

Universidad de Zaragoza

FACULTAD DE CIENCIAS

Trabajo de fin de grado

DESARROLLO DE UN MODELO CLIMÁTICO
SIMPLIFICADO DE BALANCE DE ENERGÍA

Autor:

Hugo Lacambra Asensio

Directores:

Dr Javier Fernández Pato

Dra Pilar García Navarro

Junio 2021

Índice

1. Introducción	2
2. Formulación del modelo	3
2.1. Términos de forzado	5
2.2. Difusión de calor	8
2.3. Superficies heladas	8
2.4. Dinámica atmosférica	9
2.5. Humedad	10
2.6. Ciclo del carbono	12
2.7. Resumen de las ecuaciones consideradas	13
3. Discretización del modelo	13
3.1. Discretización del volumen	13
3.2. Términos de forzado y radiación solar	15
3.3. Ecuación del calor	15
3.4. Superficies heladas	16
3.5. Discretización de las corrientes y la humedad	17
3.6. Creación de continentes y corrientes oceánicas	17
4. Casos test	18
4.1. Celda única sin atmósfera	18
4.2. Celda única con atmósfera	19
4.3. Radiación oscilatoria	19
4.4. Inclinação del eje terrestre	20
4.5. Humedad	20
4.6. Efecto de los continentes	21
4.7. Efecto del CO_2 atmosférico	21
5. Conclusiones	23
6. Bibliografía	25
Referencias	25
7. Anexos	26
7.1. Determinación de la constante solar	26
7.2. Campo geostrófico	26
7.3. Presión de vapor de saturación: ecuación de Clausius Clayperon	27
7.4. Ciclo del carbono	28
7.5. Figuras y Tablas	28

1. Introducción

Un modelo climático es una representación de los procesos físicos y químicos que afectan el sistema climático de una región o planeta que habitualmente emplea métodos cuantitativos para simular las interacciones de la atmósfera, los océanos, el hielo y la superficie terrestre. Su principal utilidad es la de servir como herramienta de predicción meteorológica a largo plazo, por lo que es imprescindible que su diseño se base en un compromiso entre precisión y eficiencia computacional.

Las ecuaciones que se obtienen al plantear los principios físicos, químicos y biológicos que determinan el clima a escala global son demasiado complejas para resolverse analíticamente. Es por eso que el desarrollo de modelos numéricos que permitan determinar la evolución climática es importante. Existe una jerarquía de modelos dependiendo de la cantidad de procesos que se estén considerando. Los más complejos son los modelos de circulación general, que tienen en cuenta la mayor cantidad de factores que influyen en las corrientes atmosféricas y oceánicas para describirlas con precisión. En el otro extremo, se encuentran los modelos de balance energético. Estos modelos simplifican la dinámica climática y consideran promedios en grandes regiones del espacio. Algunos modelos se centran en representar procesos a gran escala, despreciando aquellos procesos cuyos efectos sean locales como la turbulencia o la topografía a pequeña escala, ya que esto supondría un gasto computacional demasiado grande. Entre estos dos tipos de modelos se encuentran los modelos terrestres de complejidad intermedia, que conservan algunas de las aproximaciones tomadas en los modelos de balance energético. En este grupo, hay un gran abanico de modelos, algunos de complejidad cercana a los modelos de circulación general, mientras que otros, son modelos sencillos que añaden algún grado de libertad a los de balance energético [1].

El objetivo de este trabajo de fin de grado es el de formular y programar un modelo computacional que simule el balance energético del planeta y que involucre los elementos fundamentales de radiación solar, velocidad del viento, humedad y términos de intercambio y pérdidas de calor. Por tanto, este modelo contendrá las componentes fundamentales para simular un sistema climático y además añadirá factores como la humedad, por lo que entraría en la categoría de un modelo terrestre de complejidad intermedia. Como es habitual en este tipo de modelos, se necesitan datos obtenidos de la bibliografía, como la irradiancia solar, las propiedades del suelo y el periodo de rotación terrestre.

El principal término de pérdidas e intercambio de calor es la radiación de cuerpo negro, que será fundamental para mantener el sistema en equilibrio. Los distintos componentes del modelo emitirán radiación térmica por radiación de cuerpo negro, que podrá ser reabsorbida por otros componentes o expulsada del dominio.

La discretización espacial consistirá en una red de celdas rectangulares con condiciones de contorno periódicas en dos de sus lados. Por otro lado, no existirá ninguna interacción a través de los otros dos contornos. Estas son las condiciones de contorno de un cilindro. De cara a un modelo planetario, considerar un sistema plano equivale a despreciar los efectos

de la curvatura. Sin embargo, este hecho se puede mitigar considerando un dominio lo suficientemente grande, ya que si sobre la superficie de una esfera tomamos diferenciales de area lo suficientemente pequeños, estos podrán considerarse aproximadamente planos.

Por otro lado, cada celda constará de dos partes fundamentales, la superficie (suelo, agua o hielo) y la atmósfera, con intercambios de calor entre ambas. Una aproximación importante es la discretización de la atmósfera en dos capas, que es lo mínimo que se puede utilizar para modelizar las celdas convectivas. No obstante, esta aproximación obligará a promediar variables en grandes regiones del espacio. En el caso del suelo, se emplearán distintos valores para el albedo correspondientes a terreno árido, hierba y tres tipos de bosque (coníferas, bosque templado caducifolio y bosque nevado). El tipo de bosque se asignará según la latitud de la celda. Por otro lado, el calor específico de la tierra se calculará teniendo en cuenta la humedad específica de la misma. En el caso del agua, se despreciarán los efectos de la salinidad y se considerará que por debajo de los 40 metros de profundidad la temperatura es constante.

El objetivo general de este modelo no es simular detalladamente la circulación atmosférica y oceánica si no analizar el balance energético terrestre de forma realista. El lenguaje de programación empleado en todos los códigos será C. Para visualizar los resultados se utilizará el software de acceso libre Paraview.

2. Formulación del modelo

En todo sistema termodinámico debe cumplirse la conservación de la energía. Esto establece que la variación de energía asociada con la materia de un sistema (definida como la suma de energía interna más cinética) más la energía que entra y la añadida debido al trabajo ejercido y calor transferido, menos la que sale debe ser nula [2]:

$$\int_V (\rho \frac{\partial}{\partial t} (e + \frac{1}{2}v^2) + \bar{u} \cdot \nabla (e + \frac{1}{2}v^2)) - q_R + \nabla \cdot (\bar{q} - T \cdot \bar{u}) - \rho \bar{g} \cdot \bar{u} - \phi_v) dV = 0 \quad (1)$$

donde \bar{u} es el vector velocidad del fluido, v el módulo de la velocidad, e la energía interna por unidad de masa, $\nabla \cdot \bar{q}$, el flujo de calor por conducción, q_R la tasa de radiación por unidad de volumen, $\rho \bar{u} \cdot \nabla e$ el transporte de energía debido al campo de velocidades del fluido y $\rho \bar{g} \cdot \bar{u}$ el efecto de la gravedad sobre el flujo. ϕ_v es un término de disipación viscosa, que representa el calor liberado por la disipación de la energía cinética por fricción. Este efecto se desprecia en el modelo. Todos los términos de la ecuación (1) tienen dimensiones de potencia [W] ya que representan variaciones temporales de energía. Por otra parte, la energía mecánica obedece la ley de conservación:

$$\int_V (\rho \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2}v^2) + \bar{u} \cdot \nabla (\frac{1}{2}v^2)) - \nabla \cdot (T \cdot \bar{u}) - \rho \bar{g} \cdot \bar{u}) dV = 0 \quad (2)$$

Para obtener la ecuación de la energía interna, se combinan las ecuaciones (1) y (2):

$$\int_V (\rho(\frac{\partial e}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla e) - q_R + \nabla \cdot \bar{q})dV = 0 \quad (3)$$

Teniendo en cuenta la relación entre energía y temperatura válida para un gas perfecto $e = c_p dT$, con c_p el calor específico a presión constante, puede escribirse la ecuación (3) en función de la temperatura:

$$\int_V (\rho c_p(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla T) - q_R + \nabla \cdot \bar{q})dV = 0 \quad (4)$$

que en forma diferencial queda:

$$\rho c_p(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla T) - q_R + \nabla \cdot \bar{q} = 0 \quad (5)$$

Resolviendo esta ecuación es posible formular la evolución de la temperatura con el tiempo en cada punto del espacio tridimensional. Esta ecuación tiene unidades de $[W/m^3]$. Para simplificar el modelo, dada la diferencia de escalas verticales frente a horizontales cuando se considera la atmósfera sobre todo el planeta, es posible obtener una formulación promediada en la vertical. Expresando la variación de la energía almacenada por unidad de superficie ($\frac{\partial W}{\partial t}$) para los distintos tipos de celda que participan en el modelo:

Atmósfera:

$$\frac{\partial W_{Atm}}{\partial t} = F_{solAtm} - F_{Irdown} - F_{LE} - F_{sh} + H_{Atm} \quad (6)$$

Agua:

$$\frac{\partial W_{water}}{\partial t} = F_{sol} - F_{Irup} - F_{sh} + (A - G)_{water} + H_{water} \quad (7)$$

Suelo:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = F_{sol} - F_{Irup} - F_{sh} \quad (8)$$

Hielo:

$$\frac{\partial W_{ice}}{\partial t} = F_{sol} - F_{Irup} - F_{sh} + (A - G)_{ice} - L_{ice}F \quad (9)$$

donde los términos F_{sol} (radiación solar en la superficie), F_{Irup} (radiación de cuerpo negro de la superficie), F_{solAtm} (radiación solar en la atmósfera) y F_{Irdown} (radiación de cuerpo negro de la atmósfera) se definirán más adelante. Estos términos se corresponden con q_R de la ecuación (5). Los términos $(A - G)_{water}$ y $(A - G)_{ice}$ corresponden al intercambio de energía por difusión ($\nabla \cdot \bar{q}$ en la ecuación (5)). En este modelo se considerará difusión vertical en el agua y el hielo. En el caso del agua y el aire, se tendrán en cuenta intercambios de energía debido al campo de velocidades (H_{Atm} y H_{water} en las ecuaciones anteriores), que se corresponde con $\bar{u} \cdot \nabla T$ de la ecuación (5). F_{sh} es el flujo de calor sensible entre la superficie y la atmósfera. Este último término es un efecto de superficie, ya que tiene lugar en la frontera atmósfera-superficie. El término $L_{ice}F$ corresponde al calor latente de fusión del hielo. Al contrario que en la ecuación (5), los términos de forzado anteriores tienen unidades de $[\frac{W}{m^2}]$ debido a que las variables están promediadas en un espesor determinado

para cada capa.

