4次元ヒステリシス回路族の分岐現象について

著者	三堀 邦彦, 斉藤 利通, 斉藤 兆古
出版者	法政大学計算センター
雑誌名	法政大学計算センター研究報告
巻	8
ページ	41-48
発行年	1995-03-31
URL	http://doi.org/10.15002/00024695

4次元ヒステリシス回路族の分岐現象について

三堀 邦彦　斉藤 利通　斉藤 兆古
法政大学工学部†

1つのヒステリシス素子を含む4次元自律系回路の族について考察する。この回路族の動作は、ヒステリシス的に互いに切替わる、2つの対称な3次元線形方程式で記述される。本系から2次元リターンマップ、ヤコビ行列、ヤコビアンの解析式を各々導出し、次の新結果について示す:

(1) 先の解析式を用いたリアプノフ指数の計算による現象の分類、(2) Period doublingによるカオスへのルートとcrisisによるハイパーカオスへの遷移、(3) これらの現象の基本的な分岐、(4) 実装回路例の提案と回路実験による現象の一部の確認.

1. まえがき

自律系カオス発生回路の研究において、4次元以上の高次元系が注目されている。特に4次元系ではいくつかの実験結果が報告されており1)-5)、5次元以上の系の解析はまだ始められたばかりである6)-7)。高次元系はハイパーカオスなどの、3次元系には見られない現象を呈する場合があり、非常に興味深い。ハイパーカオスは、Rössler 8) によって導入された高次元系特有のカオスであり、正のリアプノフ指数を2つ以上持つカオスアトラクタとして定義づけられる。その系のdynamicsは、軌道を2つ以上の方向に拡大させる。こうした現象は高次元系におけるカオスへのルート、カオスの分類、カオス発生の物理的メカニズムなどの重要な基本問題9)10) と密接に関連している。だが高次元系の解析は、その複雑さのため困難である。4次元系は高次元系の基礎として重要であり、詳細な解析が必要だが未だ不十分である。それゆえ解析的な取り扱いが容易でパラメータの物理的意味がつかみやすい、簡素な4次元カオス発生回路に的を絞って考える必要がある。そこで我々は、図1に示す自律系回路族に注目する。本回路族は次の区分線形特性を持つ電圧制御型抵抗NRを含む:

$$v = f(i) = r_1 i + \frac{r_1 + r_2}{2}(|i - \frac{V}{r_2}| - |i + \frac{V}{r_2}|) \quad (1)$$

NRには微小インダクタ L_0が直列に接続されている。線形回路 Nはメモリ素子 (L or C) と正負線形抵抗から構成される。Nにおいてメモリ素子が2個で、キャパシタのタイセットおよびインダクタのカットセットがない場合、本回路族の動作は次の正準型方程式で記述される2):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} (z - X_1)$$
$$\varepsilon \dot{z} = X_1 - g(z) \quad (2)$$

ただし、$g(z) = 0.5(1+\eta^{-1})(|z-\eta| - |z+\eta|)$であり、"."は$\tau'$による微分を表す。$\alpha_i$, β_iは回路から定まるパラメータであり、εは微小パラメータである。X_1, z, ε, gは各々v, i, L_0, fに比例している。L_0を短絡したとき、すなわち$\varepsilon \to 0$としたとき、(2)の解は gの安定な枝に強く拘束され、gはヒステリシス的になる。このとき(2)は次のように簡略化される2):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} - h(X_1) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ただし、

$$h(X_1) = \begin{cases} 1 & \text{for } X_1 \geq -1 \\ -1 & \text{for } X_1 \leq 1 \end{cases}$$

