

¿Cuántos cubos de Rubik hay?



Teodora Ioana Toma
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Paz Jiménez Seral
28 de junio de 2021

Prólogo

El objetivo de este trabajo es plantear y resolver un problema de conteo de órbitas de acciones mediante la teoría de enumeración de Pólya. Tomamos un cubo de Rubik no articulado, es decir, sin tener en cuenta los giros de sus caras, pero libre en el espacio. Lo podríamos ver como un cubo normal y corriente cuyas caras están divididas en cuadrículas de 3×3 . Queremos colorearlo con 6 colores distintos, de manera que cada color aparezca exactamente 9 veces. ¿Cuántas coloraciones distinguibles en el espacio hay? Primero deberíamos explicar qué significa “coloración distinguible”. Con “coloraciones distinguibles” nos referimos a las coloraciones que no podamos obtener partiendo de una coloración dada y girando el cubo en el espacio. Para hacer esto es necesaria la teoría expuesta en los primeros tres capítulos, que introduce los conceptos de grupos y acciones, que podemos aplicar a los movimientos de distintos objetos en el espacio para contar órbitas.

¿Por qué un cubo de Rubik no articulado? El problema de conteo de los distintos cubos de Rubik según los giros de sus caras no es un problema relativo a la teoría de Pólya, ya que es un problema de generadores. La dificultad que tiene es obtener los generadores del grupo del cubo de Rubik y el orden de dicho grupo.

Aunque en este trabajo el objetivo es contar “cubos de Rubik”, toda la teoría presentada sirve para responder muchas otras preguntas: ¿De cuántas maneras puedo colorear los vértices de un triángulo con 6 colores? ¿Cuántos cubos hay utilizando 6 colores, de manera que cada uno aparezca una vez? ¿Y si nos restringimos a que cada color aparezca sólo una vez? ¿Cuántas funciones de conmutación esencialmente distintas hay?

Abstract

How many different ways are there to color the facelets of a Rubik's cube with 6 different colors? If we don't specify anything else, the general consensus would be to say there are 6^{54} , since there are $9 \times 6 = 54$ facelets and 6 colors available. However, if consider the cube to be free in space, meaning that it can be rotated in any way, it's easy to see that a lot of those 6^{54} ways of coloring the cube can be permuted from one to another. We will call these "indistinguishable" colorings, and our goal is to count the number of distinguishable colorings there are in the instance we just described and in many more. In order to do this, we have divided this project into different chapters:

1. Firstly, it is necessary to give an introduction to group theory, since it is fundamental to understand and know how to work with permutation groups for this problem. This is what we do in the first chapter, where we remember different concepts, such as *permutations*, *groups*, *actions*, *orbits*, *stabilizers*, *fixed points*, *rigid transformations*, etc. In between these definitions, there are different results on how each of these notions work, finishing up the chapter with a very important example on the group of rotations of a cube and its action on the set of faces. We will use a similar logic as the one presented there in order to understand how the group of rotations of a cube acts on the 54 facelets of a Rubik's cube.

2. Once we're familiar with the concepts mentioned before, we will state and prove Burnside's theorem, which gives us a neat formula to compute the number of orbits of a certain action. We will use this formula to find out the answer to a few simple questions: How many ways are there to color the vertices of a triangle using six colors? How many ways are there to color a regular cube with 3 colors? After that, we will define the *cycle index* and we will explain how to compute it depending on the conjugacy classes.

We will give some examples of both how to use Burnside's theorem and how to compute the cycle index. It is worth mentioning one of them in particular, which is pertaining to switching functions and switching theory. It is a special example because of its historical relevance, since back in the day it was solved by a massive computer because there weren't enough mathematical tools to solve it like we do now.

3. The chapter that follows Burnside's theorem is divided into two sections: the first one, where formal definitions form *coloring*, *pattern*, *weight*, etc. are given. Then, it is explained how a group G acting on a set D also acts on the set of colorings of D by R , R^D . This information is crucial, since it simplifies our problem immensely: working with an action of a group G on a set of few elements D is not the same as and it is much easier than working with an action of a group G on the set of colorings R^D , which has many more elements than D . Finally, we define *pattern inventory*, a tool that will give us all the answers we need.

In the second section we state Redfield-Pólya's theorem, which essentially tells us how many different patters (that is, orbits of the action of G on R^D .) there are, depending on the number of colors, their weights, and the cycle index. This theorem gives us two useful corollaries: one basically giving us a similar result to Burnside's formula, and another one which tells us what type of patters there are and how many of those patterns there are, e.g if the monomial $2x^2y^4$ appears in the pattern inventory, that means there are two different patterns where the color whose weight

is x appears twice and the color whose weight is y appears 4 times. This is the result that we will be using for our Rubik's cube problem. To finish off this chapter, we illustrate the first corollary with an example using switching theory, completing the example given in the second chapter.

4. Finally, we get to solve our problem. We start by explaining what it is that we want to compute very carefully: We take a non-articulated Rubik's cube, i.e a regular cube whose faces are split into 9 facelets each. We take 6 colors, each one of them has a weight assigned to it t_1, \dots, t_6 . We are interested in knowing the number of patterns under the action of the group of rotations of the cube on the 54 facelets. However, since this problem is inspired on a Rubik's cube, to make it more realistic, we want to know the number of patterns where each color appears exactly 9 times. According to the corollary we mentioned earlier, this translates to computing the coefficient of the monomial $t_1^9 t_2^9 t_3^9 t_4^9 t_5^9 t_6^9$ on the pattern inventory. Generally, we should be able to simply compute the pattern inventory and pick out the coefficient we want. However, in this particular case, since the cycle index is such a huge polynomial we will have to use other techniques to compute said coefficient because we cannot compute the pattern inventory properly.

Índice general

Prólogo	III
Abstract	V
1. Teoría de grupos	1
2. El teorema de Burnside	7
3. El teorema de Redfield-Pólya	13
3.1. Coloraciones, diseños y pesos	13
3.2. El teorema de Redfield-Pólya	16
4. El problema del “cubo de Rubik”	19
Bibliografía	25
A. Desarrollo de polinomios	27

Capítulo 1

Teoría de grupos

En este primer capítulo vamos a recordar algunos conceptos básicos de teoría de grupos que serán fundamentales para entender la teoría de enumeración de Polyà.

Definición. Un grupo G es un conjunto no vacío con una operación binaria interna que satisface:

1. La propiedad asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para cada $a, b, c \in G$.
2. Existencia de neutro: $e \cdot a = a \cdot e = a$ para cada $a \in G$.
3. Existencia de inverso: $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$ para cada $a \in G$.

Si G es finito, llamaremos orden a su número de elementos, denotado por $|G|$.

Definición. Sea $x \in G$. Llamaremos orden de x al menor natural r tal que $x^r = 1$, en caso de que exista. Si no existe, diremos que x no tiene orden finito. Notar que si x tiene orden r , $x^r = 1$ implica que $x^{-1} = x^{r-1}$. Además, en un grupo finito todos los elementos tienen orden finito.

Definición. Dado un grupo G , un subgrupo H es un subconjunto de G que también es grupo con la operación interna de G restringida a H . Lo denotaremos con $H \leq G$.

Definición. Sea $H \leq G$ y $x \in G$, definimos la clase a derecha de x módulo H o coclase al conjunto

$$Hx = \{hx \mid h \in H\}.$$

Notar que $|H| = |Hx|$.

Definición. Dado un conjunto no vacío Ω , una permutación es una aplicación biyectiva de Ω en Ω . Nosotros nos centraremos en conjuntos finitos, que podemos tomar de la forma $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ y llamaremos cifras a los elementos de Ω . El conjunto de todas las permutaciones de Ω con la composición es un grupo al que llamaremos grupo simétrico de grado n , y lo denotaremos Per_Ω , S_Ω ó S_n .

Podemos representar una permutación α de la siguiente manera:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$$

De esta manera, denotamos por $i\alpha$ a la imagen de i por α .

Llamaremos producto de permutaciones a la composición de permutaciones y, dadas $\alpha, \beta \in S_n$, la denotaremos como $\alpha\beta$. Al igual que antes, podemos representar el producto de permutaciones de la siguiente manera:

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\beta & 2\beta & \dots & n\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha\beta & 2\alpha\beta & \dots & n\alpha\beta \end{pmatrix}$$

Sin embargo, es mucho más práctica la notación por ciclos:

Definición. Un ciclo de longitud r o r -ciclo $(c_1 \dots c_r)$ es una permutación que mueve las cifras $c_i \rightarrow c_{i+1}$ para cada $i = 1, \dots, r-1$, $c_r \rightarrow c_1$ y deja fijos los demás elementos. Notar que un r -ciclo se puede escribir de r formas distintas, pero todas ellas denotan el mismo ciclo: $(c_1 c_2 \dots c_r) = (c_2 c_3 \dots c_r c_1) = \dots = (c_r c_1 \dots c_{r-1})$.

Definición. Diremos que dos permutaciones son disjuntas si mueven conjuntos disjuntos de cifras. Las permutaciones disjuntas conmutan.

El siguiente teorema es de especial importancia:

Teorema 1.1. *Toda permutación $\alpha \in S_n$ se puede escribir de forma única (salvo reordenación de sus factores) como producto de ciclos disjuntos.*

Demostración. Sea α una permutación cualquiera y c_i un cifra cualquiera. Tomamos el menor r tal que $c_i \alpha^r = c_i$, que sabemos que existe ya que estamos en un grupo de orden finito. Notar que dicho r puede ser $r = 1$ y que por lo tanto c_i quede fija por α . Construimos el ciclo $(c_i c_i \alpha c_i \alpha^2 \dots c_i \alpha^{r-1})$. α permuta las cifras de este ciclo, luego las cifras que no están en este ciclo forman un conjunto que también permuta α . Repetimos el mismo proceso para las demás cifras que no están en el ciclo construido. Después de un número finito de pasos, ya no quedarán cifras y habremos obtenido un número finito de ciclos disjuntos. Así, α es el producto de dichos ciclos y ya hemos llegado a la descomposición deseada.

Para la unicidad, si tenemos que $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_p = \beta_1 \dots \beta_q$ y tomamos una cifra c_i de α , tenemos que dicha cifra tiene que ser movida por un sólo ciclo de los α_i y β_i . Sean α_k, β_j los ciclos que muevan a c_i en cada descomposición. Tiene que ser $\alpha_k = (c_i, c_i \alpha_k, c_i \alpha_k^2, \dots) = \beta_j$ ya que $c_i \alpha_k = c_{i+1}$, $c_i \beta_j = c_{i+1}$, $c_{i+1} \alpha_k = c_{i+2}$, $c_{i+1} \beta_j = c_{i+2}$ y así sucesivamente. Por lo tanto $\alpha_k = \beta_j$, y de la misma manera lo podemos extender a todos los α_i, β_i con lo que la descomposición es única. \square

Definición. Dada una permutación $\alpha \in S_n$ expresada como producto de ciclos disjuntos, diremos que α tiene tipo (i_1, \dots, i_n) , donde i_j es el número de j -ciclos que tiene α .

El tipo de una permutación es único, ya que, tal y como hemos visto en el Teorema 1.1 toda permutación se puede escribir de forma única como producto de ciclos disjuntos.

Definición. Dado un grupo (G, \cdot) y $x, y \in G$, diremos que x e y son conjugadas si existe $g \in G$ tal que $y = g^{-1} x g$. Lo denotaremos por $y = x^g$. Llamaremos clases de conjugación a los conjuntos

$$cl(x) = \{x^g \mid g \in G\}.$$

Teorema 1.2. *Dos permutaciones son conjugadas si y sólo si tienen el mismo tipo.*

Demostración. Sea $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_n)$ un n -ciclo y sea γ otra permutación. Denotamos $a_i \gamma = b_i$ para cada i . Entonces

$$b_i \gamma^{-1} \sigma \gamma = a_i \gamma \gamma^{-1} \sigma \gamma = a_i \sigma \gamma^{-1} = a_{i+1} \gamma = b_{i+1} \quad \text{para cada } i \leq n.$$

Además, notar que $t \gamma^{-1} \sigma \gamma = t$ para cada $t \neq b_i$ para algún i . Esto se debe a que $t \gamma^{-1} \neq a_i$ para cualquier i , luego $t \gamma^{-1} \sigma = t \gamma^{-1}$ y por lo tanto queda simplemente $t \gamma^{-1} \gamma = t$.

De esta manera tenemos que

$$\gamma(a_1 a_2 \dots a_n) \gamma^{-1} = (b_1 b_2 \dots b_n)$$

y así el conjugado también es un n -ciclo.

Si σ es una permutación que no es un n -ciclo, la podemos escribir como producto de ciclos disjuntos incluyendo los ciclos de longitud 1 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$. Entonces, dada otra permutación γ , se tiene que

$$\gamma \sigma \gamma^{-1} = \gamma \sigma_1 \gamma^{-1} \gamma \sigma_2 \gamma^{-1} \dots \gamma \sigma_n \gamma^{-1}$$

de manera que los $\gamma\sigma_i\gamma^{-1}$ son disjuntos. Por el razonamiento anterior tendrán el mismo tipo. Recíprocamente, sean σ y τ dos permutaciones con el mismo tipo. Podemos escribirlas una encima de la otra de forma que debajo de cada ciclo haya uno de la misma longitud de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma &= (a_1 a_2 \dots)(b_1 b_2 \dots)\dots \\ \tau &= (c_1 c_2 \dots)(d_1 d_2 \dots)\dots\end{aligned}$$

Entonces definimos γ como la permutación que lleva cada cifra de σ a la correspondiente cifra de τ que está debajo: $a_i\gamma = c_i$, $b_i\gamma = d_i$, etc. Entonces siguiendo el primer razonamiento $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \tau$ y por lo tanto σ y τ son conjugadas. \square

El número de permutaciones de un mismo tipo es $\frac{n!}{r_1 r_2 \dots r_s t_1! \dots t_m!}$, siendo (r_1, r_2, \dots, r_s) el tipo y t_1, t_2, \dots, t_m las coincidencias de números en ese tipo.

Definición. Dados dos grupos (G, \cdot) y (H, \cdot) , diremos que $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos si conserva la operación, es decir, $\forall a, b \in G \ f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Definición. Dado un grupo (G, \cdot) y un conjunto Ω , una acción de (G, \cdot) sobre Ω es un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned}\varphi : G &\rightarrow S_\Omega \\ g &\rightarrow \phi_g\end{aligned}$$

Denotaremos $\phi_g(x) = xg$ para cada $x \in \Omega$, $g \in G$ y diremos que G actúa sobre Ω . Por ser homomorfismo, para todo $g, h \in G$ y $x \in \Omega$ se tiene que $(xg)h = x(gh)$, que denotaremos por xgh . Además, si ϕ_g es inyectiva, diremos que la acción es fiel y en ese caso G es isomorfo a un subgrupo de S_Ω .

