Trabajo Fin de Máster

Probabilidad en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en 2º de Bachillerato

Probability in Mathematics Applied to Social Sciences in second year of Baccalaureate

Autor

Euken Uhalde López

Director

Rubén Vigara Benito

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2021

Índice

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

A1. Nombra el objeto matemático a enseñar. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

En este trabajo trataremos el tema de la probabilidad en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, de segundo de bachillerato.

A2. Marco teórico de la didáctica de la probabilidad en bachillerato.

Vamos a ver cuál es el marco teórico de la enseñanza de la probabilidad en bachillerato y se utilizará esto como base para elegir los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que se verán a lo largo de esta unidad.

Hay investigaciones que afirman que es recomendable el uso de paradojas sencillas en las clases para plantear situaciones motivadoras en el aula (Batanero, Contreras, Cañadas y Gea, 2012). En el caso de la probabilidad no es en absoluto difícil encontrar problemas cuyos resultados sean antiintuitivos, ya que hay muchos problemas clásicos de ese estilo, como el problema de Monty Hall, la paradoja de la caja de Bertrand o la paradoja del cumpleaños, entre otros. Por tanto, se tratará de introducir en clase paradojas de este estilo para generar interés en el alumnado.

Borovcnik (2012) afirma que, desde un punto de vista filosófico, la gente piensa en la probabilidad desde diferentes perspectivas. Por un lado, están los objetivistas, que piensan en la probabilidad como una propiedad inherente al objeto matemático que se esté analizando. Por otro lado, están los subjetivistas, que piensan en la probabilidad como en el grado de credibilidad que se tiene de que suceda un suceso concreto.

La interpretación objetivista toma como más acertado para calcular la probabilidad de un suceso el análisis frecuencial de la probabilidad, ya que la probabilidad de un suceso se obtiene de los datos obtenidos directamente de la experimentación, no de una idea predeterminada. La interpretación subjetivista, en cambio, toma como más acertado para calcular la probabilidad de un suceso la regla de Laplace, ya que es lo que es esperable que suceda desde un punto de vista lógico y, además, permite calcular la probabilidad de sucesos en los que no es posible realizar múltiples intentos.

Carranza y Kuzniak (2008) afirman que en los libros de texto franceses la probabilidad, de forma teórica, se analiza exclusivamente desde la perspectiva objetivista, pero en los ejercicios, se exige al alumnado que manejen conceptos relacionados con la perspectiva subjetivista. Esto provoca una contradicción en la enseñanza de la probabilidad que puede llevar a que el alumnado tenga dificultades asimilando los contenidos.

Por tanto, se tratará de introducir en la clase estos dos aspectos de la probabilidad, tanto el objetivista como el subjetivista, y se intentará que los alumnos entiendan la relación entre los dos enfoques.

Sánchez y Valdez (2016) analizan cómo relacionan los alumnos de 17-18 años los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad. En lo que se refiere a cómo aúnan los alumnos los distintos enfoques de la probabilidad, clasifica a los alumnos en tres niveles de razonamiento, pero considera que hay un cuarto nivel de razonamiento más avanzado que los alumnos no alcanzan.

Hace un cuestionario en el que se dice que hay dos urnas con bolas blancas y negras. En la primera de las urnas hay tres bolas y en la segunda hay seis bolas, pero no se sabe cuántas de cada color. Sacando una bola en mil ocasiones de la primera urna, ha salido una bola negra en 676 ocasiones, mientras que, haciendo lo mismo en la segunda urna, ha salido una bola negra en 656 ocasiones. Se pide a los alumnos que calculen la probabilidad de obtener una bola negra en la siguiente extracción en cada una de las urnas. También se les pide que escojan la urna en la que creen que hay mayor probabilidad de extraer una bola negra.

Los alumnos se pueden separar en los que calculan la probabilidad utilizando exclusivamente los datos de las frecuencias obtenidas y los alumnos que en base a las frecuencias obtenidas hacen un modelo clásico del problema. Sin embargo, no hay ningún estudiante que diga que la probabilidad de obtener una bola negra en la siguiente extracción es la misma en las dos urnas.

En sus conclusiones, afirma que, en este tipo de preguntas, ninguno de los alumnos es capaz de ver que, una vez realizado el modelo clásico del problema, se pueden ignorar los resultados frecuenciales del problema para hacer predicciones. También afirma que en la enseñanza de la probabilidad se suelen enfatizar los procedimientos matemáticos para obtener probabilidades numéricas, pero que, si se hacen preguntas diferentes a hacer exclusivamente cálculos de probabilidades, los alumnos podrán hacerse a una mejor idea de las nociones que hay tras la probabilidad.

Puede ser interesante realizar este ejercicio con los alumnos, no solo porque se tratan muchos de los contenidos de la probabilidad presentes en el currículo, sino también porque puede servir para que, una vez hecha una puesta en común, los alumnos asimilen las relaciones entre los enfoques objetivistas y subjetivistas de la probabilidad.

Además, también es interesante la conclusión de que el hecho de hacer solamente preguntas en las que hay que obtener las probabilidades de varios sucesos provoca un aprendizaje mecánico y no significativo, por lo que se intentará que los alumnos hagan ejercicios en los que tengan que pensar acerca de la probabilidad y de los resultados.

Para tratar de mejorar la enseñanza que se realiza de la probabilidad en general, y de la probabilidad condicionada en particular, Gómez (2000) propone ampliar el uso de los diagramas de árbol. Considera que los diagramas de árbol son un recurso infrautilizado, más teniendo en cuenta la cantidad de aplicaciones que tiene. Su propuesta es utilizar este recurso para resolver problemas que se puedan resolver a través del teorema de la probabilidad total o del teorema de Bayes, siempre que no sean problemas excesivamente extensos.

Esto, por un lado, permite que los alumnos puedan ver una resolución más intuitiva de los problemas de probabilidad y, por otro lado, permite depender menos de los conceptos de combinatoria que a menudo se introducen en el tema previo a la probabilidad.

En base a este estudio, parece apropiado que se enseñe al alumnado a utilizar los diagramas de árbol adecuadamente en diversos problemas.

Además, veremos más adelante que en el libro de texto de Oxford no se enseñan las tablas de contingencia, siendo este un recurso que, en mi opinión, puede ser muy útil para resolver ciertos ejercicios. Por tanto, también se enseñará esta técnica en el aula.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

B1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

A continuación, voy a analizar los libros de texto de Matemáticas Orientadas a las Ciencias Sociales para segundo de bachillerato de Anaya, Oxford y Santillana (ver referencias detalladas en el apartado de Bibliografía), que son tres libros de texto que se emplean mucho en los institutos actualmente. A través de su análisis, podremos deducir cuál es el tipo de enseñanza habitual de la probabilidad. En concreto, voy a ver cuáles son los campos de problemas que aparecen, qué técnicas se explican y qué tecnologías se utilizan para justificar las técnicas.

Observando los libros de texto de Matemáticas de Anaya para primero y segundo de la ESO, el de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de tercero de la ESO, los de Matemáticas Orientadas a las Ciencias Sociales de primero y segundo de bachillerato y el de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de segundo de bachillerato (ver referencias detalladas en el apartado de Bibliografía), se ve que en todos estos libros se introduce la probabilidad a través de juegos de azar. En el libro de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de primero de bachillerato no se trata la probabilidad. En todos estos libros de texto, excepto en el de Matemáticas Orientadas a las Ciencias Sociales de primero de bachillerato se introduce significado clásico de la probabilidad antes que el significado frecuencial.

En el libro de texto de Anaya correspondiente a esta asignatura, el tema de la probabilidad se introduce junto a su razón de ser histórica, es decir, para resolver juegos de azar, pero no se enuncia ningún problema concreto. En ese sentido, se trata de que la introducción del tema sea motivadora, aunque podría serlo más.

En el libro de texto de Oxford, el tema de la probabilidad se introduce a través de un problema propuesto por el Caballero de la Méré a Blaise Pascal, en el que se pregunta cuántas veces se deben tirar dos dados para apostar con cierta certeza que saldrán dos seises en alguna de las tiradas. En la introducción se dice que al final de la unidad se podrá resolver este problema, por lo que esta introducción sí que es motivadora.

En el libro de texto de Santillana, el tema de la probabilidad se introduce a través de un problema derivado de un fragmento de un libro de Dostoievski que está relacionado con los juegos de azar y, por tanto, contextualizado en la vida cotidiana. Por tanto, se puede considerar que la introducción del tema es motivadora.

Estudiando el libro "Materiales para construir las matemáticas en la E.S.O.: Guía Didáctica" (Berenguer y Pérez, 2001, 355-371), que está dirigido a profesores, también se introduce el tema a través de los juegos de azar.

Por tanto, podemos deducir que la forma más habitual de introducir el tema de la probabilidad es a través de los juegos de azar.

