFR$ , entonces  $F$  es absolutamente continua, excepto en el extremo superior de su soporte.

**Teorema 3.7.** Si  $F$  es  $IFR$  y  $F(z) < 1$ , entonces  $F$  es absolutamente continua en  $(-\infty, z)$ , es decir, que  $F$  tiene función de densidad en  $(-\infty, z)$ .

*Demostración.* Véase página 77 del libro de Barlow & Prochan [3]. □

Además, observemos la siguiente propiedad.

**Teorema 3.8.** Sea  $f$  una función de densidad que es  $PF_2$  en  $[0, \infty)$ , entonces la correspondiente función de distribución  $F = \int_0^t f(x)dx$  es  $IFR$ .

*Demostración.* Por definición, sabemos que  $F(t)$  es  $IFR$  si cumple que  $r(t) = f(t)/\bar{F}(t)$  es creciente en  $t$ . Luego, considerando  $t_1 < t_2$ , tenemos que ver que:

$$0 \geq \begin{vmatrix} f(t_1) & f(t_2) \\ \bar{F}(t_1) & \bar{F}(t_2) \end{vmatrix} = \int_0^\infty \begin{vmatrix} f(t_1) & f(t_2) \\ f(t_1+x) & f(t_2+x) \end{vmatrix} dx.$$

Como  $f$  es  $PF_2$ , el determinante dentro de la integral es  $\leq 0$ . Por lo tanto, se tiene que  $F$  es  $IFR$ .  $\square$

Ahora ya tenemos las condiciones suficientes para estudiar la monotonía de la tasa de fallo de la distribución normal truncada dada en 3.2.4.

Notar que:

$$\log f(t) = -\log(a\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}, \quad t \geq 0,$$

Derivando dos veces la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} (\log f(t))' &= -\frac{(t-\mu)}{\sigma^2} \\ (\log f(t))'' &= -\frac{1}{\sigma^2} \end{aligned}$$

como la segunda derivada es negativa, entonces el logaritmo de la función de densidad es cóncavo en  $[0, \infty)$ , luego  $f$  es  $PF_2$ . Y el teorema 3.8 asegura que la función de distribución  $F$  es  $IFR$ .



## Capítulo 4

# Distribuciones de tiempos de vida para sistemas coherentes

En el siguiente capítulo vamos a ver las propiedades del tiempo de vida de un sistema coherente con componentes que funcionan independientemente, en relación con las propiedades del tiempo de vida de cada componente. Estas propiedades se pueden ver reflejadas en el *Teorema de clausura de la propiedad IFRA*, donde denotamos IFRA a la tasa de fallo creciente en media y que definiremos a continuación. Además, veremos cómo se preservan algunas propiedades probabilísticas, como la suma de tiempos de vida para v.a con distribución IFR y la mixtura para v.a con distribución DFR.

### 4.1. Notación para sistemas coherentes en un intervalo de tiempo

En capítulos anteriores explicábamos la fiabilidad del sistema en un instante de tiempo fijo, en este caso, estudiaremos la fiabilidad del sistema en un intervalo de tiempo  $[0, t]$ . Supongamos ahora que  $T_1, T_2, \dots, T_n$  es el tiempo de vida de las componentes de un sistema coherente, podemos escribir el estado de cada componente  $X_i$  de la siguiente manera:

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_i > t, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Sea  $T$  el tiempo de vida del sistema y para cada vector  $(X_1(t), \dots, X_n(t))$  que representa el estado de las componentes, definimos  $X(t)$  de la siguiente forma,

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } T > t, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además,  $X(t) = \phi[X_1(t), \dots, X_n(t)]$ , y  $\bar{F}(t) = P(X(s) = 1 \text{ para } 0 \leq s \leq t) = P(X(t) = 1) = E[X(t)]$  ya que  $\phi$  es no decreciente. Supongamos además que las componentes son independientes, así que podemos escribir  $\bar{F}(t) = h_\phi[\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)]$  teniendo en cuenta 2.8.

Veamos ahora la clase de distribución que describe el tiempo de vida de un sistema coherente cuando sus componentes son *IFR* independientes. Notar que los fallos en las componentes, pueden afectar a la monotonía de la tasa de fallo, como puede observarse en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.1.** Sea  $F$  la distribución de vida de un sistema en paralelo con dos componentes independientes donde su función de distribución es  $F_1(t) = 1 - e^{-\alpha t}$  y  $F_2(t) = 1 - e^{-\beta t}$ .

Entonces,  $\bar{F}(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})(1 - e^{-\beta t})$ , y

$$r(t) = \frac{\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)t}}{e^{-\alpha t} + e^{-\beta t} - e^{-(\alpha + \beta)t}}.$$

La tasa de fallo es creciente si consideramos  $\alpha = \beta$ , en cambio, para valores donde  $\alpha > \beta > 0$  la tasa de fallo es no creciente cuando  $x$  toma valores grandes, como podemos observar en el siguiente gráfico.