Definición. Sea un grupo G actuando sobre un conjunto Ω , definimos la órbita de $x \in \Omega$ como

$$Orb_G(x) = \{xg \mid g \in G\},$$

el estabilizador de $x \in \Omega$ como

$$Stab_G(x) = \{g \in G \mid xg = x\},$$

y los puntos fijos de $g \in G$ como

$$Fix_\Omega(g) = \{x \in \Omega \mid xg = x\}$$

Proposición 1.1. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto Ω . Entonces, si para cada $x, y \in \Omega$ definimos la relación $x \sim y$ si existe una permutación $g \in G$ tal que $xg = y$, tenemos que \sim es una relación de equivalencia.

Dem. 1. Es reflexiva: Obvio, tomando $g = 1_G$.

2. Es simétrica: Si $x \sim y$, entonces existe una $g \in G$ tal que $xg = y$. Por ser G un grupo, existe el inverso de g , g^{-1} . Así, por la definición de acción se sigue que $xgg^{-1} = (xg)g^{-1} = yg^{-1}$, luego $y \sim x$.

3. Es transitiva: Supongamos que para $x, y, z \in \Omega$ se cumple $x \sim y$, $y \sim z$. Es decir, existen $g_1, g_2 \in G$ tal que $xg_1 = y$, $yg_2 = z$. Por lo tanto, $xg_1g_2 = yg_2 = z$ y así $x \sim z$. \square

Observar que las clases de equivalencia de esta relación son las órbitas de la acción:

$$Orb_G(x) = \{y \in \Omega \mid \text{existe } g \in G \text{ tq } xg = y\} = \{xg \mid g \in G\}$$

Por lo tanto tenemos que las órbitas de una acción sobre Ω forman una partición de clases de equivalencia.

Lema 1.3. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto Ω , entonces:

1. Para cada $x \in \Omega$ se tiene que:

$$|Orb_G(x)| = \frac{|G|}{|Stab_G(x)|}$$

2. Si $x, y \in Orb_G(x)$, entonces $|Stab_G(x)| = |Stab_G(y)| = \frac{|G|}{|Orb_G(x)|}$.

Dem. 1. Tomamos $g_1, g_2 \in G$. Así, $xg_1 = xg_2$ si y sólo si $xg_1g_2^{-1} = x$, es decir, si y sólo si $g_1g_2^{-1} \in Stab(x)$ si y sólo si $g_1 \in Stab(x)g_2$, es decir, existe un $h \in Stab(x)$ tal que $g_1 = hg_2$. Fijado un elemento g del grupo, el número de elementos de la forma hg es el cardinal del conjunto $Stab(x)g = \{hg \mid h \in Stab(x)\}$. Como $|Stab(x)g| = |Stab(x)|$ para cada $g \in G$, tenemos $|Stab(x)|$ elementos en G que llevan x al mismo xg y por lo tanto se sigue que $|Orb_G(x)| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$.

2. Se sigue por el resultado anterior. □

Proposición 1.2. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto Ω . Entonces el orden del conjunto de puntos fijos para cada $g \in G$, es decir, $|Fix(g)|$, es constante en las clases de conjugación de G . Incluso se tiene que si g, \bar{g} son conjugados en S_Ω , entonces $|Fix(g)| = |Fix(\bar{g})|$.

Demostración. Sean g, \bar{g} conjugados en S_Ω . Sea $\alpha \in S_\Omega$ tal que $g^\alpha = \bar{g}$. Entonces se tiene que $xg = x$ si y sólo si $x\alpha\bar{g} = x\alpha$ ya que $x\alpha\bar{g} = x\alpha\alpha^{-1}g\alpha = xg\alpha = x\alpha$. Existe así una correspondencia inyectiva entre $Fix(g), Fix(\bar{g})$ mediante $x \rightarrow x\alpha$. □

Definición. Un movimiento es una aplicación biyectiva $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que conserva distancias. Los movimientos están clasificados (se puede encontrar una explicación más extensa en ([1])). En este trabajo sólo nos interesan los llamados movimientos directos.

Recordemos además que todo movimiento T tiene inversa (que también es un movimiento), que existe un movimiento identidad y que, dados dos movimientos, la composición también es un movimiento y que dicha composición es asociativa. Por lo tanto, denotando T al conjunto de movimientos, tenemos que (T, \circ) es un grupo:

Definición. Llamaremos grupo de simetría S de un cierto objeto al grupo de movimientos que dejan invariante a dicho objeto geométrico.

Para los poliedros, los movimientos que los dejan invariantes deben tener puntos fijos. Dichos movimientos sólo podrán ser simetrías respecto de un plano o rotaciones respecto de un eje. Pero de estos, los únicos movimientos que podemos aplicar a un sólido sin tener que “romperlo” son los giros (podemos encontrar una descripción más detallada de los grupos de movimientos de poliedros regulares en [2]). Debido a esto, para este trabajo nos va a interesar particularmente el grupo de simetrías del cubo, que está formado por las rotaciones del cubo. Veremos además, que dicho grupo puede actuar sobre las caras, aristas o vértices del cubo:

Ejemplo 1. ¿Cuántas rotaciones del cubo hay y cómo son? Empezamos identificando los distintos ejes de giro y las rotaciones (distintas de la identidad) que produce cada uno. Hay tres tipos de ejes en el cubo:

1. Los ejes que unen los puntos centrales de los pares de caras opuestas. Como hay 6 caras, habrá 3 ejes de este tipo. Denotémoslos por $\{e_1, e_2, e_3\}$. Podemos girar el cubo 90° , 180° o 270° en torno a cada uno de estos ejes. En total habrá $3 \times 3 = 9$ giros respecto a estos ejes.
2. Los ejes que unen los pares de vértices opuestos. Un cubo tiene 8 vértices, luego habrá 4 ejes de este tipo. Los denotaremos por $\{e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Se puede girar 120° o 240° en torno a cada uno de estos ejes. Por consiguiente, estos 4 ejes generan 8 rotaciones distintas.

- Los ejes que unen los puntos medios de los pares de aristas opuestas. Tenemos 12 aristas en un cubo, por lo tanto habrá 6 ejes de este tipo, los cuales denotaremos como $\{e_8, e_9, \dots, e_{13}\}$. Sólo podemos girar el cubo 180° en torno a cada eje, lo cual genera 6 rotaciones distintas.

En total tenemos 23 rotaciones distintas de la identidad. En consecuencia, hay un total de 24 rotaciones (incluyendo la identidad) distintas del cubo en el espacio. Tenemos una acción fiel del grupo G de las rotaciones del cubo sobre el conjunto de caras, luego podemos ver cada una de estas rotaciones como una permutación de las 6 caras, o como una permutación de las aristas, vértices o incluso las diagonales del cubo. Si identificamos cada diagonal con una letra a_i $X = \text{Conjunto de las diagonales del cubo} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, tenemos que al ser la acción fiel, G será isomorfo a algún subgrupo de $S_X = S_4$. Pero como sabemos que $|G| = 24 = |S_4|$ tiene que ser $G \cong S_4$.

Identificamos cada cara del cubo por un número del 1 al 6, tal y como se ve en Fig. 1.1.

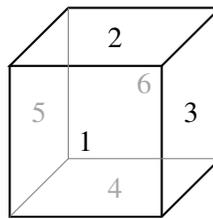


Figura 1.1: Cubo con las caras numeradas

Sea por lo tanto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ con a_1 la diagonal que va del vértice de las caras 1, 2 y 3 al opuesto, a_2 la diagonal que va del vértice de las caras 1, 3 y 4 al opuesto, a_3 la diagonal que va del vértice de las caras 1, 4 y 5 al opuesto, a_4 la diagonal que va del vértice de las caras 1, 2 y 5 al opuesto. Distinguimos las permutaciones según los ejes de giro:

■ **Rotaciones en torno a los ejes e_1, e_2 y e_3 .**

Denotamos por $\alpha_i = \text{Rotación de } 90^\circ \text{ respecto al eje } e_i \text{ para } i=1,2,3$. Entonces, es obvio que

- $\alpha_i^2 = \text{Rotación de } 180^\circ \text{ respecto al eje } e_i$.
- $\alpha_i^3 = \text{Rotación de } 270^\circ \text{ respecto al eje } e_i$.
- $\alpha_i^4 = \text{Rotación de } 360^\circ \text{ respecto al eje } e_i = \iota$.

Por lo tanto, estas rotaciones son de orden 4. Como $\alpha_i^4 = \iota$, se sigue que $(\alpha_i^2)^2 = \iota$, luego α_i^2 tienen orden 2.

Tenemos las siguientes permutaciones:

$$\alpha_1 = (2\ 5\ 4\ 3) = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4), \text{ alrededor del eje } e_1 \text{ que une la cara 1 con la cara 6}$$

$$\alpha_2 = (1\ 3\ 6\ 5) = (a_1\ a_3\ a_2\ a_4), \text{ alrededor del eje } e_2 \text{ que une la cara 2 con la cara 4}$$

$$\alpha_3 = (1\ 4\ 6\ 2) = (a_1, a_2, a_4, a_3), \text{ alrededor del eje } e_3 \text{ que une la cara 3 con la cara 5}$$

Así, todas las rotaciones serán: $\{\alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \alpha_3, \alpha_3^2, \alpha_3^3\}$

■ **Rotaciones en torno a los ejes e_4, e_5, e_6 y e_7 .**

Denotamos por $\sigma_i = \text{Rotación de } 120^\circ \text{ en torno al eje } e_i \text{ para } i = 4, 5, 6, 7$. Entonces

- $\sigma_i^2 = \text{Rotación de } 240^\circ \text{ en torno al eje } e_i$
- $\sigma_i^3 = \text{Rotación de } 360^\circ \text{ en torno al eje } e_i$

Por lo tanto tienen orden 3.

Tenemos entonces las siguientes permutaciones:

$\sigma_1 = (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5) = (a_2\ a_3\ a_4)$, alrededor del eje e_4 , que une el vértice común a las caras 1,2,3 con vértice común a las caras 4,5,6.

$\sigma_2 = (1\ 5\ 2)(3\ 4\ 6) = (a_1\ a_3\ a_2)$, alrededor del eje e_5 , que une el vértice común a las caras 1,2,5 con vértice común a las caras 3,4,6.

$\sigma_3 = (1\ 4\ 3)(2\ 5\ 6) = (a_1\ a_3\ a_4)$, alrededor del eje e_6 , que une el vértice común a las caras 1,3,4 con vértice común a las caras 2,5,6

$\sigma_4 = (1\ 5\ 4)(2\ 6\ 3) = (a_1\ a_2\ a_4)$, alrededor del eje e_7 , que une el vértice común a las caras 1,4,5 con vértice común a las caras 2,3,6

Todas las rotaciones en torno a los ejes e_4, \dots, e_7 son $\{\sigma_1, \sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_2^2, \sigma_3, \sigma_3^2, \sigma_4, \sigma_4^2\}$ -

■ **Rotaciones en torno a los ejes e_8, \dots, e_{13}**

Denotamos por τ_i =Rotación de 180° en torno al eje e_i para $i = 8, \dots, 13$.Entonces

- τ_i^2 =Rotación de 360° en torno al eje e_i

Por lo tanto tienen orden 2.

Tenemos entonces las siguientes permutaciones:

$\tau_1 = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6) = (a_1\ a_4)$, alrededor del eje e_8 que une el punto medio de la arista común a las caras 1,2 y el punto medio de la arista común a las caras 4,6

$\tau_2 = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6) = (a_1\ a_2)$, alrededor del eje e_9 que une el punto medio de la arista común a las caras 1,3 y el punto medio de la arista común a las caras 5,6

$\tau_3 = (1\ 4)(3\ 5)(2\ 6) = (a_2\ a_3)$,alrededor del eje e_{10} que une el punto medio de la arista común a las caras 1,4 y el punto medio de la arista común a las caras 2,6

$\tau_4 = (1\ 5)(2\ 4)(3\ 6) = (a_3\ a_4)$, alrededor del eje e_{11} que une el punto medio de la arista común a las caras 1,5 y el punto medio de la arista común a las caras 3,6

$\tau_5 = (1\ 6)(2\ 3)(4\ 5) = (a_1\ a_3)$, alrededor del eje e_{12} que une el punto medio de la arista común a las caras 2,3 y el punto medio de la arista común a las caras 4,5

$\tau_6 = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4) = (a_2\ a_4)$, alrededor del eje e_{13} que une el punto medio de la arista común a las caras 2,5 y el punto medio de la arista común a las caras 3,4

Por último, notar que al ser $G \cong S_4$, ya tenemos las clases de conjugación: $\{\alpha_i, \alpha_i^3\}$, con 6 elementos, $\{\alpha_i^2\}$, con 3 elementos, $\{\sigma_i, \sigma_i^2\}$, con 8 elementos, $\{\tau_i\}$, con 6 elementos, y por último, obviamente $\{1\}$ con un único elemento.

Capítulo 2

El teorema de Burnside

En este capítulo vamos a introducir un resultado fundamental para el tipo de problemas que queremos afrontar, gracias al cual vamos a poder contar órbitas en distintas acciones. Este resultado es el teorema de Burnside, que nos proporciona una fórmula para el conteo de órbitas. Cabe mencionar que no fue Burnside quien lo enunció por primera vez. En su libro de 1897 ([3]), Burnside atribuye el lema a Frobenius, aunque en realidad fue Cauchy quien lo demostró primero. Debido a esto, a veces en la literatura también es conocido como el Lema de Cauchy-Frobenius (tal y como hace De Bruijn en [4]).

Teorema 2.1 (Burnside). *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto D , entonces el número de órbitas, r , viene dado por:*

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Demostración. Consideremos el conjunto $\{(x, g) \in D \times G \mid xg = x\}$. Contamos sus elementos de dos formas: formamos una matriz cuyas filas están etiquetadas por los elementos de D y cuyas columnas están etiquetadas por los elementos de G . En la posición (x, g) escribimos 1 si $xg = x$ y 0 si $xg \neq x$. De esta manera, si sumamos el número de unos por filas tendremos $\sum_{x \in D} |Stab(x)|$ (ya que cada fila aporta tantos unos como simetrías que dejan fijas al elemento x que etiqueta esa fila) y si sumamos el número de unos por columnas tendremos $\sum_{g \in G} |Fix(g)|$ (ya que cada columna aporta tantos unos como puntos fijos tenga el elemento g que etiqueta esa columna). Por lo tanto,

$$\sum_{x \in D} |Stab(x)| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Aplicando esto al lema 1.3, tenemos que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in D} |Stab(x)| = \sum_{x \in D} \frac{1}{|Orb(x)|}$$

Supongamos que existen r órbitas distintas, denotémoslas por O_1, O_2, \dots, O_r . Por la Proposición 1.1, sabemos que las órbitas forman una partición sobre el conjunto D . Además, dados $x_1, x_2 \in O_i$ entonces $|Orb(x_1)| = |Orb(x_2)| = |O_i|$. Luego se tiene que

$$\sum_{x \in O_i} \frac{1}{|Orb(x)|} = \frac{1}{|O_i|} + \frac{1}{|O_i|} + \dots + \frac{1}{|O_i|} = 1$$

y en consecuencia

$$\sum_{x \in D} \frac{1}{|Orb(x)|} = r.$$

□

Vamos a ver algunos ejemplos de cómo aplicar este teorema:

Ejemplo 2. Supongamos que tenemos dos colores, $R=\{\text{azul, verde}\}$ y queremos pintar los vértices de un triángulo, $D = \{1,2,3\}$. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo? En la figura 2.1 vemos todas las posibles coloraciones.