B2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Para empezar, vamos a ver qué contenidos se deben impartir acerca de la probabilidad según la LOMCE a nivel estatal y a nivel autonómico. Se puede ver que en esta asignatura los contenidos fijados por la ley estatal y la aragonesa son exactamente los mismos.

- Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.
- Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.
- Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.

Estos son los contenidos relacionados con la probabilidad, tanto en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre como en la Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo.

<u>Anaya</u>:

Es interesante ver que los temas dedicados a la probabilidad en este libro de texto y en el libro de texto de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas del mismo curso son idénticos.

1- Se definen los experimentos aleatorios, los sucesos aleatorios y el espacio muestral mediante el lenguaje ordinario. El problema que aparece en esta parte consiste en un problema de dados en el que hay que calcular el espacio muestral y algunos sucesos elementales.
   Se definen también las operaciones y relaciones entre sucesos (unión, intersección y diferencia de sucesos, sucesos complementarios y sucesos incompatibles), tanto con el lenguaje ordinario como con notación matemática. Se definen las leyes de

De Morgan a través del lenguaje matemático y se justifican más adelante en la resolución de un ejercicio. Los problemas de esta parte son problemas con dados en los que hay que calcular la unión e intersección de varios sucesos.

2- Se introduce la definición de la probabilidad frecuencial y la ley de los grandes números. La ley de los grandes números se justifica a través de un ejemplo con lanzamientos de dados y mediante el razonamiento en una explicación con texto. En esta parte, hay un ejercicio de verdadero o falso en el que hay que interpretar la ley de los grandes números.

   Se introduce la definición axiomática de la probabilidad y ciertas propiedades, todo esto a través del lenguaje matemático y sin ninguna justificación. En esta parte, hay ejercicios en los que hay que calcular la probabilidad de ciertos sucesos formales sin contextualizar.

3- Se introduce la Ley de Laplace, justificándola a través de una de las propiedades vistas en el apartado anterior. Se aclara que esta ley no se puede aplicar en cualquier caso, ya que es necesario que estemos tratando con sucesos equiprobables. En este apartado, hay ejercicios en los que hay que calcular la probabilidad de ciertos sucesos, en algunos casos utilizando la ley de los grandes números y en otros aplicando la Ley de Laplace.

4- Se introduce la probabilidad condicionada a través de un ejemplo en el que se extraen bolas numeradas y coloreadas de una bolsa. Después de explicar el ejemplo, se introducen las fórmulas de la probabilidad condicionada con notación matemática. Se definen los sucesos independientes primero a través del lenguaje ordinario y después a través del lenguaje matemático. Después se explica cómo calcular las probabilidades condicionadas a través de las tablas de contingencia. El problema que aparece en este apartado tiene un contexto en el que hay que extraer bolas numeradas y coloreadas de una urna. Hay que resolverlo haciendo una tabla de contingencia y se pide que se calculen la probabilidad de ciertos sucesos y que se compruebe se ciertos sucesos son independientes.

5- Se definen las pruebas compuestas dependientes e independientes a través del lenguaje ordinario y después se definen con notación matemática. Se utilizan diagramas de árbol para ilustrar a través de dos ejemplos de qué manera se puede ver si dos sucesos son independientes o no. En este apartado hay problemas de verdadero o falso en la que se pide que se identifique si ciertos sucesos compuestos son dependientes o no, hay problemas de lanzamientos de dados en las que se pide calcular las probabilidades de algunos sucesos y hay problemas de extracción de bolas de una urna y se piden calcular las probabilidades de ciertos sucesos.

6- Se introduce el teorema de la probabilidad total. En primer lugar, se introduce a través de un ejemplo visto previamente. En segundo lugar, se institucionaliza y se escribe a través del lenguaje matemático. En tercer lugar, se hace la demostración formal del teorema. En cuarto y último lugar, se ilustra cómo se relaciona el teorema de la probabilidad total con los diagramas de árbol y cómo se pueden utilizar estos para resolver problemas en los que haya que utilizar este teorema. Además, hay dos ejercicios resueltos en los que se muestra claramente cómo se deben utilizar los diagramas de árbol. En este apartado, hay problemas en los que se extraen bolas de una urna. En un ejercicio se hacen preguntas de verdadero o falso y en otro se pide calcular la probabilidad de varios sucesos.
7- Se introduce la fórmula de Bayes como modo de calcular probabilidades a posteriori. Se introduce la fórmula de forma intuitiva al principio y, después, se demuestra formalmente. Se introduce el interés de esta fórmula a través de una aplicación práctica con un ejemplo de teléfonos móviles y averías. También se explica que en la práctica es muy útil hacer un diagrama de árbol para seguir el proceso y se muestra cómo hacerlo a través de dos ejercicios resueltos. En este apartado, hay un ejercicio de verdadero o falso relacionado con el ejemplo de los móviles, pero realmente se resuelve calculando probabilidades. El otro ejercicio es de extraer bolas de una urna y calcular las probabilidades de ciertos sucesos.

Oxford:

1- Se definen los sucesos aleatorios, el espacio muestral y el espacio de sucesos. En esta parte, el campo de los problemas que aparecen es calcular el espacio muestral de ciertos sucesos aleatorios. Para hacer estos problemas se utilizan técnicas de conteo, que en algún caso están justificadas a través de diagramas de árbol. No hay problemas en los que haya que ver ningún espacio de sucesos.
2- Se definen las uniones e intersecciones de sucesos y se introduce la notación de estas operaciones. También se introduce la notación de los sucesos contrarios. Se enuncian las leyes de De Morgan y se justifican a través de los diagramas de Venn. En este apartado hay dos campos de problemas. Por un lado, están los problemas de calcular uniones e intersecciones de sucesos teóricos, solamente desde un punto

de vista formal y, por otro lado, hay problemas en los que se deben modelar con notación de probabilidad problemas de la vida cotidiana y se pide obtener resultados contextualizados en el problema.

3- Se define la probabilidad desde un punto de vista frecuencial, clásico y axiomático. Se explica que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse a medida que aumenta el número de veces que se realiza un experimento y se justifica a través de un experimento concreto. La definición clásica se justifica a través de la intuición. La definición axiomática no se justifica de ninguna manera, simplemente se enuncian los axiomas de Kolmogorov, pero sin dar su nombre. En este apartado, hay dos campos de problemas. Por un lado, están los problemas en los que hay que calcular las probabilidades de ciertos sucesos a través del enfoque clásico de la probabilidad y, por otro lado, están los problemas en los que se deben calcular ciertas probabilidades utilizando los axiomas de Kolmogorov. No hay ningún problema relacionado con el enfoque frecuencial de la probabilidad.

4- Se define la probabilidad condicionada y se introduce su notación. Se introduce la fórmula de la probabilidad condicionada y se justifica viendo que esa fórmula da los resultados esperados en dos problemas resueltos previamente. También se introduce la ley de las probabilidades compuestas, pero solo para la intersección de tres sucesos en vez de para una cantidad general de sucesos. Esta ley se justifica a través de una demostración formal. El campo de los problemas que aparecen con estos contenidos son problemas enmarcados en la vida cotidiana que se resuelven directamente aplicando las fórmulas vistas en este apartado.

5- Se define la independencia de sucesos a través del lenguaje ordinario y a través del lenguaje matemático. El campo de problemas que aparecen en este apartado es de problemas contextualizados en la vida real en los que hay que calcular ciertas probabilidades y para hacer los cálculos es necesario utilizar la independencia de sucesos, aunque no se dice explícitamente en el enunciado. Solo hay un problema en el que se pida decir si dos sucesos son independientes y, además, es el único problema sin contextualizar.

6- Se explica la fórmula de la probabilidad total. Se justifica a través de su uso en un problema concreto y, además, se justifica a través del uso de un diagrama de árbol. Los problemas que aparecen en este apartado están contextualizados en la vida real y piden calcular las probabilidades de ciertos sucesos.

7- Se explica el teorema de Bayes y se justifica a través de la fórmula de la probabilidad condicionada. Hay problemas contextualizados en la vida real en los que hay que calcular ciertas probabilidades utilizando el teorema de Bayes. Hay dos ejercicios resueltos y, en ellos, se utilizan diagramas de árbol para tratar de comprender el uso que se hace del teorema de Bayes.

En este libro de texto, hay que destacar que en ninguno de estos apartados se explica cómo se usan las tablas de contingencia. Sin embargo, hay ejercicios resueltos tras las explicaciones de los contenidos que se resuelven utilizando estas tablas. En mi opinión, si se considera que las tablas de contingencia son una herramienta útil para resolver problemas de probabilidad, habría que introducirlas antes junto a algún otro contenido.

