



Trabajo Fin de Grado
Grado en Física

Desarrollo de un modelo bidimensional de flujo bicapa

Sergio Gracia Borobia

Directora: Pilar García Navarro¹
Codirector: Sergio Martínez Aranda¹

(1) Área de Mecánica de Fluidos
Escuela de Ingeniería y Arquitectura
Universidad Zaragoza

Curso 2020/2021
Junio 2021

Resumen

En mecánica de fluidos existen un amplio abanico de situaciones en las que se ven involucrados fluidos inmiscibles de distintas densidades, como roturas de balsas mineras o convergencia de corrientes oceánicas. Este trabajo se centra en el desarrollo de un modelo de flujo bicapa en 2D con el objetivo de estudiar dichos fenómenos, en base a las ecuaciones de Navier-Stokes particularizadas para la situación de aguas poco profundas. Mediante una discretización basada en el método de volúmenes finitos (FVM) se implementa el esquema numérico FORCE para la resolución numérica de las ecuaciones por medio de simulaciones programadas en lenguaje C. Se realiza una valoración de la validez del modelo en base a los resultados obtenidos, comparándolos con soluciones exactas aquellos casos en los que sea posible.

Índice

1. Introduccion	1
2. Formulación del modelo bicapa	2
3. Esquema numérico de integración	5
3.1. Método de volúmenes finitos	5
3.2. Esquema FORCE para un sistema bicapa bidimensional	9
3.3. Integración de los términos fuente de presión	9
3.4. Integración de los términos fuente de fricción	10
3.5. Estabilidad temporal	11
3.6. Reconstrucción hidrostática y estado de equilibrio	11
4. Resultados obtenidos	13
4.1. Flujo Monocapa	14
4.1.1. Equilibrio estático	14
4.1.2. Rotura de presa unidimensional	15
4.1.3. Rotura de presa circular	17
4.2. Flujo Bicapa	18
4.2.1. Equilibrio estático	18
4.2.2. Rotura de presa	19
5. Conclusiones	22

1. Introduccion

Existen un gran abanico de situaciones en las que coexisten dos fluidos inmiscibles con densidades distintas: ríos que transportan sedimentos, corrientes oceánicas con salinidades diferentes, lagos con lodos estratificados, etc... El modelo de flujo bicapa permite estudiar estas situaciones, modelizándolas como dos fluidos dispuestos en capas separadas por una interfaz. El estudio de este modelo suele formularse dentro del contexto de aguas poco profundas, en el que se cumple que la longitud de onda de las perturbaciones gravitatorias es mucho mayor que la profundidad del fluido. El modelo bicapa sigue siendo estudiado por multitud de autores en la actualidad [1–3], debido a su interés en aplicaciones reales y a su elevada complejidad matemática[2].

Como primer ejemplo es necesario mencionar el estrecho de Gibraltar, al sur de España. En esta zona geográfica convergen dos corrientes marítimas, procedentes del mar Mediterráneo y del océano Atlántico. La corriente mediterránea, con una salinidad mucho mayor y por tanto también una densidad superior, se introduce bajo la corriente atlántica, creando una situación de flujo bicapa y generando ondas de presión de grandes dimensiones como consecuencia de la interacción en la interfaz entre ambas corrientes.

Como segundo ejemplo se encuentran las balsas mineras, construidas con el propósito de almacenar los residuos procedentes de minas o canteras cercanas, consistiendo generalmente en lodos. Al llegar a la balsa, se produce un proceso de estratificación por el cual los lodos más densos se depositan sobre el fondo, y los fluidos menos densos, como el agua, emergen hacia la zona superficial, creándose una situación bicapa con una interfaz agua-lodo. Mientras permanecen almacenados en la balsa, la situación en la que se encuentran puede aproximarse por una de equilibrio estático. Sin embargo, si se produce una rotura en la presa o dique que contiene los fluidos, se elimina la restricción que los fuerza a permanecer en equilibrio y comienzan a moverse. Por este motivo, el estudio de roturas de presa para flujos bicapa resulta interesante desde el punto de vista académico, sobre todo en un marco bidimensional, pues representa una situación real, tomando como ejemplo las roturas de presa de Aznalcollar (España) [4] y Brumadinho (Brasil).

El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo bicapa en dos dimensiones capaz de reproducir situaciones estáticas y de rotura de presa en las que el flujo se desarrolla en más de una dirección. Para ello, como en todo problema de mecánica de fluidos, se plantean las ecuaciones de Navier-Stokes (3D), formuladas dentro del contexto de aguas poco profundas. Después, se lleva a cabo la discretización del modelo por medio del método de volúmenes finitos, con un correcto tratamiento de los flujos numéricos, para poder llevar a cabo simulaciones con herramientas computacionales.

2. Formulación del modelo bicapa

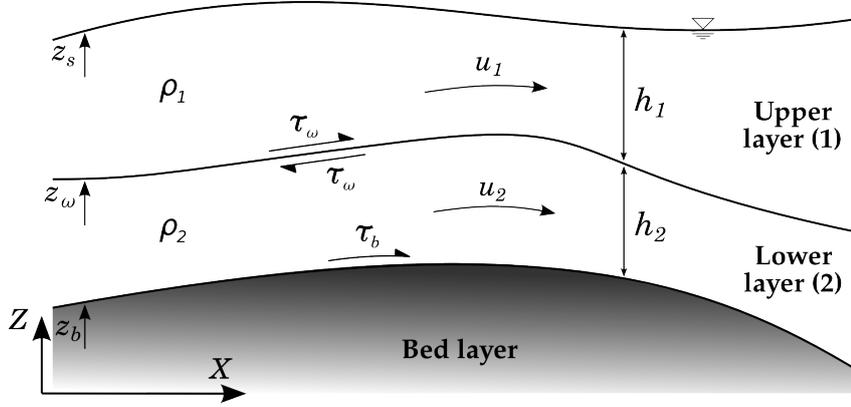


Figura 1: Representación de un corte del flujo bicapa en un plano perpendicular al movimiento.

En base al esquema mostrado en la figura 1 se plantean las ecuaciones del movimiento para cada una de las capas particularizando a una situación de aguas poco profundas (*shallow water*) que supone despreciables las aceleraciones verticales y asume por lo tanto una distribución vertical de presión hidrostática. El resultado de la integración en la vertical de las ecuaciones 3D de Navier-Stokes [5, 6], conduce a las ecuaciones 2D de conservación de masa y de cantidad de movimiento para el problema bicapa. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(h_1 v_1) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (h_1 u_1 v_1) = -g h_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - P_{1x} - \frac{\tau_{\omega x}}{\rho_1} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_1 v_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \right) = -g h_1 \frac{\partial z_b}{\partial y} - P_{1y} - \frac{\tau_{\omega y}}{\rho_1} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_2) + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(h_2 v_2) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (h_2 u_2 v_2) = -g h_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} - P_{2x} + \frac{\tau_{\omega x}}{\rho_2} - \frac{\tau_{bx}}{\rho_2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 u_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_2 v_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \right) = -g h_2 \frac{\partial z_b}{\partial y} - P_{2y} + \frac{\tau_{\omega y}}{\rho_2} - \frac{\tau_{by}}{\rho_2} \quad (6)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican la capa superior o inferior respectivamente, mientras que los subíndices x, y indican los ejes horizontales del sistema de referencia. La magnitud h_l , con $l = 1, 2$, corresponde a la profundidad o grosor de cada capa y z_b a la altura del fondo, que se define fijo e invariable en el tiempo. Además, (u_l, v_l) son las velocidades promediadas

en la vertical para cada una de las capas, en las direcciones x e y respectivamente, y g es la aceleración de la gravedad.

Por otra parte, los términos $-gh_i \frac{\partial z_b}{\partial x_j}$ representan la presión que ejerce el fondo sobre cada fluido, mientras que los términos P_{1j} dan cuenta de la presión que ejerce una capa sobre otra, como consecuencia de la integración vertical del gradiente de presión hidrostática en el sistema bicapa:

$$P_{1j} = gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x_j} \quad (7)$$

$$P_{2j} = rgh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x_j} \quad (8)$$

definiendo $r = \rho_1/\rho_2$ como la relación entre las densidades de ambas capas. Se observa una forma funcional similar al término de presión del fondo, por lo que P_{1j} puede interpretarse como que la capa superior se mueve sobre un fondo con $z_b + h_2$ (en términos de presión) mientras que el movimiento de la capa inferior se ve afectado por la acción de la superior, además de estar relacionado con el cociente entre densidades.