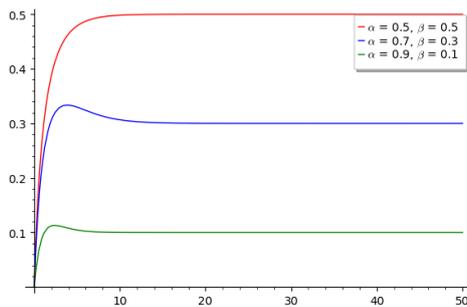


Figura 4.1: Representación de la tasa de fallo de dos componentes exponenciales tal que  $\alpha + \beta = 1$

Dado que los fallos en las componentes afectan a la monotonía de la tasa de fallo, debemos encontrar una clase más pequeña para describir los tiempos de vida de sistemas coherentes con componentes que siguen una distribución IFR.

## 4.2. Concepto de tasa de fallo en media

En la siguiente sección vamos a definir los conceptos: tasa de fallo creciente y decreciente en media (*IFRA* y *DFRA*). Es la clase más pequeña que describe el tiempo de vida de los sistemas coherentes con componentes *IFR*.

**Definición 4.2.** Se dice que una función de distribución  $F$  tiene *tasa de fallo creciente en media (IFRA)* si:

$$-\frac{1}{t} \log \bar{F}(t) \text{ es creciente en } t \geq 0.$$

Se dice que una función de distribución  $F$  tiene *tasa de fallo decreciente en media (DFRA)* si:

$$-\frac{1}{t} \log \bar{F}(t) \text{ es decreciente en } t \geq 0.$$

El siguiente objetivo es demostrar que un sistema de componentes *IFRA* independientes implica que la función de distribución del sistema completo  $F$  es *IFRA*. Este resultado se conoce como el *Teorema de Clausura de la propiedad IFRA*. Para ello, necesitaremos demostrar los siguientes resultados.

**Lema 4.3.** Sea  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  y  $0 \leq x \leq y$ . Entonces,

$$\lambda^\alpha y^\alpha + (1 - \lambda^\alpha)x^\alpha - [\lambda y + (1 - \lambda)x]^\alpha \geq 0.$$

*Demostración.* Consideramos  $f(x) = x^\alpha$ , que es una función cóncava en  $x \geq 0$  y  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Por la proposición 1.11 podemos escribir,

$$f(u_1 + \delta) - f(u_1) \geq f(u_2 + \delta) - f(u_2), \text{ si } u_1 \leq u_2. \quad (4.1)$$

Tomaremos  $\delta = \lambda(y - x)$ ,  $u_1 = \lambda x$  y  $u_2 = x$  y sustituimos en 4.1:

$$\begin{aligned} f(u_1 + \delta) - f(u_1) &\geq f(u_2 + \delta) - f(u_2) \Leftrightarrow f(\lambda x + \lambda(y - x)) - f(\lambda x) \geq f(x + \lambda(y - x)) - f(x) \Leftrightarrow \\ f(\lambda y) - f(\lambda x) &\geq f(x + \lambda y - \lambda x) - f(x) \Leftrightarrow (\lambda y)^\alpha - (\lambda x)^\alpha \geq (x + \lambda y - \lambda x)^\alpha - x^\alpha \Leftrightarrow \\ \lambda^\alpha y^\alpha + (1 - \lambda^\alpha)x^\alpha &- [\lambda y + (1 - \lambda)x]^\alpha \geq 0. \end{aligned}$$

□

En lo que sigue, necesitamos extender el concepto de sistema coherente evitando la condición de que todas las componentes sean relevantes.

**Definición 4.4.** Una función de estructura se dice *monótona* si  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  es creciente en cada argumento.

Notar que, como habíamos introducido previamente, la única diferencia con una estructura coherente es que en una estructura monótona puede haber componentes irrelevantes. El siguiente resultado muestra una propiedad para la función de fiabilidad de sistemas monótonos.

**Teorema 4.5.** Sea  $h(\mathbf{p})$  la función de fiabilidad de un sistema monótono. Entonces,

$$h(\mathbf{p}^\alpha) \geq h^\alpha(\mathbf{p}), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{p}^\alpha = (p_1^\alpha, \dots, p_n^\alpha)$ .

*Demostración.* Procedamos por inducción sobre el número de componentes del sistema.

Sea  $n = 1$ :  $h(\mathbf{p}) = p$ , y el resultado es trivial. Supongamos, por hipótesis de inducción, que la desigualdad se verifica para  $n - 1$  componentes y veamos si se cumple para  $n$ . Teniendo en cuenta la descomposición descrita en el lema 2.11 podemos escribir:

$$h(\mathbf{p}^\alpha) = p_n^\alpha h(1_n, \mathbf{p}^\alpha) + (1 - p_n^\alpha) h(0_n, \mathbf{p}^\alpha).$$

Como  $h(1_n, \mathbf{p}^\alpha)$  y  $h(0_n, \mathbf{p}^\alpha)$  son las funciones de fiabilidad de un sistema monótono de  $n - 1$  componentes, por la hipótesis de inducción tenemos que  $h(1_n, \mathbf{p}^\alpha) \geq h^\alpha(1_n, \mathbf{p})$  y  $h(0_n, \mathbf{p}^\alpha) \geq h^\alpha(0_n, \mathbf{p})$ . Por tanto  $h(\mathbf{p}^\alpha) \geq p_n^\alpha h^\alpha(1_n, \mathbf{p}) + (1 - p_n^\alpha) h^\alpha(0_n, \mathbf{p})$ . Aplicamos el lema 4.3 considerando ahora  $\lambda = p_n$ ,  $y = h(1_n, \mathbf{p})$  y  $x = h(0_n, \mathbf{p})$  y se tiene

$$h(\mathbf{p}^\alpha) \geq p_n^\alpha h^\alpha(1_n, \mathbf{p}) + (1 - p_n^\alpha) h^\alpha(0_n, \mathbf{p}) \geq [p_n h(1_n, \mathbf{p}) + (1 - p_n) h(0_n, \mathbf{p})]^\alpha = [h(\mathbf{p})]^\alpha.$$

□

Tenemos las herramientas suficientes para poder demostrar el **Teorema de Clausura de la propiedad IFRA**.