Santillana:

1- Se explican diferentes métodos de conteo para calcular el número de posibles resultados que se pueden obtener en un experimento aleatorio. Se explican las variaciones, permutaciones y combinaciones, y cuáles son las diferencias entre ellas. En este apartado, aparecen ejercicios contextualizados en la vida real en los que se pide que se cuenten todos los posibles resultados de ciertas situaciones.
2- Se define el espacio muestral de un experimento, los sucesos elementales y los sucesos compuestos, y se muestran a través de un ejemplo. También se definen los sucesos compatibles e incompatibles, además de los sucesos imposibles y también se muestran a través de otro ejemplo. En este apartado, hay ejercicios en los que hay que determinar el espacio muestral o algunos sucesos de una extracción de una carta de una baraja o de una extracción de una bola de una urna.
3- Se introducen las operaciones con sucesos. Se explica a través del lenguaje ordinario qué son la unión e intersección de dos sucesos, se introduce la notación matemática y se muestran a través de un ejemplo. También se explica qué son los sucesos complementarios y la diferencia de sucesos, y se muestra qué son a través de un ejemplo. Se enuncian las leyes de De Morgan, pero no se justifican. En este apartado, hay ejercicios en los que hay que calcular uniones, intersecciones y complementarios de ciertos sucesos, en problemas de extracciones de cartas de una baraja y de extracciones de bolas de una urna.
4- Se introduce la noción de probabilidad. Se introduce una interpretación intuitiva de su significado, explicando que cuanto más cercana al uno sea una probabilidad de un suceso, tendremos una mayor confianza en que pueda suceder ese suceso.

Después, se explica mediante el lenguaje ordinario la ley de los grandes números y se muestra cómo funciona a través de un ejemplo, pero tampoco se justifica porqué funciona. En este apartado, los ejercicios que aparecen no piden calcular probabilidades, sino que fomentan que los alumnos reflexionen acerca del significado de la probabilidad frecuencial a través de ejemplos contextualizados.

5- Se introduce la Regla de Laplace explicando que se debe utilizar cuando los sucesos que pueden suceder son equiprobables. Después, se ponen dos ejemplos de cómo debe utilizarse esta regla para resolver problemas. En este apartado, hay ejercicios en los que se pide calcular las probabilidades de ciertos sucesos en juegos de azar.

6- Se explican ciertas propiedades de las probabilidades, entre los que se incluyen los axiomas de Kolmogorov. Se muestra el funcionamiento de estas propiedades a través de un ejemplo. En este apartado, los ejercicios piden que se calculen las probabilidades de ciertos sucesos, con la particularidad de que los experimentos sobre los que se pide obtener un resultado son compuestos, por lo que obtener el resultado correcto requiere de cierta reflexión.

7- Se definen los experimentos compuestos. Después, se introducen los diagramas de árbol y las tablas de contingencia, cada uno de ellos a través de un ejemplo. En este apartado, hay ejercicios en los que se piden determinar el espacio muestral de experimentos en juegos de azar compuestos, dirigidos a que se resuelvan utilizando diagramas de árbol. También hay un ejercicio contextualizado en la vida real en la que hay que calcular la probabilidad de un suceso, dirigido de forma que se utilice una tabla de contingencia.

8- Se define la probabilidad condicionada a través del lenguaje ordinario y se establece la notación matemática. Se muestra cómo realizar los cálculos a través de un ejemplo. En este apartado, hay ejercicios en los que hay que calcular la probabilidad de un suceso determinado en problemas contextualizados.

Se introduce la regla del producto a través del lenguaje matemático y se justifica su uso a través de un ejemplo. Aquí hay ejercicios en los que se pide calcular la probabilidad de ciertos sucesos en problemas contextualizados en la vida cotidiana.

Se definen los sucesos independientes de forma intuitiva y de forma matemática. Se muestra a través de un ejemplo cómo se puede saber si dos sucesos son independientes o no. En esta parte, hay ejercicios contextualizados en juegos de azar en los que hay que calcular la probabilidad de ciertos sucesos, que a veces son dependientes y otras veces no.

9- Se enuncia el teorema de la probabilidad total desde un lenguaje matemático y se muestra su funcionamiento a través de dos ejemplos. En este apartado, los ejercicios piden calcular las probabilidades de ciertos sucesos en problemas contextualizados.

10- Se enuncia el teorema de Bayes de una manera puramente matemática y no se justifica de ninguna manera. Se muestra cómo se utiliza el teorema a través de un ejemplo. En este apartado hay problemas en los que hay que calcular la probabilidad de ciertos sucesos a posteriori en problemas contextualizados.

En ninguno de los tres libros de texto se presentan situaciones, problemas o argumentaciones paradójicas. Es de esperar, por tanto, que en la enseñanza habitual de la probabilidad no se empleen las paradojas, a pesar de su utilidad en la enseñanza de este tema.

Ahora vamos a ver cómo son los problemas de probabilidad que han aparecido en selectividad los últimos cinco años en Aragón, ya que estos problemas condicionan lo que los docentes enseñan.

En los diez exámenes que se han hecho en estos cursos (de 2016 a 2020), en todos ellos ha aparecido al menos un problema de probabilidad contextualizado en la vida real. En los exámenes de convocatoria ordinaria de 2017 y de convocatoria extraordinaria de 2018 aparece también como apartado de un problema de estadística un ejercicio de probabilidad similar a los problemas mencionados previamente.

Además, en el examen de convocatoria extraordinaria de 2017 y en el examen de convocatoria ordinaria de 2018 aparece también como apartado de un ejercicio de estadística el cálculo de algunas probabilidades de manera formal y sin ningún contexto que no sea puramente matemático.

De los catorce ejercicios y problemas presentes en estos exámenes, en ocho de ellos solo se trata el significado laplaciano de la probabilidad, en dos de ellos se trata la relación entre el significado frecuencial y el significado laplaciano de la probabilidad. En los otros cuatro, no se trata ninguno de estos significados de la probabilidad. Dos de los problemas en los que no se trabaja ninguno de estos significados tienen un contexto poco realista. En uno de ellos se dice que “la probabilidad de que apruebe el examen de Física es de

0,8”. Sin embargo, esta probabilidad no viene determinada por un experimento que se haya repetido ni por la ley de Laplace.

En cuanto a las técnicas que se tienen que utilizar en estos problemas, solo hay un problema en el que haya que utilizar el teorema de la probabilidad total (ordinario de 2020) y se puede resolver sin utilizarlo mediante técnicas de conteo sencillas. De forma similar, el teorema de Bayes solo se utiliza en dos de los problemas (exámenes ordinarios de 2019 y de 2020). El resto de los ejercicios y problemas se pueden resolver mediante técnicas más sencillas de conteo, utilizando el significado de la probabilidad de los axiomas de Kolmogorov, comprobando la independencia de sucesos, utilizando la fórmula de la probabilidad condicionada y utilizando las operaciones básicas entre sucesos.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

C1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

En (Anggara, Priatna y Juandi, 2018), se dice que a pesar de que la probabilidad es un concepto matemático que debería ser bien conocido por los estudiantes, ya que es una base para aprender otros conceptos matemáticos más avanzados, los estudiantes a menudo encuentran dificultades para comprender este objeto matemático.

Además, según algunos profesores con los que he podido hablar, hay muchos alumnos que no ven apenas contenidos de probabilidad en la educación secundaria hasta llegar a bachillerato, a pesar de que son parte de los currículos oficiales de las asignaturas de matemáticas.

Por tanto, no se supondrá que los alumnos tienen unos conocimientos amplios de la probabilidad. Se les pedirá, sencillamente, que conozcan algunas técnicas básicas de conteo y de combinatoria. También se espera que el alumnado tenga unas nociones intuitivas de la regla de Laplace, de la ley de los grandes números y de la independencia de sucesos, aunque no sean capaces de expresarlos con lenguaje matemático.

C2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Por el currículum aragonés de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de cuarto de la ESO, se debería suponer que los alumnos saben calcular las frecuencias absolutas y relativas de ciertos sucesos. Sin embargo, es muy posible que el alumnado no recuerde cómo hacerlo, por lo que solamente se supondrá que tienen nociones de cómo hacerlo y que una vez que se les recuerde serán capaces de calcular las frecuencias absolutas y relativas.

Como hemos dicho previamente, Anggara et al. (2018) afirman que la probabilidad es un área de las matemáticas en la que el alumnado suele toparse con dificultades y a menudo no comprenden bien el significado de este objeto matemático. Es decir, lo más probable es que el alumnado no haya tenido un aprendizaje significativo.

C3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Para comprobar que los alumnos posean estos conocimientos previos, se les observará mientras realizan los problemas más básicos de cada uno de los apartados para ver si son capaces de resolverlos.

Como solamente se va a dar por hecho que tienen nociones intuitivas de la regla de Laplace, la ley de los grandes números y la independencia de sucesos, no debería ser necesario comprobar si conocen ciertas fórmulas o teoremas relacionados con estos contenidos, ya que las fórmulas y teoremas que necesiten las explicaría el profesor.