ここで h は正規化されたヒステリシスであり、X_1が左側のしきい値-1を打つと hが1から-1に切

†〒184 東京都小金井市梶野町3-7-2

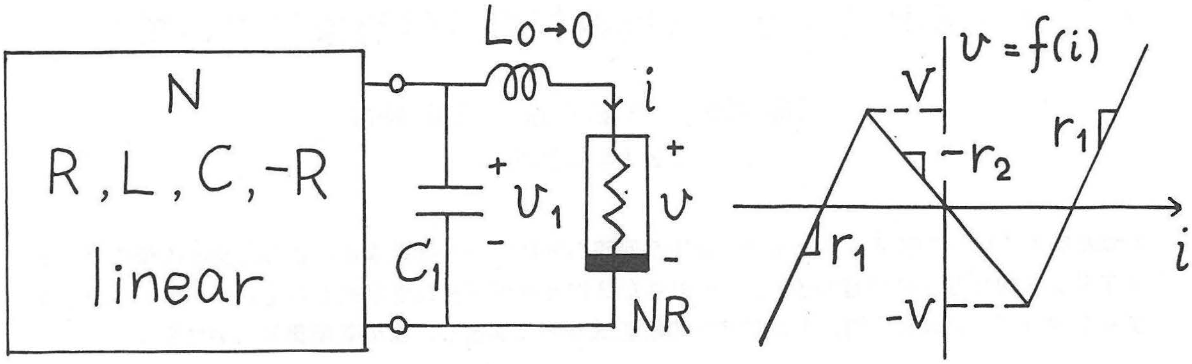
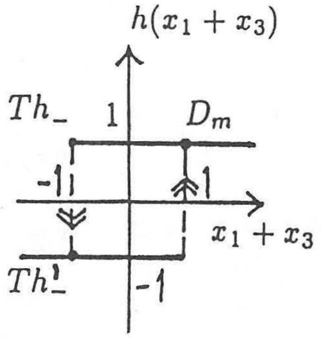
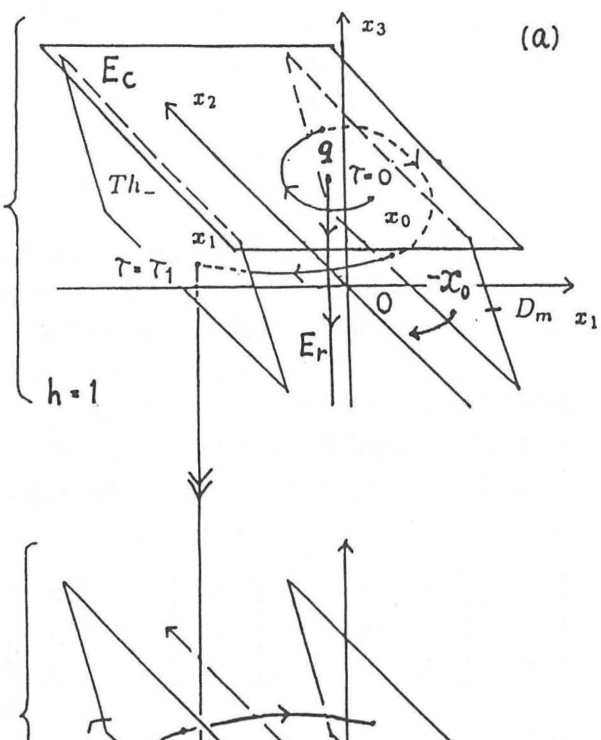


図 1 自律系カオス発生回路族.





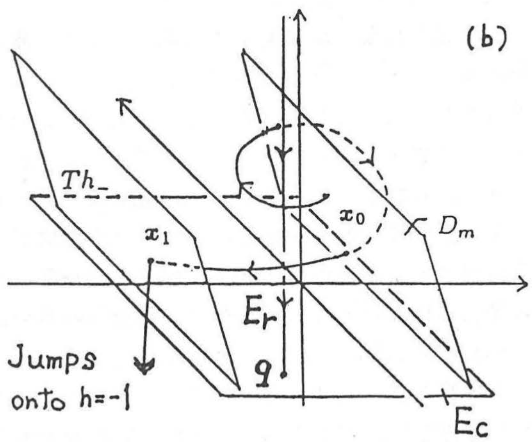


図 2 解の動き　(a) $\lambda > 0$, (b) $\lambda < 0$.

替わる。対称な切替わりも同様である。以後 z は省略する。(3) の係数行列が複素固有値：$\Delta \pm j\omega$ と実固有値：Λを持つ場合を考える。そのとき、変換：

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \delta & \omega & -\Lambda \\ \Delta^2-\omega^2 & 2\Delta\omega & \Lambda^2 \end{bmatrix}, \omega\tau' = \tau.$$

$$(\text{ab. } \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

を用いれば、(3) は次のジョルダン形の方程式に変換できる 3)：

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 1 & 0 \\ -1 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - h(x_1+x_3) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \right]$$

$$(\text{ab. } \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - h(x_1+x_3)\boldsymbol{q})) \tag{5}$$