2.1. Términos de forzado

Se entiende por términos de forzado a los mecanismos por los que un sistema gana y pierde energía. Para considerar la absorción de radiación, hay que tener en cuenta la emisividad de cada elemento (atmósfera y superficie). La emisividad de un cuerpo, corresponde con la fracción de radiación que emite con respecto a un cuerpo negro perfecto. También representa la fracción de radiación absorbida con respecto a la incidente. Por tanto, se utiliza la misma constante para la radiación emitida y absorbida. La irradiancia solar junto con los intercambios energéticos por radiación de cuerpo negro pueden visualizarse en la Figura 1:

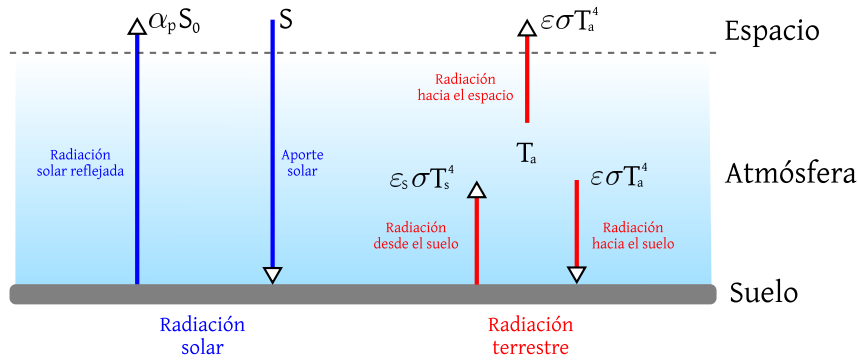


Figura 1: Términos radiativos

α_p corresponde a la fracción de radiación reflejada por el suelo, que dependerá de la emisividad. No obstante, la emisividad depende de la longitud de onda, por lo que no es una constante. Sin embargo, una buena aproximación es considerar dos emisividades para cada elemento del sistema, una para la absorción de radiación solar y otra para la emisión y absorción de energía infrarroja (tanto atmósfera como superficie emitirán en el rango de los infrarrojos). Como la radiación solar es más energética, se denotará por (ϵ_{blue}), mientras que como la energía radiada es fundamentalmente infrarroja, se denotará por (ϵ_{red}) ([1]). A partir de ahora se llamará absorbancia a ϵ_{blue} y emisividad a ϵ_{red} . Para referirse a los valores de la atmósfera, se utilizará *Atm* como subíndice, en caso contrario, se referirá a la superficie.

A continuación, se desarrollarán los términos de forzado mencionados en la sección anterior. En primer lugar, se definirá la potencia de la radiación solar que incide en la atmósfera (en $[\frac{W}{m^2}]$) que vendrá dada por [1]:

$$I_{solatm} = S_0 \frac{r_m}{r(t)} (\sin(\phi) \sin(\delta(t)) + \cos(\phi) \cos(\delta(t)) \cos(HA(t))) \quad (10)$$

En cuanto a los términos radiativos del modelo, se expresarán en $[\frac{W}{m^2}]$ absorbidos o emitidos por cada elemento del sistema. La potencia radiada incidente en la atmósfera

(10) se absorbe de acuerdo a la absorbancia de la misma:

$$F_{solAtm} = \epsilon_{Atmblue} I_{solAtm} \quad (11)$$

Debido a la absorción de radiación solar por parte de la atmósfera, la radiación en el suelo será la radiación que llega a la atmósfera menos la parte de radiación absorbida por la misma. El suelo absorberá esta radiación de acuerdo a su absorbancia:

$$F_{sol} = (1 - \epsilon_{Atmblue}) \epsilon_{blue} F_{solAtm} \quad (12)$$

Por tanto, la radiación que llega a la superficie y no es absorbida se refleja de vuelta a la atmósfera, la cual la absorberá de acuerdo a su absorbancia. Esta radiación se absorberá según (11) y (12), siendo F_{solAtm} y F_{sol} la radiación absorbida por la atmósfera y la superficie, respectivamente.

En la ecuación (10), ϕ representa la latitud de cada punto, $\delta(t)$ la declinación solar y $HA(t)$ el ángulo horario, siendo 0° a las 12 del mediodía. S_0 es la constante solar, con unidades de $[\frac{W}{m^2}]$ cuyo cálculo se muestra en el anexo (7.1). $\delta(t)$ y puede aproximarse por ([1]):

$$\delta(t) = 23,45^\circ \sin(360^\circ(Nday(t) - 80)/365) \quad (13)$$

siendo $Nday(t)$ el día del año, r_m la distancia media Tierra-Sol, es decir el radio que tendría un círculo con el mismo area que la elipse terrestre. Si a y b son los semiejes de la elipse, r_m puede calcularse como:

$$r_m = \sqrt{ab} \quad (14)$$

La magnitud $r(t)$ representa la distancia Tierra-Sol en cada instante. Para calcularla, se aplicará que en una orbita cerrada atractiva se cumple ([3]):

$$r(t)(e_c \cos(\theta(t) - \theta_0) + 1) = \frac{L^2}{M_t G M_{sol}} \quad (15)$$

donde $e_c = 0,0167$ es la excentricidad de la órbita, $M_t = 5,972 \cdot 10^{24} kg$ es la masa de la Tierra, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg^{-1}s^2}$ la constante de gravitación universal, $M_{sol} = 1,989 \cdot 10^{30} kg$ la masa del sol, θ_0 el ángulo correspondiente a la máxima distancia Tierra-Sol (puede fijarse a 0), $L = 2,7 \cdot 10^{40} \frac{kgm^2}{s^{-1}}$ el momento angular de la Tierra (estas constantes han sido extraídas de [4]) y $\theta(t)$ el desplazamiento angular de la Tierra. Teniendo en cuenta que la velocidad areolar de una órbita es constante, podemos obtener el desplazamiento angular por día en función del radio [3]:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2M_t} \quad (16)$$

Por tanto, mediante la ecuación (16), se integra para obtener $\theta(t)$, para luego despejar $r(t)$ de la ecuación (15).

También se considerarán pérdidas de calor por radiación de cuerpo negro. La radiación de la superficie, con ϵ_{red} la emisividad de la misma, y $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ la constante de Stefan-Boltzmann ([1]), vendrá dada por:

$$F_{Irup} = \sigma \epsilon_{red} T^4 \quad (17)$$

Esta radiación será absorbida por la atmósfera de acuerdo al valor de su emisividad. Del mismo modo la atmósfera también radiará calor según:

$$F_{Irdown} = 2\sigma \epsilon_{Atmred} T_{Atm}^4 \quad (18)$$

El factor 2 es debido a que la atmósfera radia hacia arriba y hacia abajo. El calor radiado hacia arriba desde la capa inferior será absorbido por la capa superior de la atmósfera, y el radiado hacia abajo es absorbido por el suelo. La segunda capa de la atmósfera radiará de la misma manera, la mitad de su calor radiado se perderá y la otra mitad será absorbido por la primera capa de la atmósfera (términos de forzado extraídos de [1]). Se considerará la capa superior de la atmósfera (*Atm2*) transparente a la radiación solar ($\epsilon_{Atm2blue} = 0$) y se denotará por $F_{Irou} = 2\epsilon_{Atm2red}\sigma T_{Atm2}^4$ a su radiación de cuerpo negro. La variación de energía acumulada por unidad de superficie debido a los términos radiativos en cada capa vendrá dada por:

Superficie:

$$\frac{dW}{dt} = F_{sol} + \epsilon_{red} \frac{1}{2} F_{Irdown} - F_{Irup} \quad (19)$$

Atmósfera inferior:

$$\frac{dW_{Atm1}}{dt} = F_{solAtm} - F_{Irdown} + F_{Irup} + \epsilon_{Atmred} \frac{1}{2} F_{Irou} + \epsilon_{Atmblue}(1 - \epsilon_{blue})F_{sol} \quad (20)$$

Atmósfera superior:

$$\frac{dW_{Atm2}}{dt} = \epsilon_{Atm2red} F_{Irdown} - F_{Irou} \quad (21)$$

El último término de la atmósfera inferior corresponde a la radiación reflejada por el suelo. Dado que las emisividades son altas, se asumirá que la radiación infrarroja emitida por un elemento solo alcanza a los adyacentes. Por ejemplo, F_{Irup} no llegará a la segunda capa de la atmósfera. Considerando estos términos, se observa como el sistema tiende a un estado estacionario oscilatorio. Sería estacionario porque los términos de absorción y emisión harán tender al sistema hacia una temperatura de equilibrio, mientras que sería oscilatorio debido a la dependencia temporal de las variables en el término de la radiación solar.