Además, sería en cada uno de los contenidos cuando se observaría el nivel de conocimiento y comprensión que tienen los alumnos acerca de cada uno de ellos.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

D1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser principal que se utilizará para introducir la probabilidad será su utilidad en los juegos de azar, ya que puede servir para introducir el tema a través de situaciones que el alumnado puede reconocer fácilmente a la vez que le encuentran una utilidad de uso cotidiano desde la propia introducción del objeto. Para introducir esta razón de ser, se utilizará el problema de Monty Hall.

Otra razón de ser que utilizaré en la clase será la utilidad de la probabilidad para hacer predicciones utilizando su aspecto frecuencial. A través de la observación de los resultados de un experimento que se ha realizado en múltiples ocasiones, se puede hacer una predicción de cuál será el resultado más probable si el experimento se realiza en más ocasiones gracias a la ley de los grandes números. Para introducir esta razón de ser, se utilizará un problema en el que se pedirá al alumnado que razone si una moneda está trucada observando cuántas veces ha salido cara o cruz en varios lanzamientos.

D2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Las primeras teorías probabilísticas tienen su origen en la correspondencia que tuvieron Blaise Pascal y Pierre de Fermat en la que trataban de resolver problemas de juegos de azar (Gutiérrez, 2007, 7-20). Por tanto, la razón de ser histórica que dio origen a la probabilidad coincide con una de las razones de ser que emplearé para introducir el objeto matemático.

D3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

A lo largo de la unidad, quiero que se muestren con claridad las dos razones de ser de la probabilidad mencionadas anteriormente. Para eso, durante la unidad a menudo se presentarán problemas que estén relacionados con alguna de las razones de ser de la probabilidad y, en ocasiones, habrá problemas en los que estén presentes las dos razones de ser de la probabilidad.

Resolución de problemas surgidos de los juegos de azar:

Estos problemas serán los que servirán para introducir el tema de la probabilidad y con ellos se pueden introducir el significado clásico y el significado frecuencial de la probabilidad. Además, con estos problemas podrán ver que hay veces en las que no todos los sucesos son equiprobables.

A través de estos problemas se pueden introducir muchos de los contenidos del bloque de probabilidad que aparecen en el currículum aragonés, incluyendo la regla de Laplace, la ley de los grandes números y la probabilidad condicionada.

Problema 1:

Se lanzan dos dados con números del 1 al 6 en cada una de las caras, en las que cada uno de los números tiene la misma probabilidad de salir.

a) Para todos los números del 1 al 12, calcula cuál es la probabilidad de que la suma de los dos dados sea ese número.
b) Si la suma de los dados es 8, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido un 4 en alguno de los dados?
c) Hemos lanzado los dados 5 veces y en ninguna de las veces la suma de los dados ha sido 7. ¿Crees que en el siguiente lanzamiento la suma de los dados será 7? ¿Porqué?

Problema 2:

Tenemos una moneda y la hemos lanzado 1000 veces. Nos ha salido cara en 622 ocasiones.

a) Calcula con qué frecuencia relativa hemos obtenido cara y cruz.

b) ¿Dirías que la moneda está trucada? ¿Porqué?

c) Haz una aproximación de cuál es la probabilidad de obtener cruz en un lanzamiento con esta moneda.

Problema 3 (Monty Hall):

En un concurso de la tele, a un concursante se le ponen delante tres puertas, y se le dice que detrás de una de ellas hay un coche, mientras que detrás de las otras dos hay una cabra. Se le pide al concursante que elija la puerta que crea que tiene detrás el coche. Una vez el concursante ha elegido su puerta, el presentador abrirá una de las puertas que no ha elegido el concursante, una puerta que detrás tiene una cabra. Una vez hecho eso, el presentador le da al concursante la opción de cambiar la puerta que ha elegido. ¿Le conviene al concursante cambiar de puerta? Justifica tu respuesta.

Resolución de problemas de predicción:

En estos problemas, se presentan los resultados de un experimento realizado en múltiples ocasiones. Se pide a los alumnos que predigan qué ocurrirá en caso de que los experimentos se repitan en las mismas condiciones en un futuro o que extraigan conclusiones basándose en los datos del experimento.

Estos problemas pueden ser útiles para que comprendan el significado frecuencial de la probabilidad. Además, a través de estos problemas se puede tratar de detectar sesgos que tengan los alumnos a la hora de interpretar probabilidades frecuenciales, ya que, según Romero, Batanero y Ortiz (1996), es muy común que los alumnos de bachillerato no interpreten correctamente la probabilidad frecuencial.

Problema 4:

Se han lanzado 100 chinchetas y de ellas 68 han caído con la punta hacia arriba.

Si lanzamos otra vez 100 chinchetas, ¿cuántas crees que caerán con la punta hacia arriba?

Si lanzamos una sola chincheta, ¿cuál dirías que es la probabilidad de que caiga con la punta hacia arriba?

Problema 5:

Una jugadora de baloncesto ha tirado 150 tiros libres esta temporada y ha marcado 130 de esos tiros. Un partido en el que juega esta baloncestista va a acabar y su equipo va perdiendo por un punto, pero ella tiene dos tiros libres. Si marca los dos tiros ganará el partido, si marca sólo uno jugarán una prórroga y si falla los dos tiros perderá el partido.

a) ¿Cómo crees que acabará el partido?

b) ¿Es posible que esta jugadora no marque ninguno de los dos tiros?

D4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Es bastante probable que los alumnos sean capaces de resolver adecuadamente los problemas 1, 2 y 4, aunque sea sin utilizar un lenguaje matemático adecuado.

Estos problemas los vamos a utilizar para introducir las diferentes razones de ser de la probabilidad, de modo que se les pasarán estos problemas a los alumnos antes de que conozcan la teoría suficiente para resolver los problemas.

Los problemas 1 y 2 se realizarán en la introducción del tema, los problemas 4 y 5 se harán antes de enunciar la ley de los grandes números y el problema 3 se realizará antes de impartir la probabilidad condicional.

Estos problemas pueden servir a modo de evaluación del alumnado y se verá cuáles pueden ser las ideas preconcebidas de los alumnos acerca de la probabilidad. También es posible que estos problemas, especialmente los problemas 3 y 5, puedan servir para motivar al alumnado.

De todas formas, una vez que los alumnos hayan conocido la teoría correspondiente a cada uno de los problemas, los repetirán para afianzar los contenidos y para que puedan ver la mejoría que han tenido.

E. Sobre el campo de problemas

E1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

En cuanto al campo de problemas, vamos a diseñar varios problemas que estén en distintos campos de problemas. Durante la implementación de la unidad en el aula, se escogerán los campos de problemas en función de lo que se pretenda hacer en cada momento.

CP1: Se emplearán en el desarrollo de la unidad problemas paradójicos cuyas respuestas sean antiintuitivas. Estos problemas servirán, por un lado, para motivar al alumnado y, por otro lado, para introducir conceptos como la probabilidad condicionada o el teorema de Bayes. Por tanto, estos problemas se introducirían justo antes de explicar las técnicas necesarias para su resolución.

Un ejemplo de este tipo de problemas es el problema de Monty Hall ya mencionado anteriormente.

Otro ejemplo es la paradoja de la caja de Bertrand, y se enunciaría así:

Tenemos tres cajas en las que no podemos ver el interior. Las tres cajas tienen dos monedas en su interior. La primera caja tiene dos monedas de oro, la segunda una de oro y otra de plata, y la tercera dos monedas de plata. Si extraemos una moneda de una caja aleatoria y sacamos una moneda de oro, ¿qué probabilidad hay de que hayamos sacado la moneda de la primera caja?

CP2: Problemas en los que se intentará que el alumnado tenga que hacer una reflexión acerca del significado de la probabilidad. Aunque a veces pueda ser una reflexión superficial, creo conveniente que los alumnos se acostumbren a pensar en el significado y la interpretación de los resultados.

Un problema de este tipo es el problema de la baloncestista que se ha mencionado previamente, en el que los significados de los resultados son fácilmente interpretables debido al contexto del problema.

Otro problema diferente que no tuviese que ver con la probabilidad frecuencial y que se propondría al principio de la unidad sería el siguiente (Problema 6):

Lanzamos dos dados numerados del 1 al 6 y en cada dado todos los números tienen la misma probabilidad de salir. La suma de los dos números que aparezcan en los dados puede ir del 2 al 12. ¿Crees que todos los números del 2 al 12 tienen la misma probabilidad de ser la suma de los números de los dos dados?

El objetivo de este problema sería que se diesen cuenta a través de un ejemplo de que la regla de Laplace solo se puede aplicar cuando los sucesos posibles son equiprobables.