ただし、"$\cdot$"$= d/d\tau, \delta = \Delta/\omega, \lambda = \Lambda/\omega, (q_1, q_2, q_3)^T = \boldsymbol{B}^{-1}(p_1, p_2, p_3)^T$である。上式の h の切替わりは X_1 に $x_1 + x_3$を代入して得られる。文献 5) はδとλがともに正の場合に的を絞り、基本的な分岐現象について解析している。本稿ではより広い、次のようなパラメータレンジについて考える：

$$q_1 > 0, q_2 > 0, \lambda q_3 > 0. \tag{6}$$

文献 6) と同様の手法により、本系から 2 次元リターンマップ、そのヤコビ行列およびヤコビアンの解析式を導出することができる。そして次の結果を示す：

1. 新しい実装回路例を提案する。本回路はδの正負およびλの正負の全ての場合を実現できる。
2. 先の解析式を用いてリターンマップのアトラクタとそのリアプノフ指数 11)12) を計算する。これにより period doubling によるカオスへのルート、および crisis13) によるハイパーカオスへの遷移が明らかにされた。こうしたルートは現在までの解析 3)5) では確認されていない。
3. δが正および負の場合について、現象の基本的な分岐を調べる。
4. 現象の一部を回路実験により確認する。

なお 1. は文献 3) の拡張版であり、2.3.4. は新結果である。

2. 回路とリターンマップ

ジョルダン形の解の動きを図 2 に示す。リターンマップを定義するために次の領域を考える (図 2 参照)：

$D_m = \{(\boldsymbol{x}, h) | x_1 + x_3 = 1, h = 1\}$: マップの Domain,
$Th_- = \{(\boldsymbol{x}, h) | x_1 + x_3 = -1, h = 1\}$: h のしきい値,
$Th'_- = \{(\boldsymbol{x}, h) | x_1 + x_3 = -1, h = -1\}$: Th_-の投影,
$E_c = \{(\boldsymbol{x}, h) | x_3 = q_3, h = 1\}$: 　複素固有空間,
$E_r = \{(\boldsymbol{x}, h) | x_1 = q_1, x_2 = q_2, h = 1\}$: 実固有空間.

図 2(a) に$\lambda > 0$の場合を示す。$\lambda q_3 > 0$より $q_3 > 0$、すなわち $q_1 + q_3 \geq -1$ であることに注意する。解は E_cに沿って回転しながら、E_rに沿って平衡点$\boldsymbol{q}$から発散する方向に動く。D_m上の点$\boldsymbol{x}_0 \equiv (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ を出発する解が、Th_-上の点$\boldsymbol{x}_1 \equiv (x_{11}, x_{21}, x_{31})$ を打つ場合を考え、その打った時間をτ_1とする。解は Th'_-上の同じ点$\boldsymbol{x}_1$にジャンプする。ベクトル場が対称であるため、Th'_-上の点$\boldsymbol{x}_1$を出発する解と D_m上の点$-\boldsymbol{x}_1$を出発する解は対称となる。そのとき D_m上の任意の点を座標 x_2, x_3で表現すれば、次の 2 次元リターンマップが定義できる：

$$F : D_m \to D_m, \ (x_{20}, x_{30}) \to -(x_{21}, x_{31}). \tag{7}$$

図 2(b) に$\lambda < 0$ の場合を示す。$q_3 < 0$ であり、$\boldsymbol{q}$ が (a) と対称な位置にあることに注意する。解は回転しながら、E_rに沿って$\boldsymbol{q}$に収束する方向に動く。$q_1 + q_3 \leq -1$ であり解が Th_-を打つ場合、上のリターンマップが定義できる。マップ Fの像は、切替わり時間τ_1と初期点$\boldsymbol{x}_0$を次式に代入して計算できる：

$$(x_{21}, x_{31})^T = \boldsymbol{S}(e^{A\tau}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}), \tag{8}$$

ただし $e^{A\tau}$は遷移行列であり、

$$\boldsymbol{S} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

τ_1は次の超越方程式を解くことによって得られる：

$$\boldsymbol{w}(e^{A\tau}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}) = -1, \tag{9}$$