Las fuerzas de fricción se dividen en dos contribuciones: en primer lugar, τ_{bj} es el esfuerzo de rozamiento entre la capa inferior y el lecho z_b , en cualquiera de los dos ejes. Usualmente se define a través del cuadrado de la velocidad [7]:

$$\tau_{bx} = \rho_2 gh_2 C_{fb} |U_2| u_2 \quad (9)$$

$$\tau_{by} = \rho_2 gh_2 C_{fb} |U_2| v_2 \quad (10)$$

donde $U_2 = \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$ es el módulo de la velocidad en la segunda capa y C_{fb} es un factor de fricción turbulenta, que según la ley de Manning se define como $C_{fb} = n_b^2/h_2^{4/3}$, con n_b el coeficiente de rugosidad del lecho. En segundo lugar, $\tau_{\omega j}$ es el esfuerzo de rozamiento en la interfaz entre ambas capas producido por el movimiento relativo de las mismas. Esta se define mediante la ley de Chézy, y depende del cuadrado de la velocidad relativa entre la capa superior y la inferior:

$$\tau_{\omega x} = \rho_1 g C_{fw,1} |U_1 - U_2| (u_1 - u_2) = \rho_2 g C_{fw,2} |U_1 - U_2| (u_1 - u_2) \quad (11)$$

$$\tau_{\omega y} = \rho_1 g C_{fw,1} |U_1 - U_2| (v_1 - v_2) = \rho_2 g C_{fw,2} |U_1 - U_2| (v_1 - v_2) \quad (12)$$

donde los coeficientes de fricción en la interfaz se definen de manera que $C_{fw,2} = rC_{fw,1}$ y toman un valor fijo una vez definido el ratio de densidades.

El sistema de ecuaciones (1)-(6) constituye conjunto de leyes de conservación dependiente del tiempo y con términos fuente, que puede ser incluido dentro del conjunto de sistemas hiperbólicos. Reformulándolo en forma vectorial:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (13)$$

\mathbf{U} es el vector de variables conservadas, mientras que $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ y $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ son los vectores de flujos convectivos a lo largo de los ejes x e y respectivamente, y $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ es el vector de términos fuente:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 u_1 \\ h_1 v_1 \\ h_2 \\ h_2 u_2 \\ h_2 v_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} h_1 u_1 \\ h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \\ h_1 u_1 v_1 \\ h_2 u_2 \\ h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \\ h_2 u_2 v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} h_1 v_1 \\ h_1 u_1 v_1 \\ h_1 v_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \\ h_2 v_2 \\ h_2 u_2 v_2 \\ h_2 v_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_p(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_\tau(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g h_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - P_{1x} \\ -g h_1 \frac{\partial z_b}{\partial y} - P_{1y} \\ 0 \\ -g h_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} - P_{2x} \\ -g h_2 \frac{\partial z_b}{\partial y} - P_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_{\omega x}}{\rho_1} \\ -\frac{\tau_{\omega y}}{\rho_1} \\ 0 \\ \frac{\tau_{\omega x}}{\rho_2} - \frac{\tau_{b x}}{\rho_2} \\ \frac{\tau_{\omega y}}{\rho_2} - \frac{\tau_{b y}}{\rho_2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Definiendo el tensor de flujos $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{U}) = (\mathbf{F}(\mathbf{U}), \mathbf{G}(\mathbf{U}))$, es posible reescribir el sistema (13) como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (17)$$

donde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Se define la matriz jacobiana del tensor de flujos como

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{A} n_x + \mathbf{B} n_y \quad (18)$$

siendo $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ el vector normal a la dirección del movimiento, y las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1v_1 & v_1 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_2v_2 & v_2 & u_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1v_1 & v_1 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1^2 - v_1^2 & 0 & 2v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -u_2v_2 & v_2 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_2^2 - v_2^2 & 0 & 2v_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

donde $c_l = \sqrt{gh_l}$ con $l = 1, 2$, es la celeridad de las ondas infinitesimales en cada una de las capas .

Diagonalizando este Jacobiano se obtienen los autovalores, que informan de la velocidad de propagación de información en este problema hiperbólico:

$$\begin{aligned} \lambda_I &= (u_1n_x + v_1n_y) - c_1, & \lambda_{II} &= (u_1n_x + v_1n_y), & \lambda_{III} &= (u_1n_x + v_1n_y) + c_1 \\ \lambda_{IV} &= (u_2n_x + v_2n_y) - c_2, & \lambda_V &= (u_2n_x + v_2n_y), & \lambda_{VI} &= (u_2n_x + v_2n_y) + c_2 \end{aligned} \quad (21)$$

Tal y como indican los subíndices de las velocidades, los autovalores λ_I , λ_{II} y λ_{III} están vinculados a la capa superior, mientras que λ_{IV} , λ_V y λ_{VI} se relacionan con la capa inferior.

3. Esquema numérico de integración

3.1. Método de volúmenes finitos

Una vez presentadas las ecuaciones para los flujos bicapa en condiciones de aguas poco profundas, es necesario realizar una discretización tanto temporal como espacial de las mismas para poder llevar a cabo simulaciones en el ámbito computacional. En concreto, se opta por una discretización espacial uniforme, definida a través de Δx , Δy , y mediante la cual se divide el dominio espacial en celdas. A lo largo de este trabajo, se hará uso únicamente de celdas cuadradas y uniformes, lo que implica $\Delta x = \Delta y$. Por otra parte, se escoge definir una discretización temporal Δt variable, cuyo valor se determina a través de la condición CFL en cada paso de tiempo (ver sección 3.5. Las ecuaciones del movimiento

(1)-(6) se discretizan mediante el método de volúmenes finitos, basado en la integración espacial y temporal del sistema (17):

$$\int_t \int_S \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dS dt + \int_t \int_S \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{U}) dS dt = \int_t \int_S \mathbf{S}(\mathbf{U}) dS dt \quad (22)$$

Comenzando por el primer término, como la integración espacial es independiente de la temporal, es posible realizar la siguiente transformación:

$$\int_t \int_S \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dS dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \mathbf{U} dS \right) dt = \int_S \mathbf{U}(t_{n+1}) dS - \int_S \mathbf{U}(t_n) dS \quad (23)$$

Incluyendo los límites de la integral de superficie en cada celda de la malla, que se realiza en coordenadas cartesianas dado el carácter cuadrado de la misma, este término queda:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}} y_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}} y_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(x, y, t_{n+1}) dS - \int_{x_{i-\frac{1}{2}} y_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}} y_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(x, y, t_n) dS \quad (24)$$

Por otra parte, por la ley de Gauss, la segunda integral se transforma en

$$\int_t \int_S \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} dS dt = \int_t \oint_l \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n} dl dt \quad (25)$$

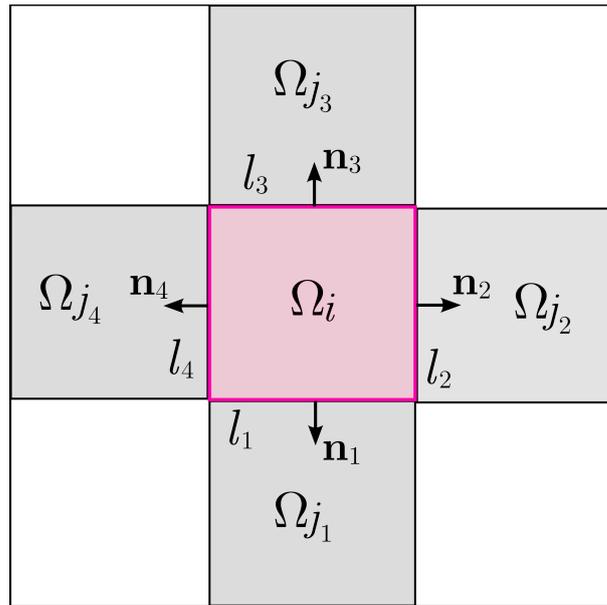


Figura 2: Representación de la geometría de la discretización en celdas del dominio, centrada en la celda (i, j) .

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal saliente para cada una de las paredes de la celda computacional. La integración espacial se reduce al perímetro de la celda que, al ser cuadrada, permite la separación en cuatro integrales de línea iguales a lo largo de cada una de las paredes (figura 2), evaluando el tensor de flujos en dichas paredes:

$$\oint_l \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n} dl = \int_1 (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n})_{i,j-\frac{1}{2}} dl + \int_2 (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n})_{i+\frac{1}{2},j} dl + \int_3 (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n})_{i,j+\frac{1}{2}} dl + \int_4 (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n})_{i-\frac{1}{2},j} dl \quad (26)$$

siendo cada componente del flujo

$$\tilde{\mathbf{E}}_{i,j-\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{E}} \left(\mathbf{U}(x, y_{i,j-\frac{1}{2}}, t) \right) \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{i+\frac{1}{2},j} = \tilde{\mathbf{E}} \left(\mathbf{U}(x_{i+\frac{1}{2},j}, y, t) \right) \quad (28)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{i,j+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{E}} \left(\mathbf{U}(x, y_{i,j+\frac{1}{2}}, t) \right) \quad (29)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{i-\frac{1}{2},j} = \tilde{\mathbf{E}} \left(\mathbf{U}(x_{i-\frac{1}{2},j}, y, t) \right) \quad (30)$$

y las dirección de las normales en la pared es siempre saliendo de la celda

$$\mathbf{n}_{i,j-\frac{1}{2}} = (0, -1) \quad (31)$$

$$\mathbf{n}_{i+\frac{1}{2},j} = (1, 0) \quad (32)$$

$$\mathbf{n}_{i,j+\frac{1}{2}} = (0, 1) \quad (33)$$

$$\mathbf{n}_{i-\frac{1}{2},j} = (-1, 0) \quad (34)$$

Es necesario destacar que, al trabajar en un dominio bidimensional, al realizar la proyección del tensor de flujos $\tilde{\mathbf{E}}$ sobre cualquiera de las paredes, siendo $k = (i, j - \frac{1}{2})$, $(i + \frac{1}{2}, j)$, $(i, j + \frac{1}{2})$, $(i - \frac{1}{2}, j)$, este se descompondrá en las contribuciones de cada eje:

$$\left(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n} \right)_k = \mathbf{F}n_x + \mathbf{G}n_y \quad (35)$$

Esta formulación permite dividir el problema bidimensional en dos problemas unidimensionales, uno por cada eje, simplificando la implementación computacional y facilitando la interpretación de problemas unidimensionales en un dominio bidimensional, independientemente de sobre qué eje se desarrollen.