CP3: Problemas mecánicos en los que se pediría a los alumnos calcular la probabilidad de ciertos sucesos. Estos problemas pueden estar contextualizados, o bien en juegos de azar, o bien en contextos de selección. Estos problemas se utilizarían como método para afianzar las técnicas previamente vistas.

Un ejemplo de problemas de este tipo que podría ser una continuación del último problema expuesto sería el siguiente:

Se lanzan dos dados con números del 1 al 6 en cada una de las caras, en las que cada uno de los números tiene la misma probabilidad de salir. Para todos los números del 1 al 12, calcula cuál es la probabilidad de que la suma de los dos dados sea ese número.

Esto es parte del Problema 1 del apartado de las razones de ser de la probabilidad. En ese apartado, el problema completo tiene una parte relacionada con este tipo de preguntas que se resuelven de forma mecánica y se amplía con preguntas que hacer reflexionar al alumnado acerca de ciertos aspectos de la probabilidad.

Otro ejemplo de problemas de este tipo, pero poniendo ahora un ejemplo de problemas de selección es el siguiente (Problema 7):

En un curso de un instituto hay 80 estudiantes. De esos estudiantes, 48 estudian inglés, 20 estudian francés y 16 estudian los dos idiomas. Se selecciona a uno de los estudiantes aleatoriamente.

a) ¿Qué probabilidad hay de que no estudie ninguno de los idiomas?
b) Sabiendo que no estudia inglés, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?
c) Si tenemos los sucesos “el estudiante estudia inglés” y “el estudiante estudia francés”, ¿son independientes estos sucesos?

Aunque desde un punto de vista didáctico son los que, en mi opinión, resultan menos interesantes, también son los más similares a los ejercicios y problemas de los exámenes de acceso a la universidad, por lo que tendría una gran importancia el que los alumnos fuesen capaces de resolver correctamente estos problemas.

E2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Las paradojas están pensadas para que los alumnos vean la necesidad de mejorar las técnicas iniciales que conocen de antes. Se pretende que a través de estos problemas vean que en muchos casos puede resultar muy difícil resolver ejercicios y problemas únicamente a través de la intuición, por lo que serán una motivación para que quiera aprender nuevas técnicas como las fórmulas de la probabilidad condicionada o el teorema de Bayes, por ejemplo.

El segundo tipo de problemas servirán para que el alumnado se familiarice con las nuevas técnicas adquiridas de forma que comprendan por qué es necesario modificar las técnicas que conocían. A través de las preguntas de estos problemas, el alumnado deberá reflexionar sobre los aspectos de la probabilidad mas allá de la obtención de un resultado numérico, de forma que en un futuro sean capaces de identificar los aspectos clave de problemas relacionados con probabilidad y no se limiten siempre a calcular la probabilidad de ciertos sucesos.

El tercer tipo de problemas servirían, simplemente, para que el alumnado coja soltura utilizando las nuevas técnicas adquiridas. Una vez que los alumnos hayan visto que necesitan aprender nuevas técnicas y que han hecho problemas con los que han tenido que reflexionar sobre ciertos aspectos de la probabilidad, entonces se les pedirá que realicen estos problemas más mecánicos con los que interiorizarán los procedimientos de las nuevas técnicas adquiridas para que sean capaces de utilizar estas técnicas con más soltura.

E3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

En el aula se intentará introducir la mayoría de los contenidos a través de problemas que motiven al alumnado en la materia.

En esta unidad, los problemas motivadores serán las paradojas, por lo que se introducirán esos problemas antes de que los alumnos conozcan las herramientas necesarias para su resolución. Después, se explicará cómo se debe resolver el problema, introduciendo el nuevo contenido o la nueva técnica que se necesite en la resolución del problema.

Después de eso, se dará una breve explicación de cómo debe utilizarse la nueva técnica en los casos generales y se les mandará a los alumnos hacer problemas en los que tengan que reflexionar acerca de los métodos que utilicen.

Para finalizar, y una vez conozcan en mayor profundidad los contenidos previamente explicados, se les daría a los alumnos problemas mecánicos para que se familiaricen con las técnicas adquiridas y para asegurar que son capaces de resolver ejercicios típicos de las pruebas de acceso a la universidad.

F. Sobre las técnicas

F1. Diseña los distintos tipos de ejercicios y problemas que se van a presentar en el aula.

Tipo 1:

Problemas y ejercicios enfocados a definir el espacio muestral de un experimento.

Ejemplo (Problema 8):

Lanzamos una moneda al aire dos veces para ver si sale cara o cruz.

a) ¿Cuáles son los posibles resultados del experimento?
b) Si solo nos importa la cantidad de veces que haya salido cara o cruz, sin importar el resultado de la primera y de la segunda tirada posible, ¿cuáles son los posibles resultados del experimento?

Tipo 2:

Problemas y ejercicios dirigidos a resolverse mediante la regla de Laplace.

Ejemplo: El Problema 1 (sección D3, p. 17)

Tipo 3:

Problemas y ejercicios para comprender la ley de los grandes números.

Ejemplo: El Problema 2 (sección D3, p. 17)

Tipo 4:

Problemas y ejercicios para comprender la intersección y unión de sucesos y las leyes de De Morgan.

Ejemplo:

En una urna tenemos 7 bolas blancas numeradas del 1 al 7, 5 bolas rojas numeradas del 8 al 12, y 3 bolas azules numeradas del 13 al 15. Si escogemos una de las bolas aleatoriamente (Problema 9):

a) ¿Qué probabilidad hay de que la bola extraída sea una bola blanca con un número impar?
b) ¿Qué probabilidad hay de que la bola extraída sea una bola blanca o roja, con un número no múltiplo de 5?

c) ¿Qué probabilidad hay de que la bola extraída sea una bola roja o azul, o una bola con un número par?
d) Observa las respuestas de los apartados a) y c). ¿Están relacionadas las respuestas?

Tipo 5:

Problemas y ejercicios para utilizar la probabilidad condicionada y la independencia de sucesos.

Ejemplo: El Problema 7 (sección E1, p. 21)

Tipo 6:

Problemas y ejercicios para utilizar el teorema del a probabilidad total.

Ejemplo (Problema 10):

Una marca de móviles fabrica sus coches en tres fábricas diferentes. El 50 % de los móviles salen de la primera fábrica y 1 de cada 10 de estos móviles tienen errores de fábrica. El 30% salen de la segunda fábrica y 1 de cada 7 tiene errores. De la tercera fábrica salen el resto de los móviles y, en esta fábrica, 1 de cada 5 móviles tiene errores. ¿Qué porcentaje de los coches totales tiene errores?

Tipo 7:

Problemas y ejercicios para utilizar el teorema de Bayes.

Ejemplo: La paradoja de la caja de Bertrand (sección E1, p.20).

F2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Los problemas van haciéndose más complejos conforme se avanza en la unidad y cada vez hay que utilizar más técnicas para resolverlos. En los problemas de tipo 7, por ejemplo, en ocasiones habrá que utilizar casi todas las técnicas vistas a lo largo de la unidad.

En la tabla 1, vamos a poner qué técnicas son las más importantes para resolver cada tipo de problemas, es decir, qué técnicas son las que se desarrollan más con cada tipo de problemas. Eso no significa que no haya ejercicios que pertenezcan a un tipo concreto en los que haya que emplear técnicas que en la tabla aparecen relacionadas con otro tipo de problemas.

Tabla 1

Tipo de problemas	Técnicas
1	-Técnicas de conteo -Combinatoria
2	-Regla de Laplace
3	-Ley de los grandes números
4	-Operaciones entre sucesos (unión, intersección y sucesos complementarios) -Leyes de De Morgan
5	-Probabilidad condicionada -Independencia de sucesos -Diagramas de árbol -Tablas de contingencia
6	-Teorema de la probabilidad total -Diagramas de árbol
7	-Teorema de Bayes -Diagramas de árbol

F3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Para tratar de motivar al alumnado en el aprendizaje de las técnicas, se expondrá un problema de cada uno de estos tipos antes de impartir las técnicas necesarias para su resolución, de forma que los alumnos traten de crear sus propias técnicas para resolverlos.

Se espera que en ocasiones haya alumnos capaces de resolver los problemas antes de enseñarles a usar las técnicas. Tanto si ha habido alguien que haya resuelto correctamente el primer problema como si no, después de un tiempo suficiente para que hayan intentado resolver el problema, se hará una explicación de cómo debe resolverse y, si es posible, mostrar ejemplos de cómo lo han resuelto algunos alumnos. A través de esta metodología, se pretende que los alumnos vean la necesidad de aprender las nuevas técnicas.