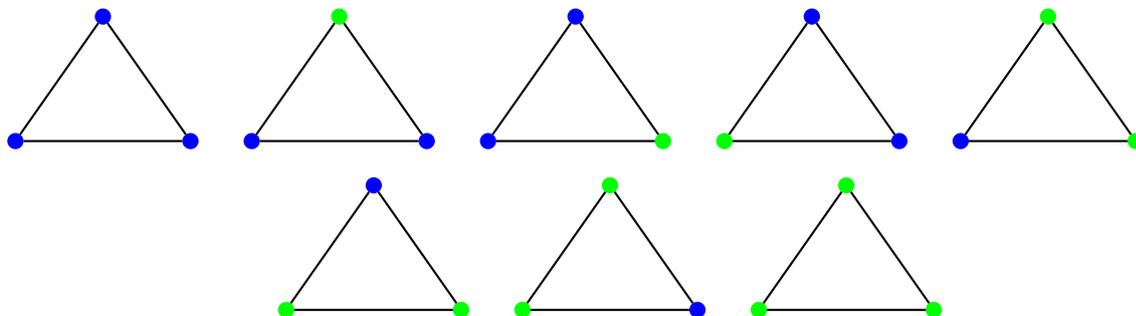
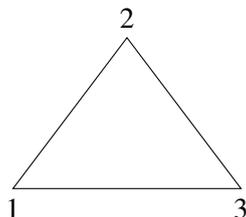


Figura 2.1: Maneras de colorear los vértices de un triángulo con dos colores

En total hay $2^3 = 8$ coloraciones. Sin embargo, notar que las coloraciones 2, 3 y 4 son indistinguibles en el espacio, ya que mediante una rotación del triángulo podemos ir de una coloración a otra. Esto mismo ocurre para 5, 6, y 7. Por lo tanto, en realidad sólo tenemos 4 triángulos coloreados de maneras distintas si se pueden mover en el espacio.

En este ejemplo, es fácil de contar las órbitas ya que son pocos casos y los podemos dibujar. Si tuviésemos más colores, habría más casos a tener en cuenta: Para n colores habría n^3 coloraciones distintas. Por ejemplo si tomamos $n=6$, $6^3 = 216$. Luego no sería viable dibujar todos los posibles casos y estudiar qué coloraciones nos llevan a otras. Para hacer esto nos ayudamos del teorema de Burnside. Etiquetamos el triángulo de la siguiente manera:



Representamos los movimientos del triángulo en el espacio como permutaciones del conjunto de vértices $D = \{1,2,3\}$ y tenemos $G = \{1, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Ahora consideramos X el conjunto de todas las coloraciones, $X = \{1,2, \dots, 216\}$. G actúa sobre X ya que al aplicar un movimiento a una coloración de esas 216, se obtiene una coloración distinta.

Veámos cuántas órbitas tiene la acción de G sobre X con el lema de Burnside. Para ello necesitamos saber cuántos elementos deja fijos cada permutación de G :

- Para que la permutación $(1\ 2\ 3)$ fije una coloración, dicha coloración tiene que ser igual antes y después de aplicar la rotación. En este caso, intercambiamos todos los vértices de uno en uno. Por lo tanto, σ_1 fija las coloraciones que tienen los vértices 1,2,3 coloreados del mismo color, es decir, 6 coloraciones.
- Siguiendo el mismo razonamiento, $(1\ 3\ 2)$ fija las coloraciones que tienen los vértices 1,3,2 coloreados del mismo color, de nuevo, 6 coloraciones.
- $(1)(2\ 3)$ fija los elementos cuyos vértices 2,3 tienen el mismo color, es decir, fija 36 elementos.
- $(1\ 3)(2)$ y $(1\ 2)(3)$, por el mismo razonamiento de antes también fijarán 36 elementos cada una.

De esta manera, tenemos que:

$g \in G$	$ \text{Fix}(g) $ en X
σ_1	6
σ_2	6
σ_3	36
σ_4	36
σ_5	36
ι	216

Por lo tanto, según el lema de Burnside, tendremos $\frac{1}{6}(2 \cdot 6 + 3 \cdot 36 + 216) = 56$ órbitas. Por lo tanto, habrá 56 coloraciones distinguibles.

Notar que al razonar cuántos elementos deja fija cada permutación hemos visto que las permutaciones del mismo tipo fijan el mismo número de elementos. Esto no es casualidad (ver Teorema 1.2 y Proposición 1.2), y de hecho vamos a aprovecharlo para casos en los que haya muchas permutaciones y no sea práctico calcular cuántos elementos fija cada una de ellas. Vemos esto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. Sea un cubo como el del ejemplo 1. Supongamos que tenemos tres colores: $R = \{\text{rojo, verde, blanco}\}$. ¿De cuántas maneras podemos pintar las caras del cubo? Si contamos todas las coloraciones posibles, tenemos $3^6 = 729$ maneras de colorear el cubo. Obviamente, es mucho más costoso y pesado pensar en todas y cada una de ellas y dibujarlas aquí como en el caso de los triángulos. No obstante, podemos apoyarnos en los cálculos que ya tenemos del ejemplo 1 para saber cuántas coloraciones "distinguibles" hay.

Por el Teorema 1.2, sólo necesitamos calcular el número de puntos fijos para un elemento de cada clase de conjugación. Luego, continuando con la notación del ejemplo 1, habrá 4 clases de conjugación: $\{cl(\iota), cl(\alpha_i), cl(\sigma_i), cl(\tau_i)\}$.

Por ejemplo, la permutación $(1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5)$ dejará fijas las coloraciones que tengan el mismo color en las caras 1, 2 y 3, y el mismo color en las caras 4, 5 y 6. Es decir, hay que elegir un color para cada conjunto de caras, luego dejará fijas $3 \times 3 = 9$ coloraciones. Siguiendo este criterio, es fácil ver que:

- Las permutaciones de la clase de $\alpha_1 = (2\ 5\ 4\ 3)$, dejan fijas 27 coloraciones cada una.
- Las permutaciones de la clase de $\alpha_1^2 = (2\ 4)(5\ 3)$, dejan fijas 81 coloraciones cada una.
- Las permutaciones de la clase de $\sigma_1 = (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5)$, dejan fijas 9 coloraciones cada una.
- Las permutaciones de la clase de $\tau_1 = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)$, dejan fijas 27 coloraciones cada una.

Tabulemos la información que tenemos:

$g \in G$	ι	α_1	α_1^2	σ_1	τ_1
$ cl(g) $	1	6	3	8	6
$ \text{Fix}(g) $	729	27	81	9	27

Aplicando el lema de Burnside, tenemos que hay $\frac{1}{24}(1 \cdot 729 + 6 \cdot 27 + 3 \cdot 81 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 27) = 57$ coloraciones distinguibles.

Veamos ahora un ejemplo de gran importancia histórica:

Ejemplo 4 (Teoría de conmutadores.). Una aplicación muy interesante de la teoría de enumeración que estamos viendo es el conteo de funciones de conmutación en teoría de conmutadores. Una función de conmutación es una función $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$, o visto de manera más general, una aplicación con un número dado de entradas pero con sólo dos posibles salidas, 0 ó 1. La teoría de conmutadores es muy importante ya que se puede aplicar a una variedad de temas: circuitos con interruptores encendidos y apagados, cuadros de conexión para centrales telefónicas (muy relevante durante el siglo XX), o para

representar la información con la que trabajan los ordenadores, que toma forma de cadenas de binarios. El problema que presentan este tipo de funciones es que aún tomando n como un número "pequeño", tenemos un número muy grande de funciones, por ejemplo $2^{2^4} = 65536$ para $n = 4$.

Definimos la siguiente relación de equivalencia:

Sea $X = \{f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2\}$ el conjunto de todas las posibles funciones de conmutación. Sean $f, g \in X$, diremos que $f \sim g$ si existe $\alpha \in S_n$ tal que para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$,

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, \dots, x_{n\alpha}) \tag{2.1}$$

Entonces se dice que f y g son esencialmente iguales, y en teoría de conmutadores esto significa que los correspondientes circuitos de f y g son idénticos excepto por una permutación de los interruptores.

Ilustremos dos funciones esencialmente iguales con un ejemplo:

Tenemos $n = 2$, $\alpha = (1\ 2)$ y definimos $f : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ como $f(0, 0) = 1, f(1, 0) = 0, f(0, 1) = 1, f(1, 1) = 0$ y $g : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ como $g(0, 0) = 1, g(1, 0) = 1, g(0, 1) = 0, g(1, 1) = 0$. Entonces $f\alpha = g$ y por lo tanto $f \sim g$.

Ahora para cada $\alpha \in S_n$, $f \in X$ definimos $f\alpha$ como $f\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, \dots, x_{n\alpha})$. De esta manera, tenemos una acción

$$\begin{aligned} S_n &\rightarrow \text{Per}_X \\ \alpha &\rightarrow (f \rightarrow f\alpha) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Así tenemos una acción cuyas órbitas son las clases de la relación de equivalencia $f \sim g$ vista en 2.1. Por lo tanto en vez de tener en cuenta todas las funciones de conmutación, se tienen en cuenta sólo una de cada clase de equivalencia.

En el caso de $n = 4$, tenemos $D = \{0, 1\}^4 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), \dots\}$, $G = S_4$ y $R = \{0, 1\}$. El problema que nos planteamos nosotros es calcular el número de funciones de conmutación esencialmente distintas. Para ello, vamos a hacer uso del teorema de Burnside. Sabemos que G actúa sobre el conjunto de las funciones de conmutación como hemos visto en (2.2). Por lo tanto, para contar funciones esencialmente distintas tendremos que contar las órbitas de esta acción. En esta sección usaremos el teorema de Burnside para dar una respuesta. En el capítulo siguiente veremos cómo resolver este problema de otra manera.

Necesitamos contar el número de elementos de X que quedan fijos por cada permutación de S_4 para poder aplicar la fórmula de Burnside. Para ello, vamos a trabajar con los representantes de las clases de conjugación tal y como hemos hecho hasta ahora para facilitar el cálculo. Por lo tanto, lo que nos interesa calcular ahora es: dada $\alpha \in S_4$, ¿cuántas funciones de X deja fijas? Para que una f quede fija, tiene que cumplir $f\alpha = f$.

- Trivialmente, la identidad ι fija a todos los 2^{16} elementos de X .
- Tomamos $\alpha = (1\ 2)$. Si tenemos en cuenta las 4-tuplas en D que cumplen $x_1 = x_2$, al considerar $f\alpha$ tenemos que $f\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_2, x_1, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, luego podemos asignarle cualquier imagen en \mathbb{Z}_2 . Hay 8 elementos en D con $x_1 = x_2$, luego hay 2^8 posibilidades. Si $x_1 = 1, x_2 = 0$, tenemos 4 elementos en D que pueden ir a cualquier elemento de $\{0, 1\}$, por lo tanto hay 2^4 posibilidades. Si $x_1 = 0, x_2 = 1$, la imagen del elemento va a un elemento del caso anterior, es decir, su imagen ya está determinada, por lo que ya hemos tenido en cuenta todas las posibilidades. En total, α fija $2^8 \cdot 2^4$ elementos de X . Esto pasará para todas las permutaciones del mismo tipo que α en S_4 .
- Sea ahora $\beta = (1\ 2)(3\ 4)$. Seguimos un razonamiento similar al anterior. Hay 4 4-tuplas en D que cumplen $x_1 = x_2$ y $x_3 = x_4$, por lo que hay 4 elementos a los que podemos asignar 0 ó 1 como queramos mediante la f . Hay 2^4 posibilidades. Para los otros 12 elementos, si elegimos la imagen de (x_1, x_2, x_3, x_4) , ya queda determinada la imagen de (x_2, x_1, x_4, x_3) . Es decir, de esos 12 elementos tenemos que asignar la misma imagen (0 ó 1) de dos en dos. Como $12/2 = 6$, hay 2^6 maneras de hacer esto. Luego en total, fijará $2^4 \cdot 2^6$ elementos de X .

- Tomamos $\gamma = (1\ 2\ 3)$. Hay 4 elementos en D tal que $x_1 = x_2 = x_3$ y podemos asignar 0 ó 1 a su imagen por f , luego hay 2^4 posibilidades. Para los demás elementos, la imagen de (x_1, x_2, x_3, x_4) por f tiene que ser la misma que la de (x_2, x_3, x_1, x_4) y que la de (x_3, x_1, x_2, x_4) . Por lo tanto, de los 12 elementos restantes, tenemos que asignar la misma imagen a conjuntos de 3 en 3, es decir asignar la misma imagen en $\{0,1\}$ a $12/3 = 4$ elementos. Hay 2^4 formas de hacer esto. En total, fija $2^4 \cdot 2^4$ elementos.
- Por último sea $\tau = (1\ 2\ 3\ 4)$. Tenemos 2 elementos en D que cumplen $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, con lo que hay 2^2 formas de asignarles el 0 ó 1. Además, traspone dos elementos: $(0,1,0,1)$ lo lleva a $(1,0,1,0)$ y viceversa. Luego para asignar el mismo valor entre 0 ó 1 a $f(0, 1, 0, 1)$ y $f(1, 0, 1, 0)$ hay 2 maneras. Para los otros 12 elementos, la imagen de (x_1, x_2, x_3, x_4) por f dicta la imagen de (x_2, x_3, x_4, x_1) , (x_3, x_4, x_1, x_2) y (x_4, x_1, x_2, x_3) . Así, habrá que asignar el mismo valor a $12/4 = 3$ elementos, y esto lo podemos hacer de 2^3 maneras distintas. En total fijan $2^2 \cdot 2 \cdot 2^3$ elementos de X .

Por lo tanto, como $|cl((1\ 2))| = 6$, $|cl((1\ 2)(3\ 4))| = 3$, $|cl((1\ 2\ 3))| = 8$ y $|cl((1\ 2\ 3\ 4))| = 6$, aplicando el teorema de Burnside tenemos que hay $\frac{1}{24}(2^16 + 6 \cdot 2^8 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2^4 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^3) = 3984$ funciones esencialmente distintas.

Estos ejemplos son prácticos y muy útiles para asentar bien la idea que propone el teorema de Burnside. Sin embargo, cuando el número de coloraciones y permutaciones del grupo G se vuelve muy alto se hace muy difícil intentar deducir el número de coloraciones que fija cada elemento, con lo que se hace más complicado aplicar la fórmula de Burnside. Debido a esto, vamos a introducir unos cuantos conceptos nuevos que facilitarán nuestro trabajo.

Definición. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto D de n elementos. Entonces, cada elemento de $x \in G$ se puede ver como una permutación α de los n elementos de D con tipo (i_1, \dots, i_n) . Definimos el monomio de x como:

$$mon(x) = x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$$

Definición. El polinomio indicador de ciclos de la acción del grupo G sobre D es

$$\mathcal{I}_{G,D} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} mon(x)$$

Cuando no de lugar a dudas, lo denotaremos por \mathcal{I} .