2.2. Difusión de calor

Se considera la difusión de calor entre capas adyacentes. Se usarán coordenadas cartesianas, siendo x e y la superficie horizontal y z la vertical. La difusión térmica se corresponde con el término $\nabla \cdot \bar{q}$ de la ecuación (5). También corresponde con el término $(A - G)_{water}$ y $(A - G)_{ice}$ de las ecuaciones (7) y (9). Según la ley de Fourier hay una relación de proporcionalidad entre el flujo de energía a través de una superficie y el gradiente de temperatura en la dirección normal a esa superficie. Esto se refleja en la siguiente ecuación.

$$\nabla \cdot \bar{q} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (22)$$

Este flujo de calor puede expresarse como la variación temporal de la temperatura:

$$\nabla \cdot \bar{q} = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23)$$

Siendo k la conductividad térmica en $[\frac{J}{msK}]$, c_p el calor específico en $[\frac{J}{kgK}]$ y ρ la densidad del fluido. No obstante, el gradiente térmico en la horizontal es mucho menor que en la vertical. Por lo tanto, se despreciará la difusión en las coordenadas x e y . Dado que la tierra tiene una conductividad térmica mucho menor que el agua y el hielo, únicamente se considerará difusión vertical de calor en los océanos y las capas de hielo.

En el océano se considerará que bajo la capa superficial de agua hay otra capa de agua a una temperatura constante de 283K. Por lo tanto, habrá un flujo de calor entre la capa superficial y una capa subyacente. En el caso del hielo, también se considerará que bajo la capa de hielo hay agua a 283K. Dado que no es posible tener hielo a más de 273K, el flujo de calor siempre será hacia la superficie. No obstante, también se considerará que la cantidad de hielo puede aumentar, creando sucesivas capas de hielo. Debido al calor perdido por la capa de agua a 283K, se formará hielo como se explicará en la siguiente sección.

Considerar una capa subyacente de agua a 283K es una aproximación razonable ya que solo se están considerando corrientes oceánicas superficiales. No obstante, existen corrientes oceánicas importantes bajo la superficie que tienden a nivelar las temperaturas a una cierta profundidad. Como el agua profunda se encuentra aislada de la radiación solar y los efectos difusivos son más lentos que las corrientes, podemos suponer una temperatura constante.

2.3. Superficies heladas

Para el caso de las superficies heladas o nevadas, habrá que tener en cuenta la energía involucrada en la formación y la fusión del hielo. Por lo tanto habrá que considerar un intercambio de calor debido al calor latente de fusión del mismo. El calor vinculado a este

proceso vendrá dado por:

$$Q = m_{ice}L_{ice} \quad (24)$$

Esto se corresponde con el término $L_{ice}F$ de la ecuación (9), donde m_{ice} es la masa de hielo formada o derretida y L_{ice} ($[\frac{J}{kg}]$) el calor latente de fusión del hielo. También se considerará un aumento en el espesor de la capa de hielo mediado por la difusión de calor vertical tal y como se ha explicado en la sección 2,2. Quedando la siguiente ecuación para la conducción entre las sucesivas capas de hielo y el agua subyacente:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (25)$$

Como se ha explicado en la sección 2,2, se considera un flujo de calor hacia la superficie proveniente del agua debajo del hielo. Debido al calor perdido por la capa de agua se creará hielo, contribuyendo así a aumentar el espesor de esta capa. Como la densidad del hielo es menor que la del agua, se puede considerar que todo el hielo que se funde, lo hace de la capa más profunda.

2.4. Dinámica atmosférica

El campo de velocidades en la atmósfera alcanzará un equilibrio geostrófico con velocidad constante y la dinámica atmosférica está en equilibrio. Este campo vectorial puede ser calculado a partir de mediciones del gradiente horizontal de presión (ver Anexo 7,2). Para este modelo, se considerarán las corrientes principales que se ven en la Figura 2 y su valor será extraído de la bibliografía.

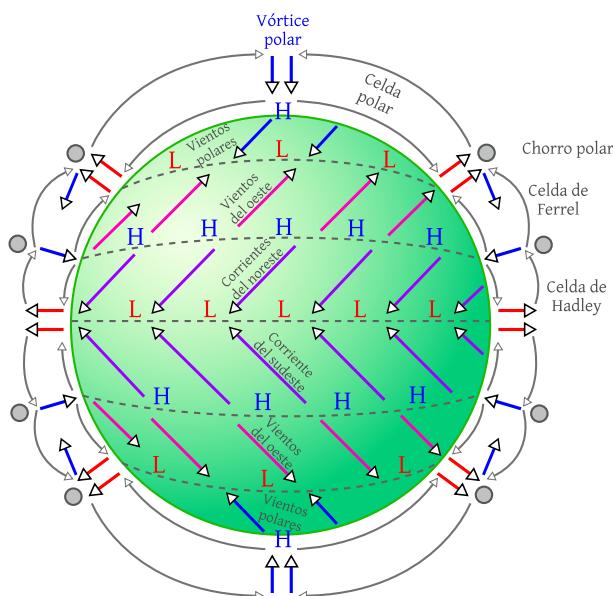


Figura 2: Campo de velocidades

Los valores numéricos del campo se muestran en la Tabla 1 (ver anexo 7,5). Debido al

campo de velocidades de la capa inferior de la atmósfera, existirá un flujo de calor sensible entre el suelo y la atmósfera que puede formularse por la ecuación (26) ([1]):

$$F_{sh} = \rho c_p c_h U_a (T - T_{Atm}) \quad (26)$$

siendo c_h el coeficiente aerodinámico (una constante adimensional cuyo valor aproximado es de 10^{-3}) [1], c_p el calor específico del suelo y U_a el módulo de la velocidad. También existirá un transporte horizontal de calor, asociado al campo de velocidades. Esto se corresponde con el término $\rho \bar{u} \cdot \nabla T$ de la ecuación (5). También se correspondería con el término H de las ecuaciones (6) y (7). Desarrollando el término $\rho \bar{u} \cdot \nabla T$ (considerando que ρ puede variar en el espacio):

$$\bar{u} \cdot \nabla(\rho T) = (u_x \frac{\rho T}{dx} + u_y \frac{\rho T}{dy} + u_z \frac{\rho T}{dz}) \quad (27)$$

Por lo tanto, existirá un flujo de energía proporcional al gradiente de temperaturas y al campo de velocidades en cada dirección. No obstante, las corrientes de viento forman celdas convectivas con corrientes ascendentes y descendentes, como las que se observan en la Figura 2. Para considerar este efecto, habrá que añadir una velocidad vertical al campo de velocidades donde dos celdas convectivas diferentes sean adyacentes. Esta velocidad vertical u_z se puede calcular suponiendo que no hay circulación de masa entre celdas que no pertenecen a la misma celda convectiva. Por lo tanto, considerando un dominio rectangular con una velocidad u_y atravesando la frontera entre dos celdas convectivas, esta velocidad se desviará hacia arriba o hacia abajo (según indique la Figura 2) manteniendo el flujo de masa:

$$\rho u_z dx dy = \rho u_y dx dz \quad (28)$$

La dinámica en los océanos vendrá determinada por la dinámica atmosférica con las corrientes oceánicas superficiales en ausencia de continentes siendo paralelas a la velocidad del viento [1]. Se considerarán tres corrientes principales una para cada tipo de celda convectiva. Las velocidades pueden verse en la Tabla 2 (ver Anexo 7,5).

2.5. Humedad

Otro factor importante a considerar es el vapor de agua. Si se considera la evaporación-condensación de agua entre la atmósfera y la superficie, existirá un intercambio de calor debido al calor latente de evaporación:

$$F_{LE} = \rho U_{Atm} c_L L_v (q_s - q_a) \quad (29)$$

Este flujo de calor latente tiene unidades de $[\frac{J}{m^2 s}]$ y corresponde al calor por segundo y metro cuadrado perdido por la atmósfera para evaporar el agua, donde c_L es el coeficiente aerodinámico del aire, que es una constante adimensional, con un valor cercano a $5 \cdot 10^{-5}$

[1], q_a es la humedad específica de la atmósfera, expresada en masa de vapor de agua por masa de vapor de saturación y q_s la humedad específica de la superficie (en el caso del agua y el hielo será 1). La masa de vapor de agua evaporado en una celda vendrá dada por [1]:

$$dM_v = \frac{F_{LE} dx dy dt}{L_v} \quad (30)$$

Cuando una celda de la atmósfera alcance la saturación de vapor de agua, esta comenzará a condensarse, liberando calor a la atmósfera para finalmente, dar lugar a precipitaciones. Por otra parte, la presión de vapor de saturación dependerá de la temperatura y puede obtenerse de la ecuación de Clausius- Clayperon (ver anexo 7,3). Obtenemos una dependencia de la presión de vapor de saturación con la temperatura de la forma [5]:

$$p_s(T) = p_0 \exp\left(-\frac{m_m(H_2O)L_v}{RT}\right) \quad (31)$$

La constante p_0 se puede determinar a partir de la presión de vapor de saturación para una temperatura determinada, empleando que para 293K la presión de vapor de saturación es de $0,023 atm$ se obtiene que $p_0 = 2718,16 Pa$. De aquí también puede derivarse, utilizando la ecuación de los gases ideales, que la densidad máxima de vapor de agua en la atmósfera es:

$$\rho_v = \frac{p_s(T)}{RT} m_m(H_2O) \quad (32)$$

Se considerará que el número de moles en la atmósfera es constante, por lo tanto, la presencia de vapor de agua alterara la densidad del aire:

$$\rho(M_v) = \rho(0) + \frac{d\left(M_v - M_v \frac{m_m(dry)}{m_m(H_2O)}\right)}{dV} \quad (33)$$

con $\rho(0)$ la densidad del aire seco, $m_m(dry)$ la masa molar del aire seco y el término $M_v \frac{m_m(dry)}{m_m(H_2O)}$ corresponde a la masa de aire seco desplazado debido a la presencia de vapor de agua. Habrá que considerar que el calor específico se verá influenciado por la humedad:

$$c_p(t) = \frac{M_v(t)}{M(t)} c_{p,water} + \frac{M_{dry}(t)}{M(t)} c_{p,dry} \quad (34)$$