Realizando la aproximación de que el tensor de flujos es constante a lo largo de la pared donde se proyecta, con longitud l_w , el sistema (22) se reescribe como:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} [\mathbf{U}(x, y, t_{n+1}) - \mathbf{U}(x, y, t_n)] dx dy + l_w \sum_k \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n})_k dt = \\
 & = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [\mathbf{S}_p(\mathbf{U}(x, y, t)) + \mathbf{S}_\tau(\mathbf{U}(x, y, t))] dx dy dt
 \end{aligned} \tag{36}$$

Asumiendo que el vector de variables conservadas \mathbf{U} en un cierto tiempo t_n es uniforme en toda la celda (i, j) , se puede aproximar como:

$$\mathbf{U}_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(x, y, t_n) dx dy \tag{37}$$

donde $\Delta x \Delta y = \Delta A$ corresponde al área de la celda. Así mismo, suponiendo que el tensor de flujos $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{U})$ es uniforme a lo largo de la pared k durante el paso de tiempo, puede aproximarse como:

$$(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n})_k^* = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n})_k dt \tag{38}$$

Para los términos fuente $\mathbf{S}(\mathbf{U})$, se aproxima que la integral espacial es constante durante el paso de tiempo, obteniendo

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [\mathbf{S}_p(\mathbf{U}(x, y, t)) + \mathbf{S}_\tau(\mathbf{U}(x, y, t))] dx dy dt \approx \\
 & \approx \Delta t \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} [\mathbf{S}_p(\mathbf{U}(x, y, t^n)) + \mathbf{S}_\tau(\mathbf{U}(x, y, t^n))] dx dy \equiv \Delta t (\mathbf{S}_p^*)_{i,j} + \Delta t (\mathbf{S}_\tau^*)_{i,j}
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

donde $(\mathbf{S}_p^*)_{i,j}$ y $(\mathbf{S}_\tau^*)_{i,j}$ son las integraciones espaciales en la celda (i, j) de los términos fuente de presión y fricción respectivamente.

Con las variables ya discretizadas, la ecuación (36) se convierte en

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta A} l_w \sum_k (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n})_k^* + \frac{\Delta t}{\Delta A} ((\mathbf{S}_p^*)_{i,j} + (\mathbf{S}_\tau^*)_{i,j}) \tag{41}$$

Es en esta ecuación en la que se basa el desarrollo de todo el cálculo computacional, ya que proporciona la actualización temporal del vector de variables conservadas \mathbf{U} , que

contiene la información sobre las alturas de fluido en cada capa, así como de sus velocidades en ambos ejes.

3.2. Esquema FORCE para un sistema bicapa bidimensional

Como se puede apreciar en la ecuación (41), para poder llevar a cabo la actualización de $\mathbf{U}_{i,j}$ es necesario calcular los flujos que intervienen en cada pared de la celda. Existen diversos esquemas numéricos para realizar dicho cálculo, pero este trabajo se centrará en el uso del esquema FORCE (*First order centered scheme*), que ya ha sido estudiado en un contexto unidimensional [8] y con flujos bicapa [9], y que se formula como una combinación de los flujos de Lax-Friedrichs [10] y Lax-Wendroff [11] en la misma proporción. En general, para una pared k será:

$$\left(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}\right)_k^* = \frac{1}{2} \left(\left(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}\right)_k^{LF} + \left(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}\right)_k^{LW} \right) \quad (42)$$

calculando el flujo de Lax- Friedrichs como

$$\left(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}\right)_k^{LF} = \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_k^-) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_k^+)\right) \cdot \mathbf{n}_k - \frac{\Delta A}{\Delta t} (\mathbf{U}_k^- - \mathbf{U}_k^+) \right] \quad (43)$$

mientras que el flujo de Lax-Wendroff se calcula como

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}\right)_k^{LW} &= \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_k^{LW}) \cdot \mathbf{n}_k \\ \mathbf{U}_k^{LW} &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{U}_k^- + \mathbf{U}_k^+) - \frac{\Delta t}{\Delta A} \left(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_k^+) - \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{U}_k^-) \right) \cdot \mathbf{n}_k \right] \end{aligned} \quad (44)$$

siendo \mathbf{U}_k^+ , \mathbf{U}_k^- el vector de variables conservadas que proporciona la reconstrucción hidrostática a la derecha y a la izquierda de cada pared k , respectivamente (ver sección 3.6).

3.3. Integración de los términos fuente de presión

En la ecuación (39), el término $(\mathbf{S}_p^*)_{i,j}$ corresponde a una integración espacial del término fuente de presión, que puede aproximarse como:

$$(\mathbf{S}_p^*)_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{S}_{p1,x} \\ -\tilde{S}_{p1,y} \\ 0 \\ -\tilde{S}_{p2,x} \\ -\tilde{S}_{p2,y} \end{pmatrix}_{i,j} \quad (45)$$

donde $\tilde{S}_{pl,x} = \left(\tilde{S}_{pl}\right)_{i,j} n_x$ y $\tilde{S}_{pl,y} = \left(\tilde{S}_{pl}\right)_{i,j} n_y$, con $l = 1, 2$ para las capas superior e inferior, agrupan los términos de presión en la dirección x e y respectivamente, teniendo en cuenta tanto la presión que ejerce el fondo sobre cada una de las capas como la presión que se ejercen una sobre la otra. Estos términos puede ser expresados como:

$$\left(\tilde{S}_{p1}\right)_{i,j} = \left(g\tilde{h}_1\Delta z_b + P_{1,x}\Delta x\right)_{i,j} = \left(g\tilde{h}_1(\Delta z_b + h_2)\right)_{i,j} = \left(g\tilde{h}_1\Delta\xi_1\right)_{i,j} \quad (46)$$

$$\left(\tilde{S}_{p2}\right)_{i,j} = \left(g\tilde{h}_2\Delta z_b + P_{2,x}\Delta x\right)_{i,j} = \left(g\tilde{h}_2(\Delta z_b + rh_1)\right)_{i,j} = \left(g\tilde{h}_2\Delta\xi_2\right)_{i,j} \quad (47)$$

definiéndose las superficies virtuales de presión ξ en las capas superior e inferior respectivamente como

$$\begin{aligned} \xi_1 &= z_b + h_2 \\ \xi_2 &= z_b + rh_1 \end{aligned} \quad (48)$$

3.4. Integración de los términos fuente de fricción

Por otra parte, los términos fuente de fricción $(\mathbf{S}_\tau^*)_{i,j}$ pueden aproximarse por:

$$(\mathbf{S}_\tau^*)_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tilde{T}_{\omega x}}{\rho_1} \\ -\frac{\tilde{T}_{\omega y}}{\rho_1} \\ 0 \\ +\frac{\tilde{T}_{\omega x}}{\rho_2} - \frac{\tilde{T}_{bx}}{\rho_2} \\ +\frac{\tilde{T}_{\omega y}}{\rho_2} - \frac{\tilde{T}_{by}}{\rho_2} \end{pmatrix}_{i,j} \quad (49)$$

donde

$$(\tilde{T}_{\omega x})_{i,j} = \rho_1 g C_{f\omega,1} \left| (U_1)_{i,j}^n - (U_2)_{i,j}^n \right| \left((u_1)_{i,j}^n - (u_2)_{i,j}^n \right) \Delta x \quad (50)$$

$$(\tilde{T}_{\omega y})_{i,j} = \rho_1 g C_{f\omega,1} \left| (U_1)_{i,j}^n - (U_2)_{i,j}^n \right| \left((v_1)_{i,j}^n - (v_2)_{i,j}^n \right) \Delta y \quad (51)$$

$$(\tilde{T}_{bx})_{i,j} = \rho_2 g C_{fb,1} \left| (U_2)_{i,j}^n \right| (u_2)_{i,j}^n \Delta x \quad (52)$$

$$(\tilde{T}_{by})_{i,j} = \rho_2 g C_{fb,1} \left| (U_2)_{i,j}^n \right| (v_2)_{i,j}^n \Delta y \quad (53)$$

Tal y como se han definido en (50),(51),(52),(53), los esfuerzos de fricción dependen de las velocidades en ambas componentes. En una situación estática las velocidades en ambas capas y en las dos componentes son nulas, los esfuerzos de fricción no intervienen en el cálculo de $\mathbf{S}_{i,j}^*$ y únicamente es necesario definir los grados de libertad para los términos fuente de presión.

3.5. Estabilidad temporal

Se plantea una discretización temporal con un paso Δt variable. Para asegurar la convergencia del esquema FORCE, por ser explícito, es necesario definir una limitación para el paso de tiempo, garantizando así la estabilidad numérica del método. Esta limitación se impone en función de los autovalores del jacobiano obtenidos en (21) a través de

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{\lambda_s^{\max}} \quad (54)$$

donde $\text{CFL} \leq 1$ por la ley de Courant-Friedrichs-Lewy [12], y siendo λ_s^{\max} el mayor de los 6 autovalores, que dependen tanto de las velocidades u , v en la celda como de las alturas de las capas en la celda a través de la velocidad de las ondas superficiales c .

