



**Universidad Zaragoza**

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA  
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

---

# Tomografía con muones

---

*Autor:*

ENEKO LANSAQUE VIVANCO

*Directores:*

DR. JAVIER GALÁN LACARRA Y  
DRA. THEOPISTI DAFNI

*Esta tesis cumple con los requisitos  
para el grado de Física*



Departamento de física teórica  
Universidad de Zaragoza - Facultad de Ciencias

23 de agosto de 2021

# Índice

<b>1. Objetivos</b>	<b>2</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>3. Principios de la tomografía con muones</b>	<b>3</b>
3.1. Métodos de observación . . . . .	3
3.1.1. Telescopio de desviación . . . . .	4
3.1.2. Telescopio de absorción . . . . .	4
3.2. Tecnologías de detección . . . . .	5
3.3. Aplicaciones prácticas . . . . .	6
<b>4. Metodología</b>	<b>8</b>
4.1. Simulaciones en Geant4 . . . . .	8
4.1.1. Generación de muones “realistas” . . . . .	9
4.2. Técnicas de reconstrucción de imágenes . . . . .	10
<b>5. Estudios de un telescopio de desviación</b>	<b>11</b>
5.1. Verificación del principio de detección del telescopio de desviación . . . . .	11
5.2. Verificación de la Teoría de Molière . . . . .	13
5.3. Detección de un objeto denso con un telescopio de desviación . . . . .	14
5.3.1. Simulación con muones monoenergéticos . . . . .	16
5.3.2. Simulación con muones con distribución energética realista . . . . .	17
5.3.3. Simulación con distribución energética y angular realista . . . . .	18
5.3.4. Simulación con un camión de dimensiones realistas . . . . .	20
<b>6. Estudios de un telescopio de absorción</b>	<b>22</b>
6.1. Simulación con ángulo fijo perpendicular a los detectores . . . . .	22
6.2. Simulación con distribución angular realista . . . . .	23
<b>7. Conclusiones</b>	<b>25</b>

# 1. Objetivos

En este trabajo se presentará la tomografía con muones como método de obtención de imágenes. Se expondrán sus ventajas con respecto a otras técnicas actuales y los retos que entraña ponerla en práctica. También se comprobarán los principios de detección de diferentes técnicas de tomografía de muones con un software de simulación de partículas. Esto permitirá trabajar con datos similares a los obtenidos empleando detectores reales. De esta forma se podrá profundizar en estas técnicas de detección de forma realista y con total flexibilidad.

# 2. Introducción

Entender qué es la tomografía con muones nos plantea inmediatamente dos cuestiones: qué es la tomografía y qué son los muones.

La tomografía es la técnica de exploración que consiste en obtener imágenes de un corte o plano. Estas pueden ser luego empleadas para la reconstrucción tridimensional del objeto a estudiar. En general, estas imágenes son tomadas aprovechando que las partículas y radiaciones atraviesan los materiales de forma diferente según la densidad, número atómico u otra propiedad de estos últimos. Entre las partículas empleadas en esta técnica destacan las gamma, empleadas en medicina por ejemplo en el TAC (Tomografía Axial Computarizada), la SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography); los positrones que se emplean en la PET (Positron Emission Tomography) y los neutrones que resultan de espacial interés en el estudio de materiales con altos contenidos de carbono (fósiles o restos de seres vivos).

En el caso que nos ocupa, las partículas empleadas para la toma de imágenes son los muones. Deben su nombre a la letra griega  $\mu$  y son partículas elementales pertenecientes al grupo de los leptones. Fueron la primera partícula elemental descubierta que no pertenece al átomo, cuando en 1936 Carl Anderson y Seth Neddermeyer observaron en su cámara de niebla, durante un estudio de rayos cósmicos, una partícula que dejaba una traza que describía una curvatura intermedia entre el electrón y el protón al atravesar un campo electromagnético.

Los muones no son los componentes originarios de estos rayos procedentes del espacio, sino que se producen como consecuencia del decaimiento de otras partículas. Cuando los rayos cósmicos, compuestos en su mayoría por protones y partículas alfa, entran en la atmósfera, interactúan con los átomos produciendo diferentes mesones y bariones. Serán estas partículas las que al decaer y desintegrarse podrán dar lugar a los muones que emplearemos en nuestros experimentos. Las principales desintegraciones que producirán muones serán las de piones y kaones (ambos mesones) cargados:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \qquad K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \qquad (1)$$

Además, las propiedades de los muones les hacen capaces de sobrevivir a su viaje por la atmósfera con una alta probabilidad. Esto se debe principalmente a:

- Tener una masa grande en comparación con la del electrón ( $\approx 207m_e$ ) les hace perder mucha menos energía por Bremsstrahlung al ser esta inversamente proporcional a la masa al cuadrado. Esto hará que su vida media sea mayor que la de otras partículas inestables.
- Su vida media relativamente larga ( $\approx 2'2\mu s$ ) junto a su alta energía y la dilatación temporal dada por la relatividad especial que le dan una distancia media de decaimiento suficientemente larga para ser observados en la superficie terrestre.

Serán estos muones provenientes de los rayos cósmicos los que se emplearán en los experimentos de detección, ya que, a pesar de que es posible y habitual producirlos de forma artificial en aceleradores de partículas, nos ahorrará el equipo, gasto, personal y mantenimiento necesario para hacerlo. Además, estos muones naturales cuentan con un amplio espectro energético que posibilita que se empleen para sistemas de tamaños y densidades muy diferentes.

### 3. Principios de la tomografía con muones

La tomografía con muones nos proporciona una serie de ventajas con respecto al uso de otras partículas o radiaciones:

- Los muones son capaces de atravesar grandes cantidades de materia. Esto nos permite emplearlos para analizar estructuras como pirámides, donde deben atravesar bloques de granito de metros de grosor o elementos ambientales, como volcanes.
- Los muones son partículas seguras que no dañan el objeto de estudio ni a las personas que lo quieren estudiar, se trata de una técnica no invasiva.
- Así como otras partículas necesitan de un generador, con los muones no hace falta producirlos artificialmente, ya que los rayos cósmicos son una fuente natural suficientemente eficiente. Además su flujo es muy estable y está muy bien caracterizado.

Sin embargo, el uso de estas partículas también entraña una serie de retos no fáciles de solventar:

- Que los muones no interaccionen mucho con la materia hace que las diferencias en el ángulo de scattering, parámetro clave para la tomografía, sean muy sutiles, especialmente para materiales con  $Z$  bajos. Esto hace que la resolución angular de nuestros detectores sea muy importante y un limitante en nuestras medidas.
- Tomar los muones producidos naturalmente no nos permite controlar su flujo. El flujo natural a nivel del mar es de 125 muones  $/(m^2s)$  [1], el cual, al no ser especialmente grande, nos obliga a tener superficies de detección grandes o a emplear tiempos de exposición muy elevados. Como tampoco podemos controlar la energía de los muones incidentes (su energía sigue la distribución de la figura 6) ni su ángulo con la normal a la superficie terrestre (siguen una distribución  $\cos^2$ ) habrá muones que no podamos aprovechar porque no se ajustan a nuestras necesidades. Por ejemplo, muones demasiado energéticos atravesarán el objeto que queremos estudiar con un ángulo de scattering demasiado pequeño.

#### 3.1. Métodos de observación

La tomografía con muones se basa en dos principios de los cuales nacen dos tipos diferentes de métodos de observación: el telescopio de desviación y el telescopio de absorción. En este apartado explicaremos los principios en los que se basan y más adelante en el trabajo (secciones 5 y 6) los verificaremos empleando el paquete de simulación restG4, que se encuentra dentro de las herramientas de software de REST-for-Physics [2], para lanzar simulaciones que reproduzcan los resultados del trabajo [3]. De esta forma comprobaremos la validez de las simulaciones realizadas y propondremos posibles aplicaciones basándonos en los resultados obtenidos.

### 3.1.1. Telescopio de desviación

En este telescopio se mide el ángulo de scattering de los muones que atraviesan la muestra para obtener información sobre el material que la forma. Para ello es necesario hacer una reconstrucción de la trayectoria del muon antes y después de atravesar la muestra, por lo tanto, se necesitan dos equipos de detectores (figura 1).

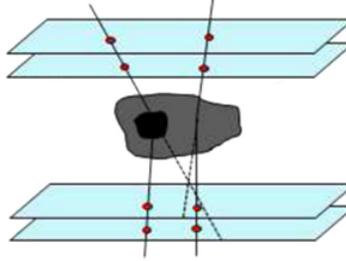


Figura 1: Geometría de un detector de desviación. En el centro se encuentra el objeto de estudio y tanto encima como debajo las dos parejas de detectores que registrarán la posición del muon a su paso. En rojo aparece la energía depositada en los detectores que nos permitirá reconstruir la trayectoria de los muones. En negro aparece una zona de densidad especialmente alta que detectaríamos al reconstruir la trayectoria de los muones con ángulos de scattering particularmente alto (imagen obtenida de la referencia [4]).

Este ángulo de scattering para múltiples colisiones viene descrito por la Teoría de Molière, y su distribución se ajusta a una gaussiana con desviación estándar:

$$\sigma = \frac{13,6 \text{ MeV}}{\beta c p} \sqrt{\frac{x}{X_0}} (1 + 0,038 \ln(x/X_0)) \quad (2)$$

Donde  $\beta$  es el factor relativista,  $c$  es la velocidad de la luz,  $p$  es el momento del muon,  $x$  es el espesor del bloque de material y  $X_0$  es la longitud de radiación descrita por la siguiente expresión:

$$X_0 \approx \frac{716,4 \text{ g/cm}^2}{\rho} \frac{A}{Z(Z+1) \ln(287/\sqrt{Z})} \quad (3)$$

Donde  $\rho$  es la densidad del material,  $A$  es el número másico y  $Z$  el número atómico [3].