Después de hacer eso, se les mandará a los alumnos hacer unos ejercicios del mismo tipo para que afiancen las técnicas aprendidas y sean capaces de manejarlas con soltura de forma que, en primer lugar, comprendan su funcionamiento y, en segundo lugar, sean capaces de resolver ejercicios típicos de los exámenes de acceso a la universidad.

G. Sobre las tecnologías

G1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

El objetivo de las tecnologías en esta unidad no será que los alumnos comprendan porqué las técnicas que se van a utilizar son matemáticamente válidas. El objetivo de las tecnologías será ayudar a mejorar la comprensión que el alumnado tenga acerca de las técnicas.

En este aspecto, las tecnologías serán un medio a través del cual poder alcanzar una comprensión adecuada de la probabilidad. Las tecnologías no serán un fin en sí mismas, ya que el conocimiento de estas tecnologías no supone necesariamente una mayor comprensión de la probabilidad.

Por tanto, solo se mencionarán las tecnologías de las técnicas cuya comprensión conlleve alguna dificultad para el alumnado y las tecnologías que ayuden a mejorar la comprensión de la probabilidad del alumnado. Eso implica que habrá algunas técnicas que no serán justificadas.

Se justificará el uso de técnicas como las tablas de contingencia y los diagramas de árbol diciendo que no son más que una forma de visualizar los datos de los que disponemos para hacerlos más comprensibles.

Las leyes de De Morgan o las fórmulas de la probabilidad de operaciones entre sucesos se justificarán de forma intuitiva utilizando los diagramas de Venn.

La fórmula de Bayes y la fórmula de la probabilidad total se justificarán a través de una demostración matemática simple, para que el alumnado no piense que son fórmulas que salen de la nada, aunque se intentará que los alumnos no memoricen estas justificaciones y que utilicen diagramas de árbol para resolver los problemas que requieran de estas técnicas.

El teorema de Bayes se demostrará directamente a través de la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}, \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

Por tanto,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

De modo que

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

La fórmula de la probabilidad total no se demostrará para el caso general, sino que se demostrará un caso particular y se dirá al alumnado que ese mismo método se puede generalizar.

Se demostrará que si A_1, A_2 y A_3 son tres sucesos disjuntos tales que su unión son el suceso seguro, entonces para cualquier suceso B,

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3).$$

Como la unión de A_1, A_2 y A_3 es el suceso seguro, $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$ y, además, como A_1, A_2 y A_3 son disjuntos, entonces $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$ y $A_3 \cap B$ también son disjuntos.

Por tanto, $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$.

Sabemos que $P(A_1 \cap B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1)$. Lo mismo sucede con $P(A_2 \cap B)$ y con $P(A_3 \cap B)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) \\ &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3). \end{aligned}$$

En algunos casos, si los alumnos no comprenden las tecnologías explicadas, se les mostrará a través de problemas sencillos que se puedan resolver con la técnica cuya tecnología se pretenda enseñar y con otra técnica diferente que los resultados no varían al cambiar la técnica.

Tabla 2

Técnica	Tecnología
Operaciones entre sucesos	Diagramas de Venn
Leyes de De Morgan	Diagramas de Venn
Diagramas de árbol	Forma de visualizar los datos
Tablas de contingencia	Forma de visualizar los datos
Teorema de la probabilidad total	Demostración matemática
Teorema de Bayes	Demostración matemática

En la tabla 2 se muestra qué tipo de justificaciones se van a realizar para cada una de las técnicas. Se considera que las tecnologías asociadas a las técnicas que no aparecen en la tabla 2 no ayudan a que el alumnado tenga una comprensión más profunda de la probabilidad.

G2. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Por norma general, para institucionalizar los distintos aspectos del objeto matemático, en primer lugar, se les darán problemas contextualizados en cuya resolución sea necesario utilizar estas técnicas. En segundo lugar, se les explicará la tecnología correspondiente a ese objeto para que, si no es muy difícil, los alumnos traten de deducir las reglas de la técnica por sí mismos, aunque sea aplicándolos directamente sobre los problemas. En tercer lugar, el profesor les explicará cómo se generalizan estas normas, es decir, institucionalizará la técnica. En cuarto lugar, si fuera necesario, se haría mayor hincapié en la tecnología asociada al objeto matemático. Si se cree necesario justificar más la validez de la técnica, se realizará algún ejercicio empleando dos técnicas. Por un lado, se utilizará una técnica anterior aceptada por el alumnado. Por otro lado, se utilizará la técnica nueva que se pretende justificar, para que el alumnado vea que el resultado no varía al cambiar la técnica.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

H1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores. Establece una duración temporal aproximada.

Esta unidad tendrá una duración aproximada de doce sesiones, aunque esto será adaptable en función de la velocidad a la que avance el alumnado y podrían necesitarse más sesiones, ya que, como se ha indicado en la sección C1, los estudiantes se topan con dificultades a menudo en el aprendizaje de la probabilidad.

En las primeras seis sesiones, aproximadamente, se verán los contenidos básicos de probabilidad: definición de probabilidad, significado clásico y frecuencial, unión e intersección de sucesos y sucesos complementarios.

En las siguientes tres sesiones, se verán técnicas más avanzadas, como la probabilidad condicionada, el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes, con las que podrán resolver problemas más complejos.

Las tres últimas sesiones se centrarán en la realización del examen, ya que una sesión será de preparación, otra sesión será de realización del examen, y en la última sesión se hará la corrección.

Sesión 1:

- Se presenta el problema de Monty Hall a los alumnos. Se les pedirá que den una respuesta rápida del problema y después se les explicará la solución correcta a través de contar todas las opciones posibles. (20 minutos)
- Se explica a los alumnos el concepto de probabilidad como número entre 0 y 1, de forma que cuanto más cercana sea a 1, más confianza tenemos en que pueda ocurrir un suceso. Se les explica la relación entre la probabilidad y los porcentajes. (5 minutos)
- Se proporciona a los alumnos ejercicios y problemas para que asimilen y trabajen con el concepto de la probabilidad. Aquí podría verse el Problema 8 (sección F1, p. 24). (25 minutos)

Sesión 2:

- Se proporciona a los alumnos un problema cuya resolución requiera usar la regla de Laplace y se les da tiempo para que intenten resolverlo. (10 minutos)

- Se resuelve el problema utilizando la regla de Laplace y se institucionaliza, dejando muy claro que para que esta regla funcione es imprescindible que los sucesos sean equiprobables. (10 minutos)
- Se les da problemas al alumnado para que los resuelvan utilizando la regla de Laplace. En estos problemas se les introducirá, sin hacerlo explícito, la unión e intersección de sucesos. Aquí se les daría los Problemas 6 y 1 (sección E1, p.20 y sección D3, p. 17, respectivamente). (30 minutos)

Sesión 3:

- Se proporciona a los alumnos un problema en el que se muestre la relación entre un suceso y el suceso complementario y se les pide que lo resuelvan. (10 minutos)
- Recordando los problemas de la sesión anterior, se institucionalizan la unión e intersección de sucesos, y también los sucesos complementarios. Se explica la notación de estos conceptos. (10 minutos)
- Se proporciona a los alumnos problemas para que utilicen estos nuevos conceptos y vuelvan a emplear la regla de Laplace. Se les dice que pueden utilizar los diagramas de Venn para comprender las relaciones entre los sucesos. Los diagramas de Venn no han sido utilizados previamente, por lo que el profesor dará una breve explicación de cómo utilizarlos. (30 minutos)

Sesión 4:

- Se proporciona a los alumnos unos problemas de unión e intersección de sucesos y sucesos complementarios. Por ejemplo, se les podría dar el Problema 9 (sección F1, p. 24). (10 minutos)
- Basándonos en el problema anterior y en diagramas de Venn, se les explican a los alumnos las leyes de De Morgan. (10 minutos)
- Se proporciona a los alumnos problemas para que utilicen las leyes de De Morgan en contextos aplicados de juegos de azar y en un lenguaje formal. (30 minutos)

Sesión 5:

- Se proporciona al alumnado un problema simple, el Problema 4 (sección D3, p. 18), por ejemplo, en el que se tenga que utilizar el significado frecuencial de la probabilidad para que intenten resolverlo y después se explica cómo resolverlo delante de la clase. (20 minutos)
- Se institucionaliza la ley de los grandes números (5 minutos)

- Se proporciona a los alumnos problemas para resolver empleando la ley de los grandes números. En esta parte se les darían a los alumnos los Problemas 2 y 5 (sección D3, p. 17 y sección D3, p. 18, respectivamente). (25 minutos)

Sesión 6:

- Se le dará al alumnado un problema largo en el que se trata la relación entre el significado frecuencial y el significado laplaciano de la probabilidad. Los alumnos tratarán de resolverlo durante prácticamente toda la sesión y en los últimos 10 minutos, el profesor explicará cómo debe resolverse.

