

## 面内回転自由度を有する平面応力要素に関する考察

著者	渡部 正則, 前田 重行, 武田 洋
出版者	法政大学計算センター
雑誌名	法政大学計算センター研究報告
巻	5
ページ	1-4
発行年	1992-03-31
URL	<a href="http://doi.org/10.15002/00024666">http://doi.org/10.15002/00024666</a>

# 面内回転自由度を有する 平面応力要素に関する考察

渡部正則, 前田重行  
法政大学工学部土木工学科†

武田 洋  
法政大学計算センター†

## 1. まえがき

多くの実際の工学的問題 (例えば, 薄肉筒型梁, 折れ板, など) において, 回転自由度を持つ板殻要素の必要性がある. 曲げ要素と組合せた場合この種類の板殻要素はシェル解析に対して有効な手段となる. しかし, 有限要素法による任意形シェル構造の解析における重要な問題の一つとして, 面内回転自由度の取り扱いがある. 単一の連続曲面から構成されるシェル構造の場合は面内回転自由度を含まない問題として統一的に処理することが出来るが, 折れ板構造のように平面が不連続に結合した構造等では面内回転自由度を含まない問題としては統一的処理が困難となる. 任意形シェル構造に対する汎用的な有限要素として面内回転自由度の導入が古くから提案されているが, 近年線形問題に対してReissnerの変分形式を基本とする統一的な形式化及び具体的な有限要素が提案されている. ここでは線形問題に対するいままでの提案を整理し, 精度高い新しいスキームを提案することである.

## 2. 理論の整理

面内回転自由度を有する平面応力要素の定式化は, (1) 本研究で第一番目として提案するスキーム (従来の2次元変位場において要素辺に中間節点を持つ平面応力要素の角節点に回転自由度があると仮定すると, 中間節点の2次元変位はHermiteの補間関数を用いて角節点の回転角で表すことが出来る. 次に要素全体でこの関数を考えると従来の2次元変位場における中間節点を持つ平面応力要素と中間節点がなく角節点に回転自由度を持つ平面応力要素との変位成分に関してある変換行列を導くことができ, この変換行列を用いて回転自由度を有する平面応力要素を求めるスキームを提案する) と (2) 近年線形問題に対してReissnerの変分原理を基本とし, 独立回転場を用いる変分原理から導くスキームがある. また, (3) 本文で第2番目としての提案は, 標準の2次元変位場における中間節点のある平面応力要素の形状関数を (1) の変換行列を用い新しい形状関数を導入し, この形状関数で上記 (2) のスキームを用いて回転自由度を持つ平面応力要素を示すことである.

### 2.1 縮合的アプローチによる提案 (提案1)

はり曲げ要素のたわみを表すのによく用いられるHermite補間関数は, 次式に示す通りであり,  $v(x)$  はたわみを表し,

† 〒184 小金井市梶野町3-7-2

$\omega_i$  と  $\theta_i$  は, それぞれ  $i$  節点のたわみと回転角を表す.

$$v(x) = \psi_1^0 \omega_1 + \psi_1^1 \theta_1 + \psi_2^0 \omega_2 + \psi_2^1 \theta_2 \quad (1)$$

ここで  $\psi_1^0 \sim \psi_2^1$  は補間関数であり正規化された長さ  $\xi = (x - x_1)/l$  の関数として表され,  $l$  は部材長さである. また, 本研究ではHermiteの補間関数の特別な場合として,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ;  $\xi = 0.5$  を考えると次式を導くことが出来る.

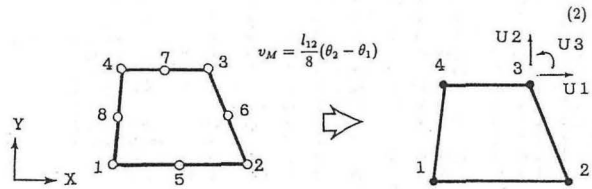


図-1 回転自由度を有する平面応力要素

次に従来の2次元変位場における平面要素の角節点  $i, j$  によって構成される辺の中間点における2方向の変位ベクトル  $v_M$  は上記の式 (2) を使って一般的に表すと, 次のようになる.

$$v_M = \frac{l_{ij}}{8} (\theta_j - \theta_i) n_{ij} \quad (3)$$

ここで,  $l_{ij}$  と  $n_{ij}$  は, それぞれその辺の長さや角節点  $i, j$  によって構成される辺における外向き単位法線ベクトルを表す.

$$n_{ij} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$l_{ij} = ((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{1/2} \quad (5)$$

ただし, 角節点が  $m$  個の場合  $\{i = 1 \dots m; k = \text{mod}(i, m) + 1\}$  となる. 結果として2次元変位場における平面要素のある辺の中間点の2方向変位を角節点の回転角で表したことになる.