Este telescopio estará limitado por el tamaño de los detectores, ya que la muestra que queremos estudiar debe quedar completamente entre la superficie de los mismos. Además, en este telescopio la resolución espacial de los detectores es muy importante, ya que será necesario poder diferenciar ángulos de scattering muy pequeños para discriminar objetos de densidades diferentes. Por otro lado, como con este método se conoce la trayectoria del muon antes y después de atravesar la muestra, se tiene más información y el tiempo de exposición será mucho menor que en telescopio de absorción que estudiaremos en la siguiente sección del trabajo. Esto abre la puerta a la posibilidad de emplear estos detectores para la inspección en aduanas de contrabando de materiales con potencial uso nuclear [5], como exploraremos en la sección 5.3.4.

### 3.1.2. Telescopio de absorción

Los muones no siempre son capaces de atravesar la materia debido a la energía que pierden al interactuar con la misma. La probabilidad de atravesar un bloque de un determinado material

dependerá principalmente de su densidad y espesor y de la energía del muon [3]. Con este telescopio se aprovecha la variedad de energías que pueden presentar los muones producidos por los rayos cósmicos, ya que de esta forma podremos tener algunos con energías suficientes para atravesar nuestro material pero no hacerlo siempre y así emplear esta información para su identificación. Como dependemos de tener eventos con un rango de energía concreto y de que el muon sea absorbido por el material, lo cual no sucederá siempre, este telescopio necesita mucha más estadística que el de desviación y por lo tanto mucho más tiempo de exposición. Por esto se emplea en estudios en los que el tiempo no es limitante y se pueden recolectar datos durante días, como veremos en la sección 3.3.

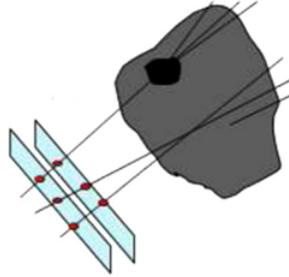


Figura 2: Geometría de un telescopio de absorción. Los muones atraviesan el objeto de estudio para llegar después a los detectores. En negro aparece una zona de densidad especialmente alta que detectaríamos como una falta de eventos registrada en los detectores al reconstruir la imagen (imagen obtenida de la referencia [4]).

### 3.2. Tecnologías de detección

El aspecto experimental más importante será la capacidad de detectar los muones cósmicos. Tendremos tres clases de montaje y deberemos elegir cuál es el más oportuno para nuestro caso en función de sus características:

- Centelleadores plásticos: Un material centelleador emitirá un fotón debido a la excitación y posterior desexcitación de uno de sus átomos provocada por el paso del muon. Este fotón atraviesa un fotomultiplicador donde se traduce a señal electrónica gracias al efecto fotoeléctrico y se amplía. Como este proceso depende de la longitud de onda del fotón, podemos emplear fibras WLS (Wave Length Shifting) que son capaces de absorber ese primer fotón y reemitirlo con una longitud de onda más adecuada.

Los centelleadores son una tecnología con mucha historia en la detección de partículas. Se llevan usando desde el principio del siglo XX. A su favor tenemos que son fáciles construir, resistentes, baratos y bastante insensibles a las condiciones ambientales. Sin embargo, tienen una resolución espacial limitada del orden del milímetro para el caso típico.

- Emulsiones nucleares: El funcionamiento de este tipo de detectores es similar al de la fotografía analógica. El paso del muon a través de la emulsión altera su composición apareciendo una traza que podemos observar. Alternar las capas de emulsiones con capas de plomo o hierro permiten separar las trazas de muones con alta y baja energía, así como diferenciarlos de los electrones.

Su principal ventaja es que no necesita una fuente de energía externa para funcionar, por lo que es ideal en las situaciones en las que no se tiene acceso a una. Por otra parte no tiene una gran autonomía, ya que la vida media de las emulsiones en de unos meses y las condiciones de humedad y temperatura afectan considerablemente a su rendimiento por lo que sigue necesitando atención y mantenimiento. Además el análisis y reconstrucción de las trazas registradas solo se puede hacer una vez terminada la exposición y es un proceso lento, por lo que esta tecnología no se puede emplear en contextos donde sean necesarios resultados más inmediatos. Tampoco se puede emplear para monitorizar estructuras u objetos ya que no ofrece información sobre el momento concreto durante el tiempo de exposición en el que se registra la traza.

- Detectores gaseosos: En estos detectores el muon interacciona con una mezcla de gases ionizando los átomos a su paso. Aplicando un campo eléctrico apropiado los electrones se desplazarán hacia el ánodo acelerándose y por tanto provocando más ionizaciones en el medio. Cerca del ánodo se aplica un campo mayor que provoca una avalancha de cargas que será la señal recogida y procesada por nuestra electrónica.

La principal ventaja de estos detectores es que consiguen una resolución espacial de unos cientos de micras (diez veces mejor que con los centelleadores) sin volverse especialmente caros. Además, a diferencia de las emulsiones, permiten tomar medidas a tiempo real y por tanto hacer trabajos de monitorización. No obstante, la amplificación de las cargas depende mucho de las condiciones físicas (temperatura y presión) del gas, por lo que las condiciones ambientales afectan al rendimiento de este tipo de detectores. Por esto es necesario controlar los voltajes aplicados.

Por último merece la pena mencionar las TPC (Time Projection Chamber). Su propiedad más importante es que pueden detectar muones en un ángulo sólido de  $2\pi$  y con una resolución prácticamente isótropa. Además son capaces de rechazar medidas de fondo como electrones o muones de baja energía. Detectores con estas características serán los empleados en las simulaciones de este trabajo.

### 3.3. Aplicaciones prácticas

Dadas las características de la tomografía con muones resulta particularmente interesante en aplicaciones como:

- Vulcanología: Experimentos en Japón a finales del siglo XX comprobaron que se podía emplear esta tecnología para complementar a las más convencionales medidas de gravimetría y resistividad [6]. Experimentos más recientes establecen una correlación entre la variación del flujo de muones medidos en determinadas zonas de un volcán y un aumento de la actividad en la superficie (aparición de fumarolas y movimiento de magma) [7, 8]. De esta forma la tomografía con muones no solo serviría para estudiar la topología del volcán, sino que monitorizar permanentemente el flujo de muones podría ayudar a prever erupciones y otros desastres naturales. En la figura 3 se puede ver cómo se llevaría a cabo el estudio con un telescopio de absorción. Un esquema similar es aplicable al estudio de grandes estructuras como en las aplicaciones arqueológicas.

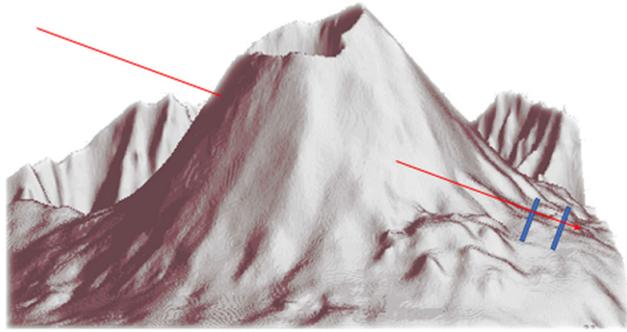
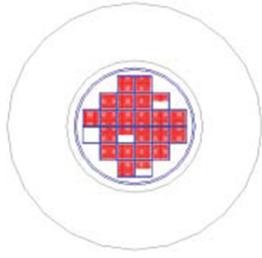
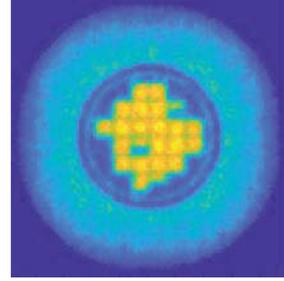


Figura 3: Representación del estudio de un volcán empleando un telescopio de absorción. En azul, los detectores (no a escala) y en rojo la trayectoria de un muon (imagen obtenida de la referencia [9]).

- **Arqueología:** En este campo son de particular interés las propiedades no invasivas de los muones que garantizan no dañar los objetos o estructuras que se estudian. Cabe destacar el experimento llevado a cabo en la Gran Pirámide de Guiza (también conocida como Pirámide de Keops) [10]. En él se estudió la estructura de la pirámide empleando un telescopio de absorción. El análisis del flujo de muones permitió encontrar un gran vacío en la construcción que se identificó como el descubrimiento de una nueva galería. El principio de desviación también es útil para estudiar objetos de menos tamaño, por ejemplo estudiar la estructura interna de una estatua, lo que puede ayudar a datarla y facilitar los trabajos de restauración.
- **Seguridad en aduanas:** La capacidad de la tomografía con muones de detectar materiales con alto  $Z$  la convierte en una tecnología excepcional para frenar el contrabando de materiales nucleares como el uranio [5]. Además, al no emplear fuentes de radiación peligrosas, facilita su implementación en los puestos de aduanas y evita dañar a personas que viajen ocultas de forma ilegal en los transportes que se analizan. Trataremos de explorar la viabilidad de esta aplicación más adelante en nuestro trabajo (sección 5.3.4).
- **Exploración de residuos y reactores nucleares:** La mayoría de residuos nucleares se almacenan en bidones que se rellenan además con cemento o algún recubrimiento metálico para minimizar la radiación emitida al exterior y evitar fugas. Estos recubrimientos impiden analizar los residuos empleando neutrones o fuentes gamma. Es por eso que los muones podrían emplearse para monitorizar el estado de los residuos y prevenir fugas. También serían útiles para estudiar residuos de los que no se tenga una descripción precisa para determinar cómo deben ser tratados. Si bien se necesita una buena precisión en la imagen, no sería problema ya que se contaría con tiempos de exposición mucho más largos que en los puestos de aduanas, por ejemplo. La exploración de un reactor nuclear empleando un telescopio de transmisión se ha llevado a cabo en Fukushima para comprobar el estado del combustible nuclear que podría quedar en su interior [11]. Estudiar el estado de los reactores podría ayudar en el momento del desmantelamiento de centrales nucleares que ya no estén en funcionamiento. En el artículo [12] se emplea la herramienta de software Geant4, igual que en este trabajo, para simular la identificación del estado de un barril de residuos nucleares empleando un telescopio de desviación (figura 4).