ただし$\boldsymbol{w} \equiv (1, 0, 1)$ である。実際の計算において、本方程式はニュートン法と 2 分法を基礎とした高速アルゴリズム 5) を用いて解くことができる。また $\boldsymbol{DF}$をリターンマップのヤコビ行列とすると、$\boldsymbol{DF}$ は次の解析式で計算できる：

$$\boldsymbol{DF} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{q})\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{q})}) e^{A\tau_1}\boldsymbol{T}, \tag{10}$$

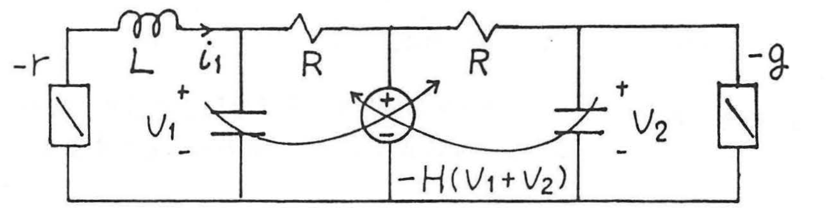
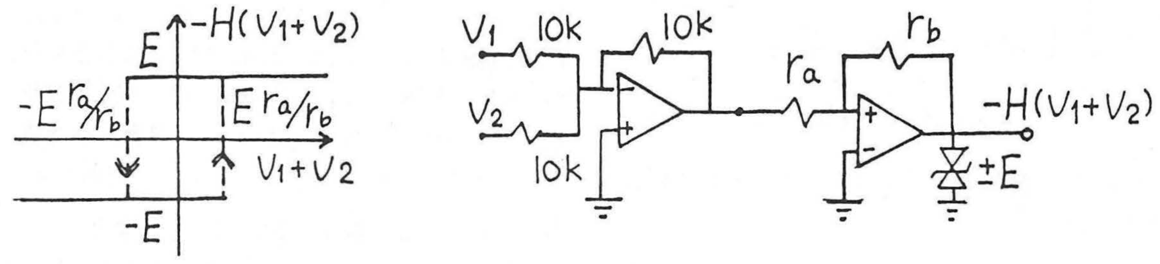
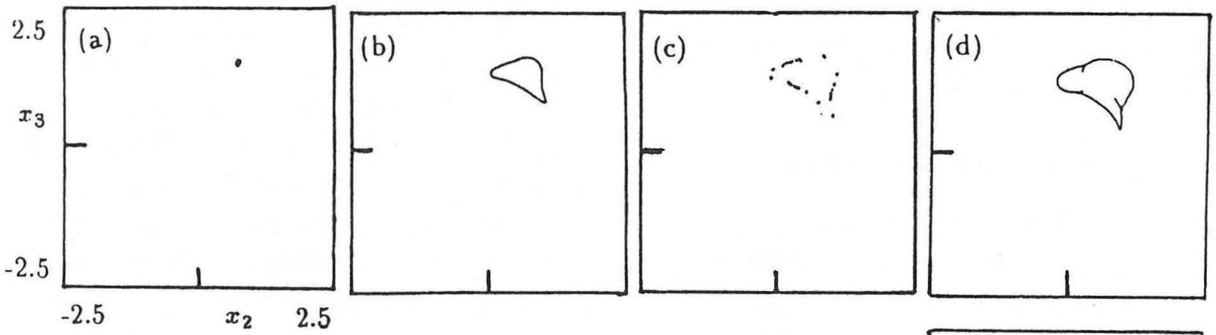


図 3 実装回路例.





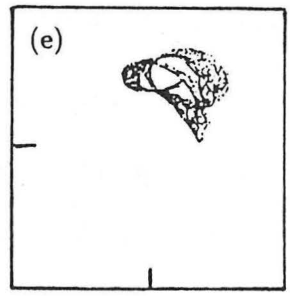


図 4 典型的なリターンマップからのアトラクタ

$\alpha = 10, \beta =, 0.16, \lambda = 0.12.$ $(\delta = 0.1)$

(a) 1 周期点 $(\eta = 1.95)$, (b) トーラス $(\eta = 1.7)$, (c) 24 周期点 $(\eta = 1.57)$,
(d) 線素拡大カオス $(\eta = 1.45)$, (e) 面積素拡大カオス $(\eta = 1.35)$.