3.6. Reconstrucción hidrostática y estado de equilibrio

Originalmente, el esquema FORCE fue propuesto para sistemas homogéneos [13], donde $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$, es decir, en ausencia de términos fuente. Es por este motivo que se precisa definir correctamente los términos fuente de presión mediante un proceso de reconstrucción hidrostática basado en una situación estática donde ambas capas se encuentren en reposo [14, 15]. Esto es definir correctamente las magnitudes \tilde{h}_l , $\Delta \xi_l$, introducidas en las ecuaciones (46) y (47). El objetivo es simple: que un fluido en reposo se mantenga en reposo para cualquier paso de tiempo, en una situación en la que $r = 1$ y el nivel de la capa de abajo es discontinuo entre celdas, y cuando las superficies de ambas capas se mantengan constantes en todo el dominio espacial para $r \neq 1$. Estas situaciones se ilustran en la figura 3a y 3b respectivamente.

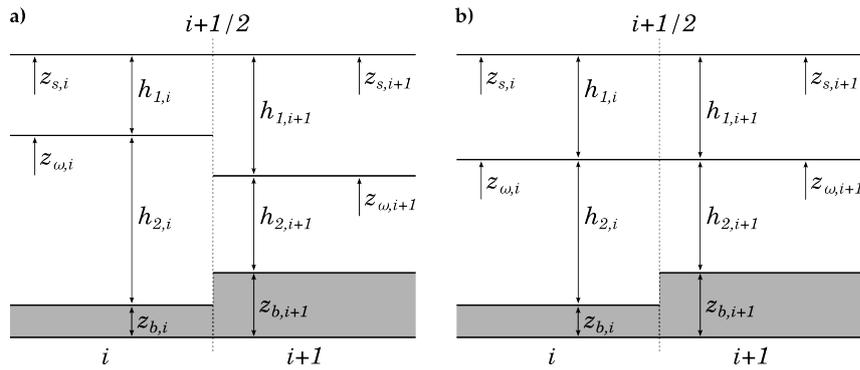


Figura 3: Situación de equilibrio para dos celdas contiguas, separadas por la pared $i + \frac{1}{2}$.

Para conseguir este propósito, en la ecuación (41) se observa que, para que $\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n$, es necesario que los flujos se anulen con los términos fuente. Sin embargo, gracias a la expresión (35) es posible dividir los flujos en sus contribuciones, logrando dos problemas unidimensionales. Así, las condiciones que se tendrán que cumplir serán:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j}^* - (\mathbf{S}_p^*)_i = \mathbf{0} \quad (55)$$

$$\mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^* - (\mathbf{S}_p^*)_j = \mathbf{0} \quad (56)$$

donde $(\mathbf{S}_p^*)_i = (\mathbf{S}_p^*)_{i,j} n_x$, $(\mathbf{S}_p^*)_j = (\mathbf{S}_p^*)_{i,j} n_y$ son las proyecciones de los términos fuente en la celda (i, j) sobre los ejes x e y respectivamente. La reconstrucción hidrostática se lleva a cabo en aquella pared que separa dos celdas, de manera que, gracias al hecho de que el esquema es separable por componentes, el proceso de reconstrucción será idéntico independientemente de si se trata de una pared en x , con $\mathbf{n} = (\pm 1, 0)$ o en y , con $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$. Es decir, el problema se reduce a una única dimensión.

Para determinar la forma de las variables conservadas reconstruidas $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^+$, $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^-$ se comienza planteando la definición de las superficies virtuales de presión ξ_l , así como de las superficies virtuales libres η_l con $l = 1, 2$. Considerando la celda (i, j) , estas superficies virtuales se definen como:

$$(\xi_1)_{i,j} = (z_b)_{i,j} + (h_2)_{i,j} \quad (57)$$

$$(\xi_2)_{i,j} = (z_b)_{i,j} + (r h_1)_{i,j} \quad (58)$$

$$(\eta_1)_{i,j} = (\xi_1)_{i,j} - (h_1)_{i,j} \quad (59)$$

$$(\eta_2)_{i,j} = (\xi_2)_{i,j} - (h_2)_{i,j} \quad (60)$$

La superficie virtual de presión promediada en la pared $i + \frac{1}{2}$ se define como:

$$(\xi_l)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \left((\xi_l)_{i,j} + (\xi_l)_{i+1,j} \right) \quad (61)$$

con $l = 1, 2$, de manera que las componentes de los vectores de variables conservadas en la pared $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^-$, $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^+$ se obtienen como

$$\begin{aligned} (h_l^-)_{i+\frac{1}{2},j} &= (\eta_l)_{i,j} - (\xi_l)_{i+\frac{1}{2},j} \\ (h_l^+)_{i+\frac{1}{2},j} &= (\eta_l)_{i+1,j} - (\xi_l)_{i+\frac{1}{2},j} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} ((hu)_l^-)_{i+\frac{1}{2},j} &= (h_l^-)_{i+\frac{1}{2},j} (u_l)_{i,j} & ((hv)_l^-)_{i+\frac{1}{2},j} &= (h_l^-)_{i+\frac{1}{2},j} (v_l)_{i,j} \\ ((hu)_l^+)_{i+\frac{1}{2},j} &= (h_l^-)_{i+\frac{1}{2},j} (u_l)_{i+1,j} & ((hv)_l^+)_{i+\frac{1}{2},j} &= (h_l^-)_{i+\frac{1}{2},j} (v_l)_{i+1,j} \end{aligned} \quad (63)$$

En condición de equilibrio, como las velocidades son nulas las variables reconstruidas calculadas en (63) se anulan. Por otra parte, como la superficie libre es constante a lo largo de todo el dominio, por (62) se observa que $h_{l,i+\frac{1}{2}}^- = h_{l,i+\frac{1}{2}}^+$. Insertando esta condición en los flujos de Lax-Friedrichs (43) y Lax-Wendroff (44) se obtiene:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g \left((h_1^-)_{i+\frac{1}{2},j} \right)^2 - \frac{1}{2}g \left((h_1^+)_{i-\frac{1}{2},j} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}g \left((h_2^-)_{i+\frac{1}{2},j} \right)^2 - \frac{1}{2}g \left((h_2^+)_{i-\frac{1}{2},j} \right)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Análogamente, para los flujos verticales:

$$\mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}g \left((h_1^-)_{i,j+\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{2}g \left((h_1^+)_{i,j-\frac{1}{2}} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}g \left((h_2^-)_{i,j+\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{2}g \left((h_2^+)_{i,j-\frac{1}{2}} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (65)$$

En base estas ecuaciones se definen las variables $(\tilde{h}_l)_{i,j}$ y $(\Delta\xi_l)_{i,j}$ en cada capa como

$$(\tilde{h}_l)_{i,j} = \frac{1}{2} \left((h_l^-)_{i+\frac{1}{2},j} + (h_l^+)_{i-\frac{1}{2},j} \right) \quad (66)$$

$$(\Delta\xi_l)_{i,j} = (h_l^-)_{i+\frac{1}{2},j} - (h_l^+)_{i-\frac{1}{2},j} \quad (67)$$

de modo que la integrales del termino fuente de presión en cada celda para las capas superior (46) e inferior (47) pueden expresarse en función de la reconstrucción hidrostática en las paredes, asegurando así que se cumplen las condiciones (55) y (56).

4. Resultados obtenidos

En esta sección se presentan todos los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo de este TFG. En primer lugar, se exponen los resultados obtenidos para un flujo monocapa en condiciones de equilibrio estático, salto de presa unidimensional y salto de presa circular bidimensional. Posteriormente, se detallan los resultados obtenidos para un flujo bicapa en las situaciones de equilibrio estático y rotura de presa unidimensional. En cada uno de los casos presentados se detallan las condiciones iniciales y los parámetros utilizados en la simulación.

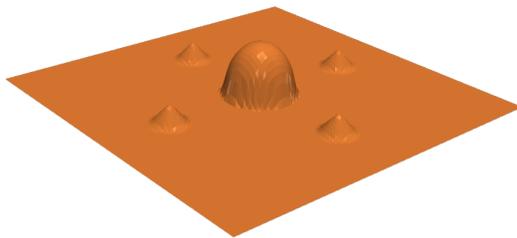


Figura 4: Representación tridimensional del fondo.

4.1. Flujo Monocapa

4.1.1. Equilibrio estático

En mecánica de fluidos computacional, el primer paso para comprobar la validez de un esquema numérico es comprobar que mantiene las condiciones de equilibrio estático, es decir, partiendo de una situación en reposo se encontrará en reposo para cualquier paso de tiempo. Se trata de una consecuencia directa de la reconstrucción hidrostática, planteada en la sección 3, y su validación es fundamental para el correcto tratamiento de los casos posteriores sometidos a estudio.