(a) Geometría creada con Geant4 del bidón.



(b) Resultado obtenido de la simulación

Figura 4: En la figura a) se puede ver la geometría del bidón con las barras de residuos nucleares en el interior. Algunas de estas se han deteriorado y por tanto sus huecos están solo medio llenos. En la figura b) se ve el resultado de la reconstrucción de la imagen de los resultados obtenidos en la simulación. Se logra con éxito identificar los huecos.

- Exploración de subterráneos: A pesar del inconveniente de necesitar acceso a algún lugar inferior a la estructura que queremos observar, los muones se usan en la actualidad en explotaciones mineras para detectar la presencia de menas y materiales pesados como uranio, plomo u oro.
- Ingeniería civil: Los muones cósmicos son capaces de atravesar hasta cien metros de cemento. Esto permite emplearlos para obtener imágenes del interior de estructuras civiles, como puentes o vigas de grandes edificios, para comprobar el estado de los mismos y su necesidad de mantenimiento. En el artículo [13] se estudia la posibilidad de emplear la tomografía con muones para identificar el estado de la estructura metálica del hormigón armado de estructuras civiles.

## 4. Metodología

En este trabajo hemos estudiado en profundidad, a través de simulaciones de Monte Carlo, las dos técnicas principales de tomografía con muones: absorción y desviación. Para ello hemos empleado el software de Geant4 y hemos desarrollado varios algoritmos que nos ayudarán en la reconstrucción de las trayectorias de los muones y en la representación de los resultados obtenidos.

### 4.1. Simulaciones en Geant4

Para comprobar estos principios y estudiar la viabilidad de emplear estas partículas en la detección de objetos densos, hemos realizado diferentes simulaciones empleando el entorno REST [14] (Rare Event Searches with TPCs), un software desarrollado por la Universidad de Zaragoza, el centro de investigación francés CEA Saclay y la Shanghai Jiao Tong University. Emplea el lenguaje de programación C++ y combina las herramientas Geant4 y ROOT. Geant4 se trata de una plataforma informática diseñada para la simulación de detectores y el estudio de numerosos procesos físicos, derivados de la interacción de las partículas elementales con la materia. Por su parte, ROOT consiste en un software, nacido en el CERN, que proporciona las funcionalidades necesarias para el procesamiento de big data, análisis estadístico, visualización y almacenamiento [15].

En este trabajo hemos utilizado restG4, un código basado en Geant4 capaz de escribir sus resultados utilizando las librerías de ROOT y REST, y definir las condiciones de la simulación a

través del sistema de configuración de REST (a partir de la clase C++ TRestG4Metadata). Su uso necesita de la existencia de dos ficheros de entrada. Por un lado, un fichero GDML (Geometry Description Markup Language) basado en XML, que además de describir la geometría del detector (figura 5), proporciona un formato de intercambio de datos [16]. Por otro lado, un fichero RML en el que se incluyen las condiciones de la simulación. Entre otros parámetros de la simulación, en este fichero elegiremos el número de eventos que se lanzarán, qué tipo de generador de partículas empleamos (elegimos si desde un punto, una superficie o incluso un volumen), qué volúmenes de nuestra geometría tomamos como activos, es decir, de cuáles se recogerá información durante la simulación, por ejemplo en qué posición un muon ha depositado energía (en nuestra simulación las placas detectoras serán volúmenes activos), y qué volumen tomamos como “sensitive volume”, que implica que el evento solo es guardado si se produce un registro en este volumen (en nuestras simulaciones este volumen será el detector más inferior, ya que de esta forma nos aseguramos de que el muon haya atravesado todos los detectores). Tras el lanzamiento de la misma, la información de los eventos registrados en el volumen sensible se almacenan en forma de TRestG4Event. A su vez, estos datos se recogen dentro de un archivo ROOT, generado automáticamente mediante restG4. Este archivo de salida se puede estudiar empleando macros, programas en lenguaje C++ que trabajan con ROOT. Gracias a ellos podemos analizar el ángulo de scattering de todos los muones registrados en la simulación, la energía media, la posición de los muones a su paso y otros parámetros que puedan resultar de interés para nuestros propósitos.

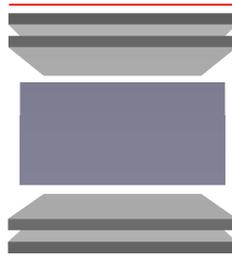


Figura 5: Geometría de un detector de desviación creada con Geant4. La línea roja superior correspondería a la superficie desde la que se lanzarían los muones. Arriba y abajo tenemos los detectores, que serían los volúmenes activos, y en el centro el objeto de estudio.

#### 4.1.1. Generación de muones “realistas”

Cuando en este trabajo se haga referencia a una distribución angular o de energía para los muones empleados en las simulaciones, las distribuciones que seguirán serán las que aparecen en la figura 6 [1]. El ángulo de los muones con respecto a la normal sigue una distribución  $\cos^2(\theta)$ , donde  $\theta$  es el ángulo formado con la normal a la superficie terrestre, por lo que la mayoría de muones estarán cerca de ser perpendiculares a la superficie terrestre. La energía de los muones estará entre los 0 y 20 GeV con un valor medio de unos 3 GeV.

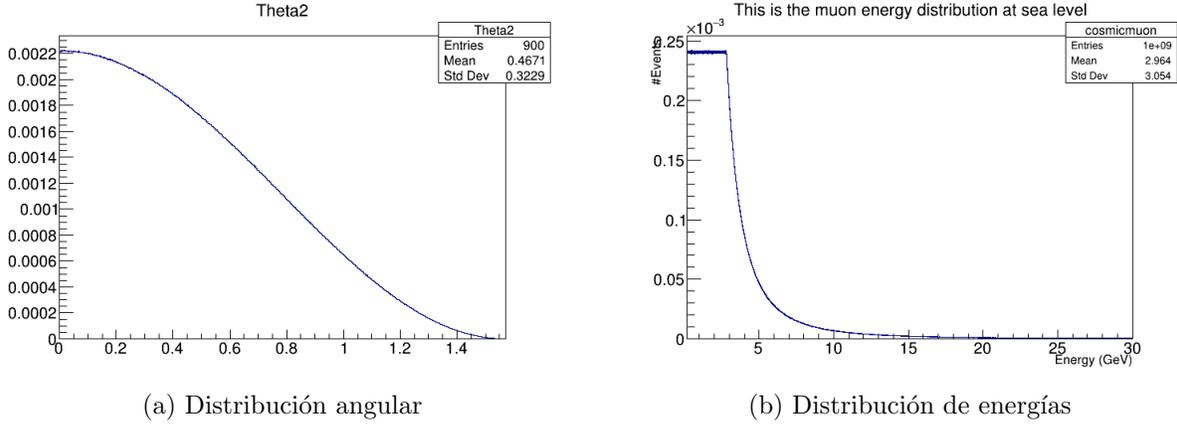


Figura 6: Distribuciones angular (a) y de energía (b) de los muones en nuestra simulación.

## 4.2. Técnicas de reconstrucción de imágenes

En las simulaciones de este trabajo los resultados obtenidos serán las posiciones medias de la energía depositada por los muones en los detectores. A partir de estos puntos deberemos reconstruir la trayectoria seguida por el muon, calcular su ángulo de scattering (en el telescopio de desviación), obtener la posición en la que el muon ha sufrido este scattering y representar esta posición en un plot bidimensional.

Más adelante en nuestro trabajo, en el estudio del telescopio de desviación (sección 5), tendremos que calcular el ángulo de scattering de los muones que lleguen a nuestro detector. En este telescopio tenemos la trayectoria del muon antes y después de atravesar nuestra muestra. Para obtener el ángulo de scattering calculamos el ángulo con respecto a la normal de cada trayectoria y calculamos la diferencia. Además del ángulo de scattering, tendremos que encontrar el punto más próximo entre dos rectas que no se cortan para determinar la posición del punto donde el muon ha sufrido el scattering a partir de la trayectoria del muon antes y después de atravesar el sistema. Se puede ver un ejemplo gráfico en la figura 7.

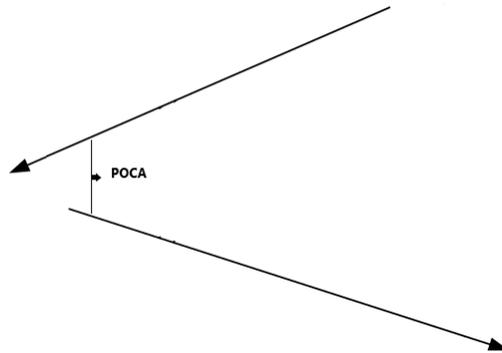


Figura 7: Para encontrar el POCA tomamos el punto medio de la recta que más corta que une las dos trayectorias.

En el telescopio de absorción se registra el paso de cada muon por varios detectores y a partir

de esas posiciones se debe reconstruir la trayectoria. Para ello he implementado un algoritmo que es capaz de reconstruir una recta en tres dimensiones (la trayectoria del muon) a partir de varios puntos (las posiciones medias registradas en los detectores).