El concepto de polinomio indicador de ciclos es muy útil para nuestro problema y veremos el por qué en la lección siguiente. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5. Calculemos el polinomio indicador de ciclos de la acción del ejemplo 2:

Sea $G = S_3$ y sea $D = \{1, 2, 3\}$. Como S_3 tiene sólo 6 elementos los podemos escribir junto con sus respectivos tipos:

$g \in S_3$	Tipo
ι	(3,0,0)
(1 2)	(1,1,0)
(1 3)	(1,1,0)
(2 3)	(1,1,0)
(1 2 3)	(0,0,1)
(1 3 2)	(0,0,1)

$\implies \mathcal{I} = \frac{1}{6}(x_1^3 + x_1x_2 + x_1x_2 + x_1x_2 + x_3 + x_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$

Pero, ¿qué pasa si no podemos escribir todos los elementos del grupo? Para ello viene bien recordar que dos elementos tienen el mismo si y sólo si son conjugados en S_D . Por lo tanto, como el monomio de un elemento viene dado por el tipo, es obvio que dos elementos tienen el mismo monomio si y sólo si son conjugados en S_D . Todo esto nos sirve para enunciar la siguiente proposición:

Proposición 2.1. Sean H_1, \dots, H_n las clases de conjugación de G , con $t_i \in H_i$ para cada i . Entonces podemos expresar el polinomio indicador de ciclos como

$$\mathcal{J} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^n |H_i| \text{mon}(t_i)$$

Demostración. Se sigue del razonamiento hecho anteriormente. □

Ejemplo 6. Basándonos en el ejemplo 3, calculemos el polinomio indicador de la siguiente acción ayudándonos de esta proposición:

Sea G el grupo de rotaciones del cubo actuando sobre las caras de éste (ya describimos esta acción con detalle en el ejemplo 1). Sabemos que G es isomorfo a S_4 , por lo que podemos tener en cuenta las clases de conjugación de los elementos de S_4 para resolver el problema:

$g \in S_4$	ι	α_i	α_i^2	σ_i	τ_i
$\text{lcl}(g)$	1	6	3	8	6
Tipo	(6,0,0,0,0,0)	(2,0,0,1,0,0)	(2,2,0,0,0,0)	(0,0,2,0,0,0)	(0,3,0,0,0,0)
$\text{mon}(g)$	x_1^6	$x_1^2 x_4$	$x_1^2 x_2^2$	x_3^2	x_2^3

Por lo tanto, según la proposición 2.1 el polinomio indicador de ciclos de la acción de G sobre las caras del cubo es $\mathcal{J} = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2 x_4 + 3x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2^3)$

Ejemplo 7 (Conmutadores). Consideramos ahora la acción de S_4 sobre $D = \mathbb{Z}_2^4$ y calculamos su polinomio indicador: De nuevo, hacemos esto gracias a la Proposición 2.1 que nos garantiza que con sólo saber el tipo de uno de los ciclos de cada clase de conjugación de G podemos hallar el polinomio indicador:

- La clase de ι tiene un único elemento de tipo (16, 0,0,0), ya que fija los 16 elementos de D .
- La clase de (1 2) tiene 6 elementos de tipo (8, 4, 0, 0), ya que fija 8 elementos de D y los demás 8 los mueve de dos en dos.
- La clase de (1 2 3) tiene 8 elementos de tipo (4,0,4,0), ya que fija 4 elementos de D y los demás 12 elementos los mueve de tres en tres.
- La clase de (1 2)(3 4) tiene 3 elementos de tipo (4,6,0,0), ya que fija 4 elementos de D y los demás 12 elementos los mueve de dos en dos.
- La clase de (1 2 3 4) tiene 6 elementos de tipo (2, 1,0,3), ya que fija 2 elementos, traspone 1 (por ejemplo (1 2 3 4) traspone 1010 con 0101) y los demás 12 elementos los mueve de cuatro en cuatro.

De esta manera, tenemos la siguiente información:

$g \in S_4$	ι	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
$\text{lcl}(g)$	1	6	3	8	6
Tipo	(16, 0,0,0)	(8, 4, 0, 0)	(4,6,0,0)	(4,0,4,0)	(2, 1,0,3)
$\text{mon}(g)$	x_1^{16}	$x_1^8 x_2^4$	$x_1^4 x_2^6$	$x_1^4 x_3^4$	$x_1^2 x_2 x_3^3$

Y el polinomio indicador es $\mathcal{J} = \frac{1}{24}(x_1^{16} + 6x_1^8 x_2^4 + 3x_1^4 x_2^6 + 8x_1^4 x_3^4 + 6x_1^2 x_2 x_3^3)$.

¿De qué nos sirve el polinomio indicador de ciclos? Primero debemos introducir unos cuantos conceptos indispensables para la resolución de nuestro problema, que además servirán para responder a esa pregunta, pero lo haremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

El teorema de Redfield-Pólya

En este capítulo vamos a formalizar algunos conceptos importantes para después estudiar el teorema de Redfield-Pólya en la segunda sección.

3.1. Coloraciones, diseños y pesos

En esta sección refinaremos el concepto de "coloración" e introduciremos algunos términos para ciertas nociones con las que ya hemos trabajado sin manifestarlo, por ejemplo al considerar la acción del grupo G de las rotaciones del cubo sobre el conjunto D de las 6 caras con los 3 colores del ejemplo 3. Lo que haremos es relacionar formalmente la acción de G sobre D con la acción de G sobre R^D , siendo R el conjunto de 3 colores en el caso del cubo, o el conjunto de 6 colores en el caso del triángulo del ejemplo 2, o $\{0,1\}$ en el caso de las funciones de conmutación del ejemplo 4.

Definición. Sea D un conjunto de objetos, y sea R un conjunto de colores. Diremos que una coloración es una función $f : D \rightarrow R$

En lo que queda de trabajo, asumiremos siempre que D es un conjunto de objetos y R un conjunto de colores, a menos que se diga lo contrario explícitamente. Trabajaremos con conjuntos R y D finitos, y denotaremos por R^D al conjunto de todas las coloraciones. Además, notar que $|R^D| = |R|^{|D|}$.

Así, en el ejemplo 3, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\text{Conjunto de las caras del cubo}\}$, $R = \{\text{verde, rojo, amarillo}\}$ y $R^D = \{\text{Coloraciones de las 6 caras del cubo con los 3 colores disponibles}\}$.

Proposición 3.1. Sean G un grupo, R y D conjuntos finitos. Definimos $fg \in R^D$, dada por $fg(d) = f(dg^{-1})$ para cada $g \in G, f \in R^D$ y $d \in D$. Entonces si G actúa sobre D , también actúa sobre el conjunto de coloraciones R^D mediante fg .

Demostración. Para empezar, la aplicación $\begin{matrix} R^D & \rightarrow & R^D \\ f & \rightarrow & fg \end{matrix}$ es biyectiva. Veamos que es inyectiva: Sean f_1, f_2 dos coloraciones cuya imagen es la misma:

$$f_1g(d) = f_2g(d) \text{ para cada } d \in D.$$

Por la definición de fg , esto equivale a

$$f_1(dg^{-1}) = f_2(dg^{-1}) \text{ para cada } d \in D.$$

Lo que supondría que f_1 y f_2 son la misma coloración (ya que $x = (xg)g^{-1}$ para todo x). Como el conjunto es finito, con ver la inyección basta para probar la biyección. Sólo nos falta ver que es una acción: Sean $g, h \in G$, entonces

$$f(gh)(d) = f(d(gh)^{-1}) = f((dh^{-1})g^{-1}) = fg(dh^{-1}) = ((fg)h)(d)$$

para cada $f \in R^D, d \in D$. Así tenemos que $fg \in R^D$ y la aplicación

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \text{Per}_{R^D} \\ g &\rightarrow (f \rightarrow fg) \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos y por lo tanto una acción de G en R^D . □

Este resultado es de máxima importancia ya que implica que la acción de G sobre las coloraciones R^D queda determinada por la acción de G sobre D .

Definición. Sea G un grupo, R y D conjuntos finitos. Sabemos que si G actúa sobre D , también lo hace sobre el conjunto de las coloraciones R^D . Las órbitas de la acción de G sobre R^D se llaman diseños.

Es interesante mencionar que en los ejemplos 2 y 3 del capítulo anterior, al contar coloraciones distintas, lo que estábamos haciendo realmente era contar diseños.

A veces necesitaremos pedir más condiciones sobre el conjunto de colores que usemos. Para ello nos será útil la siguiente definición:

Definición. Una ponderación o asignación de peso es una función $\omega : R \rightarrow S$, donde S es un anillo conmutativo. Para cada $r \in R$, diremos que $\omega(r)$ es el peso de r .

A partir de esta definición podemos asignar también un peso sobre el conjunto de las coloraciones R^D de la siguiente forma:

Definición. Para cada $f : D \rightarrow R$, diremos que su asignación de peso es

$$W(f) = \prod \{ \omega(f(d)) \mid d \in D \}$$

Proposición 3.2. La función asignación de peso es constante para cada diseño.

Demostración. Sea ω una función asignación de peso en un conjunto de colores R , y sean $f_1, f_2 \in R^D$ pertenecientes al mismo diseño, es decir, existe una permutación $g \in G$ tal que $f_1 = f_2g$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} W(f_1) &= \prod \{ \omega(f_1(d_1)) \mid d_1 \in D \} = \prod \{ \omega(f_2g(d_1)) \mid d_1 \in D \} = \prod \{ \omega(f_2(d_1g^{-1})) \mid d_1 \in D \} = \\ &= \prod \{ \omega(f_2(d_2)) \mid d_2 \in D \} = W(f_2) \end{aligned}$$

siendo $d_2 = d_1g^{-1} \in D$. □

Gracias a esta proposición podemos introducir la siguiente definición:

Definición. Sea F un diseño en R^D . Una asignación de peso para F es $W(F) = W(f)$ para cualquier $f \in F$.

Esta definición es muy importante ya que determina el peso de una órbita entera. Recordando cuál es la motivación del presente trabajo, llegaremos a la conclusión de que “Contar cuántos cubos de Rubik distintos hay en el espacio usando los colores r_1, r_2, \dots, r_6 ” es equivalente a asignar pesos a los colores $\omega(r_i) = t_i$ y así “Contar cuántos diseños tienen peso $t_1^9 t_2^9 \cdots t_6^9$ ”. Obviamente, lo explicaremos en mayor detalle posteriormente.

Definición. El inventario de un conjunto de colores $U \subseteq R$ es $Inv(U) = \sum_{r \in U} \omega(r)$. De manera similar, si T es un subconjunto del conjunto de las coloraciones, $T \subseteq R^D$, se define el inventario de T como

$$Inv(T) = \sum_{f \in T} \omega(f)$$

Esta definición nos sirve para enumerar las configuraciones indistinguibles que tenemos.

Proposición 3.3. Sea D un conjunto con una partición D_1, D_2, \dots, D_m y sea T el conjunto de funciones $f \in R^D$ constantes en cada elemento de la partición D_i . Entonces se tiene que

$$Inv(T) = \prod_{i=1}^m \sum \{ \omega(r)^{|D_i|} \mid r \in R \}.$$

Demostración. Definimos la aplicación $\phi : D \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ que a cada $d \in D$ le hace corresponder el i tal que $d \in D_i$, es decir, $\phi(d) = i$. Definimos también la aplicación $\varphi_f : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow R$ que a cada i le hace corresponder con la coloración de un elemento d tal que $d \in D_i$, es decir, $\varphi_f(i) = f(d)$. Entonces podemos escribir $\varphi_f(i) = \varphi_f(\phi(d)) = f(d)$ y es obvio que para cada $f \in T$, $f = \varphi_f \phi$.

Si el conjunto de los colores R es $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$, entonces tenemos que

$$\prod_{i=1}^m \sum \{ \omega(r)^{|D_i|} \mid r \in R \} = \prod_{i=1}^m (\omega(r_1)^{|D_i|} + \dots + \omega(r_k)^{|D_i|}).$$

Para calcular este producto, elegimos un término de cada uno de los factores que multiplican de todas las maneras posibles, multiplicamos dichos términos y por último sumamos cada uno de los productos que resulten. Notar que elegir un término de cada factor es lo mismo que elegir una aplicación $\varphi_f : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow R$, y al hacer el producto de estos términos resulta $\prod_{i=1}^m (\omega(\varphi_f(i))^{|D_i|})$. Por lo tanto, tenemos que

$$\prod_{i=1}^m \sum \{ \omega(r)^{|D_i|} \mid r \in R \} = \sum_{f \in T} \prod_{i=1}^m (\omega(\varphi_f(i))^{|D_i|})$$

Además,

$$\omega(\varphi_f(i))^{|D_i|} = \prod \{ \omega(\varphi_f(\phi(d))) \mid d \in D_i \} = \prod \{ \omega(f(d)) \mid d \in D_i \}$$

para cada $f \in T$. Por lo tanto, al hacer la suma resulta

$$\sum_{f \in T} \prod_{i=1}^m \prod_{d \in D_i} \omega(f(d)) = \sum_{f \in T} W(f) = Inv(T).$$

□

Esta es la proposición técnica que nos va a permitir hacer cálculos con comodidad más adelante.

Corolario 3.1. $Inv(R^D) = (Inv(R))^{|D|}$

Demostración. Si $D = \{d_1, \dots, d_n\}$, podemos tomar $D_i = \{d_i\}$ para cada i y así $T = R^D$ y cada factor de la fórmula de la proposición anterior es el inventario de todo R . □

Por ejemplo, aplicando esto al caso de las funciones de conmutación, se tiene: Como $R = \{0, 1\}$, asignamos un peso a cada uno: $\omega(0) = t_0$, $\omega(1) = t_1$ y al ser $D = \{0, 1\}^4$, $|D| = 2^4 = 16$. Luego $Inv(R^D) = (t_0 + t_1)^{16}$. De esta manera podemos saber el número de coloraciones indistinguibles en las que aparece el 0 i veces y el 1 $16 - i$ veces identificando el coeficiente del monomio $t_0^i t_1^{16-i}$ en $Inv(R^D)$.

Definición. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto D y sobre el conjunto de coloraciones R^D . Se define el inventario de diseños de R^D como:

$$PI = \sum \{ W(F) \mid F \text{ diseño} \}$$

Notar que si definimos todos los pesos $\omega(r) = 1$ para todo $r \in R$, el inventario de diseño es simplemente el número de diseños de la acción de G sobre R^D .

Ya hemos introducido todos los fundamentos para poder presentar el teorema de Redfield-Pólya, que es lo que haremos en la siguiente sección.

3.2. El teorema de Redfield-Pólya

En esta sección vamos a estudiar el teorema de enumeración de Redfield-Pólya. Fue en 1937 cuando Pólya publicó su libro “Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen” ([5]) (“Enumeración Combinatoria para grupos, grafos y compuestos” en español) en el cual expone y demuestra de dos formas distintas su teorema fundamental, que ya ha pasado a ser un clásico de la combinatoria hoy en día. Años más tarde se habla también del matemático J. H. Redfield, que enunció un teorema equivalente en 1927 aunque con mucho menos reconocimiento.