siendo $M(t)$ la masa total $M_v(t)$ la de vapor de agua, $M_{dry}(t)$ la masa de aire seco, $c_{p,water}$ el calor específico del vapor de agua y $c_{p,dry}$ el calor específico del aire seco. Además, habrá que considerar un cambio en la densidad del aire debido a la presencia de vapor de agua. Para hacer esto, se considerará que el número de moléculas en una celda atmosférica es fijo, por lo tanto, cuando se evapora agua, las moléculas de agua nuevas desplazarán a las existentes en proporción a su presencia. La variación en la densidad vendrá dada por:

$$d\rho = \frac{dM_v}{V} \left(1 - \frac{mm_{dry}}{mm_{water}}\right) \quad (35)$$

con V el volumen de una celda, mm_{dry} la masa molar del aire seco y mm_{water} la masa molar del agua. También se tiene que tener en cuenta el transporte de vapor de agua debido al campo de velocidades de la atmósfera. Para esto emplearemos la ecuación de la masa (ecuación (36)):

$$\frac{d\rho_{M_v}}{dt} + \frac{d}{dx}(\rho_{M_v}u_x) + \frac{d}{dy}(\rho_{M_v}u_y) + \frac{d}{dz}(\rho_{M_v}u_z) = 0 \quad (36)$$

donde ρ_{M_v} es la densidad de vapor de agua en la atmósfera, que puede variar espacialmente. Cuando la atmósfera supere la masa de vapor de agua de saturación, el vapor de agua en exceso condensará liberando una cantidad de calor correspondiente al calor latente de vaporización. Este calor contribuirá a aumentar la temperatura de la atmósfera. El agua condensada caerá a la superficie y contribuirá a aumentar la temperatura de la superficie. Se supondrá que este proceso se realiza a volumen constante, por lo que el trabajo realizado es nulo. En estas condiciones podemos calcular la temperatura que alcanzará la superficie igualando los calores emitidos y absorbidos por la superficie y la masa de agua cayendo sobre ella. Considerando un diferencial de volumen en la superficie, dV , sobre la que cae una masa de agua, dM_v , y suponiendo que se mezclan completamente en un diferencial de tiempo dt :

$$c_{p,water}dM_v(T(t+dt) - T_{M_v}(t)) = c_p\rho_s dV(T(t) - T(t+dt)) \quad (37)$$

Despejando $T(t+dt)$:

$$T(t+dt) = \frac{c_{p,water}dM_v(t)T_{M_v}(t) + \rho_s dV c_p T(t)}{dM_v c_{p,water} + \rho_s dV c_p} \quad (38)$$

Donde $T_{M_v}(t)$ es la temperatura de la masa de agua y ρ_s y $T(t)$ la densidad y temperatura de la superficie. En el caso de las superficies que no sean agua o hielo habrá que tener en cuenta que existirá una humedad relativa de saturación. Cuando una celda de tierra supera la saturación, el exceso de agua es transportado (por medio de ríos o corrientes subterráneas) al mar. Para modelizar esto, el exceso de agua en una superficie será distribuido equitativamente entre las celdas de agua más cercanas. Por lo que la temperatura de la celda destino cambiará siguiendo una ecuación análoga a (38).

2.6. Ciclo del carbono

El carbono es una parte importante de un sistema climático ya que constituye dos de los gases más importantes de efecto invernadero, el CO_2 y el CH_4 . El CH_4 está menos presente en la atmósfera ya que es más reactivo, pudiendo reaccionar con O_2 para dar CO_2 y agua. Además se produce en menor proporción que el CO_2 . Es por esto que este modelo se centrará en estudiar el CO_2 . El ciclo del carbono esta dominado por el intercambio entre la atmósfera y los océanos y la corteza terrestre (ver Anexo 7,4). Dado que la concentración de CO_2 en la atmósfera se mantiene constante durante largos periodos de tiempo, para analizar su efecto en la temperatura de la atmósfera, se considerará una

cantidad constante de dióxido de carbono que influirá en el calor específico. Se supondrá que en ausencia de CO_2 el aire seco esta compuesto en un 78 % de nitrógeno y un 22 % de oxígeno en volumen. Al añadir CO_2 , se asumirá que la cantidad de moles en una celda de la atmósfera es constante y el calor específico puede obtenerse como:

$$c_p = \frac{M_{N_2}}{M} c_{p,N_2} + \frac{M_{O_2}}{M} c_{p,O_2} + \frac{M_{CO_2}}{M} c_{p,CO_2} \quad (39)$$

Donde M es la masa total de la atmósfera y M_{N_2} , M_{O_2} , M_{CO_2} , las de nitrógeno, oxígeno y dióxido de carbono, respectivamente.

2.7. Resumen de las ecuaciones consideradas

La variación de energía interna por metro cuadrado en el modelo para cada tipo de celda:

Agua:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = F_{sol} - F_{Irup} - F_{sh} + (A - G)_{water} + H_{water} \quad (40)$$

Suelo:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = F_{sol} - F_{Irup} - F_{sh} \quad (41)$$

Hielo:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = F_{sol} - F_{Irup} - F_{sh} + (A - G)_{ice} - L_{ice}F \quad (42)$$

Atmósfera 1:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = F_{sol_{atm}} - F_{Irdown} - F_{LE} + F_{sh} + H_{Atm1} \quad (43)$$

Atmósfera2:

$$\frac{dW_{Atm2}}{dt} = \epsilon_{Atm2red} F_{Irdown} - F_{Irou} + H_{Atm2} \quad (44)$$

donde $(A - G)_{water}$, $(A - G)_{ice}$ son términos difusivos y H_{water} , H_{Atm1} , H_{Atm2} flujos de energía asociado al campo de velocidades.

3. Discretización del modelo

3.1. Discretización del volumen

Para poder programar correctamente el modelo será necesario discretizar el dominio. En la Figura 3 se muestra la división vertical del dominio del modelo en función del tipo de celda en el que nos encontramos.

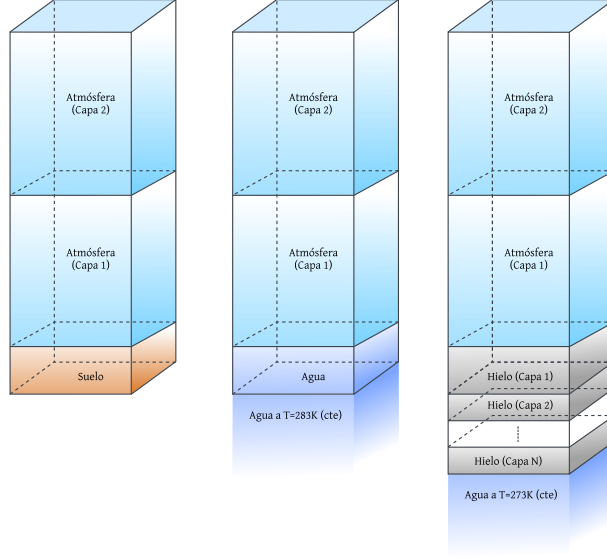


Figura 3: Celdas de tierra agua y hielo

Para discretizar horizontalmente la malla que representa a la superficie utilizaremos la longitud de la circunferencia terrestre $2\pi R_T$ dividida en un número de celdas de igual tamaño. De esta forma, la longitud de cada celda vendrá dada por:

$$\Delta x = \frac{2\pi R_T}{N_{cells}} \quad (45)$$

siendo NX el número de celdas en el eje x que estamos considerando. Tomando la Tierra como una esfera perfecta, y $NX = NY$, $\Delta y = \Delta x$. Dada esta discretización, pueden diferenciarse tres tipos de celda. Las celdas centrales, que estarán en contacto con cuatro celdas a su alrededor, dos a los lados, una arriba y otra abajo. Las celdas de los laterales, que al haber condiciones de contorno periódicas serán iguales que las celdas centrales. Por último, las celdas polares. Estas estarán en contacto con tres celdas y tendrán un borde a través del cual no se dará ningún tipo de interacción debido a que no hay comunicación entre los polos. Con esta discretización cada celda vendrá determinada por un par de índices i, j . Siendo i el índice correspondiente a la columna (eje x) y j el correspondiente a la fila (eje y). Podemos ver esta discretización en la Figura 4.

La atmósfera constará de dos capas, como se esquematiza en la Figura 3. La extensión y discretización horizontal de dichas capas será la misma que las de la superficie. Por otro lado, la extensión vertical será independiente del número de celdas empleado. Además, en la celda superior de la atmósfera, solo la temperatura podrá variar debido a que en el modelo se considera un campo de velocidades constante y que el aire a grandes altitudes es mayormente seco. Por otro lado, también habrá que discretizar la latitud y la hora de cada celda. Para discretizar la latitud, se considerará el índice j de cada celda y, dado que la latitud esta comprendida entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, le asignaremos un valor dado por:

$$\phi_j = j \frac{\pi}{N_{cells} - 1} - \frac{\pi}{2} \quad (46)$$

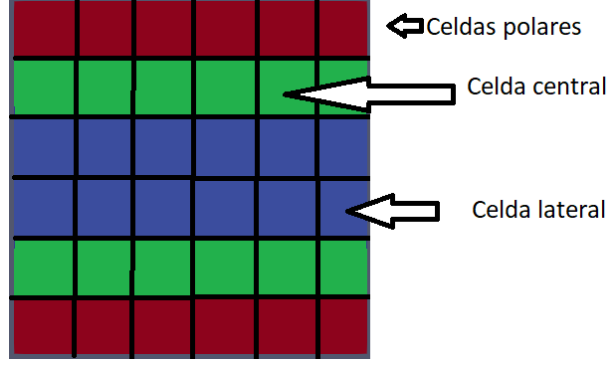


Figura 4: Dominio, plano horizontal, celdas polares (rojo), de Ferrel (verde) y de Hadley (azul).