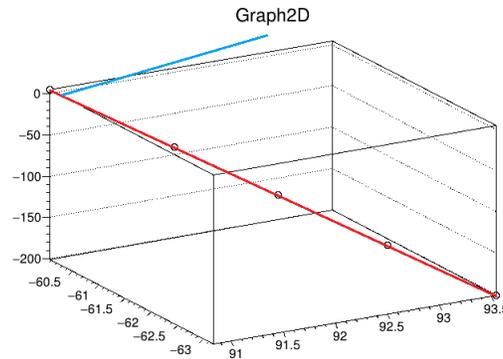


Figura 8: Ejemplo de la reconstrucción de una recta a partir de 5 puntos. La recta azul es la primera propuesta que se va optimizando hasta llegar a la recta roja, que es la recta que más cerca está de atravesar los 5 puntos encontrada por el algoritmo.

Por último, tanto en el telescopio de desviación como en el de absorción, representaremos en un histograma bidimensional las posiciones obtenidas de la reconstrucción de las trayectorias los muones. De esta forma podremos comprobar de forma visual una densidad de eventos superior o inferior a la de su entorno, que nos indicará la presencia de un objeto particularmente denso. A este histograma lo llamaremos Hit Map.

## 5. Estudios de un telescopio de desviación

En esta sección vamos a realizar una serie de simulaciones para verificar lo expuesto sobre el telescopio de desviación en la sección 3.1.1. Después, con la intención de comprobar la eficacia de este telescopio detectando materiales densos, llevaremos a cabo simulaciones progresivamente más realistas para acabar analizando un montaje similar al que se podría implementar en una aduana.

### 5.1. Verificación del principio de detección del telescopio de desviación

Para comprobar que es posible discriminar distintos materiales midiendo su ángulo de scattering (sección 4.2), hemos empleado el software de restG4 para lanzar cuatro simulaciones con distintos materiales con muones con energía constante (1 GeV). Lanzamos 10.000 muones con dirección perpendicular a una placa de material de 50 mm de espesor. Hemos empleado agua y U, ya que son dos materiales con número atómico muy diferente y que generarán mucho contraste. Además, más adelante en el trabajo, trataremos de encontrar un bloque de uranio sumergido en agua, por lo que es interesante comprobar que sus ángulos de scattering son distinguibles. Hemos añadido también el Al como material con Z intermedio y que también participará en nuestras simulaciones y el Pb, que es un material denso y con Z alto, para comprobar que aún así se puede distinguir del uranio.

Vemos en la gráfica 9 cómo los histogramas de los distintos materiales son distinguibles, así como aumenta el valor medio del ángulo de scattering conforme los materiales son más densos y tienen un mayor Z. Ahora, con la intención de comprobar la dependencia con la energía del ángulo de scattering, lanzamos 4 simulaciones en las que los muones se lanzan de forma perpendicular hacia el mismo bloque de uranio, pero en cada una los 10000 muones tienen una energía diferente.

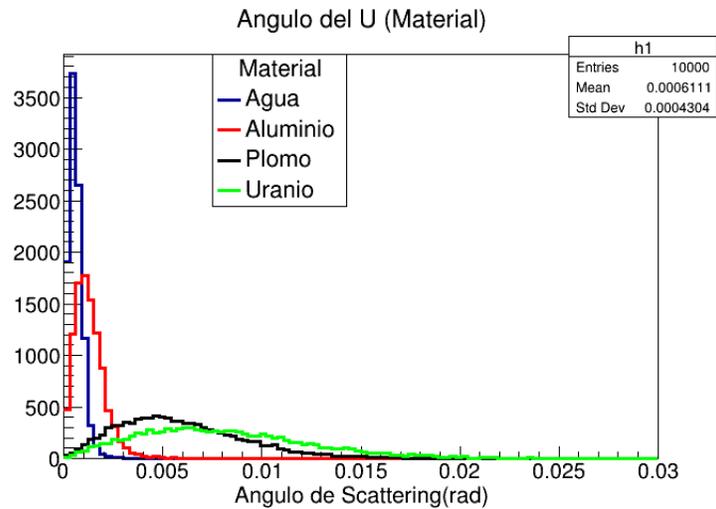


Figura 9: Ángulo de scattering para distintos materiales a energía constante (1 GeV). El agua que tiene el Z más abajo tiene el ángulo de scattering medio menor. El uranio, que tiene un Z mucho mayor, tiene un ángulo de scattering medio mucho mayor.

En la figura 10 vemos cómo cuanto mayor es la energía menos se desvían de media los muones al atravesar el uranio. Esto es importante comprobarlo, ya que los muones que proceden de los rayos cósmicos tendrán diferentes energías y esto afectará a los resultados.

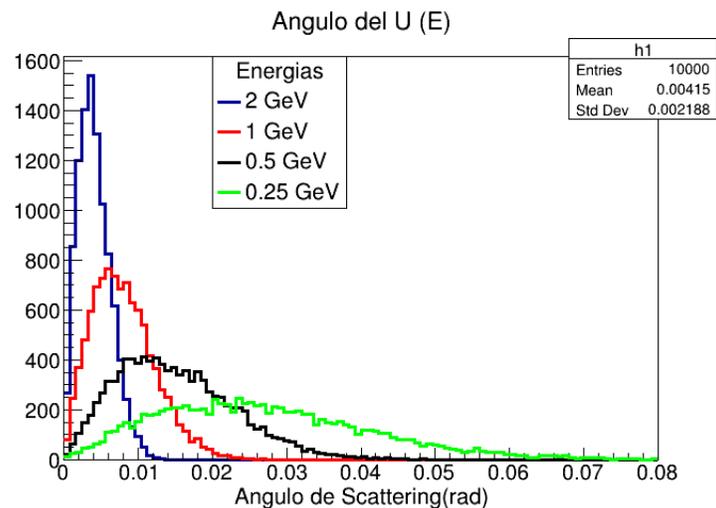


Figura 10: Ángulo de scattering para muones de distintas energías que atraviesan el mismo bloque de uranio. Cuanto mayor es la energía menor es el ángulo medio.

También lanzamos 4 simulaciones en las que los muones tienen la misma energía (1 GeV) y la misma dirección que los dos casos anteriores y cambiamos el espesor del bloque de uranio. En la figura 11 vemos cómo varía el ángulo de scattering en función del espesor.

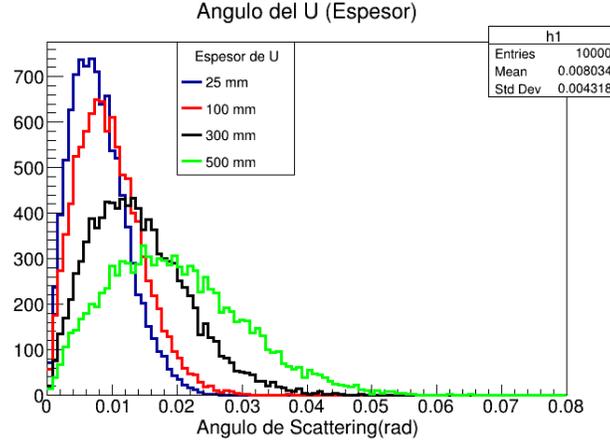


Figura 11: Ángulo de scattering para distintos espesores de uranio a energía constante. Se comprueba que a mayor espesor de material, mayor es el ángulo medio de dispersión ya que el muon tendrá que atravesar más material.

## 5.2. Verificación de la Teoría de Molière

La Teoría de Molière predice para el ángulo de scattering de los muones que atraviesan la materia una distribución gaussiana centrada en el 0 y con desviación dada por la fórmula (2). Para comprobarlo planteamos una simulación en la que los muones se lanzan desde un punto de forma que llevan una dirección perpendicular a los detectores y atraviesan un bloque de uranio. La energía de estos muones es 1 GeV. Si representamos en un histograma bidimensional el número de eventos registrados en el primer detector inferior en función de la posición, vemos la distribución gaussiana bidimensional centrada en el 0.

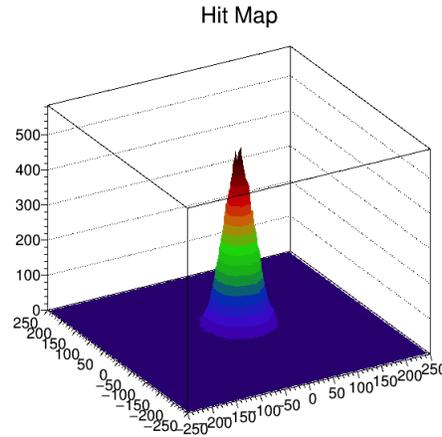


Figura 12: Distribución gaussiana bidimensional de las posiciones de los eventos registrados. La mayor parte de los eventos se registran en el centro, y disminuye la cantidad conforme nos alejamos de este punto.

Para comprobar la eficacia de la expresión de la desviación, ec. (2), calculamos el ángulo de scattering (sección 4.2) para los muones de nuestra simulación. Como no estamos teniendo en cuenta la dirección en la que se dispersan los muones sino solamente el ángulo que forman con la normal, lo que estamos haciendo es ver el número de cuentas en cada anillo de  $\Delta\theta$  de nuestra

distribución gaussiana. Por lo tanto, la distribución de estos ángulos de scattering seguirá la forma de la derivada de una gaussiana, expresión (4). Si ajustamos nuestra distribución angular a esta expresión obtenemos un muy buen acuerdo (figura 13).

$$f(\theta) = -\frac{(\theta - \mu)}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

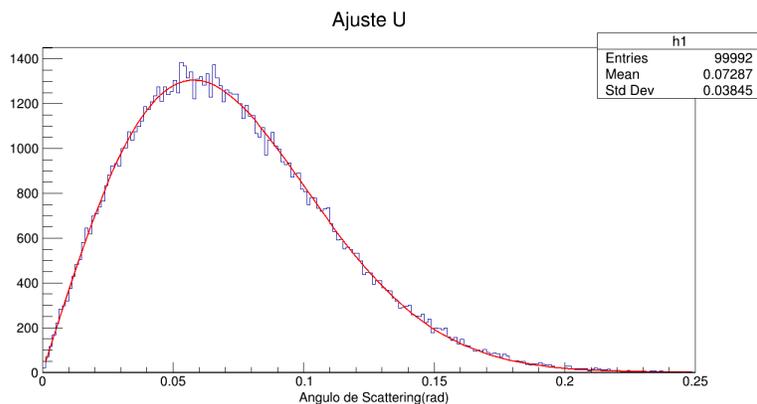


Figura 13: Ajuste de la distribución del ángulo de scattering para un bloque de U a la fórmula (4). El buen resultado del ajuste apoya la validez de las simulaciones.