**Teorema 4.6** (Teorema de Clausura de la propiedad IFRA). *Supongamos que cada componente independiente de un sistema coherente tiene un tiempo de vida IFRA. Entonces, el sistema completo tiene un tiempo de vida  $F$  que es IFRA.*

*Demostración.* Sea  $F$  la función de distribución del tiempo de vida del sistema. Consideramos  $F_i$  la función de distribución de la componente  $i$ -ésima para cada  $i = 1, \dots, n$ . Para  $0 < \alpha \leq 1$  se tiene  $\bar{F}(\alpha t) = h[\bar{F}_1(\alpha t), \dots, \bar{F}_n(\alpha t)]$ . Teniendo en cuenta que cada componente tiene distribución IFRA, se tiene que  $\bar{F}_i(\alpha t) \geq \bar{F}_i^\alpha(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y como la función de fiabilidad  $h$  es creciente en cada componente, podemos escribir,

$$\bar{F}(\alpha t) = h[\bar{F}_1(\alpha t), \dots, \bar{F}_n(\alpha t)] \geq h[\bar{F}_1^\alpha(t), \dots, \bar{F}_n^\alpha(t)].$$

Aplicando el teorema 4.5, se tiene:

$$\bar{F}(\alpha t) \geq h[\bar{F}_1^\alpha(t), \dots, \bar{F}_n^\alpha(t)] \geq h^\alpha[\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)] = \bar{F}^\alpha(t).$$

y tomando logaritmos en la expresión anterior, se deduce fácilmente que  $F$  es IFRA. □

**Nota.** Obsérvese que la propiedad IFR implica que  $\bar{F}$  es log-cóncava, y por tanto la propiedad IFRA se verifica (tomar en la proposición 1.11 a):  $y_1 = t$  y  $x_1 = 0$ ). Luego si tenemos un sistema con componentes IFR, el resultado anterior asegura que el sistema es IFRA.

En las siguientes secciones veremos algunas propiedades interesantes relacionadas con las clases de distribuciones introducidas en los capítulos anteriores IFR y DFR.

### 4.3. Preservación de la propiedad IFR para sumas de tiempos de vida

En esta sección veremos cómo la propiedad IFR se preserva para la suma de tiempos de vida. Cuando reemplazamos una componente fallida por una nueva, el total de la distribución de vida acumulada es la suma de las dos distribuciones de vida.

**Definición 4.7.** Sea  $F_1$  y  $F_2$  dos funciones de distribución de dos variables aleatorias. Entonces

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(t-x)dF_1(x). \quad (4.3)$$

es la *convolución* de  $F_1$  y  $F_2$ . Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos componentes independientes tales que  $X_1$  tiene función de distribución  $F_1$  y  $X_2$  tiene función de distribución  $F_2$ , entonces se tiene que  $F$  es la función de distribución de  $X_1 + X_2$ .

Denotaremos como  $F$  la convolución de  $F_1$  y  $F_2$  de la siguiente manera:  $F = F_1 * F_2$ .

Notar que la definición anterior indica que si la componente 1 falla en cualquier momento  $x$  anterior a  $t$ , y la componente 2 falla durante el intervalo de tiempo  $t - x$  restante, la vida de  $X_1 + X_2$  no excede al tiempo  $t$  y viceversa. De ahí que la convolución sea la función de distribución de la suma de los tiempos de vida.

El siguiente teorema asegura que la suma de variables independientes IFR es también IFR.

**Teorema 4.8.** Sean  $F_1$  y  $F_2$  IFR, entonces su convolución

$$F(t) = \int_0^t F_2(t-x)dF_1(x) \quad (4.4)$$

es IFR.

*Demostración.* Véase páginas 100-101 del libro de Barlow & Prochan [3]. □

### 4.4. Preservación de la propiedad DFR para mixturas

Veamos que la propiedad *DFR* se preserva bajo mixturas. En primer lugar, introduciremos el concepto de mixtura mediante un ejemplo sencillo.

**Ejemplo 4.9.** Supongamos que una máquina produce un 60% de algún producto en la línea 1 y el 40% restante lo produce en la línea 2. Debido a la diferencia de máquinas, el tiempo de vida de una unidad que ha sido producida en la línea 1 tiene función de distribución  $F_1$ , mientras que la unidad que ha sido producida en la línea 2 tiene función de distribución  $F_2$  y son distintas,  $F_1 \neq F_2$ . Después de la producción, las unidades de ambas líneas se llevan a una misma sala para su empaquetamiento, de modo que los lotes de salida están producidos por una mezcla aleatoria de la producción de las dos líneas. Por tanto, el tiempo de vida de una unidad empaquetada tiene una función de distribución que viene dada por  $F = 0,6F_1 + 0,4F_2$ , esto es,  $F(x) = P(X \leq x) = 0,6P(X \leq x|L_1) + 0,4P(X \leq x|L_2)$ .