Se asigna una longitud a cada celda dada por:

$$\alpha_i = 2\pi \frac{i}{X_{cells} - 1} \quad (47)$$

Para discretizar la hora de cada celda y asignar un valor inicial, se hará de acuerdo a la longitud de dicha celda:

$$h_i = 24 \frac{\alpha}{2\pi} \quad (48)$$

3.2. Términos de forzado y radiación solar

Para obtener el calor recibido por cada celda (i,j) en un intervalo de tiempo Δt por un término de forzado $F_{i,j}$:

$$Q_{i,j} = F_{i,j} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (49)$$

La discretización de la radiación solar, dada por la ecuación (10) tiene una dependencia con la distancia Tierra-Sol. Esta distancia viene dada por las ecuaciones (15) y (16). La iteración numérica se hará de la siguiente manera:

$$\theta^{k+1} = \theta^k + \frac{L}{M_t (r^k)^2} \Delta t \quad (50)$$

$$r^{k+1} = \frac{L^2}{M_t G M_{sol} (e_c \cos(\theta^{k+1}) + 1)} \quad (51)$$

donde k hace referencia al instante de tiempo. En este caso el paso de tiempo será de un día.

3.3. Ecuación del calor

La conducción del calor viene dada por la ecuación (23), que en una dimensión queda como (25). A continuación, se describirá como discretizar esta ecuación para dada

unas temperaturas en un instante de tiempo, calcularlas en el siguiente. Discretizando las derivadas espaciales y temporales:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} \quad (52)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T(x + \Delta x, t) - T(x, t)}{\Delta x} \quad (53)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{T(x + \Delta x, t) - T(x, t)}{\Delta x} - \frac{T(x, t) - T(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \right) \quad (54)$$

Se discretiza el espacio, haciendo corresponder la posición x a una celda i, j y $x + \Delta x$ a una celda $i + 1, j$. El tiempo se discretiza denotando por t^k al instante t y por t^{k+1} al instante $t + \Delta t$. Las ecuaciones (52) y (54) quedan:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (55)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k}{\Delta x} - \frac{T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) \quad (56)$$

Discretizando la ecuación (25) según (55) y (56) y despejando $T_{i,j}^{k+1}$:

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + \Delta t k (T_{i-1,j}^k + T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k) / (\Delta x^2) \quad (57)$$

Esto se aplicará para la formación de capas de hielo y para la difusión de agua en el océano de capas inferiores.

3.4. Superficies heladas

La formación y fusión del hielo responde a la ecuación (24). Para computar el calor destinado a la fusión o la creación del hielo, se considera que si una celda (i, j) de agua baja de los 273K, se calculará el calor emitido al bajar la temperatura como:

$$Q = (T_{i,j} - 273) c_{p,water} M_{i,j} \quad (58)$$

Posteriormente, se fijará la temperatura de la celda a 273K y se creará una masa hielo de acuerdo a (24) utilizando el calor calculado anteriormente. Cuando haya una cantidad de hielo grande respecto a la masa de la celda una celda de agua pasará a considerarse como hielo. Si una celda de hielo superará los 273K operaremos de forma idéntica pero fundiendo hielo. Cuando se funda una cantidad de hielo grande respecto a la masa de la celda, esta pasará a considerarse agua. Se cambiará el tipo de superficie cuando la masa sea superior al 50 % de la masa de la celda. Al cambiar el tipo de superficie, habrá que actualizar los parámetros de la superficie, es decir, la densidad, la emisividad y el calor específico.

3.5. Discretización de las corrientes y la humedad

El intercambio de calor debido a las corrientes responde a la ecuación (27). Para discretizar esta ecuación se escribe la variación de energía de una celda debido a este término en una dimensión:

$$c_p \rho(x) \frac{dT}{dt} = u_x \frac{d(\rho T)}{dx} \quad (59)$$

Discretizando las derivadas y denotando a cada celda por los subíndices (i, j) y al instante de tiempo por el superíndice k , se analiza el transporte en la dirección x (índice i):

$$c_p \rho_{i,j} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} = u_{x,i,j} \frac{\rho_{i+1,j} T_{i+1,j}^k - \rho_{i,j} T_{i,j}^k}{\Delta x} \quad (60)$$

despejando $T_{i,j}^{k+1}$:

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{x,i,j} \Delta t}{c_p \rho_{i,j} \Delta x} (\rho_{i+1,j} T_{i+1,j}^k - \rho_{i,j} T_{i,j}^k) + T_{i,j}^k \quad (61)$$

Habrá una ecuaci3n an3loga para las direcciones y, z . Por otro lado, el transporte de aire húmedo responde a la ecuaci3n (36). A continuaci3n, se analiza el transporte de aire húmedo a través de una de las caras de una celda. Para ello se discretiza la ecuaci3n (36) en una direcci3n, utilizando el mismo convenio de índices:

$$\frac{\rho_{M_v,i,j}^{k+1} - \rho_{M_v,i,j}^k}{\Delta t} + \frac{\rho_{M_v,i+1,j}^k - \rho_{M_v,i,j}^k}{\Delta x} = 0 \quad (62)$$

despejando $\rho_{M_v,i,j}^{k+1}$:

$$\rho_{M_v,i,j}^{k+1} = -\Delta t \left(\frac{\rho_{M_v,i+1,j}^k - \rho_{M_v,i,j}^k}{\Delta x} \right) + \rho_{M_v,i,j}^k \quad (63)$$

3.6. Creaci3n de continentes y corrientes oce3nicas

Ser3 de interes para el modelo observar la evoluci3n de las variables para distintas distribuciones de los continentes. Es por esto que se generaran continentes de forma aleatoria. Imponiendo que la distribuci3n de areas de los continentes del modelo se ajusta a una curva gaussiana:

$$p(A) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(A - \bar{A})^2}{2\sigma^2}} \quad (64)$$

donde se considera que el area media de cada continente \bar{A} y la varianza σ se corresponde con la media varianza de la distribuci3n de areas en la Tierra. Para generar, continentes de acuerdo a esta distribuci3n se fijar3 el porcentaje de la superficie que vaya a ser tierra y usaremos el algoritmo de metropolis [6]. El método de metropolis permite generar números

aleatorios de acuerdo a una distribución a partir de una distribución plana. Primero se genera un número plano, A entre $(\bar{A} \pm 2\sigma)$, posteriormente, utilizando la distribución se obtendrá la probabilidad de A , $p(A)$. Posteriormente, se genera otro número aleatorio A_n en el mismo rango que el anterior, y calculamos $p(A_n)$. Luego se genera un número plano w entre 0 y 1 y se realiza el cociente $\frac{p(A_n)}{p(A)}$. Si este cociente es mayor que w se mantendrá A_n , si no se mantendrá A . Para eliminar correlaciones, se escogerá un area para cada continente cada 100 iteraciones del algoritmo. Los continentes generados tendrán forma rectangular, una vez obtenida el area se generará aleatoriamente uno de sus lados y el otro se calculará. Generaremos continentes, hasta que el area cubierta por tierra sea mayor que la fijada previamente.

Las corrientes oceánicas superficiales en ausencia de continentes son paralelas a las corrientes atmosféricas. Al añadir los continentes, habrá que tener en cuenta que estas se desviarán. En este modelo, se desviarán siguiendo la línea de costa en el sentido de la componente de la velocidad paralela a la costa, como se visualiza en la Figura 5.

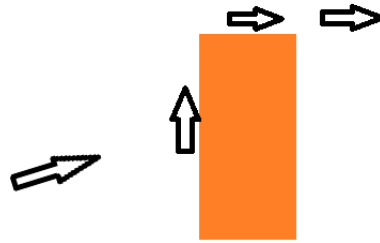


Figura 5: Desviación de las corrientes oceánicas.

4. Casos test

4.1. Celda única sin atmósfera

A continuación, se analiza el comportamiento del modelo al considerar la Tierra como una única celda de agua sin atmósfera. Recibirá una irradiancia solar constante en la mitad de su superficie mientras emite radiación de cuerpo negro. Esto puede visualizarse en la Figura 6.

Dado que no hay términos de flujo de calor ni dependencia temporal de la radiación, se alcanzará un equilibrio entre la radiación solar y la radiación de cuerpo negro. Se obtiene una temperatura:

$$T = 308,25K$$

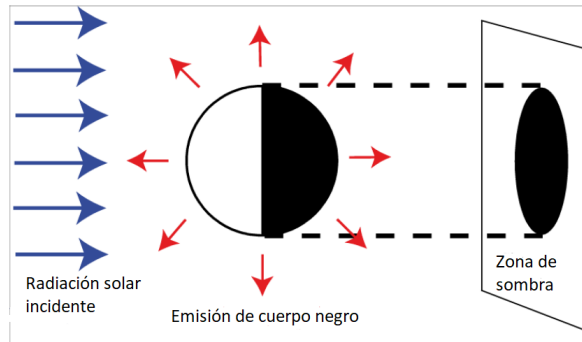


Figura 6: Tierra como una celda de agua.

4.2. Celda única con atmósfera

Se añadirá al caso anterior el efecto de tener una atmósfera sobre la superficie, con la composición del aire seco. Es decir, la radiación solar incidirá en la superficie y en la atmósfera, y ambos elementos emitirán radiación de cuerpo negro. La radiación de cuerpo negro de la superficie será absorbida por la atmósfera de acuerdo a su emisividad. La mitad de radiación de cuerpo negro de la atmósfera se perderá, y la otra mitad será absorbida por la superficie de acuerdo a su emisividad. Tal como en el caso anterior, se alcanzará un equilibrio entre la irradiancia solar y las emisiones de cuerpo negro:

$$T = 350,11K$$

$$T_{Atm} = 303,96K$$

se observa la superficie ha sufrido un calentamiento con respecto al caso anterior. Esto es debido a que la atmósfera obstaculiza la emisión de cuerpo negro del sistema ya que absorbe parte de la radiación emitida por la superficie. La superficie absorbe parte de la radiación absorbida por la atmósfera. Además, la mayor pérdida radiativa del sistema es debida a la radiación de cuerpo negro de la atmósfera, y como su temperatura es más baja que la de la superficie, habrá menos emisión.