Por último, realizamos el mismo estudio para diferentes materiales, extraemos el valor de la desviación de los parámetros ofrecidos por el ajuste y los comparamos con el valor esperado. Con los valores de la tabla 1 podemos concluir que la fórmula teórica es válida para los distintos materiales. Además, vemos que al aumentar la energía de los muones o al disminuir el espesor del bloque el error se hace menor.

Material	E (MeV)	x (cm)	$\sigma$ Teórica	$\sigma$ Ajuste	% Error
Plomo	1000	5	0.045	0.042	6.1
Níquel	1000	5	0.027	0.025	5.8
Hierro	1000	5	0.022	0.022	7.9
Uranio	1000	5	0.061	0.058	5.7
Uranio	2000	5	0.030	0.030	2.5
Uranio	5000	5	0.012	0.012	1.1
Uranio	1000	0.5	0.018	0.017	3.4
Uranio	1000	0.05	0.0051	0.050	2.9

Tabla 1: Comparación entre ajuste y valor obtenido con la fórmula 2.

### 5.3. Detección de un objeto denso con un telescopio de desviación

Para demostrar la efectividad de este método, hemos planteado un experimento de detección en el que trataremos de observar un bloque de U que está en el interior de un camión a escala. El camión ha sido diseñado como una capa de aluminio, similar a las densidades de la carrocería de un vehículo, relleno de agua, que serviría para simular un contenido más real como animales, por ejemplo. La geometría del experimento será entonces un par de detectores superiores, el camión con el bloque sumergido en el agua en el interior, y el par de detectores inferiores, como se ve

en la figura 14. Los muones se lanzarán desde una superficie cuadrada de  $0,25m^2$  paralelo a los detectores.

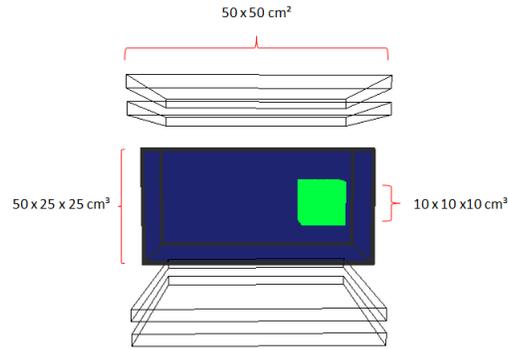
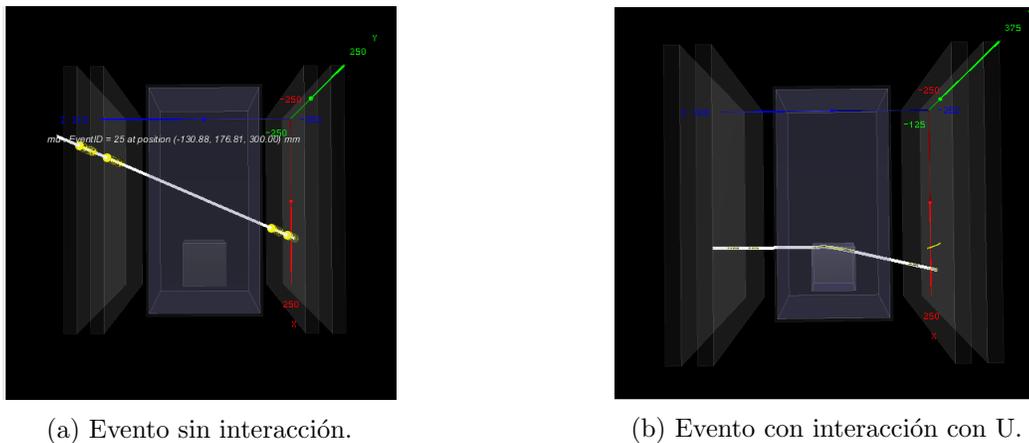


Figura 14: Geometría del camión a escala con el bloque de uranio. Encima y debajo aparecen los dos pares de placas de detectores. En el medio está nuestro camión, con los bordes de su estructura de aluminio en gris oscuro ya que es transparente para permitirnos ver el interior, en el que se aprecia el agua, en azul, y el bloque cúbico de uranio en verde.

Para entender mejor el funcionamiento de este telescopio y de nuestras simulaciones hemos representado un evento en una simulación en la que un muon interacciona con el bloque de uranio (figura 15b) y otro evento de una simulación en la que no se cruza con el bloque (figura 15a).



(a) Evento sin interacción.

(b) Evento con interacción con U.

Figura 15: Imágenes de un evento en el telescopio de desviación. El muon (en blanco) atraviesa los detectores y deposita energía en estos (en amarillo) en la imagen (a). El muon atraviesa el bloque de uranio y se aprecia cómo cambia de dirección la trayectoria de la partícula. Este ángulo de desviación será lo que nos permita detectar objetos (b).

El proceso que seguiremos en estas simulaciones será lanzar una simulación con el camión sin el bloque en su interior y obtener la distribución del ángulo de scattering. Esto nos dará una referencia que compararemos a la distribución obtenida en la segunda simulación en la que sí se encuentra el bloque de uranio. Al compararlas veremos que hay un ángulo de scattering a partir del cual hay muchos más eventos en la simulación con el bloque. Esto se debe a que en general cuando un muon tenga un ángulo de desviación grande será que ha atravesado un material denso. Por lo tanto podemos tomar un ángulo a partir del cual podemos pensar con cierta seguridad que el muon ha

atravesado el bloque de uranio.

Para obtener la posición del bloque, reconstruimos la trayectoria inicial del muon a partir de las dos posiciones registradas en los detectores superiores, y final a partir de las posiciones registradas en los detectores inferiores. En el caso ideal, las rectas cortarían y tomaríamos este punto, pero en la situación real debemos tomar el punto más próximo entre las dos rectas que denominamos POCA (Point Of Closest Approach), como se explica en la sección 4.2. Para cada evento tomamos este punto y lo representamos en un histograma bidimensional, elaborando lo que denominaremos un “Hit Map” (sección 4.2), en el cual las partes con más hits (la posición reconstruida de un evento) deberían corresponder a la posición del uranio.

### 5.3.1. Simulación con muones monoenergéticos

En la primera simulación que lanzamos empleamos las condiciones más favorables posibles, con el objetivo de comprobar y entender mejor los principios de este telescopio. Por esto, empleamos un generador ideal con muones con energía fija (1 GeV) y dirección perfectamente perpendicular a los detectores. Lanzamos en ambos casos 100.000 muones pero no todos nos darán eventos válidos, ya que algunos no pasarán por los detectores inferiores tras desviarse al atravesar la muestra. Solo alrededor del 75 % de los eventos será registrado finalmente. Para comparar las distribuciones, las dos se tienen que representar con el mismo número de eventos, así que el número de eventos representados es el menor de entre el número de eventos registrados en cada simulación. Con estas condiciones las distribuciones del ángulo de scattering obtenidas aparecen en la figura 16. Analizando esta gráfica obtenemos que el ángulo de corte estará alrededor de los 0.06 rad. El resultado final de la tomografía se ve en la figura 17. Se aprecia claramente en la imagen la posición del bloque en el interior del camión, así como su forma cúbica.

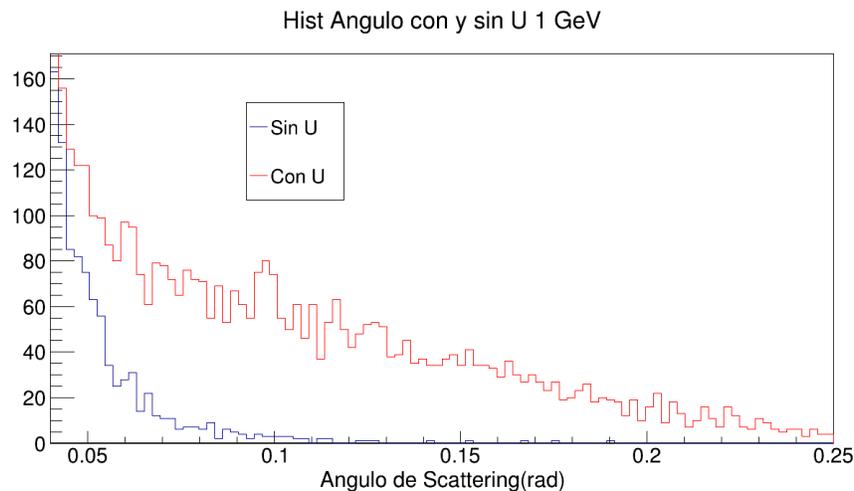


Figura 16: Distribución del ángulo de scattering con y sin el bloque de U en la simulación, con todos los muones con 1 GeV y llegando de forma perpendicular a los detectores. Se aprecia una discrepancia entre la distribución del ángulo de dispersión cuando está presente el uranio y cuando no. Hemos ampliado un rango concreto para ver cómo a partir de un cierto valor de ángulo (en este caso unos 0.06 rad) solo se dan sucesos en la simulación con uranio. Tomaremos por tanto este ángulo como referencia para hacer el corte en los eventos que representamos.