Podríamos pensar en una mixtura más compleja para el ejemplo anterior. Supongamos que una característica importante del producto anterior depende del grado de impureza  $\alpha$  de la materia prima. En este caso, la distribución de probabilidad depende de la característica  $\alpha$ , y a la función de distribución del tiempo de vida del producto con característica  $\alpha$  la denotamos como  $F_\alpha$ .

Supongamos que  $\alpha$ , el grado de impureza, es un valor aleatorio con una función de distribución  $G$ . La función de distribución de la característica vendría dada por la mixtura de las  $F_\alpha$ , que definiremos a continuación.

**Definición 4.10.** Sea  $\{F_\alpha\}$  un conjunto de funciones de distribución. Sea  $\alpha$  un valor aleatorio de una distribución  $G(\alpha)$ . Entonces la *mixtura*  $F$  de  $F_\alpha$  de acuerdo con  $G$  viene dada por la siguiente expresión:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x) dG(\alpha). \quad (4.5)$$

Notar que,  $F$  sería la función de distribución del tiempo de vida del producto anterior.

El siguiente resultado relaciona la propiedad *DFR* con la log-convexidad.

**Teorema 4.11.** *Sea  $F$  una función de distribución. Entonces,  $F$  DFR es equivalente a  $\bar{F}$  log-convexa.*

*Demostración.* Supongamos que  $F$  es *DFR*, entonces se cumple que  $\bar{F}(x|t)$  es creciente en  $-\infty < t < \infty$  para cada  $x \geq 0$ . Esto es,  $\bar{F}(x|t) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)}$  es creciente cuando  $\bar{F}(x) > 0$ , y  $\log(\bar{F}(x+t)) - \log(\bar{F}(x))$  es creciente, de manera que la función  $\bar{F}$  es log-convexa.  $\square$

Del resultado anterior 4.11 y de la preservación de la log-convexidad bajo mixturas 1.14, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.12.** *Si para todo  $\theta$  en el soporte de  $\Theta$  de una función de distribución  $G$ ,  $F(\cdot, \theta)$  es *DFR*, entonces se verifica que*

$$F(x) = \int_{\Theta} F(x, \theta) dG(\theta) \quad (4.6)$$

*es también DFR.*

*Demostración.* Es claro que si  $F(\cdot, \theta)$  es *DFR* entonces por el teorema anterior 4.11 se tiene que  $\bar{F}(\cdot, \theta)$  es log-convexa y basta aplicar la proposición 1.14 para obtener el resultado.  $\square$

**Nota.** Sea  $F(x, \theta) = 1 - e^{-\theta x}$ ,  $x \geq 0$  la función de distribución de una distribución exponencial. Sabemos que la distribución exponencial es *DFR* y también *IFR*. En particular, si es *DFR* entonces implica que las mixturas de las distribuciones exponenciales también son *DFR*.

Volviendo al ejemplo anterior, si los tiempos de vida con un grado de impureza  $\alpha$  son exponenciales, el tiempo de vida de la componente será *DFR*. Aunque pueda parecer contrario a la intuición pensar en datos reales que tengan distribución *DFR*, observamos con este ejemplo como esta propiedad puede verificarse en la realidad.

Notemos, además, que la distribución exponencial es muy común para modelar tiempos de vida. En el siguiente capítulo haremos una comprobación empírica de esta propiedad usando datos de un artículo de Proschan [5], que es un artículo clásico en la teoría de la fiabilidad.



## Capítulo 5

# Ejemplo real de datos con tasa de fallo decreciente

En el siguiente capítulo estudiaremos el comportamiento de los datos del artículo [5]. Este artículo recoge datos sobre los intervalos de tiempo entre las averías del sistema de aire acondicionado de unos aviones Boeing 720. El objetivo es estudiar el comportamiento de estos datos para determinar a qué distribución se ajustan individual y conjuntamente.

Los datos que utilizaremos aparecen en la tabla A.1 del apéndice. En total se tomaron datos de trece de estos aviones así que comenzaremos, para formarnos una idea global, realizando un diagrama de cajas donde aparezcan diferenciados los datos de cada avión (véase apéndice, figura A.2), así como una tabla resumen de las principales medidas descriptivas asociadas a cada avión (véase apéndice, figura A.3). Notar que, a la vista del resumen descriptivo, y del gráfico presentado, se observa cómo los datos presentan bastante heterogeneidad según el avión considerado.

La heterogeneidad en los tiempos de vida se ve reflejada en el diagrama de cajas, por ejemplo, en la diferente variabilidad de los datos, obsérvense las diferentes amplitudes de las cajas centrales, que representan el rango intercuartílico, cuyo valor numérico se puede ver en la tabla descriptiva (coeficiente IQR). La asimetría de los datos también se observa en el diagrama de cajas (la mediana no está centrada en la caja, y existe un mayor rango de variación en los datos superiores). Notar que, los aviones con mayor variabilidad son los aviones 7915 y 7917 debido a las amplitudes de las cajas centrales del diagrama de caja. De lo comentado, concluimos que los datos presentan un comportamiento asimétrico en cada avión y heterogéneo entre los aviones.