El primer caso consta de un dominio espacial bidimensional donde $0\text{ m} < x < 100\text{ m}$ y $0\text{ m} < y < 100\text{ m}$ utilizando $\Delta x = \Delta y = 1\text{ m}$, tomando como centro de la malla cuadrada el punto $(0, 0)$. El fondo consta de una elevación esférica centrada en el punto central de la malla $(0, 0)$ de radio $R_s = 10\text{ m}$, y cuatro elevaciones cónicas centradas en los ejes a una distancia de 30 m del centro, con una altura $H_c = 4\text{ m}$ y un radio $R_c = 5\text{ m}$, representado en el esquema 4.

Esta definición del fondo ha sido escogida con el fin de ilustrar diferentes situaciones para el fluido: descansando sobre un fondo plano, descansando sobre un fondo inclinado (lineal o circularmente) y situaciones de frente seco-mojado [16]. El nivel del fluido se define como $L = z_b + h = 2\text{ m}$ de manera homogénea en todo el dominio. Notar que al tratarse de un flujo monocapa, el nivel L coincide con la superficie libre η . Dicho fluido se supone agua, de manera que $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$. Como parámetros de la simulación se utilizan un tiempo de simulación $T = 100\text{ s}$ y una condición CFL 0,5.

Se presentan los resultados obtenidos en las figuras 5, 6, proyectados en los planos frontal y sagital para representar los datos a lo largo del eje x y del eje y , respectivamente:

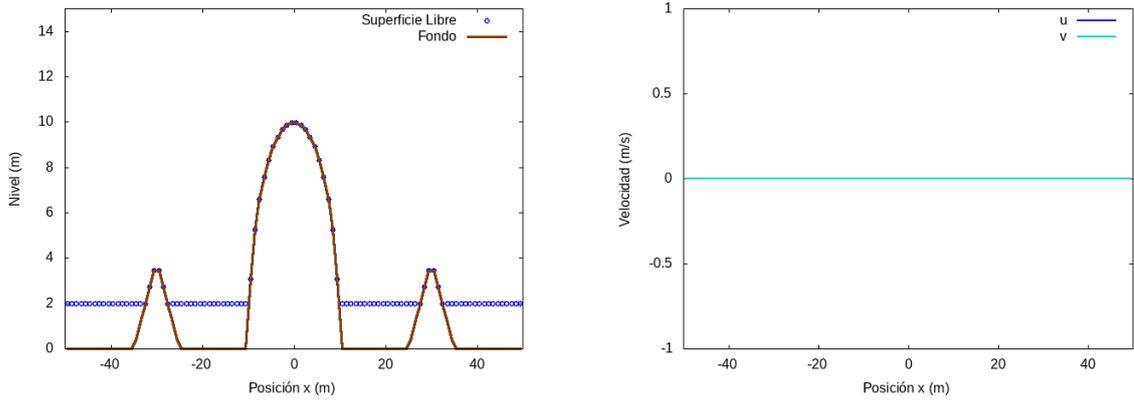


Figura 5: Proyección en el plano frontal del caso estático con nivel homogéneo para $t=100$ segundos.

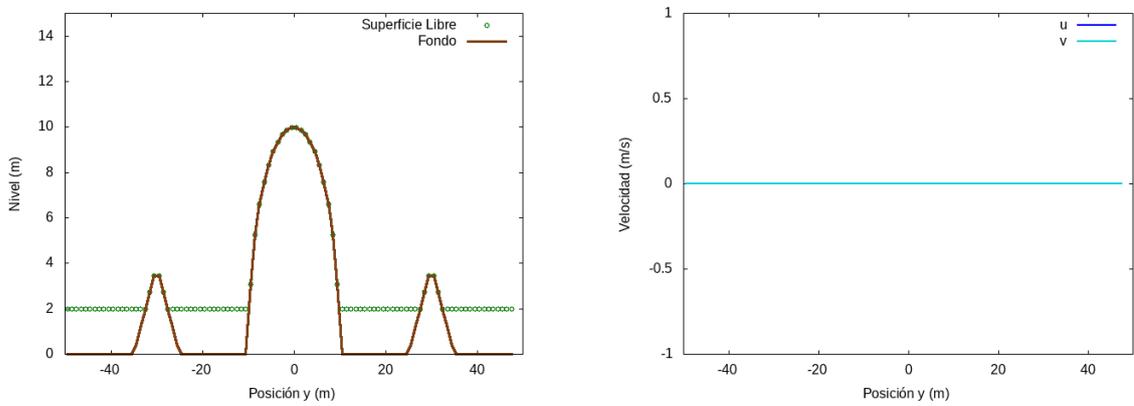


Figura 6: Proyección en el plano sagital del caso estático con nivel homogéneo para $t=100$ segundos.

Se puede apreciar claramente como se conserva la condición inicial, de manera que no se introducen contribuciones extra para los flujos numéricos en ningún momento y la reconstrucción hidrostática asegura que los flujos se encuentren correctamente balanceados. Además, se puede apreciar como las velocidades en ambas direcciones (u, v) se mantienen nulas, hecho que evidencia la conservación del estado de reposo.

4.1.2. Rotura de presa unidimensional

Se estudia el caso de una rotura de presa sin fondo ni rozamiento, ya que existe una solución analítica que permite verificar el comportamiento del esquema FORCE [17].

Para ello, se define un dominio bidimensional de 200×50 m, con $\Delta x = \Delta y = 1$ m. Al no haber fondo, $z_b = 0$ m en todo el dominio, y como el fluido es agua, nuevamente será $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. El nivel será:

$$L = \begin{cases} 2 \text{ m} & \text{si } x < 0 \\ 1 \text{ m} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (68)$$

dependiendo únicamente del eje x , por lo que, aunque se trate de un dominio bidimensional, la simetría en el eje y provoca que el movimiento se de únicamente en el eje x . Por otra parte, las velocidades son inicialmente nulas, $u = v = 0$ m/s en todo el dominio. Como parámetros de la simulación se utilizan $T = 15$ s y CFL 0,5, obteniendo los resultados recogidos en la figura 7.

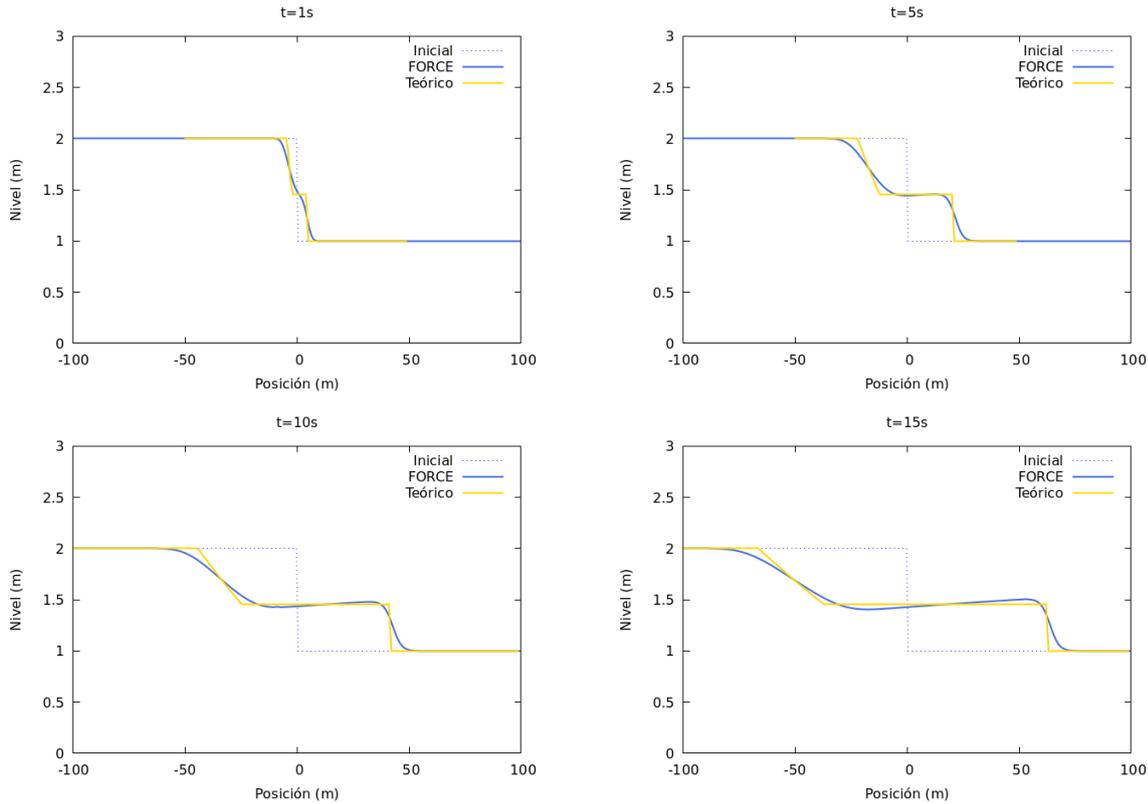


Figura 7: Rotura de presa monocapa para diferentes tiempos, comparando los resultados obtenidos con FORCE con la solución analítica.