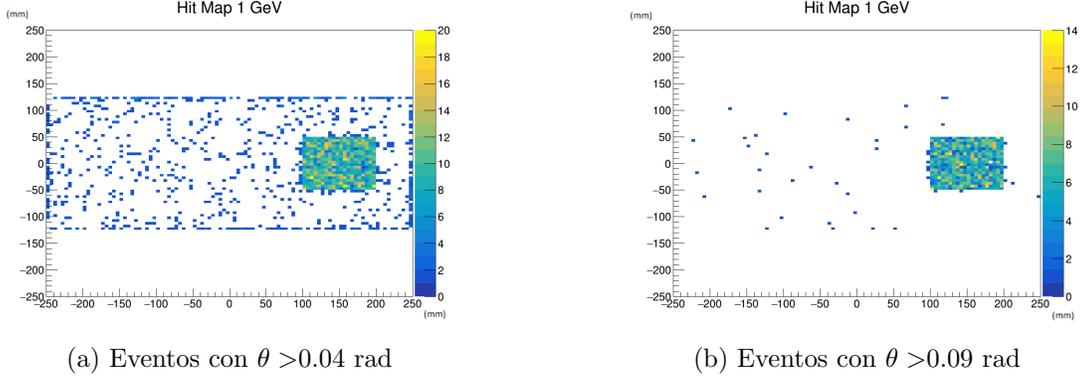


Figura 17: Hit Map obtenido de nuestra simulación con todos los muones con 1 GeV y llegando de forma perpendicular a los detectores. En la imagen de la izquierda hemos tomado un ángulo de corte algo menor para ver cómo la mayoría de eventos registrados son los que atraviesan el uranio. En la derecha con el ángulo mayor ya prácticamente todos los eventos registrados han atravesado el bloque y se percibe perfectamente su tamaño y forma.

### 5.3.2. Simulación con muones con distribución energética realista

Ahora continuaremos con simulaciones progresivamente más realistas para ver cómo la distribución energética de los muones, su distribución angular y el tamaño del sistema afecta a los resultados. En la simulación con todos los muones en dirección perpendicular a los detectores pero con energía real ya vamos a necesitar mucha más estadística que en el primer caso, lanzaremos 1.000.000 de muones. Esto se debe a que ahora no solo necesitaremos muones que atraviesen el objeto, sino que además deberán tener una energía no muy elevada para que su ángulo de scattering sea suficientemente grande como para identificar el suceso como un hit en el uranio, ya que este ángulo disminuye conforme aumenta la energía, como comprobamos en la figura 10. En la figura 19 tenemos la distribución del ángulo de scattering a partir de la cual obtenemos la figura 18 como resultado. En este caso hemos tomado un ángulo de corte  $\theta = 0.025$  rad. Es menor que en el caso anterior ya que en general los muones van a tener una energía mayor a 1 GeV.

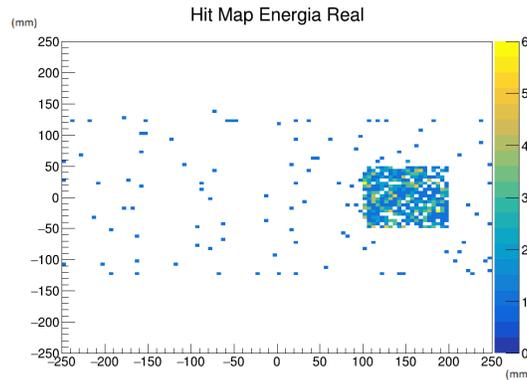


Figura 18: Hit Map obtenido de nuestra simulación Los muones tienen la distribución de energía realista (figura 6) y llegan de forma perpendicular a los detectores. Para esta imagen hemos tomado un ángulo de corte  $\theta = 0.025$  rad.

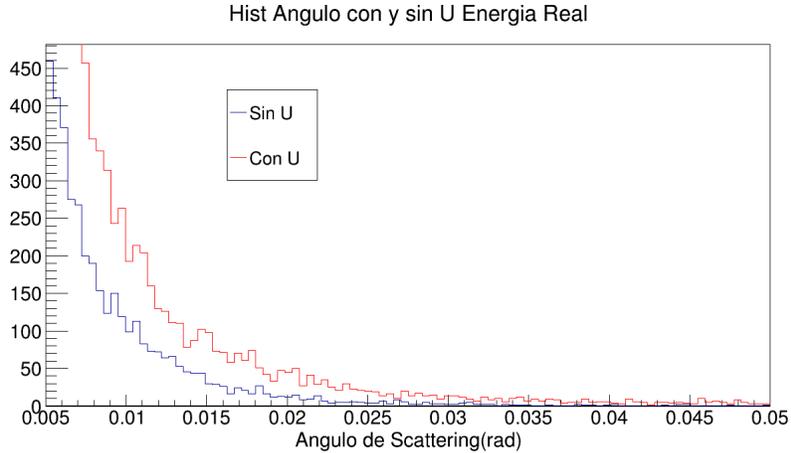


Figura 19: Distribución del ángulo de scattering con y sin el bloque de U en la simulación. Los muones tienen la distribución de energía realista (figura 6) y llegan de forma perpendicular a los detectores. Ahora la diferencia entre las distribuciones es más sutil ya que muones con energía baja pueden tener un ángulo grande aunque no atraviesen el bloque, simplemente por atravesar el agua; y muones con energías grandes pueden atravesar el bloque con ángulos que no permitan discriminarlos.

### 5.3.3. Simulación con distribución energética y angular realista

Continuando hacia una simulación más realista, al emplear una distribución angular real tenemos que tener en cuenta que debido a la geometría de nuestro sistema vamos a tener un sesgo en la posición de los eventos detectados. Para que demos el suceso por válido, este debe ser detectado por las placas superiores e inferiores. Por esto, cuando reconstruimos la trayectoria de los muones lo más probable es que hayan pasado por el centro del camión y conforme nos alejamos de este punto la probabilidad disminuye. Esto se ve claramente en la figura 20. Este efecto se suavizaría si contáramos con detectores mucho mayores que el objeto pero el nivel de infraestructura que se debería desplegar podría superar los recursos a disposición.

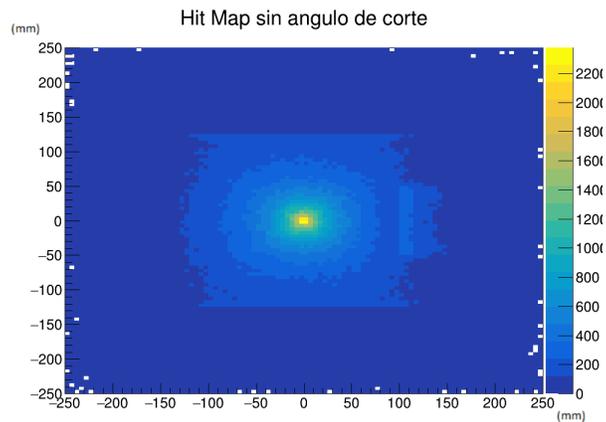


Figura 20: Hit Map del eventos registrados en la simulación con el camión realista sin tomar un ángulo de corte. Podemos ver una concentración enorme de sucesos en el centro que se va diluyendo hacia los extremos.

En este caso vamos a necesitar lanzar muchos más muones ya que al no ser perpendiculares habrá una parte que no pasen por los detectores inferiores. Además, debido al sesgo que existe necesitaremos más eventos para tener suficiente estadística en las partes más alejadas del centro. Para nuestros resultados hemos lanzado 3 millones de muones de los cuales se ha registrado alrededor del 45%. Teniendo en cuenta la superficie de detección ( $0,25m^2$ ) y el flujo de muones a nivel del mar ( $125m^{-2} \cdot s^{-1}$ ), necesitaremos más de 10 horas para alcanzar esta estadística. No obstante, debemos tener en cuenta que este es el tiempo necesario para obtener una reconstrucción gráfica de esta calidad. Detectar la presencia del uranio requiere de muchos menos puntos con ángulo de scattering superior por encima del corte, 10 ya serían un indicio considerable y en nuestra simulación hemos detectado alrededor de 800. Por lo tanto, con 80 veces menos de tiempo de simulación, unos 10 minutos, ya tendremos estadística suficiente para nuestro objetivo. Además en esta simulación la superficie de detección es muy pequeña. Podemos expresar el tiempo de exposición en función de la cantidad de U, ya que una mayor cantidad necesitará menos tiempo. Podemos llamarlo tiempo de exposición másico y expresarlo como  $T = t \cdot m = 11400 s \cdot Kg$ .

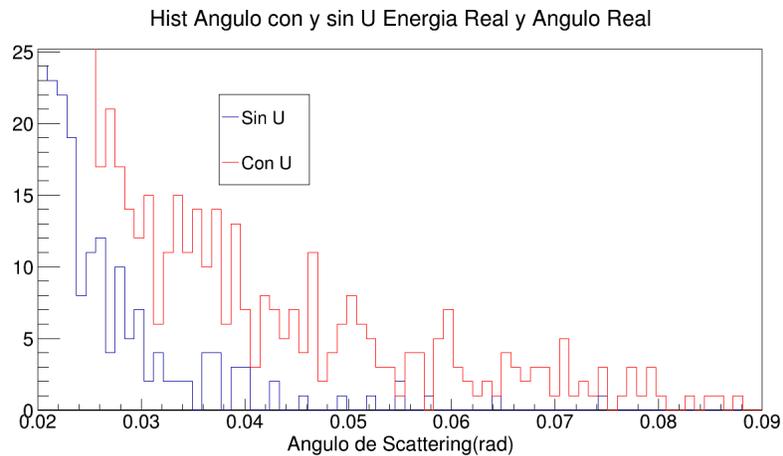


Figura 21: Distribución del ángulo de scattering con y sin el bloque de U en la simulación. Los muones son “realistas”, su energía y su ángulo con la normal siguen las distribuciones de la figura 6. Al tener la misma distribución de energías que la simulación anterior, la distribución del ángulo de scattering no cambia mucho, el ángulo de corte sigue siendo el mismo.