En particular, tomaremos los aviones 7908, 7909, 7912 y 7913 ya que tienen un número alto de observaciones y realizaremos un análisis descriptivo de estos en mayor profundidad.

Nos centramos en la media (columna *mean*) y el coeficiente de asimetría (columna *skewness*), (véase apéndice, figura A.3). Entre los cuatro aviones, el avión con mayor media es el avión 7908 que vale 95.69565, es decir, es el avión con mayor tiempo entre fallos sucesivos. En cuanto a el coeficiente de asimetría, todos los aviones presentan un coeficiente de asimetría positivo y nuevamente el avión 7908 es el de mayor distribución positivamente sesgada. La clara asimetría en los tiempos de vida de los aviones nos sugiere que una distribución exponencial puede ser apropiada para los tiempos de vida de cada avión.

A continuación, calcularemos el gráfico de comparación de cuantiles para determinar si una distribución exponencial resulta apropiada para describir los tiempos de fallo de cada avión. El gráfico de comparación de cuantiles nos permite comparar la función de distribución de un conjunto de datos con la distribución especificada. En nuestro caso, utilizaremos la distribución exponencial.

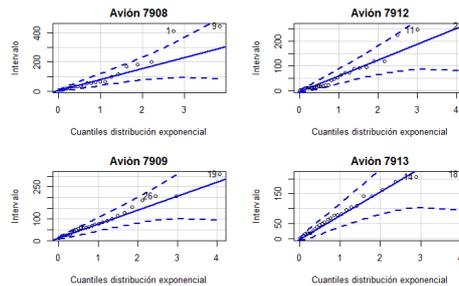


Figura 5.1: Grafica de distribución de comparación exponencial para cada avión individual

Los gráficos anteriores sugieren que estos aviones se ajustan a una distribución exponencial ya que los valores que toman sus cuantiles se encuentran dentro de las bandas de confianza de esta distribución. En la gráfica del avión 7908 se observa un posible dato atípico, notar que es el segundo dato más grande de todos los que se producen en ese avión (véase apéndice A.1) y, además, es el primer dato recogido.

Por otro lado, dibujaremos un histograma para cada avión y superponemos la curva de densidad de la distribución exponencial estimada mediante el estimador máximo verosímil que viene dado por  $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$ .

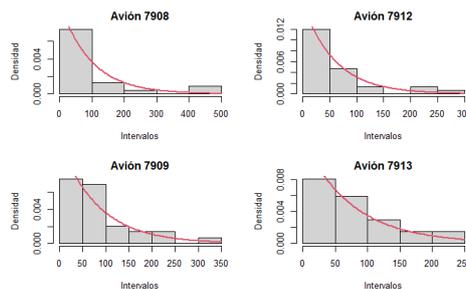


Figura 5.2: Histograma para cada avión individual

Podemos realizar un análisis más profundo utilizando un test que nos indique si los datos de cada avión se ajustan a un modelo exponencial, utilizaremos a lo largo de este capítulo el test de Epstein que describiremos a continuación. Este test es una prueba para saber si la distribución de los datos recogidos sigue una distribución exponencial o si se trata de una distribución de tasa de fallo monótona. Podemos encontrar una descripción completa de este test en el siguiente libro [6], páginas 495-504.

Supongamos que tenemos unas variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo a una función de distribución  $F$ . Consideraremos como hipótesis nula una distribución de tasa de fallo constante, es decir,  $F$  tiene función de distribución exponencial,  $H_0 : F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ , y la compararemos con una distribución de tasa de fallo monótona. A continuación describimos en qué consiste el test de Epstein, este test se basa en las propiedades de los estadísticos ordenados de la distribución exponencial.

**Test de Epstein:** Dada una muestra aleatoria simple  $X_1, \dots, X_n$  consideramos los estadísticos ordenados,  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ , esto es, los valores de la muestra ordenados de menor a mayor, de modo que  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  y fijamos  $X_0 = 0$ . Calculamos la distancia entre estadísticos ordenados consecutivos y normalizamos

$$D_i = (n - i + 1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}), \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Definimos las siguientes sumas de distancias:

$$S_i = \sum_{j=1}^i D_j, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

y definimos  $S_0 = 0$ . Consideraremos el siguiente estadístico de contraste  $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n-1} S_i / S_n$ .

Dado un nivel de significación  $\alpha$  y considerando el valor umbral  $e_\alpha$  que viene dado por la función Epstein (véase A.5 para valores de  $n = 3, \dots, 13$ ), el test indica lo siguiente según la hipótesis alternativa que escojamos:

- a) Aceptamos como hipótesis alternativa que F es IFR si:  $\varepsilon \geq e_\alpha$ ,
- b) Aceptamos como hipótesis alternativa que F es DFR si:  $\varepsilon \leq \frac{n-1}{2} - e_\alpha$ ,
- c) Aceptamos como hipótesis alternativa que F es IFR o F es DFR si:  $\varepsilon \geq e_{\alpha/2}$  o  $\varepsilon \leq \frac{n-1}{2} - e_{\alpha/2}$ .