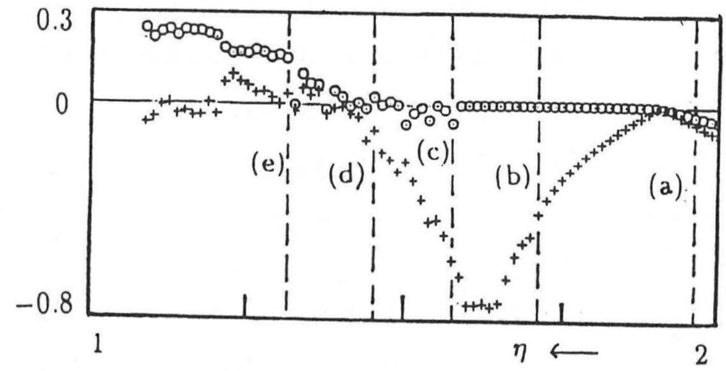


図 5 リアプノフ指数

$\alpha = 10, \beta =, 0.16, \lambda = 0.12.$ $(\delta = 0.1)$

○= 最大 1 次元リアプノフ指数 μ_1,
+= 2 次元リアプノフ指数 μ_2.

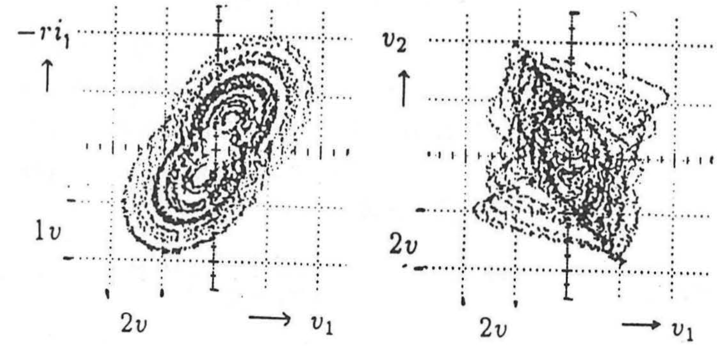


図 6 面積素拡大カオスのアトラクタ

ただし$\boldsymbol{I}$は単位行列であり、

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

さらにヤコビアン$|\boldsymbol{DF}|$は次式で計算できる：

$$|\boldsymbol{DF}| = |e^{A\tau_1}|\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{q})}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{q})} \tag{11}$$

これらはマップの像$\boldsymbol{x}_1$と$\boldsymbol{x}_0$, τ_1 を代入して計算される。以上の式を用いて、リターンマップのアトラクタとそのリアプノフ指数 11)12) を計算することができる。マップは2次元であり、μ_1, μ_2をそれぞれ最大1次元、2次元リアプノフ指数とする。μ_1が正であればマップは線素を拡大し、μ_2が正であればマップは面積素を拡大する。本研究ではこれらを用いて、本系が呈するカオスを次のように分類する：

(i) 線素拡大カオス $\mu_1 > 0 > \mu_2$,
(ii) 面積素拡大カオス $\mu_1 > \mu_2 > 0$,
(iii) ハイパーカオス $\mu_2 > \mu_1 > 0$.

3. 実装回路

図3に実装回路例を示す。$-r$は電流制御型線形負性抵抗、$-g$は電圧制御型線形負性コンダクタであり、$-H$は次のようなヒステリシス特性を持った従属電圧源である 6)：

$$-H(v_1+v_2) = \begin{cases} E & \text{for } v_1+v_2 \geq -E/\eta \\ -E & \text{for } v_1+v_2 \leq E/\eta \end{cases} \tag{12}$$

v_1+v_2が左側のしきい値$-Er_a/r_b$を打つとHはEから$-E$に切替わる。対称な切替わりも同様である。無次元化した変数およびパラメータ：

$$\tau = \frac{\omega}{RC}t, \qquad ".\," = \frac{d}{d\tau},$$

$$x_1 = \frac{\eta v_1}{E}, \ x_2 = \frac{\eta}{\omega E}\{-(1+\Delta)v_1 + Ri_1\}, x_3 = \frac{\eta v_2}{E},$$

$$\delta = \Delta/\omega, \qquad \lambda = \Lambda/\omega,$$

$$q_1 = \frac{\beta}{1-\beta}\eta, \ q_2 = \frac{1}{\omega}\{\frac{1}{\beta} - (1+\Delta)\}q_1, \ q_3 = \frac{\eta}{\gamma-1},$$
$$\Delta = \frac{\alpha\beta-1}{2}, \ \omega = \sqrt{\alpha(1-\beta)-\Delta^2}, \quad \Lambda = \gamma - 1,$$
$$\alpha = \frac{R^2C}{L}, \quad \beta = \frac{r}{R}, \quad \gamma = Rg, \qquad \eta = \frac{r_b}{r_a}. \tag{13}$$