Se observa con claridad la aparición de dos frentes de onda: el primero, con movimiento siguiendo la dirección del eje en sentido positivo, es la onda de choque; el segundo, en sentido contrario es la onda de rarefacción. Ambos se desplazan con velocidades diferentes. En los resultados obtenidos mediante el esquema FORCE se distinguen claramente la onda de choque y la de rarefacción, aunque no se logra un ajuste perfecto a la solución exacta. Esto se debe a que FORCE es un esquema que introduce una difusión numérica importante [18], lo que implica desviaciones con respecto a la solución analítica. En este caso, el efecto introducido por la difusión se traduce en la ondulación de ambos frentes de onda.

4.1.3. Rotura de presa circular

Finalmente, se estudia un caso bidimensional en el que el fluido se desplaza en todas las direcciones contenidas en el plano XY : la rotura de presa circular. Para ello, se define una dominio cuadrado de 100×100 m, utilizando $\Delta x = \Delta y = 1$ m. Una vez más, las velocidades iniciales son nulas en todo el dominio y el fluido es agua. El fondo consiste en una geométrica cónica con radio $R_c = 50$ m y el vértice situado en $z_{b,max} = 1$ m. Esto plantea una inclinación en el fondo que provocará cambios en los términos de presión y de rozamiento con el fondo, permitiendo así comprobar también que la definición de estas magnitudes ha sido correcta. Para el nivel de agua, será:

$$L = \begin{cases} 2 \text{ m} & \text{si } x^2 + y^2 < R^2 \\ 1 \text{ m} & \text{si } x^2 + y^2 > R^2 \end{cases} \quad (69)$$

donde R es el radio de la rotura circular, definido como $R = 20$ m. Como parámetros de la simulación, se toman $T = 7$ s y CFL 0,1. Notar que el CFL es menor con respecto a casos anteriores, ya que al considerar un desplazamiento bidimensional es necesario reducir el paso de tiempo Δt para garantizar la convergencia del método. Los resultados obtenidos se representan en las figuras 8 y 9.

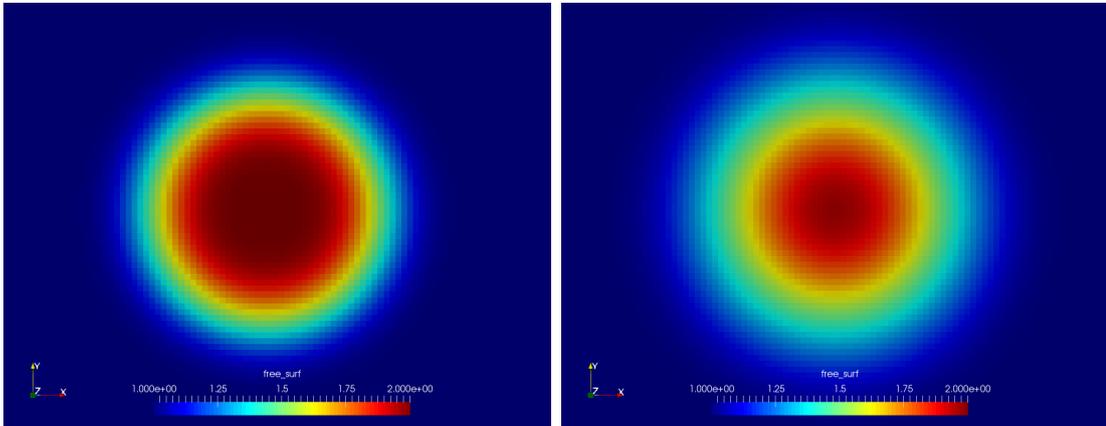


Figura 8: Vista en planta de la rotura de presa circular para $t = 1$ s, 2 s.

Se puede apreciar claramente que se conserva la simetría en todo el plano tanto en la figura 8 como en 9, lo cual indica que la rotura de presa se realiza correctamente. Si embargo, en este caso no se distinguen los frentes de onda de una manera tan marcada como en el caso de la rotura de presa unidimensional, aunque es esperable dadas las dimensiones del dominio.

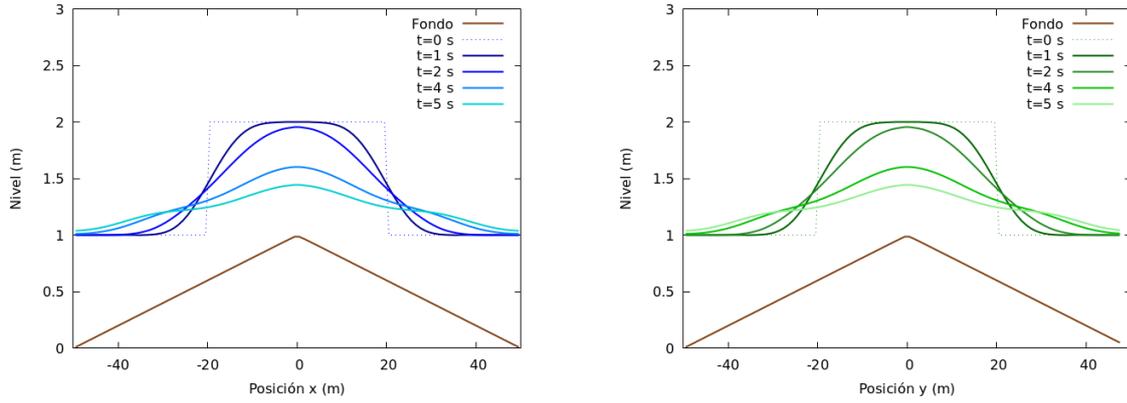


Figura 9: Rotura de presa circular para diferentes tiempos, según las proyecciones en los planos frontal (izq.) y sagital (dcha.).

4.2. Flujo Bicapa

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para diferentes casos en el que se incluyen las dos capas, tal y como se plantea en el modelo descrito en la sección 2. Al igual que en el caso del flujo monocapa, se comenzará planteando un caso de equilibrio hidrostático, seguido de una rotura de presa.

4.2.1. Equilibrio estático

El planteamiento para este caso es el mismo que para el flujo monocapa: se trata de comprobar que el planteamiento de la reconstrucción hidrostática es correcto a través de una situación de equilibrio, asegurando que el esquema está correctamente balanceado. Al ser un flujo bicapa, la reconstrucción hidrostática toma incluso más relevancia, ya que a través de este método la capa superior recibe información de la inferior, y viceversa, a través de las superficies virtuales de presión ξ_1 , ξ_2 . Además, el comportamiento del esquema numérico está fuertemente ligado a la relación entre las densidades de las capas. Para esta y sucesivas simulaciones, se ha decidido tomar la capa superior como agua y la inferior como un sedimento más denso, por lo que $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_2 = 1500 \text{ kg/m}^3$, resultando en $r = 2/3$.

El caso planteado consiste en un dominio bidimensional de $100 \times 100 \text{ m}$ con $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ m}$. El fondo es exactamente el mismo que el definido para el flujo monocapa (figura 4). Los niveles en ambas capas son homogéneos en todo el dominio, con $L_1 = 5 \text{ m}$ y $L_2 = 2 \text{ m}$, por lo que encontramos dos situaciones de frente seco-mojado: Exclusivamente para la capa inferior, en las elevaciones cónicas, y para ambas capas en la elevación esférica central. Las velocidades iniciales son nulas en todo el dominio, y los parámetros de simulación son $T = 100 \text{ s}$ y CFL 0,5, obteniendo los resultados presentados en las figuras 10 y 11.

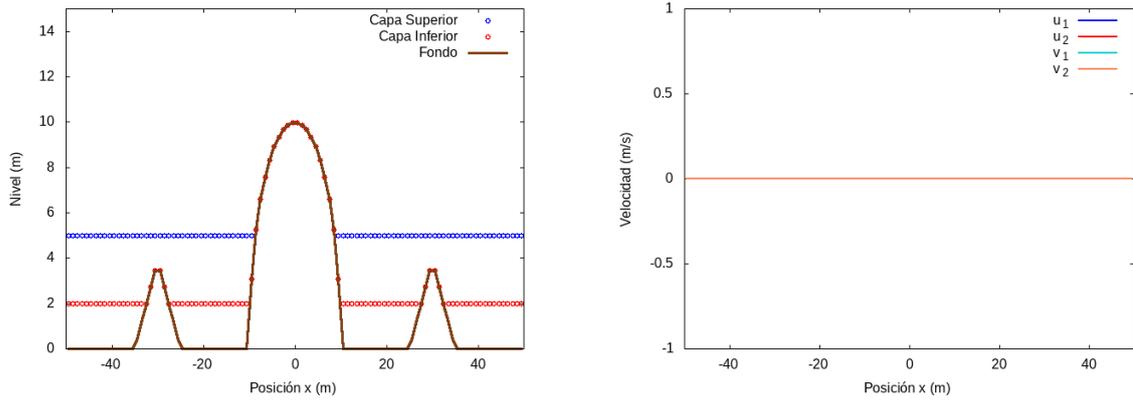


Figura 10: Proyección en el plano frontal del caso estático con $r = 2/3$ para $t = 100$ segundos.