Con el objetivo de ganar algo de precisión a la hora de establecer los límites del objeto detectado, hemos tomado las proyecciones en cada eje. Es decir, fijamos un rango de valores para nuestro eje Y y miramos el número de eventos que hay para cada valor de X y después repetimos fijando un rango del eje X y vemos los eventos para el eje Y. Como sabemos de forma aproximada la posición del bloque tomamos el rango en cada eje que nos interesa, obteniendo las proyecciones de la figura 23.

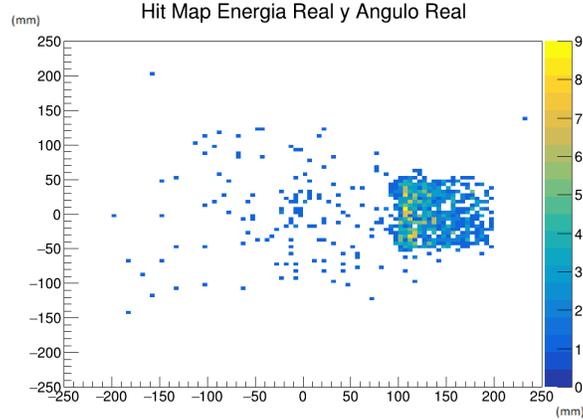


Figura 22: A pesar de emplear 3 veces la estadística del caso anterior la imagen obtenida no es igual de buena ya que la parte de la derecha del cubo, más alejada del centro, ha sido atravesada por muchos menos muones debido al sesgo explicado con anterioridad. Aún así, la presencia del objeto es obvia aunque sus dimensiones quedan menos claras.

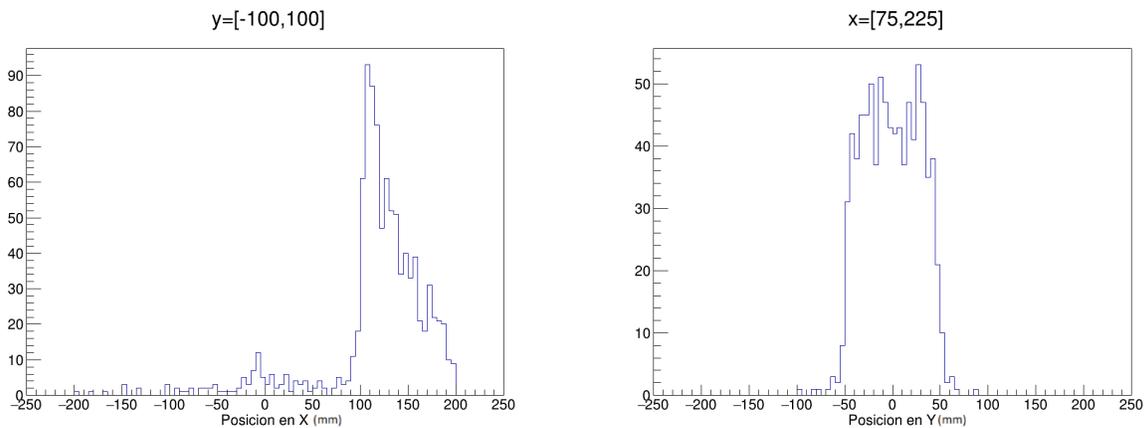


Figura 23: Estas proyecciones nos dan la oportunidad de ver más claramente que el objeto en el eje X está en el rango  $[100,200]$ mm del detector y en el eje Y está entre  $[-50,50]$ mm.

#### 5.3.4. Simulación con un camión de dimensiones realistas

Para concluir con el telescopio de desviación vamos a aplicar los conceptos desarrollados en este apartado hasta ahora a un caso más realista. Esta vez nuestra simulación analizará un camión de dimensiones reales (12m de largo, 2'55m de ancho y 2'80m de alto) con un bloque cúbico de uranio de 0'5m de lado. Como nos interesa estudiar la viabilidad de este telescopio para detectar el posible contrabando de materiales nucleares en aduanas, no dispondremos de un tiempo infinito y por tanto la estadística será limitada. Por ello tomamos como límite temporal 5 minutos, que teniendo en cuenta la superficie de nuestros detectores ( $12 \cdot 3 = 36m^2$ ) y el flujo de muones natural ( $125m^{-2} \cdot s^{-1}$ ) nos da 1.350.000 eventos.

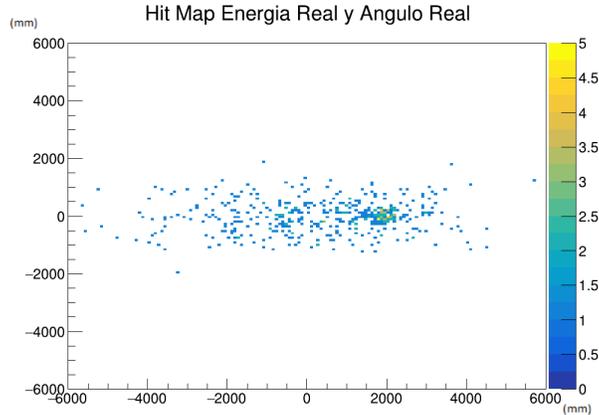


Figura 24: Hit Map de la simulación realizada con la geometría del camión real. La posición del bloque es difícil de distinguir por lo que recurriremos a las proyecciones en los ejes.

En este caso en el Hit Map (figura 24) no queda nada claro las dimensiones del bloque, aunque se puede concluir la presencia de un objeto denso en ese rango. Volvemos a recurrir a las proyecciones en los ejes para obtener más información. Seleccionamos el rango adecuado estimando la posición del bloque con el Hit Map y proyecciones sobre los ejes previas hasta que conseguimos una imagen clara como en la figura 25.

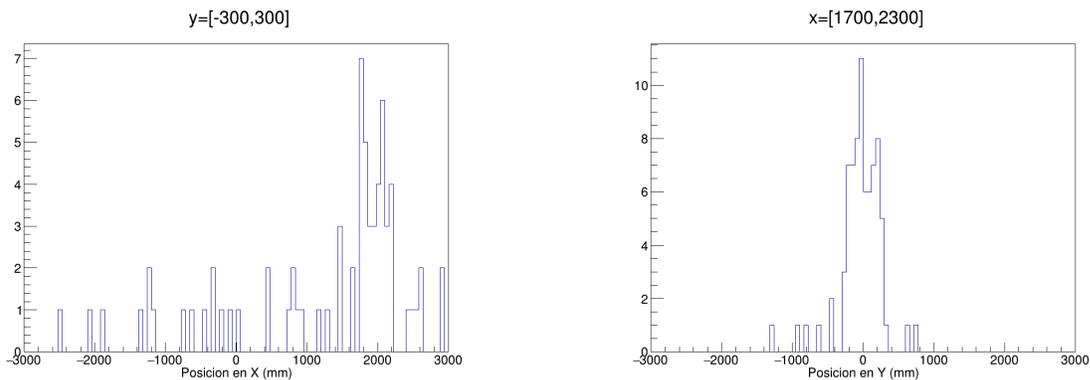


Figura 25: Las proyecciones en los ejes nos permiten de nuevo establecer los límites del objeto más claramente.

Estos resultados parecen prometedores ya que en tan solo 5 minutos y con un experimento sencillo hemos sido capaces de detectar la presencia y posición del bloque de uranio. Sin embargo, debemos tener en cuenta que el bloque de  $0.125 \text{ m}^3$  corresponde a más de 2000 kg de este material, por lo que haría falta una mejora considerable en el rendimiento para que este método sea realmente aplicable.

## 6. Estudios de un telescopio de absorción

En nuestra simulación de un telescopio de absorción (su geometría aparece en la figura 26) empleamos 5 placas detectoras que registrarán la posición del muon a su paso. Después, reconstruiremos la trayectoria de la partícula ajustando esos cinco puntos a una recta tridimensional (figura 8). Gracias a esta reconstrucción, y a conocer la posición del sistema que queremos estudiar (en este telescopio es necesario), podremos elaborar un Hit Map donde una zona de baja densidad de eventos nos indicará una zona de material de alta densidad. Los detectores estarían colocados de forma paralela a la superficie terrestre, por lo que los muones registrados tendrían la distribución angular  $\cos^2(\theta)$  de la figura 6. Para evitar necesitar una cantidad de eventos desproporcionada o emplear un objeto de estudio de muy grandes dimensiones, en la simulación hemos empleado un bloque de plomo con una densidad 100 veces superior a la normal. De esta forma aumenta en ángulo de dispersión de los muones que lo atraviesen y la probabilidad de no atravesarlo. También, hemos colocado el bloque a una distancia grande (10 m) respecto al tamaño de los detectores, de manera que los muones desviados, aunque los ángulos de scattering sean muy pequeños, no queden registrados en los detectores.

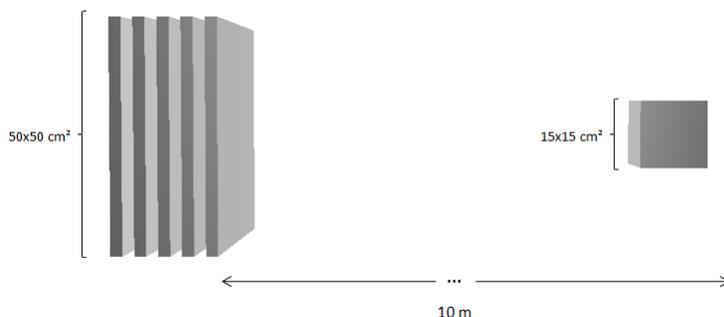


Figura 26: Geometría del telescopio de absorción

### 6.1. Simulación con ángulo fijo perpendicular a los detectores

La simulación la llevamos a cabo de dos formas. Primero lanzamos una simulación con muones con una distribución de energía real pero con dirección fija y perpendicular a los detectores y el objeto. Así todos los muones llegarán a los detectores menos aquellos que se desvíen por el bloque de plomo, y por tanto veremos una falta de densidad de eventos en su posición. Los resultados de representar el hit map de los eventos aparecen en la figura 27 donde se aprecia de forma evidente la posición y dimensión del bloque de plomo, ya que ahí se han registrado menos eventos considerablemente.