¿Por qué es tan importante este teorema? Nos da la respuesta a cantidad de cuestiones que tienen que ver con el conteo de distintos objetos matemáticos (en general coloraciones, pero se puede aplicar más allá). Si tenemos un collar con n cuentas y k colores, ¿Cuántos collares distintos podemos construir? De estas, ¿Cuántas coloraciones distintas hay en las que se pinten n_1 cuentas del color k_1 y n_2 cuentas del color k_2 ? ¿De cuántas maneras podemos pintar las caras de un poliedro regular con n caras y k colores? También hay cuestiones más técnicas: ¿Cuántos monomios mónicos de 5 variables y grado 7 hay? Este problema, conocido como el problema de las particiones, es equivalente a calcular el número de clases de conjugación de S_n , es muy famoso y tiene mucha historia detrás. ¿Cuántas funciones de conmutación esencialmente distintas hay, fijado un n ?

Para responder a todas estas preguntas presentamos el famoso Teorema de Redfield-Pólya:

Teorema 3.2. *Sea G un grupo que actúa sobre D con polinomio indicador de ciclos \mathcal{S} , $|D| = k$, y sea $\omega : R \rightarrow S$ una asignación de peso. Entonces el inventario de diseños de la acción de G sobre R^D es*

$$PI = \mathcal{S} \left(\sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} \omega(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} \omega(r)^k \right).$$

Demostración. Sean W_1, W_2, \dots los pesos de los diseños, $F_i = \{f \in R^D \mid \omega(f) = W_i\}$ para cada $i=1,2,\dots$ y m_i el número de diseños distintos que hay en F_i . Notar que cada F_i es una unión de diseños y que el grupo G actúa sobre cada F_i (restringiendo la acción de G sobre R^D). Las órbitas de esta acción son precisamente los m_i diseños que hay en F_i . Ahora, por el teorema de Burnside se tiene que

$$m_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{f \in F_i \mid fg = f\}|$$

y por lo tanto

$$PI = \sum_i m_i W_i = \sum_i \frac{1}{|G|} \left(\sum_{g \in G} |\{f \in F_i \mid fg = f\}| \right) W_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_i |\{f \in F_i \mid fg = f\}| \right) W_i$$

Para cada $g \in G$, $\sum_i |\{f \in F_i \mid fg = f\}| W_i$ es el inventario de $\{f \in R^D \mid fg = f\}$, ya que las F_i constituyen una partición en R^D y además, los elementos de F_i tienen el mismo peso por definición. De esta manera, podemos escribir

$$PI = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{\substack{f \in R^D \\ fg=f}} \omega(f) \right)$$

Consideramos ahora para cada elemento $g \in G$ y cada $d \in D$ el conjunto $\{d, dg, dg^2, \dots\}$. Observar que para cada $g \in G$ existe una partición D_1, D_2, \dots de D . Además, se comprueba fácilmente que $f \in \{f \in R^D \mid fg = f\}$ si y sólo si f es constante en cada D_i . Así, para cada $g \in G$, se tiene que $\sum \{\omega(f) \mid f \in R^D, fg = f\}$ es el inventario del subconjunto de R^D formado por las coloraciones constantes en cada D_i . Por la Proposición 3.3 se tiene que

$$\sum \{\omega(f) \mid f \in R^D, fg = f\} = \prod_i \sum_{r \in R} \omega(r)^{|D_i|}.$$

Al considerar la acción de G sobre D , si a un elemento le corresponde el monomio $t_1^{\lambda_1} \cdots t_k^{\lambda_k}$ tenemos que la partición definida anteriormente está formada por λ_1 conjuntos de cardinal 1, λ_2 conjuntos de cardinal 2, etc. Por lo tanto, para cada $g \in G$

$$\prod_i \sum_{r \in R} \omega(r)^{|D_i|} = \left(\sum_{r \in R} \omega(r) \right)^{\lambda_1} \left(\sum_{r \in R} \omega(r)^2 \right)^{\lambda_2} \cdots \left(\sum_{r \in R} \omega(r)^k \right)^{\lambda_k}$$

Y en consecuencia

$$\begin{aligned} PI &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{r \in R} \omega(r) \right)^{\lambda_1(g)} \left(\sum_{r \in R} \omega(r)^2 \right)^{\lambda_2(g)} \cdots \left(\sum_{r \in R} \omega(r)^k \right)^{\lambda_k(g)} = \\ &= \mathcal{I} \left(\sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} \omega(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} \omega(r)^k \right). \end{aligned}$$

□

Recordemos que al acabar el capítulo anterior hemos dejado una pregunta sin contestar. ¿Para qué sirve el polinomio indicador de ciclos? El teorema anterior responde a esta pregunta. Además, el siguiente corolario también es de gran interés:

Corolario 3.3. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto D con polinomio indicador de ciclos $\mathcal{I}(x_1, \dots, x_n)$. El número de diseños, es decir, órbitas correspondientes a la acción de G sobre R^D , es $\mathcal{I}(a, a, \dots, a)$ siendo $|R| = a$.

Demostración. Se sigue directamente asignando el peso $\omega(r) = 1$ para cada $r \in R$. □

Otro corolario que nos va a servir para abordar nuestro problema es el siguiente:

Corolario 3.4. Supongamos que el monomio $k_1 R_1^{i_1} R_2^{i_2} \cdots R_n^{i_n}$ aparece en el inventario de diseños de R^D . Entonces hay k_i diseños en R^D en los que aparece i_1 veces el color R_1 , i_2 veces el color R_2 , ..., e i_n veces el color R_n .

Recordemos que ya hemos calculado los polinomios indicadores de ciclos de las acciones de los ejemplos a los que hemos aplicado el teorema de Burnside. Vamos a usar el teorema anterior para ver que efectivamente funciona:

Ejemplo 8. Sea $G = S_3$ y $D = \{1, 2, 3\}$. Sabemos que $\mathcal{I}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$. Por lo tanto, si tenemos 6 colores como en el ejemplo 2, $\mathcal{I}(6, 6, 6) = \frac{1}{6}(6^3 + 3 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6) = \frac{1}{6} \cdot 336 = 56$. Es decir, hay 56 diseños, tal y como hemos visto en el capítulo anterior.

Además sean los 6 colores $R = \{r_1, r_2, \dots, r_6\}$ con pesos $\omega(r_i) = t_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, 6$. Entonces, según el Teorema de Redfield-Pólya, el inventario de diseños es

$$PI = \mathcal{I}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6, t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_5^2 + t_6^2, t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + t_4^3 + t_5^3 + t_6^3)$$

Como es un polinomio largo, no lo desarrollaremos aquí. Si queremos saber por ejemplo, el número de diseños en los que un color r_i en concreto aparece k veces, lo que tenemos que hacer es asignar los pesos como $\omega(r_i) = x$, $\omega(r_j) = y$ para $j \neq i$ y calcular

$$PI = \mathcal{I}(x + y, x^2 + y^2, x^3 + y^3) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3.$$

Así, hay un diseño en el que el color r_i aparece 3 veces, un diseño en el que aparece 2, un diseño en el que aparece una vez, y un diseño en el que no aparece.

Ejemplo 9. Sea $G = S_4$ y $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Por el ejemplo 6, tenemos

$$\mathcal{J} = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_2^3 + 8x_3^2 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2)$$

Por lo tanto, el número de diseños con 3 colores será

$$\mathcal{J}(3, 3, 3, 3) = \frac{1}{24}(3^6 + 6 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2) = \frac{1}{24} \cdot 1368 = 57,$$

como habíamos visto antes.

Si ahora tenemos dos colores $R = \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}\}$ y asignamos $\omega(\text{rojo}) = r$, $\omega(\text{verde}) = v$, $\omega(\text{azul}) = a$, entonces tenemos que el inventario de diseños es

$$PI = \mathcal{J}(r + v + a, r^2 + v^2 + a^2, \dots, r^4 + v^4 + a^4) \quad (3.1)$$

Lo desarrollamos en el apéndice. Podemos ver que hay dos diseños en el que el azul aparece 2 veces y el rojo 4 gracias al término $2a^2r^4$. Ya que estamos en el ejemplo del cubo, vamos a hacernos algunas preguntas más: ¿Cuántos diseños hay si usamos 6 colores y queremos que cada cara tenga un color?

Primero, notar que podríamos colorear las 6 caras del cubo con 6 colores de $6^6 = 46656$ maneras. Si quisiéramos contar el número de diseños, sólo tendríamos que hacer $\mathcal{J}(6, 6, 6, 6) = \frac{54864}{24} = 2286$. Sin embargo, lo que nos interesa es saber el número de diseños con 1 color por cada cara. Si tenemos 6 colores $R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ con pesos $\omega(r_i) = p_i$ para cada $1 \leq i \leq 6$, nuestro problema equivale a encontrar el coeficiente de $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ en el inventario de colores. Calculamos por lo tanto

$$PI = \mathcal{J}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6, \dots, p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 + p_4^4 + p_5^4 + p_6^4) \quad (3.2)$$

y seleccionamos el coeficiente que acompaña al término que queremos, en este caso es 30. Por lo tanto, hay 30 diseños del cubo con 6 colores usando los 6 colores, cada uno en una cara.

La última parte del ejemplo nos servirá para el problema del cubo de Rubik, ya que tendremos que hacer un razonamiento similar para calcular sus diseños.

Veamos un último ejemplo antes de pasar al cubo de Rubik:

Ejemplo 10 (Teoría de conmutadores). Recordemos que en el capítulo anterior habíamos calculado el número de funciones de conmutación esencialmente distintas para $n = 4$ gracias al teorema de Burnside, y habíamos calculado el polinomio indicador en el último ejemplo.

Con la teoría vista en este capítulo podemos dar otra manera de resolverlo: usando el corolario 3.3.

Habíamos tomado $D = \{0, 1\}^4$, $R = \{0, 1\}$ y $G = S_4$. El polinomio indicador de ciclos de la acción es

$$\mathcal{J} = \frac{1}{24}(x_1^{16} + 6x_1^8x_2^4 + 3x_1^4x_2^6 + 8x_1^4x_3^4 + 6x_1^2x_2x_4^3)$$

Por lo tanto, como $|R| = 2$, tenemos que habrá

$$\mathcal{J}(2, 2, 2, 2) = \frac{1}{24}(2^{16} + 6 \cdot 2^8 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2^4 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^3) = 3948 \text{ funciones distintas}$$

Tal y como habíamos visto en el ejemplo 4.

Cabe mencionar que este ejemplo es de gran importancia histórica ya que fue propuesto en 1951, antes de contar con todas estas herramientas matemáticas, por lo que fue resuelto por un programa de ordenador gigante.

Capítulo 4

El problema del “cubo de Rubik”

Ahora que ya tenemos todas las herramientas necesarias para resolver nuestro problema original, enunciemos y determinemos cómo lo podemos solucionar:

Un cubo de Rubik tiene 6 caras, cada una de ellas dividida en una cuadrícula de 9 cuadrados a los que llamaremos facetas. Inspirándonos en esto, tomamos un cubo de Rubik no articulado, es decir, un cubo cuyas caras están divididas en cuadrículas de 9 facetas cada una pero cuyas caras no giran. Queremos colorear las 54 facetas de 6 colores. Si el cubo está fijo en el espacio, hay 6^{54} maneras de hacerlo. Pero en esas 6^{54} maneras estamos teniendo en cuenta, por ejemplo, el caso en el que el cubo entero sea de un color. Como nuestra inspiración es el cubo de Rubik, queremos que cada color aparezca exactamente 9 veces. Una vez impuesta esta restricción, tenemos $\frac{54!}{(9!)^6}$ maneras de colorear el cubo.

Sin embargo, a nosotros nos interesan las coloraciones distinguibles cuando dejamos el cubo libre en el espacio:

Tenemos un cubo de Rubik no articulado, pero libre en el espacio. Sabiendo que queremos colorearlo con 6 colores que estén exactamente 9 veces repetidos, ¿Cuántos cubos distintos podemos crear?

Los pasos a seguir para enfrentarnos a este problema son los siguientes:

- Detectar el grupo G , los conjuntos R y D , y la acción de G sobre D y sobre R^D . En este caso, como tenemos un cubo no articulado y sólo tenemos en cuenta los movimientos del cubo en el espacio, haremos uso de la acción del grupo de las rotaciones del cubo sobre las 54 facetas del cubo, similar a la descrita en el ejemplo 3. Ahora el conjunto sobre el que actúa el grupo de las rotaciones del cubo es el conjunto de facetas, es decir, $\{1, 2, \dots, 54\}$. Por lo tanto, $G =$ grupo de las rotaciones del cubo, $D = \{1, \dots, 54\}$, $R = \{r_1, \dots, r_6\}$ y por último $R^D =$ el conjunto de las 6^{54} coloraciones}.
- Una vez determinada la acción, tenemos que calcular el polinomio indicador de ciclos de ésta. Recordemos que $G \cong S_4$, y que teníamos 5 clases de conjugación: la identidad, ι , los giros de 90° , α (cuyo eje de rotación pasa por los centros de caras opuestas), sus cuadrados, α^2 , los giros de 120° , σ (cuyo eje de rotación pasa por los puntos medios de las aristas), y los otros giros de 180° , τ , (cuyo eje de rotación pasa por los vértices). Como sabemos por la Proposición 2.1, basta con saber los tipos de las permutaciones que representan a cada clase de conjugación. Por lo tanto, haciendo uso de ella, vamos a calcular los tipos de 5 permutaciones que obtener las 24 y después aplicar la definición de polinomio indicador de ciclos.

Para describir estas permutaciones vamos a usar la notación habitual del cubo de Rubik procedente del inglés: F para la cara delantera, B para la cara trasera, R para la cara a la derecha, L para la cara a la izquierda, U para la cara de arriba y D para la cara de abajo. Esto está ilustrado en la figura (4.1a).

Además, para referirnos a una faceta de una cara en concreto, las numeraremos del 1 al 9 como en la figura (4.1b)

De esta manera, si por ejemplo queremos referirnos a la faceta número 3 de la cara frontal, la denotaremos por F3.