を用いれば、本回路の動作は式(5)で記述される。基本的なパラメータは$(\alpha,\beta,\gamma,\eta)$の4つである。しかし、我々はこれらの代わりに$(\alpha,\beta,\lambda,\eta)$をパラメータとみなし、それから$(\delta,\gamma,q_1,q_2,q_3)$を決定する。

ここでαは発振周波数を、βとλは各々負性抵抗と負性コンダクタによるダンピングを、ηはヒステリシスの幅を制御するパラメータである。$q_3 \propto 1/\lambda$であることに注意する。ηを減少させると、ジョルダン形の平衡点は直線：$\Gamma = \{(\boldsymbol{x},h)|x_1 = \frac{x_2}{m_1} = \frac{x_3}{m_2}\}$に沿って原点に近づく。ただし、$m_1 = \frac{1}{\omega}\{\frac{1}{\beta} - (1+\Delta)\}$, $m_2 = \frac{1-\beta}{\beta(1-\gamma)}$である。本回路は$\delta$の正負および$\lambda$の正負の全ての場合を実現できる。簡単のため$\eta$を制御パラメータに選び、他のパラメータ$(\alpha,\beta,\lambda)$を一定として系の状態の変化を調べる。$\delta$が$\alpha$と$\beta$から、$\gamma$が$\lambda$から決定されることに注意する。まず、$\delta$と$\lambda$が共に正の場合を考える。図4に$\eta$を減少させたときの典型的なリターンマップのアトラクタを示す。また図5にこれに対応するリターンマップからのリアプノフ指数を示す。1周期点、トーラス、24周期点、線素拡大カオス、面積素拡大カオスは各々図5中の(a)から(e)の点で観測された。(c)から(d)においてはμ_1が負値から正値に移り変わっていく様子が表れており、この変化は period doubling によるものである。図6に回路実験における面積素拡大カオスのアトラクタを示す。以上の結果からηを減少させたとき、1周期点から面積素拡大カオスまでおおよそ次のように現象が変化していることがわかる:

1周期点 → トーラス → (phase locking) → 24周期点 → (period doubling) → 線素拡大カオス → 面積素拡大カオス.

次にδが負、λが正の場合を考える。図7にηを減少させたときの典型的なリターンマップのアトラクタを示す。また図8にこれに対応するリターンマップからのリアプノフ指数を示す。1周期点、ハイパーカオス、面積素拡大カオスは各々図8中の(f)から(h)の点で観測された。1周期点は急激にハイパーカオスに変化している。この変化は crisis13) によるものと考えられる。図9に回路実験におけるハイパーカオスのアトラクタを示す。以上の結果からηを減少させたとき、1周期点から面積素拡大カオスまでおおよそ次のように現象が変化していることがわかる:

1周期点 → (crisis) → ハイパーカオス → 面積素拡大カオス

図10に(λ,η)の2パラメータによる rough な分岐図を示す。(A)はδが正の場合、(B)はδが負の場合である。図6および図9の分岐は、各々(A)および(B)の破線に沿って観測された。