Cuando el tamaño de la muestra es grande, los cálculos se hacen a partir de una aproximación normal. Es decir, si  $n \rightarrow \infty$ , entonces la distribución de  $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - E_0(\varepsilon)}{\sqrt{Var_0(\varepsilon)}} = \frac{\varepsilon - \frac{n-1}{2}}{\sqrt{\frac{n-1}{12}}}$ , tiende a una distribución  $N(0, 1)$ .

Hemos realizado el test de Epstein a cada avión individual utilizando como la hipótesis alternativa c), es decir, que F tiene tasa de fallo monótona. Hemos utilizado un nivel de significación  $\alpha = 0,05$ . Para realizar este test hemos utilizado la librería *NSM3* del software matemático *Rstudio*. Según el número de observaciones hemos realizado test exacto o test aproximado, los resultados se muestran en las figuras A.6 y A.7. El resultado que obtenemos es que no se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, parece plausible pensar que los datos de cada uno de los aviones individualmente se ajustan a una distribución exponencial.

El segundo objetivo es observar el comportamiento de los datos en su conjunto. Recordar que la nota 4.4 del capítulo anterior aseguraba que la mixtura de funciones exponenciales es DFR. Por tanto, teniendo en cuenta que cada avión individual se ajusta a una distribución exponencial, comprobemos que los datos en su conjunto se ajustan a una distribución DFR.

En primer lugar, el análisis descriptivo del conjunto completo indica que la media entre los fallos consecutivos es 93,14085 (véase apéndice, figura A.4). Además, el coeficiente de asimetría es positivo, esto indica que estos datos son positivamente sesgados. Veamos el gráfico de comparación de cuantiles para determinar si una distribución exponencial resulta apropiada para describir los fallos de los datos en su conjunto.

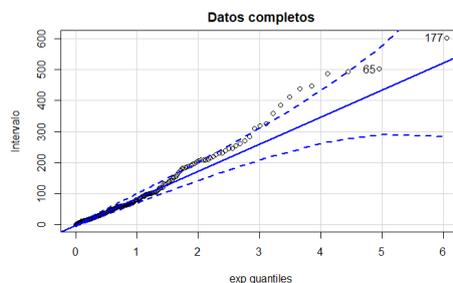


Figura 5.3: Gráfica de comparación de cuantiles

No parece plausible que los datos en su conjunto se ajusten a una distribución exponencial ya que los valores no se encuentran dentro de las bandas de confianza.

Además, comprobaremos empíricamente que la función de supervivencia de los datos habla a favor de una distribución DFR usando el siguiente resultado que asegura que una distribución DFR cruza una única vez la distribución exponencial.

**Teorema 5.1.** Sea  $F$  una función de distribución con densidad  $f$  que verifica (a)  $F(t) = 0$  para  $t < 0$ , (b) la tasa de fallo  $r(t) = f(t)/\bar{F}(t)$  es decreciente para  $t \geq 0$ . Sea  $F(\xi_p) = p$ , esto es,  $\xi_p$  es el  $p$ -ésimo percentil. Entonces

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} \leq e^{-\alpha t} & \text{si } t \leq \xi_p, \\ \geq e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq \xi_p, \end{cases}$$

donde  $\alpha = -\log(1 - p)/\xi_p$ .

*Demostración.* Véase páginas 375-389 del libro de Barlow, Marshall, Prochan (1963) [2]. □

Observemos el gráfico donde aparece la función de supervivencia de los datos, es claro que cruza una única vez la función de supervivencia exponencial (curva roja en el gráfico) y además en el sentido que indica el resultado, es decir, la función de supervivencia de los datos se encuentra por debajo de la función de supervivencia exponencial para  $0 \leq t \leq 150$  y por encima para  $t \geq 150$ . Luego esto sugiere que la función de distribución para los datos en su conjunto se ajusta a una distribución con tasa de fallo decreciente (DFR).

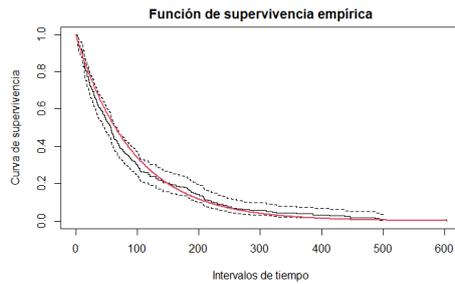


Figura 5.4: Función de supervivencia

Veamos de forma analítica cómo asegurar que la distribución no es exponencial, sino DFR. Para ello aplicaremos nuevamente el test de contraste Epstein (véase 5). Hemos considerado el nivel de significación  $\alpha = 0,05$  y utilizamos como hipótesis alternativa una distribución DFR. Obtenemos un p-valor de 0.006859 (véase apéndice A.8), es decir, rechazamos la hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa. Así que, tanto los resultados teóricos como los resultados observados nos hacen decantarnos por esa hipótesis alternativa de que los datos se ajustan a una distribución DFR.