4.3. Radiación oscilatoria

A continuación se permitirá una oscilación temporal de la irradiancia solar con respecto al caso anterior. Esto equivale a considerar la hora del día. Es decir, se considerará la longitud pero no la latitud. Utilizaremos un dominio dividido en 40 casillas. En la Figura 7 se ve la variación de la temperatura de la superficie a lo largo de la circunferencia terrestre, que coincide con la variación de la temperatura en una celda a lo largo de un día.

En los casos siguientes se ha considerado un dominio discretizado en una red de 190 x 190 celdas de agua. Se tendrán en cuenta la hora, la latitud, la declinación del eje terrestre,

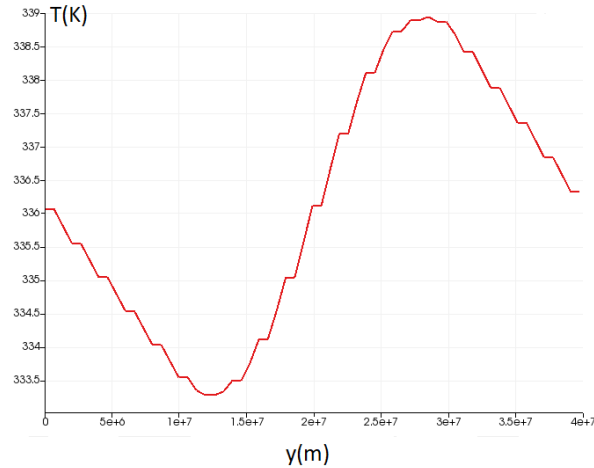


Figura 7: Evolución temporal de la temperatura considerando la Tierra como una única celda de agua.

la formación y fusión del hielo, el campo de velocidades atmosférico y oceánico, la humedad y la presencia de CO_2 en la atmósfera en la concentración actual (0.04%). Sobre este caso general efectuaremos cambios para analizar el efecto de los distintos factores. Los gradientes térmicos que se muestran están tomados a 20 de junio debido a que es un año después del comienzo del programa. De esta forma, se permite que el sistema termalice.

4.4. Inclinación del eje terrestre

La inclinación del eje terrestre es responsable de las estaciones en el planeta. Este efecto se puede observar en el caso general comparando la evolución de la temperatura a lo largo de un año considerando el eje recto y considerando el eje inclinado. Esto se muestra en la Figura 8.

Se observa que con un eje recto las oscilaciones en la temperatura de la superficie son mucho menores que con un eje inclinado. Esto es el efecto de las estaciones.

4.5. Humedad

La presencia de vapor de agua en la atmósfera regula la temperatura ya que el calor específico del agua es mucho mayor que el del aire seco. Para analizar la intensidad de este efecto, se compara el gradiente de temperaturas de la atmósfera entre los polos para un caso en el que se permite la evaporación condensación de agua y para otro en el que no. Esta comparación puede observarse en la Figura 9.

Se observa que la humedad provoca que el gradiente de temperaturas sea más suave. También provoca que las temperaturas de pico sean más bajas. Sus efectos son más notables a temperaturas altas, esto es consistente con la ecuación (31) ya que a mayores temperaturas, mayores la presiones de vapor de saturación y por tanto más vapor de agua puede ser almacenado en la atmósfera.

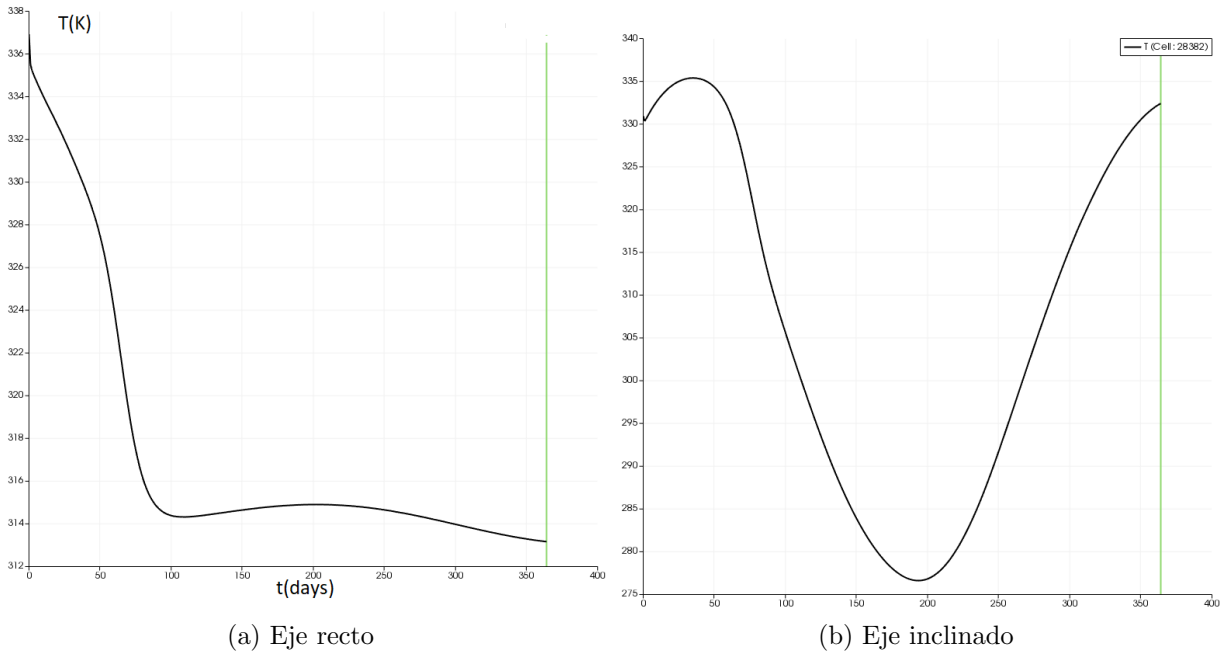


Figura 8: Efecto del eje terrestre en la temperatura de la superficie a lo largo de un año para una celda en una latitud cercana a $\frac{\pi}{4}$

4.6. Efecto de los continentes

A continuación, se analizará como afecta la cantidad de superficie terrestre a la temperatura del sistema. En la Figura 10 se observa las distribuciones de continentes empleadas, con los continentes marcados en gris.

El agua, tiene una mayor absorbancia que la tierra, por lo que absorbe más radiación. Debido a esto, si se considera la irradiancia solar y la emisión de cuerpo negro de la atmósfera y la superficie como los efectos fundamentales del sistema, si la superficie esta totalmente cubierta de agua la temperatura de equilibrio será mayor que si hay continentes. Por otro lado, los continentes también desvían las corrientes oceánicas. Esto permitirá nuevos mecanismos de transporte de energía que puedan recorrer un gran rango de latitudes. En la Figura 11 se comparan los gradientes de temperatura de la superficie entre los polos para el caso con y sin continentes.

Como era esperado a mayor superficie continental, la temperatura es menor debido a la menor absorbancia del dominio. También se observa que el gradiente térmico desarrolla perfiles irregulares. Esto es debido a la desviación de las corrientes marinas como se ha comentado anteriormente.

4.7. Efecto del CO_2 atmosférico

La presencia de CO_2 en la atmósfera altera el calor específico del aire según la ecuación (39). Por otro lado, en la Figura 13 se puede ver la evolución de la concentración de CO_2 en la atmósfera desde 1958 hasta 2019. Para ver los posibles efectos que esto ha podido tener en el clima, se comparan los gradientes de la temperatura de la atmósfera de polo a

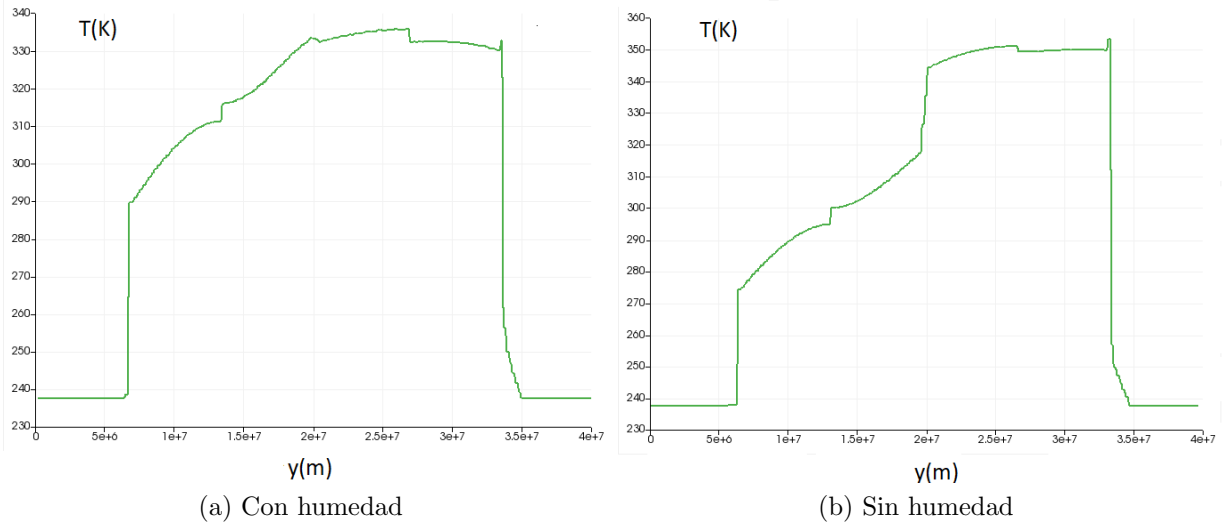


Figura 9: Efecto de la humedad en la temperatura del aire (Gradiente térmico a 20 de junio)

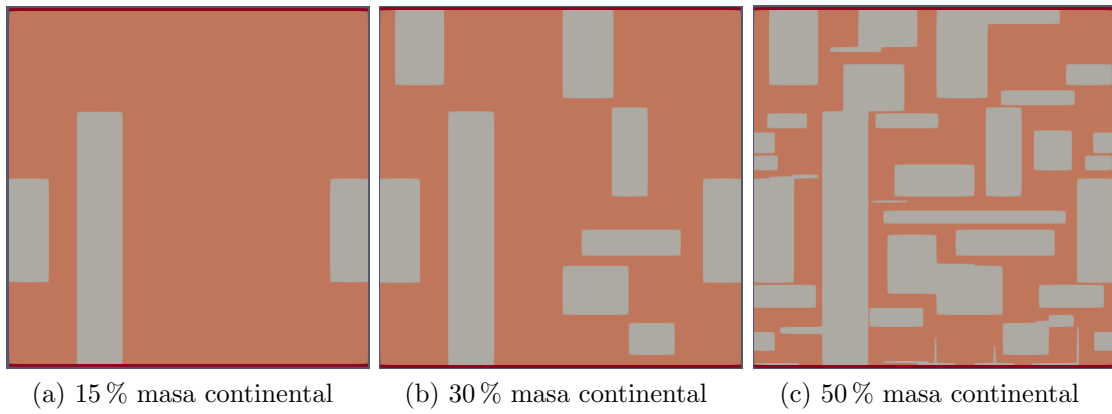


Figura 10: Distribución de continentes (gris)

polo para la concentración de CO_2 de 1958 y la de 2019. Esto se ve en la Figura 12.