Sesión 7:

- Se proporciona a los alumnos un problema en el que haya que utilizar la probabilidad condicionada para resolverlo. (15 minutos)
- Se institucionaliza la fórmula de la probabilidad condicionada y se explica cuándo son independientes dos sucesos. (10 minutos)
- Se proporciona a los alumnos una serie de problemas que deben resolver utilizando la fórmula de la probabilidad condicionada. Se les dice que pueden ordenar los datos en tablas de contingencia. Se les daría el Problema 7 (sección E1, p. 21) (25 minutos)

Sesión 8:

- Se proporciona a los alumnos un problema que se resuelva empleando el teorema de la probabilidad total, por ejemplo, el Problema 10 (sección F1, p. 25), y se les da tiempo para que intenten resolverlo. (20 minutos)
- Se les explica cómo se resuelve el problema y se institucionaliza el teorema de la probabilidad total. (10 minutos)
- Se les explica cómo hacer los problemas que requieran del teorema de la probabilidad total haciendo diagramas de árbol. (5 minutos)
- Se le da al alumnado problemas para que practiquen utilizando el teorema de la probabilidad total. (15 minutos)

Sesión 9:

- Se proporciona a los alumnos el problema de la paradoja de la caja de Bertrand (sección E1, p. 20), para que intenten resolverlo. Después se explica cómo se resuelve el problema. (20 minutos)

- Se institucionaliza el teorema de Bayes y se explica cuándo suele ser útil. Se les explica cómo utilizar los diagramas de árbol en los problemas que se resuelven utilizando el teorema de Bayes. (10 minutos)
- Se proporciona a los alumnos problemas para que los resuelvan utilizando el teorema de Bayes. (20 minutos)

Sesión 10:

- Se proporciona a los alumnos una serie de ejercicios y problemas para que repasen todos los contenidos vistos a lo largo de la unidad y se preparen para realizar el examen en la siguiente sesión.

Sesión 11:

- Se hace el examen de la unidad.

Sesión 12:

- Se les entrega a los alumnos el examen corregido y se explican en clase cuáles han sido los errores habituales de los alumnos y cómo corregirlos.

I. Sobre la evaluación

I1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

1- Los alumnos de primero de bachillerato de un instituto en el que hay dos clases tienen que decidir a dónde van a ir en su viaje de estudios: a Ámsterdam, a Brujas o a París. Van a tomar la decisión votando, y todos los alumnos deben votar. De los 25 alumnos de la clase A, 14 han dicho que prefieren ir a Ámsterdam y 4 a Brujas. De los 29 alumnos de la clase B, 7 quieren ir a Ámsterdam y 10 prefieren ir a Brujas.

   a) Si escogemos un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que quiera ir a París? (0,75 puntos)

   b) Si escogemos un alumno al azar y nos dice que quiere ir a Brujas, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B? (1 punto)

   c) Si escogemos dos alumnos diferentes, ¿cuál es la probabilidad de que los dos prefieran ir a Brujas? (0,75 puntos)

   d) Si escogemos a dos alumnos de diferente clase, ¿cuál es la probabilidad de que quieran ir al mismo sitio? (1 punto)

2- En una urna tenemos 7 bolas blancas, 5 bolas negras y 3 bolas azules.

   a) Si extraemos dos bolas con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas? (0,5 puntos)

   b) Si extraemos dos bolas sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas? (0,75 puntos)

   c) Si extraemos dos bolas sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca o la segunda bola sea negra? (1 punto)

   d) Extraemos dos bolas sin reemplazo. Tenemos los sucesos "la primera bola es azul" y "las dos bolas son del mismo color". ¿Son independientes estos sucesos? (0,75 puntos)

3- (Extraído del examen de la Prueba de Acceso a la Universidad de la convocatoria ordinaria de Aragón en 2019)

   Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3% de la población aragonesa son hombres y el 50,7% son mujeres. Del total de hombres, un 80,9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9% tienen menos de 65 años.

a) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años? (0,75 puntos)
b) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años? (1 punto)
c) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)
d) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer? (0,75 puntos)

I2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes

evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Por norma general, lo que más le interesa al alumnado de segundo de bachillerato es ser capaces de realizar exámenes de la Prueba de Acceso a la Universidad. Es por eso que el examen se centra más en ver si son capaces de resolver problemas que podrían entrar en esos exámenes que en comprobar si han adquirido un buen nivel de comprensión de los contenidos impartidos en clase.

Por tanto, en este examen se pretende evaluar la capacidad de los alumnos para resolver problemas similares a los que han aparecido en las Pruebas de Acceso a la Universidad de los últimos cursos.

Veamos qué se pretende evaluar con cada pregunta:

1- El primer problema está pensado para ver si los alumnos son capaces de calcular las probabilidades de algunos sucesos básicos conociendo ciertos datos, como la probabilidad de los sucesos complementarios, de las probabilidades condicionadas básicas o de la intersección de sucesos. Además, en este problema se evalúa si son capaces de identificar que se debe emplear el teorema de Bayes y si saben utilizarlo correctamente.
   Aunque esto no se calificará, el problema está pensado para que los alumnos puedan resolverlo más rápidamente si utilizan tablas de contingencia.
2- El segundo problema está diseñado para ver si los alumnos son capaces de ver la diferencia entre extraer bolas de una urna con y sin reemplazo. También se quiere ver si son capaces de calcular correctamente la probabilidad de la unión de dos sucesos y si saben cómo comprobar si dos sucesos son independientes o no.

3- El tercer problema está pensado para resolver un problema de probabilidad más relacionado con el significado frecuencial de la probabilidad. En este problema, se quiere comprobar que los alumnos sean capaces de entender bien la probabilidad condicionada. Se comprobará que sean capaces de utilizar adecuadamente la fórmula de la probabilidad condicionada, el teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total. Además, también se verá si son capaces de traducir unos porcentajes a probabilidades entre 0 y 1, y aplicar correctamente el concepto de independencia de sucesos, aunque no sea de forma explícita.

   Aunque no se evaluará, el problema está pensado para que lo resuelvan más fácilmente si utilizan diagramas de árbol.

I3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

1- Para empezar, se espera que la mayoría de los alumnos ordenen los datos utilizando una tabla de contingencia. También es posible que haya algunos alumnos que utilicen diagramas de árbol y otros que no utilicen ninguna de las dos.

   a) En este apartado, se espera que la mayoría de los alumnos lo respondan correctamente, calculando primero la cantidad de alumnos que prefieren ir a París y dividiéndolo por el total de los alumnos.

      Se espera que los alumnos den la solución en forma de fracción, aunque es de esperar que haya quien pase el número a decimales.

      Dentro de los errores esperables, es posible que haya alumnos que solo calculen la probabilidad de que un alumno escogido de la clase A (o de la clase B) prefiera ir a París y piensen que esa probabilidad es la misma en el total del instituto. También es posible que haya alumnos que calculen la probabilidad de que un alumno escogido de la clase A prefiera ir a París, haga lo mismo para un alumno de la clase B, sume las dos probabilidades y haga la media aritmética de las dos probabilidades.

   b) En este apartado, es de esperar que los alumnos que hayan hecho una tabla de contingencia o un diagrama de árbol, utilicen lo que han hecho para recopilar los datos y dar como resultado $\frac{10}{14}$, es decir, la cantidad de alumnos de la clase B que quieren ir a Brujas entre la cantidad total de alumnos que quieren ir a

Brujas. De los que obtengan este resultado, probablemente algunos no simplificarán el resultado.

También es de esperar que haya alumnos que apliquen directamente el teorema de Bayes.

El error que creo que es más probable encontrar es que no sepan identificar correctamente la probabilidad condicionada, es decir, que en vez de calcular la probabilidad de que un alumno que quiera ir a Brujas sea de la clase B, calculen la probabilidad de que un alumno de la clase B quiera ir a Brujas.

c) Creo que este apartado en general saldrá bien, y que los alumnos calcularán la probabilidad de que el primer alumno escogido al azar quiera ir a Brujas por la probabilidad de que el segundo alumno escogido al azar quiera ir a Brujas sabiendo que el primer alumno quería ir a Brujas, aunque lo más probable es que no pongan la fórmula de forma explícita.

   También es posible que hagan la probabilidad de que el primer alumno quiera ir a Brujas por la probabilidad de que el segundo alumno quiera ir a Brujas, sin tener en cuenta que no pueden ser el mismo alumno, es decir, que pongan como resultado $\left(\frac{14}{54}\right)^2$, en lugar de $\frac{14}{54} \cdot \frac{13}{53}$.

d) En este apartado, el alumnado debería calcular por separado la probabilidad de que los alumnos escogidos quieran ir a Ámsterdam, a Brujas y a París y sumar las tres probabilidades.