En conclusión, todo parece indicar que la distribución de los datos de cada avión individual es exponencial con diferentes parámetros, luego podemos asumir que los datos provienen de una mixtura de exponenciales y además haciendo uso del teorema 4.12 que asegura que la mixtura de exponenciales es DFR y con el análisis que hemos realizado, podemos concluir que la tasa de fallo de los datos de aire acondicionado de los aviones Boeing 720 considerados en su conjunto es decreciente.

# Apéndice A

## Datos necesarios para el capítulo 5

Tabla de datos recogidos en el artículo.

*Intervals between failures*

Plane												
7907	7908	7909	7910	7911	7912	7913	7914	7915	7916	7917	8044	8045
194	413	90	74	55	23	97	50	359	50	130	487	102
15	14	10	57	320	261	51	44	9	254	493	18	209
41	58	60	48	56	87	11	102	12	5		100	14
29	37	186	29	104	7	4	72	270	283		7	57
33	100	61	502	220	120	141	22	603	35		98	54
181	65	49	12	239	14	18	39	3	12		5	32
	9	14	70	47	62	142	3	104			85	67
	169	24	21	246	47	68	15	2			91	59
	447	56	29	176	225	77	197	438			43	134
	184	20	386	182	71	80	188				230	152
	36	79	59	33	246	1	79				3	27
	201	84	27	**	21	16	88				130	14
	118	44	**	15	42	106	46					230
	**	59	153	104	20	206	5					66
	34	29	26	35	5	82	5					61
	31	118	326		12	54	36					34
	18	25			120	31	22					
	18	156			11	216	139					
	67	310			3	46	210					
	57	76			14	111	97					
	62	26			71	39	30					
	7	44			11	63	23					
	22	23			14	18	13					
	34	62			11	191	14					
		**			16	18						
		130			90	163						
		208			1	24						
		70			16							
		101			52							
		208			95							

(\*\* major overhaul)

Figura A.1: Tabla 1

Diagrama de cajas para cada avión individual.

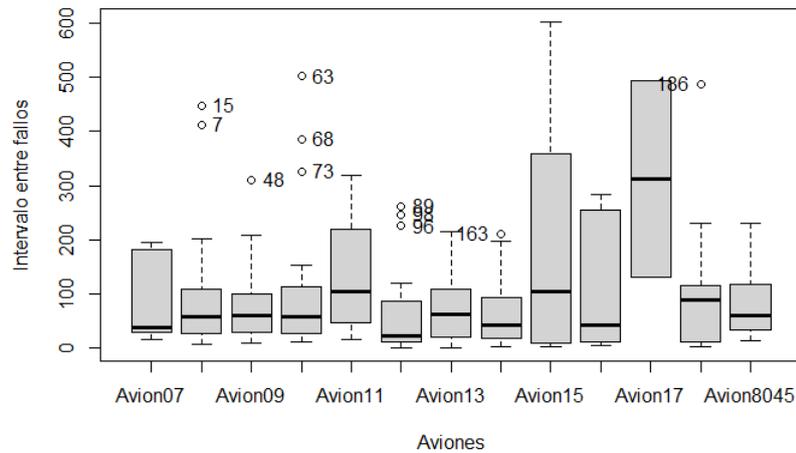


Figura A.2: Diagrama de cajas

Resumen de todos los datos recogidos en el artículo considerando cada avión individual y el resumen de los datos completos. En la siguiente figura no aparece el Avión 7917, ya que solo tiene 2 datos.

```
Datosnuevos <- Datos[-c(184,185),]
numSummary(Datosnuevos[, "Intervalo", drop=FALSE], groups=Datosnuevos$Avionfactor, statistics=c("mean",
"sd", "IQR", "quantiles", "skewness"), quantiles=c(0,.25,.5,.75,1), type="2")

## Warning in numSummary(Datosnuevos[, "Intervalo", drop = FALSE], groups =
## Datosnuevos$Avionfactor, : the following groups are empty: Avion17

##      mean      sd   IQR  skewness 0% 25% 50% 75% 100% Intervalo:n
## Avion07  82.16667 82.12775 116.00 0.9326607 15 30.00 37.0 146.00 194      6
## Avion08  95.69565 119.28973  82.50 2.1401451  7 26.50 57.0 109.00 447     23
## Avion09  83.51724  70.80588  72.00 1.6065692 10 29.00 61.0 101.00 310     29
## Avion10 121.26667 154.26854  85.50 1.6978040 12 28.00 57.0 113.50 502     15
## Avion11 130.85714  98.19436 161.50 0.5340785 15 49.00 104.0 210.50 320     14
## Avion12  59.60000  71.88477  70.50 1.7840772  1 12.50 22.0  83.00 261     30
## Avion13  76.81481  63.71272  87.50 0.8503417  1 21.00 63.0 108.50 216     27
## Avion14  64.12500  62.65247  70.00 1.2621538  3 20.25 41.5  90.25 210     24
## Avion15 200.00000 225.91149 350.00 0.7442131  2  9.00 104.0 359.00 603      9
## Avion16 106.50000 126.84282 185.25 0.9219891  5 17.75 42.5 203.00 283      6
## Avion8044 108.05333 136.23206  92.25 2.2395697  3 15.25 88.0 107.50 487     12
## Avion8045  82.00000  66.31943  76.50 1.2235997 14 33.50 60.0 110.00 230     16
```

Figura A.3: Resumen de los aviones individualmente omitiendo el Avión 7917.

```
numSummary(Datos[, "Intervalo", drop=FALSE], statistics=c("mean", "sd", "IQR", "quantiles",
"skewness"), quantiles=c(0,.25,.5,.75,1), type="2")

##      mean      sd   IQR  skewness 0% 25% 50% 75% 100%  n
## 93.14085 106.7636  96  2.12686  1 22 57 118 603 213
```

Figura A.4: Resumen de los datos en su conjunto

Tabla de valores de la función Epstein para  $n = 3, \dots, 13$ .