No se aprecian diferencias entre ambas situaciones. Esto puede ser debido a que las consecuencias del aumento de CO_2 en la atmósfera no sean tan directas como se han planteado en el modelo. Por ejemplo, el aumento de la cantidad de CO_2 causa una acidificación de los océanos, y dado que el océano puede absorber mucho más carbono que la atmósfera (ver Anexo 7,4), donde la concentración es baja, esto puede alterar las propiedades del agua afectando el clima. En todo caso, parece claro que su efecto en el calor específico de la atmósfera es despreciable.

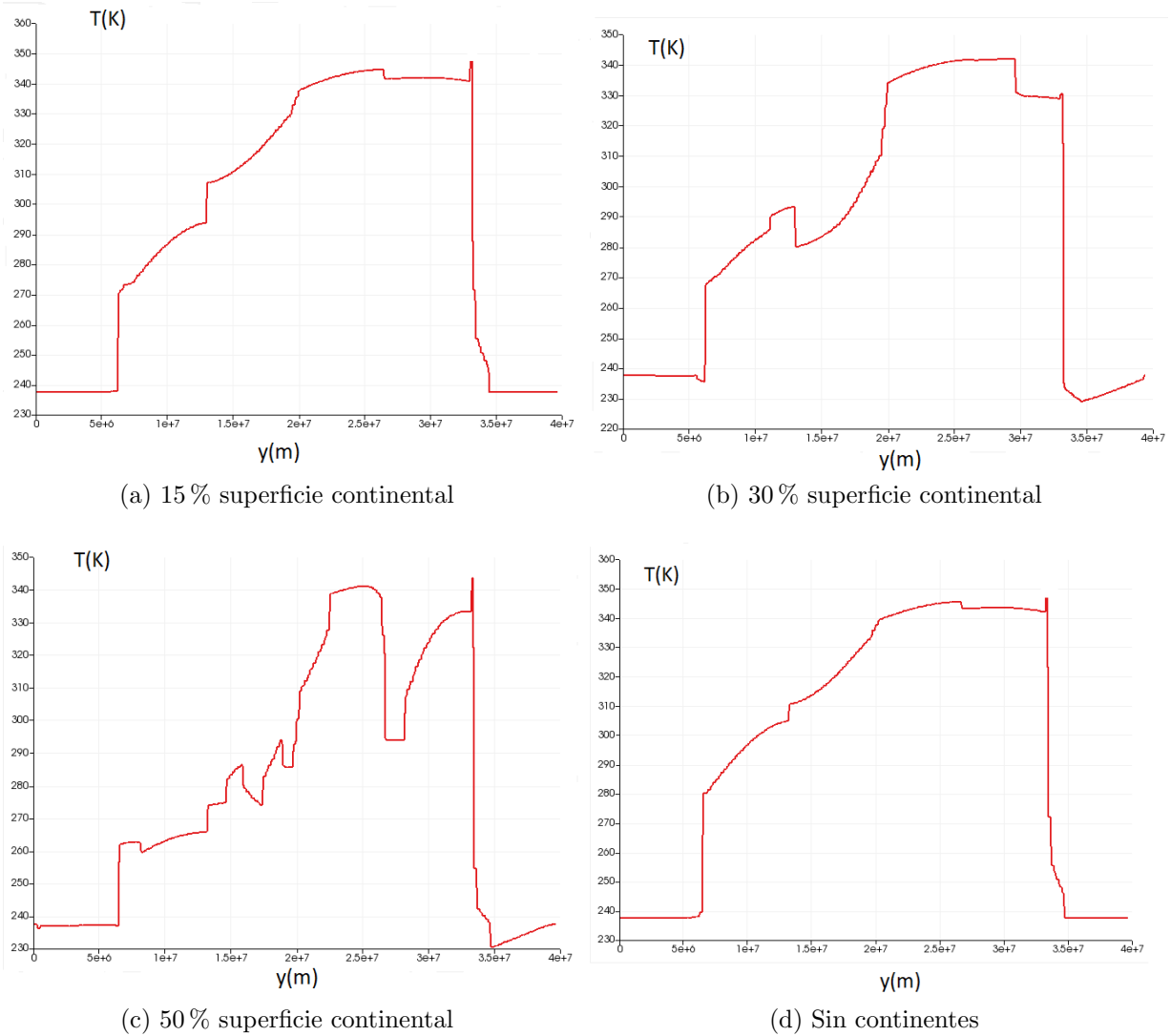


Figura 11: Efecto de los continentes (Gradiente térmico a 20 de junio)

5. Conclusiones

En este trabajo de fin de grado, se ha presentado un modelo climatológico que contiene los elementos fundamentales para simular la evolución del clima a escala planetaria. Se han tenido en cuenta términos radiativos, los efectos de la circulación atmosférica y oceánica, la formación de hielo, la humedad, el efecto del CO_2 atmosférico y como los continentes afectan a la circulación oceánica y a la absorción de radiación. La consideración de estos procesos nos ha servido para desarrollar un modelo básico de balance energético.

No obstante, ha resultado necesario realizar algunas simplificaciones a la hora de modelizar estos elementos. En primer lugar, debido a la discretización de la latitud, la radiación solar en las celdas más polares, con latitud $\pm \frac{\pi}{2}$, es nula. Como las celdas de los extremos siempre tienen estos valores para la latitud, si no se emplea un dominio lo suficientemente grande, esto provocará un enfriamiento severo del sistema, ya que habrá una parte significativa del dominio que no reciba radiación. También se considera un campo de velocidades

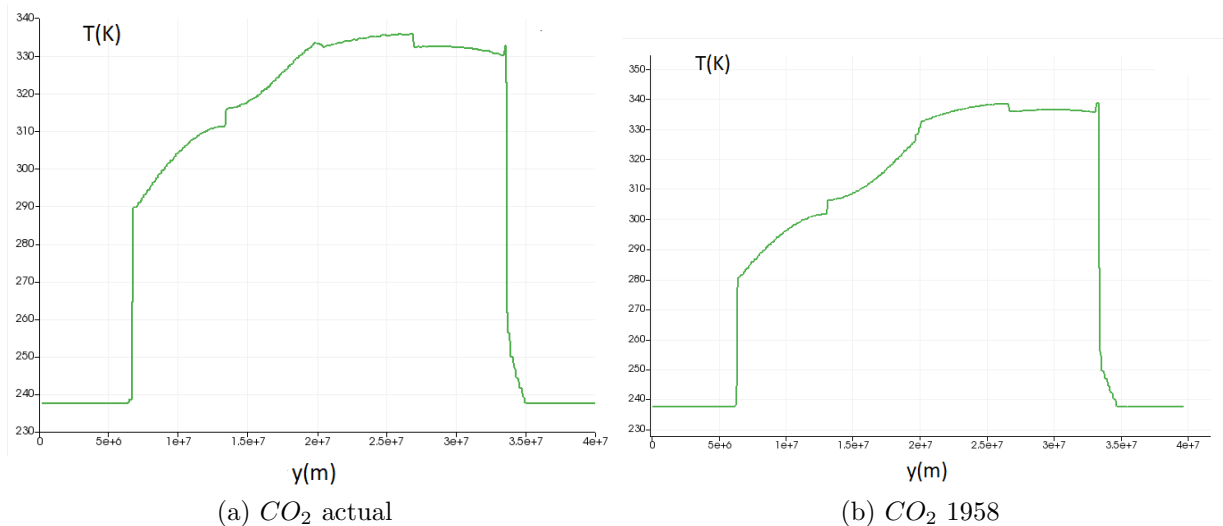


Figura 12: Efecto del CO_2 atmosférico en la temperatura del aire (Gradiente térmico a 20 de junio)

constante, esto es algo que no refleja la realidad, ya que, en un planeta real, el campo de velocidades, a pesar de tender a un estado estacionario, presenta muchas variaciones locales que pueden alterar este equilibrio. Tampoco se tiene en cuenta cómo la topografía altera los vientos. En cuanto a la humedad, se simula la evaporación y la condensación de agua, por lo que sus efectos están limitados a la modificación de variables como el calor específico y la densidad del aire, además de añadir un medio de intercambio de calor entre las distintas componentes del sistema.