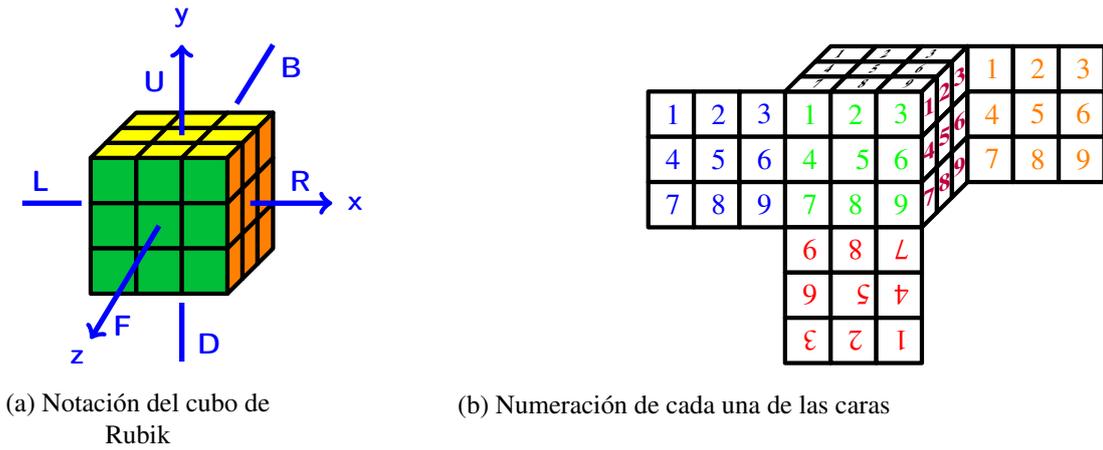


Figura 4.1

Notar que de la misma manera que hemos elegido esta numeración podríamos haber elegido cualquier otra. Sin embargo, sólo nos interesan los tipos de las permutaciones de cada una de las clases de conjugación y estos serían los mismos sea cual sea la numeración, ya que las permutaciones son esencialmente las mismas, lo único que cambia es la manera en que las denotamos. Esta nota es muy importante, ya que si el tipo de las permutaciones no fuese constante en las clases de conjugaciones no podríamos hacer esto.

Vamos por lo tanto a usar esta notación para ver como son las permutaciones que nos interesan:
 α =Rotación de 90°:

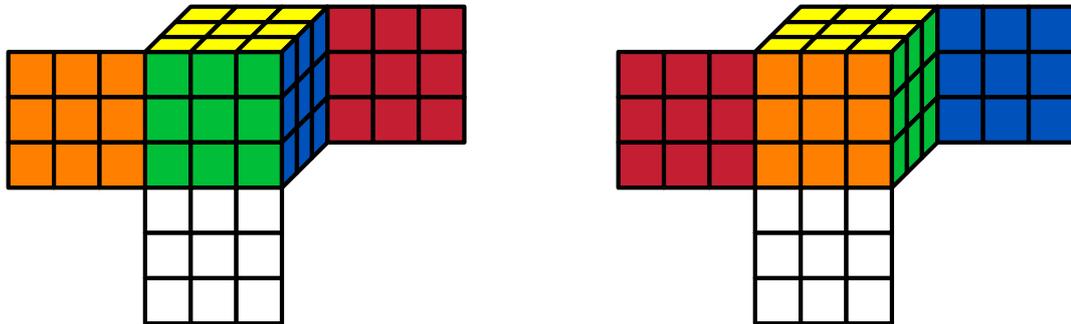


Figura 4.2: Cubo de Rubik al realizar un giro 90° en sentido antihorario en torno al eje que une U y D

De nuevo, hemos elegido una rotación cualquiera de todas las que hay de 90°. Pero tal y como hemos explicado antes, aunque elijamos de forma arbitraria sólo nos interesa el tipo de la permutación dentro de cada clase de conjugación, por lo tanto da igual que elijamos esta rotación u otra de 90°.

De esta manera, con la notación que hemos elegido tenemos que las caras F, B, R y L son permutadas unas a otras de manera que mantienen la numeración, es decir, F1 va a R1, que a su vez va a B1, etc. ¿Qué pasa con las caras U y D? Cuando sólo teníamos en cuenta la acción sobre las caras, permanecían fijas bajo esta rotación. Sin embargo, aunque las caras queden fijas, las facetas no lo hacen. De esta manera, tenemos que un giro de 90° visto desde arriba tiene el efecto visto en la figura 4.3.

Por lo tanto podríamos escribir la rotación sobre estas caras como:

$$(U1 U7 U9 U3)(U2 U4 U8 U6)(U5), \quad (D1 D7 D9 D3)(D2 D4 D8 D6)(D5)$$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

3	6	9
2	5	8
1	4	7

Figura 4.3: Caras U y D al hacer un giro de 90° como el anterior

Poniéndolo todo junto, la rotación de 90° que acabamos de se puede escribir como la siguiente permutación:

$$\alpha = (F1 R1 B1 L1)(F2 R2 B2 L2)(F3 R3 B3 L3)(F4 R4 B4 L4)(F5 R5 B5 L5)(F6 R6 B6 L6)(F7 R7 B7 L7) \\ (F8 R8 B8 L8)(F9 R9 B9 L9)(U1 U7 U9 U3)(U2 U4 U8 U6)(D1 D7 D9 D3)(D2 D4 D8 D6)(U5)(D5)$$

Es decir, tiene tipo $(2, 0, 0, 13, 0, \dots, 0)$.

α^2 =Rotación de 180°:

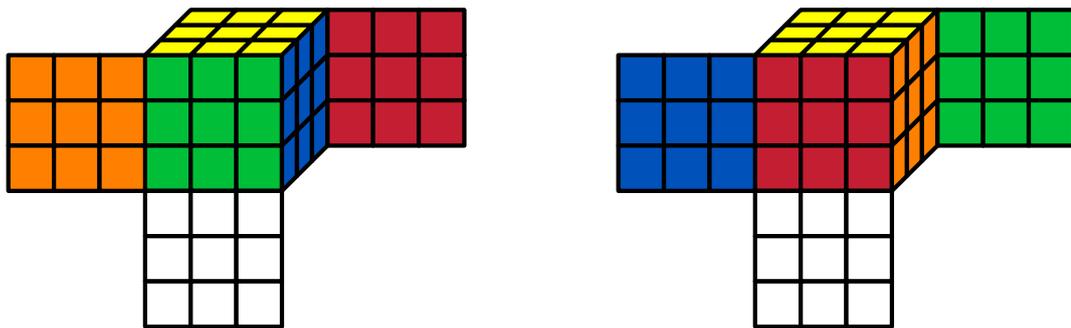


Figura 4.4: Cubo de Rubik al realizar un giro 180° en sentido antihorario en torno al eje que une U y D

De nuevo las caras F y B, y R y L son permutadas unas a otras manteniendo la numeración, es decir, F1 va a B1, R1 va a L1, etc. ¿Qué pasa con U y D? Al ser esta rotación el cuadrado de la anterior, tenemos que la permutación de las facetas de U y D viene dada por:

$$(U1 U7 U9 U3)^2(U2 U4 U8 U6)^2(U5)^2 = (U1 U9)(U7 U3)(U2 U8)(U4 U6)(U5) \\ (D1 D7 D9 D3)^2(D2 D4 D8 D6)^2(D5)^2(D1 D9)(D7 D3)(D2 D8)(D4 D6)(D5)$$

Es decir, podemos escribir la permutación de las facetas mediante un giro de 180° como:

$$\alpha^2 = (F1 B1)(F2 B2)(F3 B3)(F4 B4)(F5 B5)(F6 B6)(F7 B7)(F8 B8)(F9 B9)(L1 R1)(L2 R2)(L3 R3) \\ (L4 R4)(L5 R5)(L6 R6)(L7 R7)(L8 R8)(L9 R9)(U1 U9)(U7 U3)(U2 U8)(U4 U6)(D1 D9)(D7 D3) \\ (D2 D8)(D4 D6)(U5)(D5)$$

Es decir, tiene tipo $(2, 26, 0, \dots, 0)$ y las permutaciones conjugadas con ella también.

σ = Rotación 120°

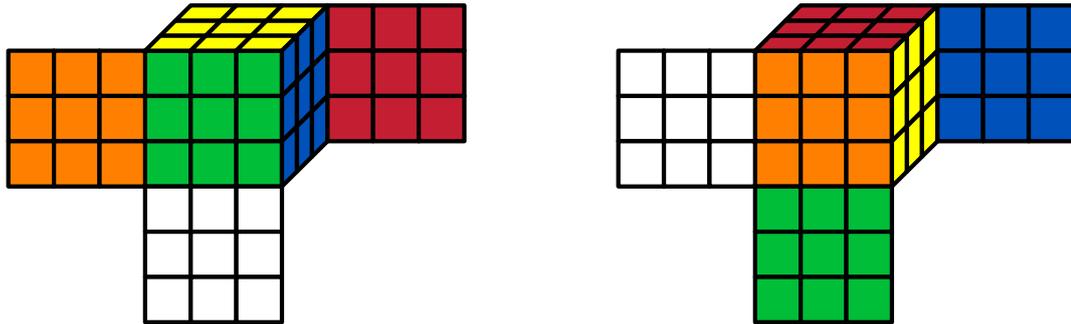


Figura 4.5: Cubo de Rubik al realizar un giro 120° en sentido antihorario en torno al eje que une los vértices comunes a FLD y BRU

Tal y como vemos en la figura 4.5 las caras F, D y L, y las caras R, B y U permutan. No obstante, esta vez ya no mantienen su numeración todas (U y D sí lo hacen). Las caras F y R giran según la figura 4.3 vista anteriormente. Para las caras L y B tenemos la figura 4.6:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

7	4	1
8	5	2
9	6	3

Figura 4.6: Caras L y B al hacer un giro de 120° como el anterior

Por lo tanto,

$$\sigma = (F1 D7 L7)(F2 D4 L4)(F3 D1 L1)(F4 D8 L8)(F5 D5 L5)(F6 D2 L2)(F7 D9 L9)(F8 D6 L6) \\ (F9 D3 L3)(R1 B7 U1)(F2 B4 U2)(R3 B1 U3)(R4 B8 U4)(R5 B5 U5)(R6 B2 U6)(R7 B9 U7) \\ (R8 B6 U8)(R9 B3 U9)$$

Y así concluimos que esta y todas sus permutaciones conjugadas tienen tipo $(0, 0, 18, 0, \dots, 0)$.

τ = Rotación de 180°.

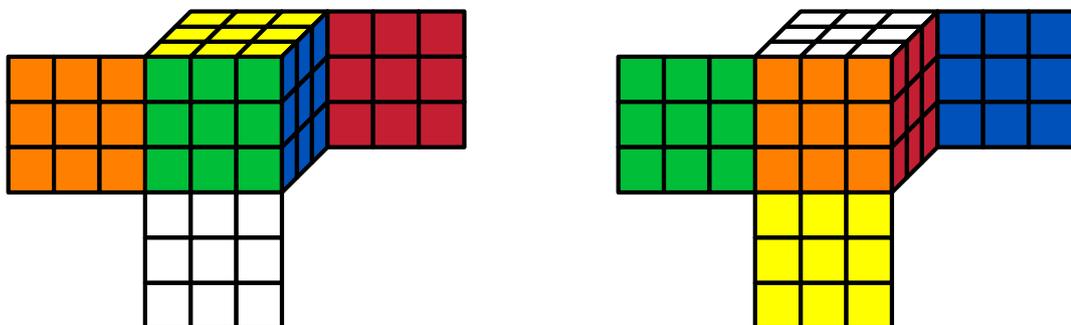


Figura 4.7: Cubo de Rubik al realizar un giro 180° entorno al eje que une los puntos medios de las aristas comunes a FL y RB

Y así vemos que permutan entre sí las caras F y L, R y B, y U y D. De nuevo no lo hacen manteniendo el orden de los números de sus facetas. La imagen de la cara U por esta permutación

es la vista en la figura 4.3 y la imagen de la cara D es la vista en la figura 4.6. En cuanto a las demás caras, tenemos:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

6	8	L
9	ς	τ
ε	ζ	I

Figura 4.8: Caras F, B, R y L al hacer el giro de 180° anterior

De esta manera, esta permutación será:

$$\tau = (F1 L9)(F2 L8)(F3 L7)(F4 L6)(F5 L5)(F6 L4)(F7 L3)(F8 L2)(F9 L1)(B1 R9)(B2 R8)(B3 R7)(B4 R6)(B5 R5)(B6 R4)(B7 R3)(B8 R2)(B9 R1)(U1 D7)(U2 D4)(U3 D1)(U4 D8)(U5 D5)(U6 D2)(U7 D9)(U8 D6)(U9 D3)$$

Y con esto es evidente que el tipo de las permutaciones conjugadas con τ será $(0, 27, 0, \dots, 0)$. Hemos calculado los tipos de permutaciones para las rotaciones de cada una de las clases de conjugación de S_4 . Recordemos que por la Proposición 2.1 esto es suficiente para poder calcular el polinomio indicador de ciclos. De esta manera, la información que tenemos hasta ahora es:

$g \in S_4$	ι	α	α^2	σ	τ
$ \text{cl}(g) $	1	6	3	8	6
Tipo	$(54, 0, \dots, 0)$	$(2, 0, 0, 13, 0, \dots, 0)$	$(2, 26, 0, \dots, 0)$	$(0, 0, 18, 0, \dots, 0)$	$(0, 27, 0, \dots, 0)$
$mon(g)$	x_1^{54}	$x_1^2 x_4^{13}$	$x_1^2 x_2^{26}$	x_3^{18}	x_2^{27}

Con esto tenemos pues que el polinomio indicador del grupo de las rotaciones G actuando sobre las facetas del cubo de Rubik es:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{24}(x_1^{54} + 6x_1^2 x_4^{13} + 3x_1^2 x_2^{26} + 8x_3^{18} + 6x_2^{27})$$

Ahora que ya tenemos este polinomio podemos resolver todo tipo de problemas. ¿Cuántos diseños del cubo de Rubik hay usando 6 colores?

$$\mathcal{I}(6, 6, 6, 6) = \frac{1}{24}(6^{54} + 6^{16} + 3 \cdot 6^{28} + 8 \cdot 6^{18} + 6^{28}) \approx 4,36471 \times 10^{40}$$

Recordemos que nuestro problema requiere una restricción: que cada color aparezca exactamente 9 veces.

- Por último, tenemos que asignar un peso a cada color y aplicar el teorema de Pólya. Tenemos 6 colores $R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$, y tomamos S como el anillo de polinomios en 6 variables: $S = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_6]$. Así definimos una asignación de peso $\omega : R \rightarrow S$ que asigna $\omega(r_i) = t_i$ para cada $1 \leq i \leq 6$. De esta manera, aplicando el teorema de Pólya tenemos que

$$PI = \mathcal{I}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6, t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + t_5^2 + t_6^2, t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + t_4^3 + t_5^3 + t_6^3, t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 + t_4^4 + t_5^4 + t_6^4)$$

Recordemos que el corolario 3.2 nos dice que el coeficiente del monomio $t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_m^{i_m}$ nos da el número de diseños que tienen i_j veces el color t_j para cada j. Por lo tanto, para hallar el número de diseños del cubo de Rubik con 6 colores apareciendo 9 veces cada uno sólo necesitamos hallar

el coeficiente de $t_1^9 t_2^9 t_3^9 t_4^9 t_5^9 t_6^9$ en el inventario de patrones.