   Dentro de los errores esperables, es posible que no tengan en cuenta la condición de que los dos alumnos escogidos tienen que ser de clases diferentes. También es posible que calculen la probabilidad de que los dos alumnos quieran ir a Ámsterdam y a París, pero que para la probabilidad de que los dos alumnos quieran ir a Brujas utilicen el resultado del apartado anterior (que para este apartado no sirve).

2- En los apartados a) y b), se espera que los alumnos respondan correctamente.

Es posible que haya alumnos que no sepan la diferencia entre los dos casos y que pongan la misma respuesta en los dos apartados. También es posible que sepan qué son los reemplazos, pero no sepan cómo se les llama. Por tanto, puede que pongan la respuesta del segundo apartado en el primero y viceversa.

c) En este apartado, se espera que los alumnos apliquen correctamente la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos. Es posible que varios alumnos dibujen un diagrama de Venn para saber cómo deben emplear la fórmula.

   El error que más espero que suceda es que simplemente sumen la probabilidad de los dos sucesos y no resten la probabilidad de la intersección de los dos sucesos.

   También creo que es posible que los alumnos hagan el problema como si fuese con reemplazo.

d) En este apartado esperamos que comprueben si los sucesos son independientes a través de alguna fórmula. Si llaman a los sucesos A y B, probablemente tratarán comprobar que $P(A|B) = P(A)$. Aunque es menos probable que lo hagan, puede que comprueben si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Se espera que lleguen a la conclusión de que los sucesos no son dependientes.

   Es posible que haya alumnos que no sepan cómo comprobar matemáticamente si dos sucesos son independientes, pero digan que lo son porque lo ven de forma intuitiva.

   Al igual que en el problema anterior, es posible que hagan el problema como si fuese con reemplazo.

3- En este problema, es posible que parte del alumnado haga diagramas de árbol o tablas de contingencia para ordenar los datos, aunque también se espera que la mayoría de ellos no los usen.

a) En este apartado, se evaluará si saben calcular la probabilidad de la intersección de sucesos conociendo la probabilidad condicionada. Lo esperable es que la mayoría de los alumnos sepan hacerlo correctamente.

   En cuanto a los errores, es posible que los alumnos no sepan qué fórmula deben aplicar en este caso, o incluso que sí sepan qué fórmula aplicar pero que no sepan resolver el problema.

b) En este apartado, se comprobará que los alumnos sepan aplicar el teorema de la probabilidad total. Se espera que los alumnos que hayan ordenado los datos con diagramas de árbol o con tablas de contingencia no utilicen la fórmula explícitamente, y que aquellos que no los hayan utilizado sí que lo hagan.

   Es posible que haya alumnos que no sepan aplicar la fórmula correctamente o que digan que la respuesta es la probabilidad de tener menos de 65 años siendo mujer (o siendo hombre).

Es también probable que haya alumnos que no sepan con certeza si deben utilizar la fórmula de la probabilidad total o el teorema de Bayes y pongan la fórmula equivocada.

c) En este apartado, se verá si los alumnos saben aplicar el teorema de Bayes. Al igual que en el apartado anterior, los alumnos que hayan utilizado diagramas de árbol o tablas de contingencia puede que no utilicen la fórmula explícitamente, sino que hagan los cálculos sobre el diagrama o sobre la tabla, mientras que quienes no los utilicen deberán emplear la fórmula del teorema de Bayes.

   Al igual que en el apartado anterior, es posible que haya alumnos que no sepan si deben aplicar el teorema de la probabilidad total o el teorema de Bayes y pongan la fórmula incorrecta.

   También es posible que pongan como respuesta la probabilidad de que escogiendo una mujer esta tenga menos de 65 años.

d) En este apartado, lo más sencillo sería calcular la probabilidad de que las tres personas elegidas sean hombres y hacer 1 menos el resultado. Para eso, se debería pasar el porcentaje de hombres a un número entre 0 y 1 (0,493 concretamente) y elevar ese número al cubo.

   Puede que haya alumnos que traten de calcular todas las combinaciones en las que se seleccione a alguna mujer y sume la probabilidad de que ocurra cualquiera de ellas, pero me imagino que no acabarían el problema porque sería muy tedioso hacerlo de esa forma.

   También creo que puede ser posible que algunos alumnos hagan el cálculo de este apartado utilizando como probabilidad de ser hombre o mujer 0,5.

I4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Como el objetivo de este examen es comprobar si los alumnos serían capaces de resolver ejercicios habituales que podrían entrar en la Prueba de Acceso a la Universidad, emplearé criterios de calificación similares a los empleados los últimos cinco años en los exámenes de selectividad en Aragón.

1- a) (0,75 puntos) Se asignan 0,75 puntos si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).

b) (1 punto) Por poner la fórmula correcta (teorema de Bayes u otra si es correcta), 0,25 puntos. Sustituir correctamente y calcular, 0,75 puntos. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con 1 punto el apartado.

c) (0,75 puntos) Se asignan 0,75 puntos si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).

d) (1 punto) Se deben calcular tres probabilidades por separado y después sumarlas. Por cada probabilidad que esté bien calculada se asignan 0,25 puntos y por hacer la suma se asignan 0,25 puntos, si alguna de las tres probabilidades está bien calculada.

2- a) (0,5 puntos) Se asignan 0,5 puntos si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).

b) (0,75 puntos) Se asignan 0,75 puntos si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).

c) (1 punto) Si la respuesta es correcta se asigna 1 punto. Si el proceso es correcto, pero se hace el problema como si fuera con reemplazo se asignan 0,5 puntos.

d) (0,75 puntos) Se asignan 0, 25 puntos si se plantea correctamente la forma de comprobar que los dos sucesos son independientes. Sustituir correctamente y calcular, 0,5 puntos.

3- Los criterios de calificación de este problema son exactamente los mismos que se emplearon en la corrección del examen de la prueba ordinaria de selectividad de Aragón en 2019 (el problema está extraído de ahí).

a) (0,75 puntos) Se asignan 0,75 puntos si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado)

b) (1 punto) Por poner la fórmula correcta (teorema de la probabilidad total u otra si es correcta), 0,25puntos. Sustituir correctamente y calcular, 0,75 puntos. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con 1 punto el apartado.

c) (1 punto) Por poner la fórmula correcta (teorema de Bayes u otra si es correcta), 0,25 puntos. Sustituir correctamente y calcular, 0,75 puntos. Si usan algún valor incorrecto de apartados anteriores, se dará por correcto para este apartado. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con 1 punto el apartado.

d) (0,75 puntos). Si lo hacen pasando al complementario: 0,25 puntos por pasar correctamente al complementario y 0,5 puntos por calcular la probabilidad pedida.

Si lo hacen directamente, se restan 0,25 puntos por cada combinación que se dejen o de la que no calculen la probabilidad correctamente.

Bibliografía

Anggara, B., Priatna, N., y Juandi, D. (2018). Learning difficulties of senior high school studentsbased on probability understanding levels. *Journal of Physics: Conference Series*, *1013*, 1-7. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1013/1/012116/pdf

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas G. R., y Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades Educativas*, (261), 78-84. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Novedades_Batanero.pdf

Berenguer, L., y Pérez, R. (2001). *Materiales para construir las matemáticas en la E.S.O.: Guía didáctica*. Proyecto Sur.

Bescós i Escruela, E., y Pena i Terrén, Z. (2016) *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Oxford University Press España S. A.

Borovcnik, M. (2012, noviembre 5). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, (2), 5-27. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.32

Carranza, P., y Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in french education. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, y A. Rossman (Eds.), Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Granada: ICMI and IASE. www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt08/T1P2_Carranza.pdf.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas 1.* Anaya.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas 2.* Anaya

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M. J., y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3.* Anaya.

Colera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Colera Cañas, R., y Colera Cañas, J. (2016). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Anaya.

Colera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Colera Cañas, R., y Colera Cañas, J. (2016). *Matemáticas II*. Anaya.

Colera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Colera Cañas, R., y Santaella Fernández, E. (2015). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I.* Anaya.

Gámez Pérez, J. C., Marín García, S., Martín Palomo, A., Pérez Saavedra, C., y Sánchez Figueroa, D. (2016) *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Santillana.

Gómez, S. E. (2000, noviembre). ¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos? Una propuestadidáctica para el tratamiento de la Probabilidad en Bachillerato. *SUMA*, *1*(35), 55-62. http://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/35/SUMA_35.pdf

Gutiérrez, S. (2007, junio). Los inicios de la teoría de la probabilidad. *SUMA*, (55), 7-20. http://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/55/SUMA_55.pdf

Serrano, L., Batanero, C., y Ortiz, J. J. (1996, junio). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. *Suma*, *1*(22), 43-49. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/interpre.pdf

Sánchez Sánchez, E., y Valdez Monroy, J.C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas(eds.), Investigación en Educación Matemática XIX pp. 89-103. Alicante: SEIEM. http://funes.uniandes.edu.c