Observando los resultados expuestos en la Sección 4, es notable que la temperatura del agua presenta valores muy altos (picos de 350K). Esta desviación de la realidad, pone de manifiesto la necesidad de modelizar con mayor precisión las corrientes oceánicas, considerando la dinámica oceánica a grandes profundidades con flujos hacia la superficie. Al modificar la concentración de CO_2 atmosférico en el rango de valores que se muestra en la Figura 13 no se aprecian diferencias sustanciales. Por tanto, se concluye, que para poder comprender la importancia del CO_2 es necesario modelizar el ciclo del carbono en su totalidad, como se explica en el Anexo 7.4, ya que este puede afectar la biosfera y las propiedades de los océanos. Por otro lado, los efectos de la humedad responden a lo esperado. La presencia de vapor de agua en la atmósfera causa una regulación térmica, como se observa en la Figura 9. Los continentes limitan la cantidad de energía que absorbe el sistema. También abren nuevas vías de circulación oceánica que, en general, dan lugar a un gradiente de temperaturas más suave.

Hay que tener en cuenta que en una situación real muchos de estos factores que se han analizado por separado podrían afectar conjuntamente. Por ejemplo, un derretimiento de los polos disminuiría la superficie continental al mismo tiempo que aumentaría la humedad de la atmósfera, por lo que habría cambios en la circulación oceánica y la absorbancia del planeta mientras que la humedad regularía la temperatura.

En conclusión, este trabajo ofrece un marco general con los componentes básicos de un

sistema climático. No obstante, dadas las limitaciones mencionadas, no permitiría hacer predicciones climatológicas fiables, pero si que podría servir como una buena base para el desarrollo de modelos más complejos.

6. Bibliografía

Referencias

- [1] Hugues Goosse. *Introduction to climate dynamics and climate modelling*. Université Catholique de Louvain, Belgium, August 2015.
- [2] Frank M.White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, 2008.
- [3] Frank H. Berkshire Tom W.B Kibble. *Classical Mechanics*. Imperial College Press, August 2004.
- [4] Jane B. Blizard. Encyclopedia of planetary science.
- [5] Mike Unsworth John Monteith. *Principles of Environmental Physics*. 2013.
- [6] Nicholas Metropolis. *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*. 1953.
- [7] David R. Dowling Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen. *Fluid Mechanics*. 2011.
- [8] UC San Diego. <https://keelingcurve.ucsd.edu/>, 2019.
- [9] Global Sailing weather. <http://www.globalsailingweather.com/>.
- [10] Curso geografía del mar. <http://www7.uc.cl/sweduc/geomar/html/h612.html>.

7. Anexos

7.1. Determinación de la constante solar

La radiación solar que recibe la atmósfera en $\frac{W}{m^2}$ viene dada por la ecuación 10, siendo S_0 una constante. Para determinar el valor de esta constante en la ecuación empleada, se integrará esta ecuación en nuestro dominio y a lo largo del tiempo (durante un año) y se hará coincidir con el promedio de la irradiancia solar global, extraído de la bibliografía. Para obtener este promedio, habrá que sumar la irradiancia que recibe la malla completa en cada instante de tiempo y dividirLA entre el número de celdas y los pasos de tiempo. Esto equivale a integrar a todos los usos horarios y la latitud a lo largo del tiempo. Quedará la siguiente expresión:

$$\sum_{t_k=0}^{t_f} \sum_{h_j=0}^{h_j=24h} \sum_{\phi_i=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r(t_k)}{r_m} (\sin(\phi_i)\sin(\delta(t_k)) + \cos(\phi_i)\cos(\delta)\cos(HA(h_j))) \right) \frac{1}{(N_{cells} \frac{t_f}{\Delta t})} \quad (65)$$

Se obtiene promedio anual de aproximadamente 0,2, y la irradiancia solar media es de $1300 \frac{W}{m^2}$, por lo que se deduce que S_0 debe estar en torno a $6500 \frac{W}{m^2}$.

7.2. Campo geostrófico

La dinámica atmosférica puede ser formulada a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, la ecuación de cantidad de movimiento en particular, relaciona las derivadas de la velocidad con las de la presión mediante:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \bar{g} + \bar{F}_{fric} - 2\bar{\omega} \times \bar{u} \quad (66)$$

el primer término de la derecha es el gradiente de la presión, el segundo la gravedad, el tercero corresponde a las fuerzas de fricción y el último es el término de Coriolis con $\bar{\omega}$ la velocidad de rotación de la Tierra. El término de la izquierda, es la derivada total de la velocidad respecto del tiempo, que podemos expresar como:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \quad (67)$$

Una buena aproximación para analizar la dinámica atmosférica a gran escala, es considerar que el gradiente horizontal de presión se compensa con el término de Coriolis, siendo ambos los términos dominantes de la ecuación. Desarrollando el término de Coriolis:

$$(2\bar{\omega} \times \bar{u})_x = -2\omega \sin(\gamma) u_y = -f u_y \quad (68)$$

$$(2\bar{\omega} \times \bar{u})_y = 2\omega \sin(\gamma) u_x = f u_x \quad (69)$$

$$(2\bar{\omega} \times \bar{u})_z = -2\omega \cos(\gamma)u_x \quad (70)$$

Donde γ es la colatitud. De esta forma el equilibrio geostrófico vendrá dado por:

$$-fu_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (71)$$

$$fu_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (72)$$

de las ecuaciones (7.1) a (72) se deduce que el campo geostrófico dependerá del gradiente horizontal de presión.[7]

7.3. Presión de vapor de saturación: ecuación de Clausius Clayperon

Representando la evaporación del agua como una expansión isoterma desde una presión ficticia(p_0) muy elevada a un volumen mucho mayor, con el trabajo realizado el calor latente de vaporización:

$$L_v = \int_{p_0}^{p_s(T)} pdV \quad (73)$$

diferenciando la ecuación de los gases ideales en una isoterma:

$$pdV + Vdp = 0 \quad (74)$$

aplicando la ecuación de los gases ideales al segundo término de la ecuación (74) y convirtiendo moles a masa:

$$pdV = -\frac{RT}{m_m(H_2O)P}dP \quad (75)$$

siendo $m_m(H_2O)$ la masa molar del agua.

$$L_v = -\frac{RT}{m_m(H_2O)} \int_{P_0}^{P_s(T)} \frac{dP}{P} = \frac{RT}{m_m(H_2O)} \ln\left(\frac{P_0}{P_s(T)}\right) \quad (76)$$

despejando se obtiene una dependencia de la presión de vapor de saturación con la temperatura de la forma:

$$p_s(T) = p_0 \exp\left(-\frac{m_m(H_2O)L_v}{RT}\right) \quad (77)$$

la constante p_0 podemos determinarla a partir de la presión de vapor de saturación para una temperatura determinada, usando que para 293K la presión de vapor de saturación es de 0.023 atm obtenemos $p_0 = 2718,16Pa$. [5]

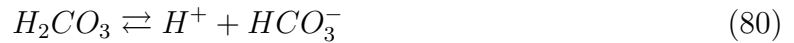
7.4. Ciclo del carbono

Veamos el intercambio de CO_2 con los océanos. El flujo de CO_2 del océano a la atmósfera viene dado por la ecuación:

$$F = \rho C_F U (M_s - M_{atm}) \quad (78)$$

donde ρ es la densidad del aire C_F es el coeficiente de transferencia, que es adimensional y M es la concentración de CO_2 . El subíndice s se refiere a la superficie y atm a la atmósfera.

No obstante, el CO_2 en el oceano puede disolverse en distintos componentes según las reacciones:



los compuestos de las ecuaciones (79) y (81) son denominados como carbono inorgánico en disolución. Debido a que el carbono se disuelve, el océano podrá almacenar una cantidad de carbono mucho mayor que la atmósfera. Los coeficientes de solubilidad de estas reacciones dependen de la temperatura y de la alcalinidad del agua, por lo tanto estos factores influirán a la hora de calcular el carbono gaseoso presente en el agua.

Por otro lado, el suelo absorbe una gran cantidad de CO_2 de la atmósfera a través de la fotosíntesis. Este CO_2 es devuelto a la atmósfera por procesos como la respiración, la descomposición de materia orgánica y el fuego. No obstante, el tiempo que tarda en regresar a la atmósfera esta sujeto a una gran variedad de procesos complejos.[1]

7.5. Figuras y Tablas

vientos	$v_x(\frac{m}{s})$	$v_y(\frac{m}{s})$
Vientos del norte y del sur	7.95	7.95
Vientos del oeste	7.5	7.5
Vientos Polares	15.7	15.7

Tabla 1: Corrientes atmosféricas [9].

corrientes oceanicas	$v_x(\frac{m}{s})$	$v_y(\frac{m}{s})$
Corriente ecuatorial	0.14	0.14
Corriente limítrofe occidental	0.7	0.7
Corriente circumpolar	0.14	0.14

Tabla 2: Corrientes oceanicas [10].

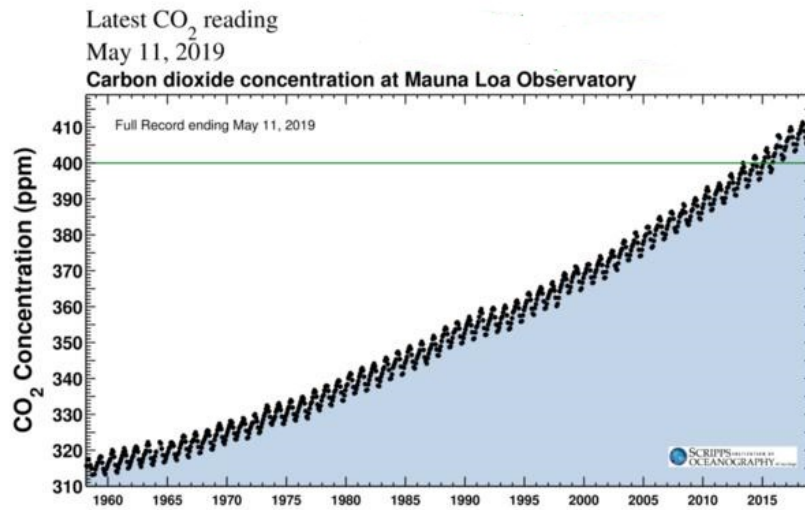


Figura 13: Evolución del CO_2 atmosférico [8].