Notar que tenemos un polinomio de grado muy alto en el que debemos evaluar la suma de potencias de 6 elementos distintos, lo cual es imposible de hacer a mano y por lo tanto requiere de un ordenador. Aún así, el orden computacional es excesivamente alto, e incluso los manipuladores algebraicos como Sage no pueden calcularlo. Como no es necesario calcular todo el polinomio, nos podemos limitar a calcular el coeficiente que nos interesa usando algunas resultados bastante útiles como el teorema binomial de Newton, o en este caso, el teorema multinomial, que nos da la siguiente fórmula:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} \prod_{t=1}^m x_t^{k_t} \quad (4.1)$$

De esta manera, sólo tenemos que calcular los coeficientes que acompañan a $t_1^9 t_2^9 t_3^9 t_4^9 t_5^9 t_6^9$ al sustituir los x_i por sus correspondientes sumas de potencias en cada sumando del polinomio indicador:

- El coeficiente de x_1^{54} . Como tomamos $x_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$, tenemos que por (4.1) el coeficiente que acompaña al monomio que nos interesa es $\frac{54!}{(9!)^6}$.
- El coeficiente de $6x_1^2 x_4^{13}$. Para ello, tenemos primero en cuenta $(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6)^2$: obtenemos la suma de los t_i^2 para cada i , más la suma de los $2t_i t_j$ para $i \neq j$. Por lo tanto, para los t_i^2 queremos calcular el coeficiente de $t_i^7 t_{j_1}^9 t_{j_2}^9 \dots t_{j_5}^9$ en $(t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 + t_4^4 + t_5^4 + t_6^4)^{13}$ (ya que al hacer el producto de ambos obtenemos el monomio que buscamos), y para los $2t_i t_j$ queremos calcular el coeficiente de $t_i^8 t_j^8 t_{j_1}^9 \dots t_{j_4}^9$. Sin embargo, por (4.1), para obtener un monomio de la forma $t_i^7 t_{j_1}^9 t_{j_2}^9 \dots t_{j_5}^9$ tenemos que elevar los $t_{j_i}^4$ a ciertos enteros k_r tal que $(t_{j_i}^4)^{k_r} = t_{j_i}^{4k_r} = t_{j_i}^9$ que además cumplen que su suma nos da 13. Pero esto no es posible ya que no existen enteros que cumplan $4k_r = 9$. Por lo tanto, el monomio $t_1^9 t_2^9 t_3^9 t_4^9 t_5^9 t_6^9$ no aparece aquí. Siguiendo un razonamiento análogo a este, veremos que tampoco aparece en $3x_1^2 x_2^{26}$ ni en $6x_2^{27}$.
- El coeficiente de $8x_3^{18}$. Si tomamos $x_3 = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + t_4^3 + t_5^3 + t_6^3$ y $k_i = 3$ para cada i , tenemos que el coeficiente que lo acompaña es $8 \cdot \frac{18!}{(3!)^6}$.

Por lo tanto, el número que estamos buscando es $\frac{1}{24} \left(\frac{54!}{(9!)^6} + 8 \cdot \frac{18!}{(3!)^6} \right) \approx 1,212390 \times 10^{36}$.

Nos podemos hacer otras preguntas más sencillas también. ¿Cuántos diseños hay en los que aparezca el color rojo 9 veces exactamente?

Como antes, tenemos 6 colores, $R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$. Digamos $r_1 = \text{rojo}$, y asignamos los pesos $\omega(\text{rojo}) = x$, $\omega(r_i) = y$ para $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Entonces el número de diseños en los que aparece el color rojo 9 veces son los coeficientes de los términos que contengan a x^9 en el PI:

$$PI = \mathcal{I}(x + y, x^2 + y^2, x^3 + y^3, x^4 + y^4) \quad (4.2)$$

Debido al gran tamaño del polinomio no lo desarrollaremos aquí, pero con esto ya conocemos el coeficiente que necesitamos, ya que buscamos el coeficiente del término en x^9 , que además tendrá término y^{45} ya que es un polinomio de grado 54. Dicho coeficiente es 221584726, con lo que hay 221584726 diseños con exactamente 9 facetas de color rojo. Al igual que nos hemos preguntado esto, podemos responder a infinidad de preguntas más sobre los diseños de nuestro cubo gracias al polinomio indicador y el teorema de Pólya.

Bibliografía

- [1] ALEXEI KOSTRIKIN, YURI MANIN, *Linear Algebra and Geometry*, CRC Press, 1989.
- [2] E. P. CARRANZA, *Grupos de movimientos de los poliedros regulares*, Gaceta Matemática, 1970. Disponible en http://dmle.icmat.es/pdf/GACETAMATEMATICA_1970_22_3-4_01.pdf.
- [3] WILLIAM BURNSIDE, *Theory of Groups of Finite Order*, 1897.
- [4] N. G. DE BRUJIN, *A note on the Cauchy-Frobenius Lemma*, Eindhoven University of Technology, 1979. Disponible en <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1385725879800177/pdf?md5=0dd6e2ad3307e2384427a08a988ea312&pid=1-s2.0-S1385725879800177-main.pdf>
- [5] G. PÓLYA, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Mathematica, Vol. 68, 1937.
- [6] RICHARD E. KLIMA, NEIL SIGMMON Y ERNEST STITZINGER, *Applications of Abstract Algebra with MAPLE*, 1.^a ed., CRC Press, 1999.
- [7] LARRY C. GROVE, *Algebra*, 1.^a ed., Academic Press, 1983.
- [8] P. TIRAO, *¿Cómo pintar un cubo?*, Revista de Educación Matemática, 10(3), 1995. Disponible en <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/11035/11611>
- [9] N. E. AGUILERA, *Método de enumeración de G. Pólya*, Revista de Educación Matemática, 11(2), 1996. Disponible en <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/11026/11602>
- [10] MATIAS VON BELL, *Polya's Enumeration Theorem and its Applications*, University of Helsinki, 2015.
- [11] DAVID SINGMASTER, *Notes on Rubik's Magic Cube*, 5.^a ed., Enslow Pub Inc, 1981.
- [12] ALEXANDER H. FREY JR., DAVID SINGMASTER *Handbook of Cubik Math*, Enslow Pub Inc, 1982.
- [13] RWD NICKALLS, A. SYROPOULOS, *List of Rubik patterns*, <http://www.ctan.org/tex-archives/macros/latex/contrib/rubik/rubikpatternsLIST.pdf>*

Apéndice A

Desarrollo de polinomios

En este apéndice desarrollamos los polinomios vistos en algunos ejemplos, que debido a su tamaño no podían ser expuestos durante el trabajo.

El inventario de diseños del ejemplo 8 es:

$$PI = t_1^3 + t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2 + t_2^3 + (t_1 + t_2) t_3^2 + t_3^3 + (t_1 + t_2 + t_3) t_4^2 + t_4^3 + (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) t_5^2 + t_5^3 + (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5) t_6^2 + t_6^3 + (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) t_3 + (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 + (t_1 + t_2) t_3 + t_3^2) t_4 + (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 + (t_1 + t_2) t_3 + t_3^2 + (t_1 + t_2 + t_3) t_4 + t_4^2) t_5 + (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 + (t_1 + t_2) t_3 + t_3^2 + (t_1 + t_2 + t_3) t_4 + t_4^2 + (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) t_5 + t_5^2) t_6$$

El inventario de diseños del ejemplo 9 de la ecuación (3.1) es:

$$PI = a^6 + a^5 r + 2a^4 r^2 + 2a^3 r^3 + 2a^2 r^4 + ar^5 + r^6 + (a + r)v^5 + v^6 + 2(a^2 + ar + r^2)v^4 + (2a^3 + 3a^2 r + 3ar^2 + 2r^3)v^3 + (2a^4 + 3a^3 r + 6a^2 r^2 + 3ar^3 + 2r^4)v^2 + (a^5 + 2a^4 r + 3a^3 r^2 + 3a^2 r^3 + 2ar^4 + r^5)v$$

El inventario de diseños del ejemplo 9 de la ecuación (3.2) es:

$$PI = p_1^6 + p_1^5 p_2 + 2p_1^4 p_2^2 + 2p_1^3 p_2^3 + 2p_1^2 p_2^4 + p_1 p_2^5 + p_2^6 + p_1^5 p_3 + 2p_1^4 p_2 p_3 + 3p_1^3 p_2^2 p_3 + 3p_1^2 p_2^3 p_3 + 2p_1 p_2^4 p_3 + p_2^5 p_3 + 2p_1^4 p_3^2 + 3p_1^3 p_2 p_3^2 + 6p_1^2 p_2^2 p_3^2 + 3p_1 p_2^3 p_3^2 + 2p_2^4 p_3^2 + 2p_1^3 p_3^3 + 3p_1^2 p_2 p_3^3 + 3p_1 p_2^2 p_3^3 + 2p_2^3 p_3^3 + 2p_1^2 p_3^4 + 2p_1 p_2 p_3^4 + 2p_2^2 p_3^4 + p_1 p_3^5 + p_2 p_3^5 + p_3^6 + p_1^5 p_4 + 2p_1^4 p_2 p_4 + 3p_1^3 p_2^2 p_4 + 3p_1^2 p_2^3 p_4 + 2p_1 p_2^4 p_4 + p_2^5 p_4 + 2p_1^4 p_4^2 + 3p_1^3 p_2 p_4^2 + 6p_1^2 p_2^2 p_4^2 + 3p_1 p_2^3 p_4^2 + 2p_2^4 p_4^2 + 3p_1^3 p_3 p_4^2 + 8p_1^2 p_2 p_3 p_4^2 + 8p_1 p_2^2 p_3 p_4^2 + 3p_2^3 p_3 p_4^2 + 6p_1^2 p_3^2 p_4^2 + 8p_1 p_2 p_3^2 p_4^2 + 6p_2^2 p_3^2 p_4^2 + 3p_1 p_3^3 p_4^2 + 3p_2 p_3^3 p_4^2 + 2p_3^4 p_4^2 + 2p_1^3 p_4^3 + 3p_1^2 p_2 p_4^3 + 3p_1 p_2^2 p_4^3 + 2p_2^3 p_4^3 + 3p_1^2 p_3 p_4^3 + 5p_1 p_2 p_3 p_4^3 + 3p_2^2 p_3 p_4^3 + 3p_1 p_3^2 p_4^3 + 3p_2 p_3^2 p_4^3 + 2p_3^3 p_4^3 + 2p_1^2 p_4^4 + 2p_1 p_2 p_4^4 + 2p_2^2 p_4^4 + 2p_1 p_3 p_4^4 + 2p_2 p_3 p_4^4 + 2p_3^2 p_4^4 + p_1 p_4^5 + p_2 p_4^5 + p_3 p_4^5 + p_4^6 + p_1^5 p_5 + 2p_1^4 p_2 p_5 + 3p_1^3 p_2^2 p_5 + 3p_1^2 p_2^3 p_5 + 2p_1 p_2^4 p_5 + p_2^5 p_5 + 2p_1^4 p_3 p_5 + 5p_1^3 p_2 p_3 p_5 + 8p_1^2 p_2^2 p_3 p_5 + 5p_1 p_2^3 p_3 p_5 + 2p_2^4 p_3 p_5 + 3p_1^3 p_3^2 p_5 + 8p_1^2 p_2 p_3^2 p_5 + 8p_1 p_2^2 p_3^2 p_5 + 3p_2^3 p_3^2 p_5 + 3p_1^2 p_3^3 p_5 + 5p_1 p_2 p_3^3 p_5 + 3p_2^2 p_3^3 p_5 + 2p_1 p_3^4 p_5 + 2p_2 p_3^4 p_5 + p_3^5 p_5 + 2p_1^4 p_4 p_5 + 5p_1^3 p_2 p_4 p_5 + 8p_1^2 p_2^2 p_4 p_5 + 5p_1 p_2^3 p_4 p_5 + 2p_2^4 p_4 p_5 + 5p_1^3 p_3 p_4 p_5 + 15p_1^2 p_2 p_3 p_4 p_5 + 15p_1 p_2^2 p_3 p_4 p_5 + 5p_2^3 p_3 p_4 p_5 + 8p_1^2 p_3^2 p_4 p_5 + 15p_1 p_2 p_3^2 p_4 p_5 + 8p_2^2 p_3^2 p_4 p_5 + 5p_1 p_3^3 p_4 p_5 + 5p_2 p_3^3 p_4 p_5 + 2p_3^4 p_4 p_5 + 2p_1^4 p_5^2 + 3p_1^3 p_2 p_5^2 + 6p_1^2 p_2^2 p_5^2 + 3p_1 p_2^3 p_5^2 + 2p_2^4 p_5^2 + 3p_1^3 p_3 p_5^2 + 8p_1^2 p_2 p_3 p_5^2 + 8p_1 p_2^2 p_3 p_5^2 + 3p_2^3 p_3 p_5^2 + 6p_1^2 p_3^2 p_5^2 + 8p_1 p_2 p_3^2 p_5^2 + 6p_2^2 p_3^2 p_5^2 + 3p_1 p_3^3 p_5^2 + 3p_2 p_3^3 p_5^2 + 2p_3^4 p_5^2 + 3p_1^3 p_4 p_5^2 + 8p_1^2 p_2 p_4 p_5^2 + 8p_1 p_2^2 p_4 p_5^2 + 15p_1 p_2 p_3 p_4 p_5^2 + 8p_2^2 p_3 p_4 p_5^2 + 8p_1 p_3^2 p_4 p_5^2 + 8p_2 p_3^2 p_4 p_5^2 + 3p_3^3 p_4 p_5^2 + 5p_1 p_2 p_4^2 p_5 + 5p_2 p_3 p_4^2 p_5 + 3p_2^2 p_4^2 p_5 + 2p_1 p_4^3 p_5 + 2p_2 p_4^3 p_5 + 2p_3 p_4^3 p_5 + p_4^4 p_5 + 2p_1^4 p_5^3 + 3p_1^3 p_2 p_5^3 + 6p_1^2 p_2^2 p_5^3 + 3p_1 p_2^3 p_5^3 + 2p_2^4 p_5^3 + 3p_1^3 p_3 p_5^3 + 8p_1^2 p_2 p_3 p_5^3 + 8p_1 p_2^2 p_3 p_5^3 + 3p_2^3 p_3 p_5^3 + 6p_1^2 p_3^2 p_5^3 + 8p_1 p_2 p_3^2 p_5^3 + 6p_2^2 p_3^2 p_5^3 + 3p_1 p_3^3 p_5^3 + 3p_2 p_3^3 p_5^3 + 2p_3^4 p_5^3 + 2p_1^3 p_4 p_5^3 + 5p_1 p_2 p_4 p_5^3 + 3p_2^2 p_4 p_5^3 + 5p_1 p_3 p_4 p_5^3 + 5p_2 p_3 p_4 p_5^3 + 3p_3^2 p_4 p_5^3 + 3p_1 p_4^2 p_5^3 + 3p_2 p_4^2 p_5^3 + 3p_3 p_4^2 p_5^3 + 2p_4^3 p_5^3 + 2p_1^2 p_5^4 + 2p_1 p_2 p_5^4 + 2p_2^2 p_5^4 + 2p_1 p_3 p_5^4 + 2p_2 p_3 p_5^4 + 2p_3^2 p_5^4 + 2p_1 p_4 p_5^4 + 2p_2 p_4 p_5^4 + 2p_3 p_4 p_5^4 + 2p_4^2 p_5^4 + p_1 p_5^5 + p_2 p_5^5 + p_3 p_5^5 + p_4 p_5^5 +$$