<i>Selected Upper-Tail Critical Values for the Null Distribution of the Epstein statistic</i>					
<i>n</i>	<i>α</i>				
	<i>.10</i>	<i>.05</i>	<i>.025</i>	<i>.01</i>	<i>.005</i>
3	1.553	1.684	1.176	1.852	1.900
4	2.157	2.331	2.469	2.609	2.689
5	2.753	2.953	3.120	3.300	3.411
6	3.339	3.565	3.754	3.963	4.097
7	3.917	4.166	4.367	4.610	4.762
8	4.489	4.759	4.988	5.244	5.413
9	5.056	5.346	5.592	5.869	6.053
10	5.619	5.927	6.189	6.487	6.683
11	6.178	6.504	6.781	7.097	7.307
12	6.735	7.077	7.369	7.702	7.924
13	7.289	7.647	7.953	8.302	8.530

Figura A.5: Tabla de valores para la función Epstein

Resultados del Test de Epstein para los cuatro aviones con mayor número de datos. También hemos realizado el test al resto de los aviones utilizando adecuadamente test exacto o aproximado según el número de observaciones.

```
test<- epstein(Avion7908$Intervalo,alternative="two.sided",exact=FALSE)
## E** -1.383479
## p= 0.166518

test<- epstein(Avion7909$Intervalo,alternative="two.sided",exact=FALSE)
## E** 1.080097
## p= 0.2800988

test<- epstein(Avion7912$Intervalo,alternative="two.sided",exact=FALSE)
## E** -1.763589
## p= 0.07780118

test<- epstein(Avion7913$Intervalo,alternative="two.sided",exact=FALSE)
## E** 0.5889588
## p= 0.5558889
```

Figura A.6: Test de Epstein para los aviones 7908,7909,7912 y 7913.

```

test<- epstein(Avion7907$Intervalo,alternative="two.sided",exact=TRUE)

## E= 2.243408
## p= 0.6995517

test<- epstein(Avion7910$Intervalo,alternative="two.sided",exact=FALSE)

## E*= -1.512156
## p= 0.1304942

test<- epstein(Avion7911$Intervalo,alternative="two.sided",exact=FALSE)

## E*= 0.8170731
## p= 0.4138866

test<- epstein(Avion7914$Intervalo,alternative="two.sided",exact=FALSE)

## E*= -0.3832166
## p= 0.7015592

test<- epstein(Avion7915$Intervalo,alternative="two.sided",exact=TRUE)

## E= 2.814444
## p= 0.1489283

test<- epstein(Avion7916$Intervalo,alternative="two.sided",exact=TRUE)

## E= 1.665102
## p= 0.2024946

test<- epstein(Avion7917$Intervalo,alternative="two.sided",exact=TRUE)

## E= 0.4173355
## p= 0.8346709

test<- epstein(Avion8044$Intervalo,alternative="two.sided",exact=FALSE)

## E*= -1.334774
## p= 0.1819502

test<- epstein(Avion8045$Intervalo,alternative="two.sided",exact=FALSE)

## E*= 0.8194371
## p= 0.4125371

```

Figura A.7: Test de Epstein para el resto de los aviones

Test de Epstein para los aviones considerados en su conjunto.

```

test<- epstein(Datos$Intervalo,alternative="dfx")

## E*= -2.464564
## p= 0.006859003

```

Figura A.8: Test de Epstein conjunto de datos completo

# Bibliografía

- [1] ALBERT W. MARSHALL, INGRAM OLKIN, *Life Distribution, Structure of Nonparametric, Semiparametric and Parametric Families*, University of British Columbia, Vancouver, BC Canada, 2007.
- [2] BARLOW, R. E., MARSHALL A.W., & PROSCHAN, F. (1963). *Properties of probability distributions with monotone hazard rate*. Ann. Math. Stat., Vol.34, No.2.
- [3] BARLOW, R. E., & PROSCHAN, F. (1981). *Statistical Theory of reliability and life testing: probability models*. Holt, Rinehart and Winston.
- [4] FRANCISCO J. SAMANIEGO, *System Signatures and their Applications in Engineering Reliability*, University of California at Davis, Davis, CA, USA.
- [5] FRANK PROSCHAN(1963), *Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate*, Technometrics, Vol. 5, No.3. Páginas. 375-383. Disponible en <http://www.jstor.org/stable/1266340>
- [6] M. HOLLANDER, D.A WOLFE, E. CHICKEN, *Nonparametric Statistical Methods*, Third Edition, New York, NY, 2014. Capítulo 11.