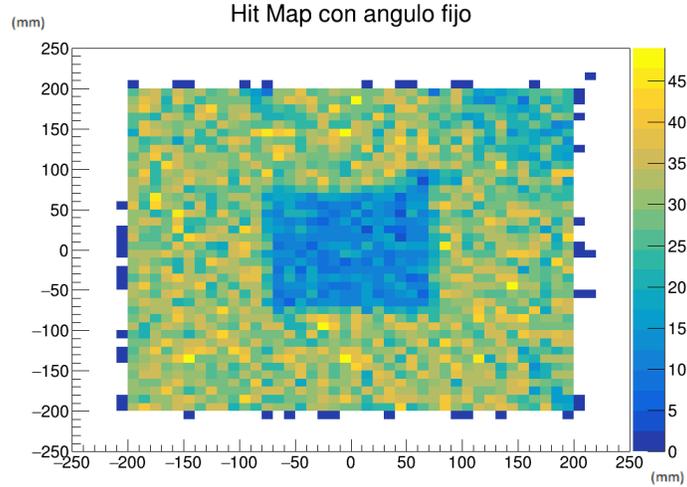


Figura 27: Resultados del telescopio de absorción para ángulo fijo. En el centro se aprecia claramente una zona cuadrada de 150 mm de lado con muchos menos eventos registrados, lo que se corresponde con nuestro bloque de uranio.

## 6.2. Simulación con distribución angular realista

Una vez que ya hemos confirmado el método pasamos a hacer la simulación con muones que siguen la distribución angular real. Ahora la diferencia en la densidad de eventos será mucho más sutil pero aún así apreciable para una simulación con suficientes eventos. En este caso hemos empleado la escala logarítmica en la representación (figura 28) para aumentar el contraste visual.

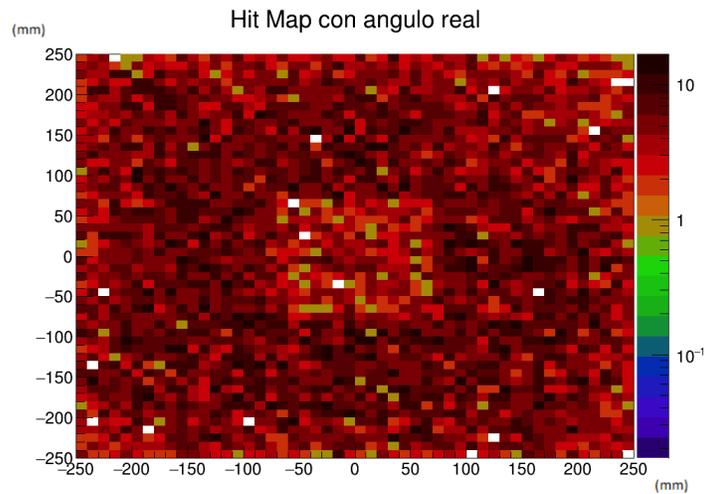


Figura 28: Resultados del telescopio de absorción para muones con una distribución angular real. Ahora la zona con una densidad de eventos menor es mucho más sutil pero detectable.

De nuevo recurrimos a las proyecciones en los ejes para obtener un resultado más claro de la tomografía. Cuando estudiamos los resultados (figuras 29 y 30) vemos que para valores de Y entre  $[-150,-75]$  y  $[75,150]$  los eventos siguen una distribución más o menos uniforme, sin embargo, en el rango  $[-75,75]$  vemos como hay una bajada significativa del número de eventos para valores de X en el rango  $[-75,75]$ . Por lo tanto sabemos que existe un objeto denso centrado en el origen y cuya proyección es un cuadrado de lado 150 mm. Esto se corresponde con el cubo empleado en la simulación.

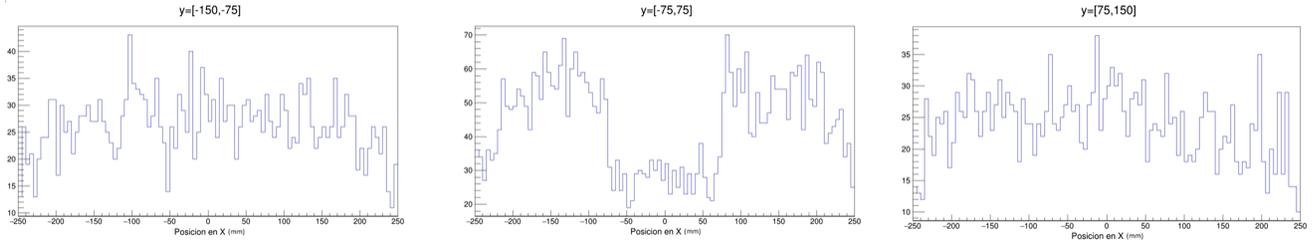


Figura 29: Proyecciones en el eje Y de los resultados. La bajada en el número de eventos para Y entre  $-75$  y  $75$  mm y X entre  $-75$  y  $75$  mm evidencia la presencia del bloque.

Con esta información sacamos la proyección en el eje X ya sabiendo que el rango de interés es  $[-75,75]$  y comprobamos nuestra conclusión.

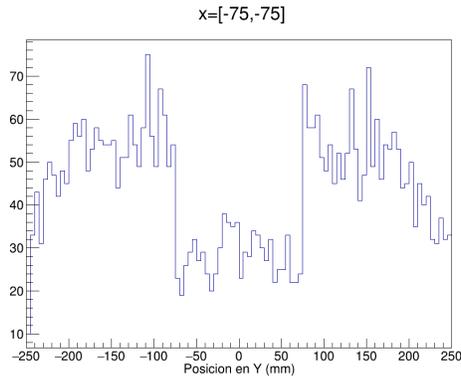


Figura 30: Proyecciones en el eje X de los resultados.

## 7. Conclusiones

En este trabajo, hemos aprendido qué es, qué principios la rigen y qué aplicaciones tiene la tomografía con muones consultando diferentes fuentes como parte de nuestro estudio bibliográfico. Después, gracias a las simulaciones llevadas a cabo empleando el software de Geant4, hemos verificado la Teoría de Molière, importante a la hora de entender los fenómenos de scattering de partículas al atravesar diversos materiales. También hemos explicado y comprobado el funcionamiento de dos telescopios diferentes empleados en la tomografía con muones, el de desviación y el de absorción, comprobando en el proceso los efectos de la no idealidad de las distribuciones angular y de energía de los muones cósmicos. Los resultados obtenidos los hemos aplicado a un caso práctico, la detección de contrabando de material nuclear en una aduana y hemos comprobado su viabilidad. Además, las técnicas empleadas en la reconstrucción de imagen y en la exposición gráfica de resultados se pueden transferir a otras tomografías con partículas diferentes. Por lo tanto, no solo hemos desarrollado nuestras destrezas con el software empleado y mejorado nuestra comprensión de la tomografía como técnica de obtención de imágenes, sino que además hemos verificado que el uso de muones para la exploración de materiales densos es una posibilidad real y que continuar con su desarrollo es de interés dadas las diferentes aplicaciones presentadas en el trabajo.

## Referencias

- [1] Grieder, P.K.F. (2001). *Cosmic Rays at Earth*. Ed. Elsevier.
- [2] Javier Galan, Kaixiang Ni, Luis Obis, Gloria Luzon, Juan Antonio Garcia Pascual, David Diez, Cristina Margalejo, Konrad Altenmueller, Igor Irastorza, and Ke Han. *RESTfor-physics/framework*., July 2021.
- [3] S. Procureur, *Muon imaging: Principles, technologies and applications, Nuclear Inst. and Methods in Physics Research* , A (2017).
- [4] S. Bouteille et al, *A Micromegas-based telescope for muon tomography: The Wat To experiment*, A (2016).
- [5] P. Checchia 2016 *JINST* 11 C12072
- [6] H. Tanaka, et al., *Nucl. Instrum. Methods* , A 507 (2003) 657.
- [7] R. Nishiyama, et al., *J. Geophys. Res.* 119 (2014) 699.
- [8] K. Jourde, D. Gibert, J. Marteau, arXiv:14115146.
- [9] G. Bonomi et al, *Applications of cosmic-ray muons*, (2020).
- [10] <http://www.scanpyramids.org/>.
- [11] [http : //www.tepco.co.jp/nu/fukushima – np/handouts/2015/images/handouts\\_15031903 – j.pdf](http://www.tepco.co.jp/nu/fukushima-np/handouts/2015/images/handouts_15031903-j.pdf) (en japonés).
- [12] Zhengzhi Liu et al, *Muon-computed tomography using POCA trajectory for imaging spent nuclear fuel in dry storage casks*, (2018).
- [13] S. Tripathy et al, *Numerical evaluation of a muon tomography system for imaging effects in concrete structures*, (2021).

- [14] J. Galan, K. Ni, L. Obis, G. Luzon, J. A. G. Pascual, D. Diez, C. Margalejo, K. Altenmueller, I. Irastorza, K. Han, REST-for-physics/framework: (Jul. 2021). doi:10.5281/zenodo.5092550. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.5092550>
- [15] <https://root.cern.ch/>.
- [16] [dml.web.cern.ch/GDML](https://dml.web.cern.ch/GDML).