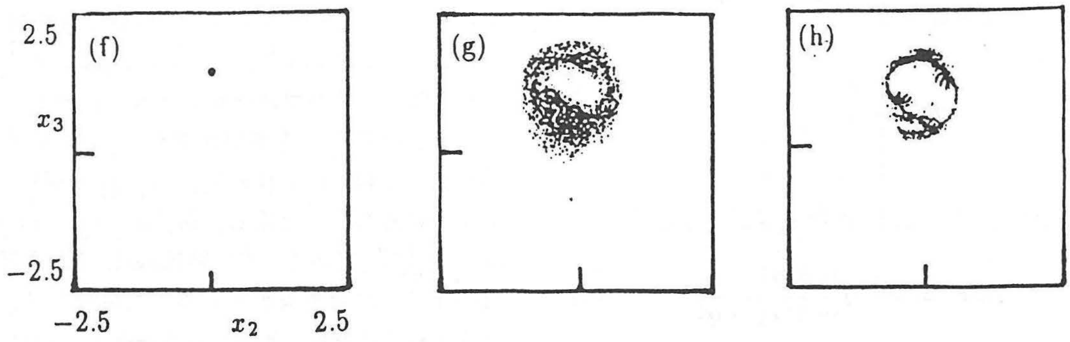


図 7 典型的なリターンマップからのアトラクタ　$\alpha = 10, \beta =, 0.085, \lambda = 0.11.$ $(\delta = -0.03)$
(f) 1 周期点 $(\eta = 1.75)$, (g) ハイパーカオス $(\eta = 1.35)$, (h) 面積素拡大カオス $(\eta = 1.04)$.

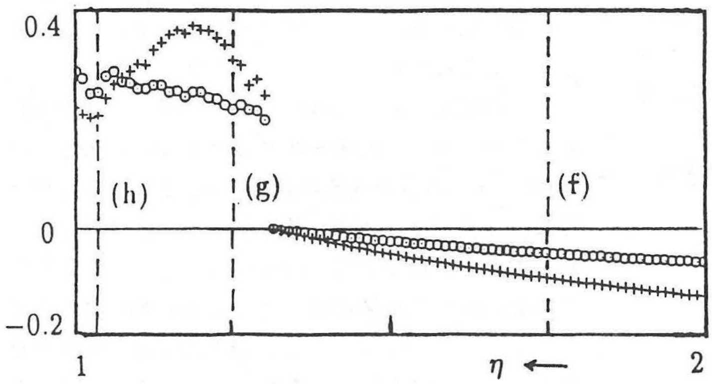


図 8 リアプノフ指数
$\alpha = 10, \beta =, 0.085, \lambda = 0.11.$ $(\delta = -0.03)$
○= 最大 1 次元リアプノフ指数 μ_1,
+= 2 次元リアプノフ指数 μ_2.