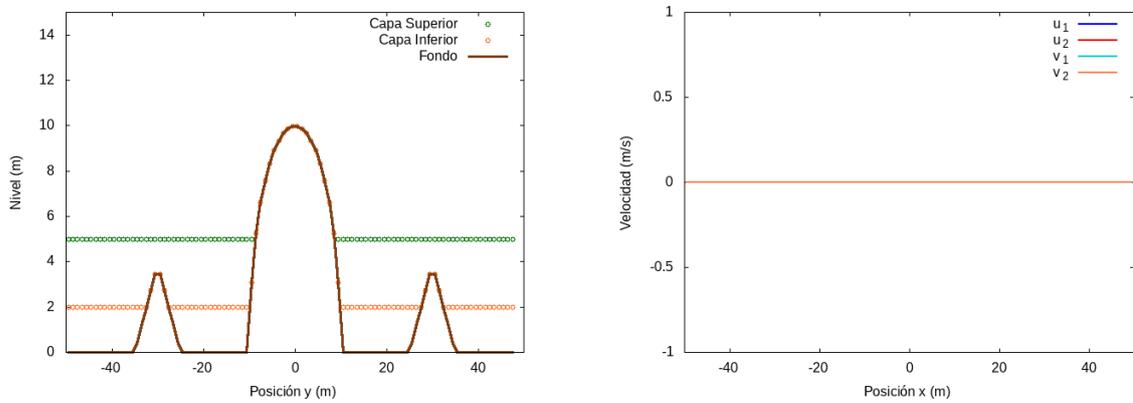


Figura 11: Proyección en el plano sagital del caso estático con $r = 2/3$ para $t = 100$ segundos.

Nuevamente, se observa que tras un tiempo de simulación elevado los niveles de ambas capas se mantienen constantes en todo el dominio, y las dos componentes de la velocidad de cada capa se mantienen nulas. Esto es una indicación pues de que el esquema numérico está correctamente balanceado, y el método de reconstrucción hidrostática está bien planteado.

4.2.2. Rotura de presa

Imitando el procedimiento realizado para el flujo monocapa, tras comprobar que la reconstrucción hidrostática funciona correctamente es momento de plantear un caso de rotura de presa, escogida a lo largo del eje x . Para ello, se define un dominio de 300×50 m usando $\Delta x = \Delta y = 1$ m, con un fondo que de pendiente negativa $m = -0,5$ a lo largo del eje x (en la dirección del movimiento que llevará el flujo tras la rotura). Las velocidades iniciales son nulas para ambas capas en todo el dominio y los parámetros escogidos para la simulación son $T = 20$ s y CFL 0,1. Para el nivel de las capas se consideran tres situaciones: rotura de presa en la capa superior, en la inferior, y en ambas. En el primer caso, los niveles se definen como:

$$L_1 = \begin{cases} 3 \text{ m} & \text{si } x < 0 \\ 2 \text{ m} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad L_2 = \begin{cases} 1 \text{ m} & \text{si } x < 0 \\ 1 \text{ m} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (70)$$

obteniendo los resultados representados en la figura 12.

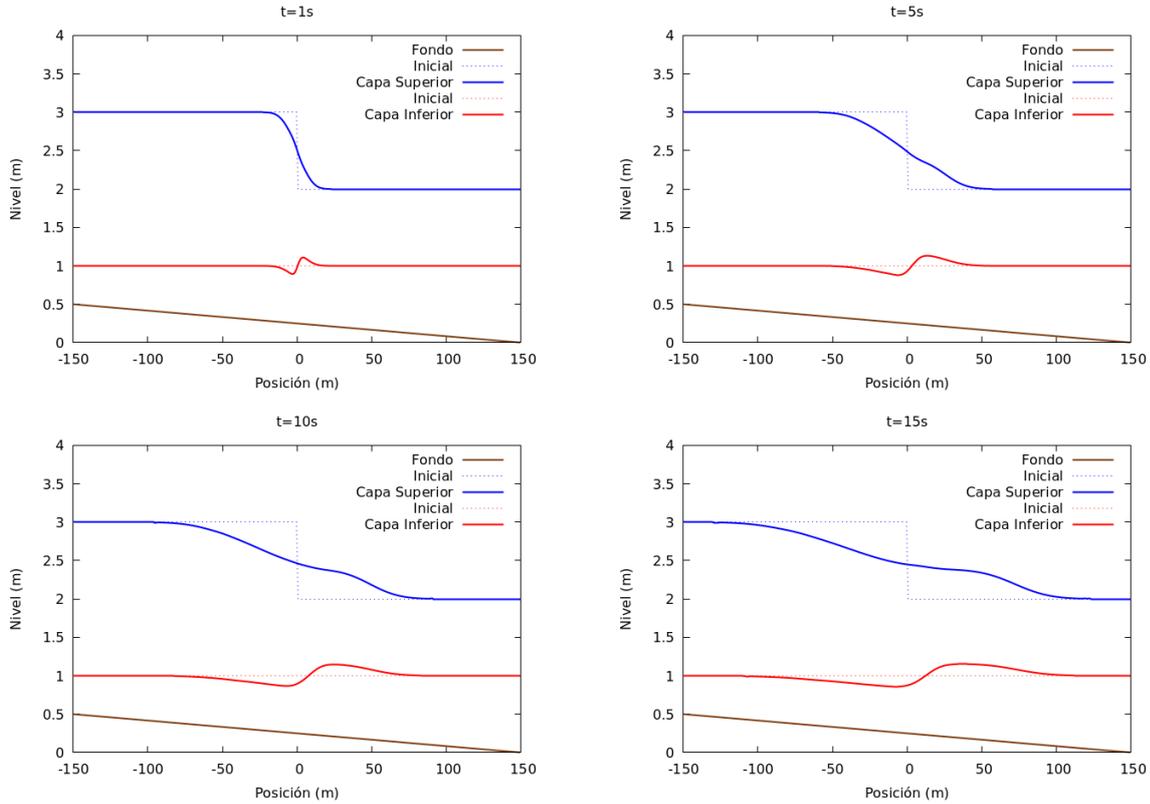


Figura 12: Rotura de presa lineal en la capa superior en diferentes instantes, con $r = 2/3$.

Se aprecia como la capa superior realiza una rotura de presa con unos frentes de choque y rarefracción bien definidos, mientras que en la capa inferior se inducen ondas que se desplazan en sentidos contrarios.

Para el segundo caso, los niveles se definen como

$$L_1 = \begin{cases} 3 \text{ m} & \text{si } x < 0 \\ 3 \text{ m} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad L_2 = \begin{cases} 2 \text{ m} & \text{si } x < 0 \\ 1 \text{ m} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (71)$$

y los resultados obtenidos se representan en la figura 13.

En este caso es la capa inferior la que induce ondas en la superior, aunque de menor intensidad. Además, la propagación de los frentes de la rotura de presa en la capa inferior se desplaza mucho más lentamente que en el caso anterior. Ambos efectos se deben a que la capa inferior es más densa, por lo que le costará más moverse.

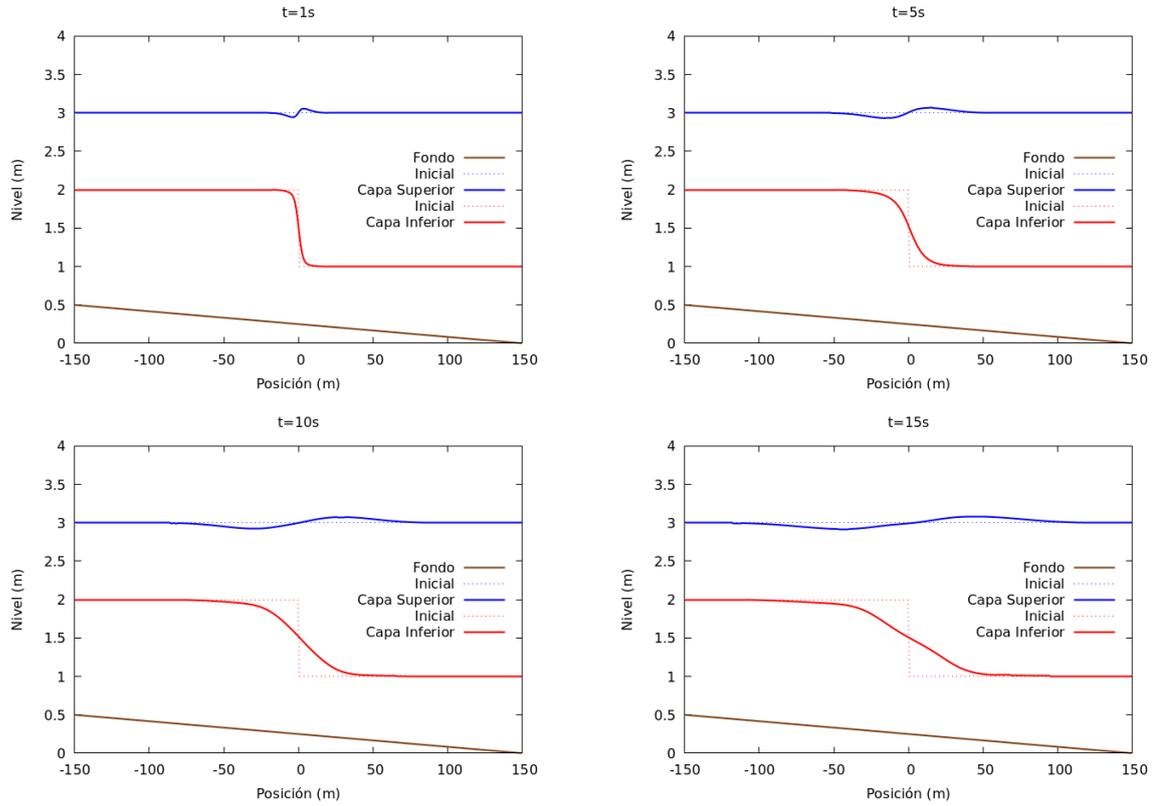


Figura 13: Rotura de presa lineal en la capa inferior en diferentes instantes, con $r = 2/3$.