$$\begin{aligned}
& p_5^6 + p_1^5 p_6 + 2p_1^4 p_2 p_6 + 3p_1^3 p_2^2 p_6 + 3p_1^2 p_3^2 p_6 + 2p_1 p_2^4 p_6 + p_2^5 p_6 + 2p_1^4 p_3 p_6 + 5p_1^3 p_2 p_3 p_6 + 8p_1^2 p_2^2 p_3 p_6 + \\
& 5p_1 p_2^3 p_3 p_6 + 2p_1^4 p_3 p_6 + 3p_1^3 p_3^2 p_6 + 8p_1^2 p_2 p_3^2 p_6 + 8p_1 p_2^2 p_3^2 p_6 + 3p_2^3 p_3^2 p_6 + 3p_1^2 p_3^3 p_6 + 5p_1 p_2 p_3^3 p_6 + \\
& 3p_2^2 p_3^3 p_6 + 2p_1 p_3^4 p_6 + 2p_2 p_3^4 p_6 + p_3^5 p_6 + 2p_1^4 p_4 p_6 + 5p_1^3 p_2 p_4 p_6 + 8p_1^2 p_2^2 p_4 p_6 + 5p_1 p_2^3 p_4 p_6 + 2p_2^4 p_4 p_6 + \\
& 5p_1^3 p_3 p_4 p_6 + 15p_1^2 p_2 p_3 p_4 p_6 + 15p_1 p_2^2 p_3 p_4 p_6 + 5p_2^3 p_3 p_4 p_6 + 8p_1^2 p_3^2 p_4 p_6 + 15p_1 p_2 p_3^2 p_4 p_6 + \\
& 8p_2^2 p_3^2 p_4 p_6 + 5p_1 p_3^3 p_4 p_6 + 5p_2 p_3^3 p_4 p_6 + 2p_4^4 p_4 p_6 + 3p_1^3 p_4^2 p_6 + 8p_1^2 p_2 p_4^2 p_6 + 8p_1 p_2^2 p_4^2 p_6 + 3p_2^3 p_4^2 p_6 + \\
& 8p_1^2 p_3 p_4^2 p_6 + 15p_1 p_2 p_3 p_4^2 p_6 + 8p_2^2 p_3 p_4^2 p_6 + 8p_1 p_3^2 p_4^2 p_6 + 8p_2 p_3^2 p_4^2 p_6 + 3p_3^3 p_4^2 p_6 + 3p_1^2 p_4^3 p_6 + \\
& 5p_1 p_2 p_4^3 p_6 + 3p_2^2 p_4^3 p_6 + 5p_1 p_3 p_4^3 p_6 + 5p_2 p_3 p_4^3 p_6 + 3p_2^3 p_4^3 p_6 + 2p_1 p_4^4 p_6 + 2p_2 p_4^4 p_6 + 2p_3 p_4^4 p_6 + \\
& p_4^5 p_6 + 2p_1^4 p_5 p_6 + 5p_1^3 p_2 p_5 p_6 + 8p_1^2 p_2^2 p_5 p_6 + 5p_1 p_2^3 p_5 p_6 + 2p_2^4 p_5 p_6 + 5p_1^3 p_3 p_5 p_6 + 15p_1^2 p_2 p_3 p_5 p_6 + \\
& 15p_1 p_2^2 p_3 p_5 p_6 + 5p_2^3 p_3 p_5 p_6 + 8p_1^2 p_3^2 p_5 p_6 + 15p_1 p_2 p_3^2 p_5 p_6 + 8p_2^2 p_3^2 p_5 p_6 + 5p_1 p_3^3 p_5 p_6 + 5p_2 p_3^3 p_5 p_6 + \\
& 2p_4^3 p_5 p_6 + 5p_1^3 p_4 p_5 p_6 + 15p_1^2 p_2 p_4 p_5 p_6 + 15p_1 p_2^2 p_4 p_5 p_6 + 5p_2^3 p_4 p_5 p_6 + 15p_1^2 p_3 p_4 p_5 p_6 + \\
& 30p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 + 15p_2^2 p_3 p_4 p_5 p_6 + 15p_1 p_3^2 p_4 p_5 p_6 + 15p_2 p_3^2 p_4 p_5 p_6 + 5p_3^3 p_4 p_5 p_6 + 8p_1^2 p_4^2 p_5 p_6 + \\
& 15p_1 p_2 p_4^2 p_5 p_6 + 8p_2^2 p_4^2 p_5 p_6 + 15p_1 p_3 p_4^2 p_5 p_6 + 15p_2 p_3 p_4^2 p_5 p_6 + 8p_3^2 p_4^2 p_5 p_6 + 5p_1 p_4^3 p_5 p_6 + \\
& 5p_2 p_4^3 p_5 p_6 + 5p_3 p_4^3 p_5 p_6 + 2p_4^4 p_5 p_6 + 3p_1^3 p_5^2 p_6 + 8p_1^2 p_2 p_5^2 p_6 + 8p_1 p_2^2 p_5^2 p_6 + 3p_2^3 p_5^2 p_6 + 8p_1^2 p_3 p_5^2 p_6 + \\
& 15p_1 p_2 p_3 p_5^2 p_6 + 8p_2^2 p_3 p_5^2 p_6 + 8p_1 p_3^2 p_5^2 p_6 + 8p_2 p_3^2 p_5^2 p_6 + 3p_3^3 p_5^2 p_6 + 8p_1^2 p_4 p_5^2 p_6 + 15p_1 p_2 p_4 p_5^2 p_6 + \\
& 8p_2^2 p_4 p_5^2 p_6 + 15p_1 p_3 p_4 p_5^2 p_6 + 15p_2 p_3 p_4 p_5^2 p_6 + 8p_3^2 p_4 p_5^2 p_6 + 8p_1 p_4^2 p_5^2 p_6 + 8p_2 p_4^2 p_5^2 p_6 + 8p_3 p_4^2 p_5^2 p_6 + \\
& 3p_4^3 p_5^2 p_6 + 3p_1^2 p_5^3 p_6 + 5p_1 p_2 p_5^3 p_6 + 3p_2^2 p_5^3 p_6 + 5p_1 p_3 p_5^3 p_6 + 5p_2 p_3 p_5^3 p_6 + 3p_3^2 p_5^3 p_6 + 5p_1 p_4 p_5^3 p_6 + \\
& 5p_2 p_4 p_5^3 p_6 + 5p_3 p_4 p_5^3 p_6 + 3p_4^2 p_5^3 p_6 + 2p_1 p_5^4 p_6 + 2p_2 p_5^4 p_6 + 2p_3 p_5^4 p_6 + 2p_4 p_5^4 p_6 + p_5^5 p_6 + 2p_1^4 p_6^2 + \\
& 3p_1^3 p_2 p_6^2 + 6p_1^2 p_2^2 p_6^2 + 3p_1 p_2^3 p_6^2 + 2p_2^4 p_6^2 + 3p_1^3 p_3 p_6^2 + 8p_1^2 p_2 p_3 p_6^2 + 8p_1 p_2^2 p_3 p_6^2 + 3p_2^3 p_3 p_6^2 + \\
& 6p_1^2 p_3^2 p_6^2 + 8p_1 p_2 p_3^2 p_6^2 + 6p_2^2 p_3^2 p_6^2 + 3p_1 p_3^3 p_6^2 + 3p_2 p_3^3 p_6^2 + 2p_3^4 p_6^2 + 3p_1^3 p_4 p_6^2 + 8p_1^2 p_2 p_4 p_6^2 + \\
& 8p_1 p_2^2 p_4 p_6^2 + 3p_2^3 p_4 p_6^2 + 8p_1^2 p_3 p_4 p_6^2 + 15p_1 p_2 p_3 p_4 p_6^2 + 8p_2^2 p_3 p_4 p_6^2 + 8p_1 p_3^2 p_4 p_6^2 + 8p_2 p_3^2 p_4 p_6^2 + \\
& 3p_3^3 p_4 p_6^2 + 6p_1^2 p_4^2 p_6^2 + 8p_1 p_2 p_4^2 p_6^2 + 6p_2^2 p_4^2 p_6^2 + 8p_1 p_3 p_4^2 p_6^2 + 8p_2 p_3 p_4^2 p_6^2 + 6p_3^2 p_4^2 p_6^2 + 3p_1 p_4^3 p_6^2 + \\
& 3p_2 p_4^3 p_6^2 + 3p_3 p_4^3 p_6^2 + 2p_4^4 p_6^2 + 3p_1^3 p_5 p_6^2 + 8p_1^2 p_2 p_5 p_6^2 + 8p_1 p_2^2 p_5 p_6^2 + 3p_2^3 p_5 p_6^2 + 8p_1^2 p_3 p_5 p_6^2 + \\
& 15p_1 p_2 p_3 p_5 p_6^2 + 8p_2^2 p_3 p_5 p_6^2 + 8p_1 p_3^2 p_5 p_6^2 + 8p_2 p_3^2 p_5 p_6^2 + 3p_3^3 p_5 p_6^2 + 8p_1^2 p_4 p_5 p_6^2 + 15p_1 p_2 p_4 p_5 p_6^2 + \\
& 8p_2^2 p_4 p_5 p_6^2 + 15p_1 p_3 p_4 p_5 p_6^2 + 15p_2 p_3 p_4 p_5 p_6^2 + 8p_3^2 p_4 p_5 p_6^2 + 8p_1 p_4^2 p_5 p_6^2 + 8p_2 p_4^2 p_5 p_6^2 + 8p_3 p_4^2 p_5 p_6^2 + \\
& 3p_4^3 p_5 p_6^2 + 6p_1^2 p_5^2 p_6^2 + 8p_1 p_2 p_5^2 p_6^2 + 6p_2^2 p_5^2 p_6^2 + 8p_1 p_3 p_5^2 p_6^2 + 8p_2 p_3 p_5^2 p_6^2 + 6p_3^2 p_5^2 p_6^2 + 8p_1 p_4 p_5^2 p_6^2 + \\
& 8p_2 p_4 p_5^2 p_6^2 + 8p_3 p_4 p_5^2 p_6^2 + 6p_4^2 p_5^2 p_6^2 + 3p_1 p_5^3 p_6^2 + 3p_2 p_5^3 p_6^2 + 3p_3 p_5^3 p_6^2 + 3p_4 p_5^3 p_6^2 + 2p_5^4 p_6^2 + 2p_1^3 p_6^3 + \\
& 3p_1^2 p_2 p_6^3 + 3p_1 p_2^2 p_6^3 + 2p_2^3 p_6^3 + 3p_1^2 p_3 p_6^3 + 5p_1 p_2 p_3 p_6^3 + 3p_2^2 p_3 p_6^3 + 3p_1 p_3^2 p_6^3 + 3p_2 p_3^2 p_6^3 + 2p_3^3 p_6^3 + \\
& 3p_1^2 p_4 p_6^3 + 5p_1 p_2 p_4 p_6^3 + 3p_2^2 p_4 p_6^3 + 5p_1 p_3 p_4 p_6^3 + 5p_2 p_3 p_4 p_6^3 + 3p_3^2 p_4 p_6^3 + 3p_1 p_4^2 p_6^3 + 3p_2 p_4^2 p_6^3 + \\
& 3p_3 p_4^2 p_6^3 + 2p_4^3 p_6^3 + 3p_1^2 p_5 p_6^3 + 5p_1 p_2 p_5 p_6^3 + 3p_2^2 p_5 p_6^3 + 5p_1 p_3 p_5 p_6^3 + 5p_2 p_3 p_5 p_6^3 + 3p_3^2 p_5 p_6^3 + \\
& 5p_1 p_4 p_5 p_6^3 + 5p_2 p_4 p_5 p_6^3 + 5p_3 p_4 p_5 p_6^3 + 3p_4^2 p_5 p_6^3 + 3p_1 p_5^2 p_6^3 + 3p_2 p_5^2 p_6^3 + 3p_3 p_5^2 p_6^3 + 3p_4 p_5^2 p_6^3 + \\
& 2p_5^3 p_6^3 + 2p_1^2 p_6^4 + 2p_1 p_2 p_6^4 + 2p_2^2 p_6^4 + 2p_1 p_3 p_6^4 + 2p_2 p_3 p_6^4 + 2p_3^2 p_6^4 + 2p_1 p_4 p_6^4 + 2p_2 p_4 p_6^4 + 2p_3 p_4 p_6^4 + \\
& 2p_4^2 p_6^4 + 2p_1 p_5 p_6^4 + 2p_2 p_5 p_6^4 + 2p_3 p_5 p_6^4 + 2p_4 p_5 p_6^4 + 2p_5^2 p_6^4 + p_1 p_6^5 + p_2 p_6^5 + p_3 p_6^5 + p_4 p_6^5 + p_5 p_6^5 + p_6^6
\end{aligned}$$

El inventario de diseños de la ecuación (4.2) es:

$$\begin{aligned}
PI = & x^{54} + 3x^{53}y + 70x^{52}y^2 + 1046x^{51}y^3 + 13312x^{50}y^4 + 131859x^{49}y^5 + 1077283x^{48}y^6 + \\
& 7379840x^{47}y^7 + 43359342x^{46}y^8 + 221584726x^{45}y^9 + 997143342x^{44}y^{10} + 3988468640x^{43}y^{11} + \\
& 14292065794x^{42}y^{12} + 46174061958x^{41}y^{13} + 135224202694x^{40}y^{14} + 360597152936x^{39}y^{15} + \\
& 878955985180x^{38}y^{16} + 1964723672925x^{37}y^{17} + 4038599621368x^{36}y^{18} + 7652080932080x^{35}y^{19} + \\
& 13391143428078x^{34}y^{20} + 21680895100189x^{33}y^{21} + 32521345531038x^{32}y^{22} + \\
& 45247084563200x^{31}y^{23} + 58444154933190x^{30}y^{24} + 70132980494356x^{29}y^{25} + \\
& 78225252302796x^{28}y^{26} + 81122478685028x^{27}y^{27} + 78225252302796x^{26}y^{28} + \\
& 70132980494356x^{25}y^{29} + 58444154933190x^{24}y^{30} + 45247084563200x^{23}y^{31} + \\
& 32521345531038x^{22}y^{32} + 21680895100189x^{21}y^{33} + 13391143428078x^{20}y^{34} + \\
& 7652080932080x^{19}y^{35} + 4038599621368x^{18}y^{36} + 1964723672925x^{17}y^{37} + 878955985180x^{16}y^{38} + \\
& 360597152936x^{15}y^{39} + 135224202694x^{14}y^{40} + 46174061958x^{13}y^{41} + 14292065794x^{12}y^{42} + \\
& 3988468640x^{11}y^{43} + 997143342x^{10}y^{44} + 221584726x^9y^{45} + 43359342x^8y^{46} + 7379840x^7y^{47} + \\
& 1077283x^6y^{48} + 131859x^5y^{49} + 13312x^4y^{50} + 1046x^3y^{51} + 70x^2y^{52} + 3xy^{53} + y^{54}
\end{aligned}$$