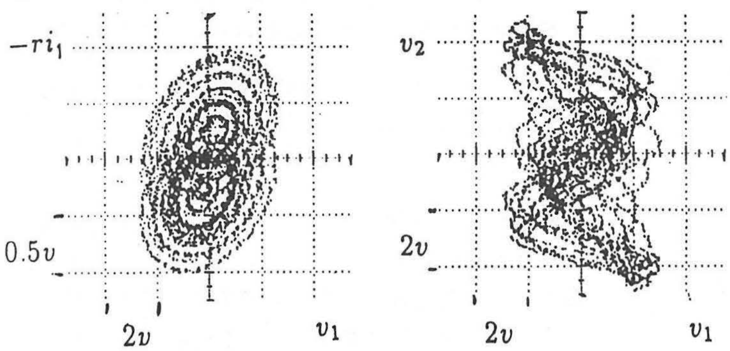


図 9 ハイパーカオスのアトラクタ

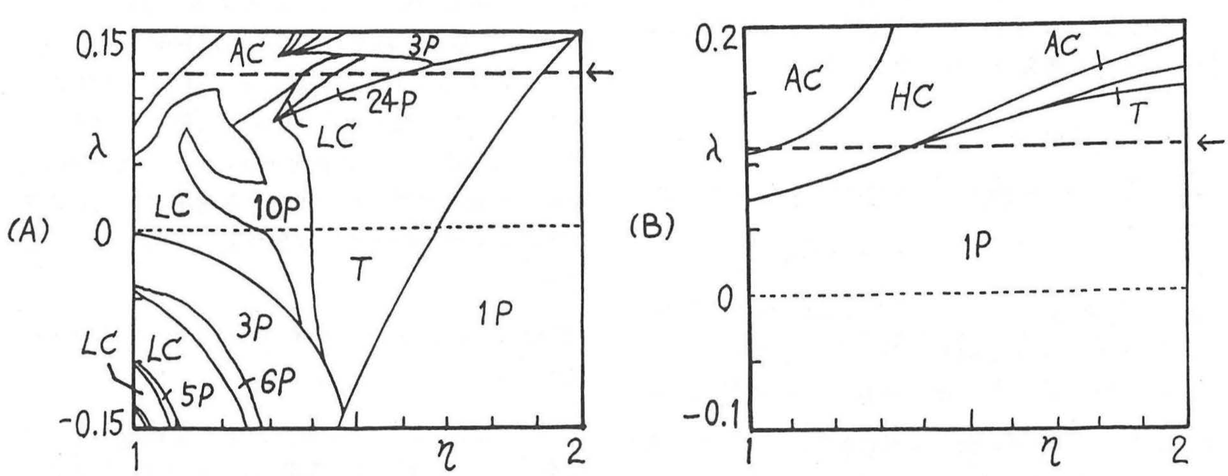


図 10 2 パラメータ分岐図　$(A)\alpha = 10, \beta = 0.16.$ $(\delta = 0.1)$, $(B)\alpha = 10, \beta = 0.085.$ $(\delta = -0.03)$
nP: n 周期解, T: トーラス, LC: 線素拡大カオス, AC: 面積素拡大カオス, HC: ハイパーカオス.

4. まとめ

1つのヒステリシス素子を含む4次元自律系回路族について考察した。今後の課題として分岐現象の詳細な解析、カオスアトラクタの物理的メカニズムの解明などが挙げられる。

参考文献

1) T.Matsumoto, L.O.Chua and K.Kobayashi, "Hyperchaos: laboratory experiment and numerical confirmation", *IEEE Trans.*, **CAS-33**, 11, pp.1143-1147 (1986).

2) T.Saito, "An approach toward higher dimensional hysteresis chaos generators", *IEEE Trans.*, **CAS-37**, 3, pp.399-409 (1990)

3) T.Saito, "Reality of chaos in four dimensional hysteretic circuits", *IEEE Trans.*, **CAS-38**, 12, pp.1517-1524 (1991).

4) 三堀邦彦、斎藤利通 :" 区分線形ダイオードを含む自律系ハイパーカオス発生回路"、信学論（A）, **J76-A**, 3, pp.390-395 (1993).

5) T.Suzuki and T.Saito, "On fundamental bifurcations from hysteresis hyperchaos generator", *IEEE Trans.*, **CAS-41**, 12, (1994).

6) K.Mitsubori and T.Saito, "A four dimensional plus hysteresis chaos generator", *IEEE Trans.*, **CAS-41**, 12, (1994).

7) N.Kutsuzawa, Y.Nishio, T.Saito, N.Inaba and S.Mori, "Chaotic phenomena in higher dimensional ladder circuit", **ECCTD**, Sep. 1993.

8) O.E.Rössler, "Continuous chaos - four prototype equations", *Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines, Annals of the New York Academy of Sciences,* **vol. 316**, pp.376-392, (1979).

9) E.N.Lorenz, "The local structure of a chaotic attractor in four dimensions", *Physica* **13D**, pp.90-104 (1984).

10) J.L.Hudson, O.E.Rössler and H.C.Killory, "Chaos in a four variables piecewise linear system of differential equations", *IEEE Trans.*, **CAS-35**, 7, pp.902-908 (1988).

11) I.Shimada and T.Nagashima, "A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems", *Prog. Theor. Phys.*, **61**, pp.1605-1615 (1979).

12) J.D.Farmer, E.Otto and J.A.Yorke, "The dimension of chaotic attractors", *Physica* **7D**, pp.153-180 (1983).

13) C.Grebogi, E.Ott and J.A.Yorke, "Crisis, sudden changes in chaotic attractor and transient chaos", *Physica* **7D**, pp.181-200 (1983).

キーワード

ハイパーカオス、カオス、クライシス、ヒステリシス、発振回路

....

Summary

On Bifurcations from A Four Dimensional Hysteresis Circuit Family

Kunihiko MITSUBORI
College of Engineering, Hosei University †
Toshimichi SAITO
College of Engineering, Hosei University†

This article discusses a four dimensional autonomous circuit family that includes one hysteresis element. The circuit family is governed by two symmetric three dimensional linear equations connected to each other by hysteresis switchings. We transform the equation into Jordan form and derive theoretical formulae of the two dimensional return map, its Jacobian matrix and its Jacobian and show the following novel results:

(1) Classification of the phenomena by evaluation of Lyapunov exponents using the formulae, (2) Period doubling route to chaos and the transition to hyperchaos via crisis, (3) Basic bifurcation of these phenomena, (4) Implementation example and laboratory measurements of some attractors.

Key Words

Hyperchaos, Chaos, Crisis, Hysteresis, Oscillator.

†3 – 7 – 2, Kajino-cho, Koganei-shi, Tokyo 184, Japan