Finalmente, para el tercer caso los niveles se definen como:

$$L_1 = \begin{cases} 4 \text{ m} & \text{si } x < 0 \\ 3 \text{ m} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad L_2 = \begin{cases} 2 \text{ m} & \text{si } x < 0 \\ 1 \text{ m} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (72)$$

y los resultados obtenidos se representan en la figura 14.

En este caso se observa que la capa que domina la rotura es la superior, debido precisamente a su desarrollo más rápido y a su mayor influencia sobre la capa inferior.

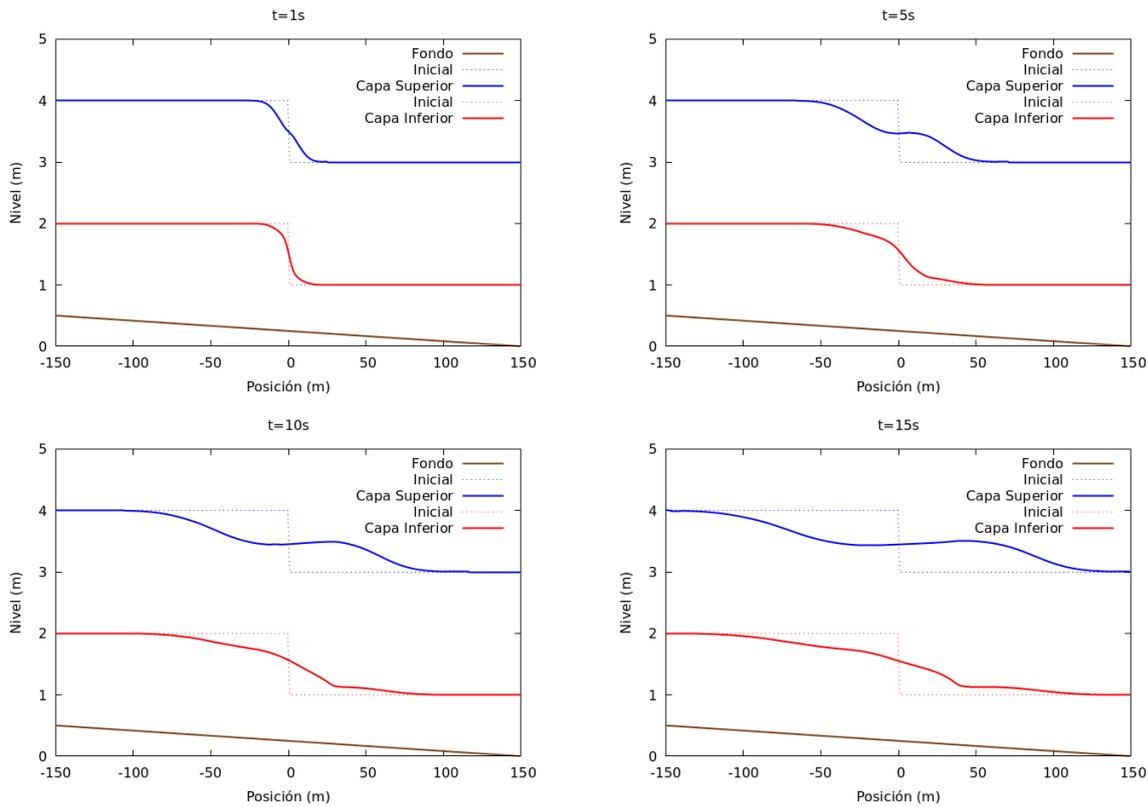


Figura 14: Rotura de presa lineal en ambas capas en diferentes instantes, con $r = 2/3$.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha diseñado un modelo bidimensional que reproduce el complejo comportamiento del flujo bicapa, considerando la aproximación de aguas poco profundas en base a las grandes escalas en las que se presenta el problema. El carácter bidimensional del esquema supone un desafío en cuanto al tratamiento de los flujos numéricos a la hora de realizar la implementación computacional, pero trabajar con mallas cuadradas permite una simplificación enorme al transformar el problema bidimensional en dos problemas unidimensionales a través de proyecciones sobre los ejes.

Pese a la gran cantidad de esquemas numéricos existentes, FORCE es lo suficientemente sólido como para permitir abordar este problema. A su vez, presenta una relativa facilidad de implementación en un contexto bidimensional como consecuencia de la posibilidad de realizar una proyección axial. El método de reconstrucción hidrostática planteado consigue balancear los flujos numéricos con los términos fuente de manera consistente, completando así el modelo computacional.

Los casos estudiados son reveladores: en situaciones de equilibrio estático el flujo se mantiene en reposo, garantizando así que la reconstrucción hidrostática ha sido correctamente formulada. Por otra parte, se observa que las roturas de presa en las que el flujo

se mueve en una única dirección (denominadas “lineales” en este trabajo) conservan la dirección del movimiento independientemente de la dirección en la que se desarrolla el flujo. Además, se distingue claramente el comportamiento de cada una de las capas en una rotura de presa, consecuencia de la diferencia de densidades. Finalmente, en roturas de presa circulares se conserva la simetría, validando la extensión bidimensional del esquema FORCE para un flujo monocapa.

En resumen, con la realización de este trabajo se ha logrado expandir el modelo unidimensional del flujo bicapa estudiado en [18] y [16] a un dominio bidimensional, haciendo uso de un esquema robusto como lo es FORCE, y mediante un correcto tratamiento de los flujos numéricos.

Referencias

- [1] Benoit Spinewine, Vincent Guinot, Sandra Soares-Frazão, and Yves Zech. Solution properties and approximate riemann solvers for two-layer shallow flow models. *Computers & Fluids*, 44(1):202–220, 2011.
- [2] Nino Krvavica, Miran Tuhtan, and Gordan Jelenić. Analytical implementation of roe solver for two-layer shallow water equations with accurate treatment for loss of hyperbolicity. *Advances in water resources*, 122:187–205, 2018.
- [3] Catherine Swartenbroekx, Yves Zech, and Sandra Soares-Frazão. Two-dimensional two-layer shallow water model for dam break flows with significant bed load transport. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 73(5):477–508, 2013.
- [4] FJ Ayala-Carcedo. La rotura de la balsa de residuos mineros de aznalcóllar (españa) de 1998 y el desastre ecológico consecuente del rio guadiamar: causas, efectos y lecciones. *Boletín Geológico y Minero*, 115(4):711–738, 2004.
- [5] Javier Fernández Pato. Performance assessment of finite volume methods in transient simulations of hydraulic processes.
- [6] Cornelis Boudewijn Vreugdenhil. *Numerical methods for shallow-water flow*, volume 13. Springer Science & Business Media, 1994.
- [7] D Naef, D Rickenmann, P Rutschmann, and BW McArdell. Comparison of flow resistance relations for debris flows using a one-dimensional finite element simulation model. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 6(1):155–165, 2006.
- [8] Michael Dumbser, Arturo Hidalgo, Manuel Castro, Carlos Parés, and Eleuterio F Toro. Force schemes on unstructured meshes ii: Non-conservative hyperbolic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9-12):625–647, 2010.

-
- [9] Alberto Canestrelli, Michael Dumbser, Annunziato Siviglia, and Eleuterio F Toro. Well-balanced high-order centered schemes on unstructured meshes for shallow water equations with fixed and mobile bed. *Advances in Water Resources*, 33(3):291–303, 2010.
- [10] Peter D Lax. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on pure and applied mathematics*, 7(1):159–193, 1954.
- [11] Peter Lax. Systems of conservation laws. Technical report, LOS ALAMOS NATIONAL LAB NM, 1959.
- [12] Carlos A de Moura and Carlos S Kubrusly. *The Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition: 80 years after its discovery*. Birkhäuser Basel, 2012.
- [13] EF Toro. On glimm-related schemes for conservation laws. *Preprint MMU-9602, Department of Mathematics and Physics, Manchester Metropolitan University, UK*, 1996.
- [14] Emmanuel Audusse, François Bouchut, Marie-Odile Bristeau, Rupert Klein, and Benoît Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6):2050–2065, 2004.
- [15] Ali Mahdavi and Nasser Talebbeydokhti. Modeling of non-breaking and breaking solitary wave run-up using force-muscl scheme. *Journal of Hydraulic Research*, 47(4):476–485, 2009.
- [16] S Martínez-Aranda, A Ramos-Pérez, and P García-Navarro. A 1d shallow-flow model for two-layer flows based on force scheme with wet-dry treatment. *Journal of Hydroinformatics*, 22(5):1015–1037, 2020.
- [17] James Johnston Stoker. *Water waves: The mathematical theory with applications*, volume 36. John Wiley & Sons, 2011.
- [18] Álvaro Ramos Pérez. Desarrollo de un modelo de simulación numérica de flujo transitorio bicapa en aproximación de aguas poco profundas development of a numerical simulation model for unsteady shallow water two-layer flow.