次に, ここで導入した角節点の回転角と中間点の2次元変位場の関係を整理すると次のようなマトリックスで表すことが出来る.

$$\hat{u}_M = \begin{bmatrix} -y_{ji}/8 & y_{ji}/8 \\ x_{ji}/8 & -x_{ji}/8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} = t \hat{\theta} \quad (6)$$

ここで,  $\hat{u}_M, t$  及び,  $\hat{\theta}$  はそれぞれ平面要素の辺の中間点の2次元変位ベクトル, 平面要素の辺の中間点における2次元変位と角節点の回転角との変換マトリックス, 及び角節点のベク

トルを表す。ただし、 $x_{ji} = x_j - x_i$ ,  $y_{ji} = y_j - y_i$  である。更に式(6)を考慮して1要素全体でこの関係を考えると、従来の2次元変位場における中間節点を持つ平面応力要素と中間節点がなく角節点に回転自由度を持つ平面応力要素との変位成分に関してある変換行列を導くことができ、以下に示す式で表せられる。

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{T} \mathbf{U}^* \quad (7)$$

ここで  $\mathbf{U}^*$  は回転自由を含む平面応力要素の変位ベクトル、 $\hat{\mathbf{U}}$  は2次元変位場における中間節点のある平面応力要素の変位ベクトルで、 $\mathbf{T}$  は  $\mathbf{t}$  を1要素全体で表したものである。次に要素形状が四角形平面要素の場合における式(7)を示す。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -y_{21}/8 & 0.5 & 0 & y_{21}/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & x_{21}/8 & 0 & 0.5 & -x_{21}/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -y_{22}/8 & 0.5 & 0 & y_{22}/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & x_{22}/8 & 0 & 0.5 & -x_{22}/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -y_{43}/8 & 0.5 & 0 & y_{43}/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & x_{43}/8 & 0 & 0.5 & -x_{43}/8 \\ 0.5 & 0 & y_{14}/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -y_{14}/8 \\ 0 & 0.5 & -x_{14}/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & x_{14}/8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta_2 \\ u_4 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

次に従来の2次元変位場における中間節点のある要素の剛性方程式は、

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{P} \quad (9)$$

ここで $\mathbf{K}$ は剛性行列であり $\mathbf{P}$ は荷重ベクトルである。式(7)を式(9)に代入し両辺に左から $\mathbf{T}^t$ をかけると次のようになる。

$$\mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T} \mathbf{U}^* = \mathbf{T}^t \mathbf{P} \quad (10)$$

簡潔のために  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T}$ ,  $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^t \mathbf{P}$  と表わすと以下のようになる。

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{U}^* = \hat{\mathbf{P}} \quad (11)$$

上式の  $\hat{\mathbf{K}}$  は提案する内面回転自由度を含む平面応力要素の剛性行列である。

2.2 変分形式による提案

HughesとBrezzi(変位型)は変位勾配の逆対称部分と独立回転を等しくするためにLagrange乗数として応力テンソルを用いた離散近似解の不安定性を有するReissnerの変分形式を拡張し安定である離散近似解を提案した<sup>(1)</sup>。この定式は並進変位と回転の変数は独立であるとする独立回転場を用いる変分形式である。

次にIbrahimbegovic等は独立補間回転場を持つ変位場に対してHughes等の変分形式とAllmanタイプの補間を組合せ変位勾配の逆対称部分と独立回転を等しくするためにLagrange乗数として導入された応力テンソルの逆対称部分を持つ混合型変

分形式と区分的低減積分を使うPenalty変位型変分形式を用いて解析を行っている<sup>(2)</sup>。両定式において同じ変位場と回転場を用いている。混合型変分形式において応力の逆対称部分は各要素上で一定値としている。

2.3 補間関数の提案(提案2)

従来の2次元変位場における中間節点を持つ平面応力要素の形状関数を2.1の変換行列 $\mathbf{T}$ を用いて新しい形状関数を導入する。新しい形状関数は次式で求められる。

$$\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^* \mathbf{T} \quad (12)$$

ここで  $\mathbf{N}^*$  は回転自由度を含む平面応力要素の新しい形状関数、 $\hat{\mathbf{N}}$  は2次元変位場における中間節点のある平面応力要素の形状関数で、 $\mathbf{T}$  は2.2の変換行列と同じものである。この導入した形状関数 $\hat{\mathbf{N}}$ で上記2.2の混合型変分形式を用いて回転自由度をもつ平面応力要素を示すことである。

3. 数値解析

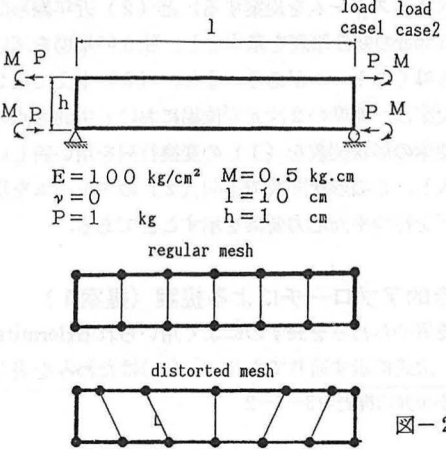
本研究で提案した平面応力要素の正確さを示すために数値解析例を示す。それぞれの例題の数値解析結果は、本研究での第一番目に提案した要素を提案1、第二番目に提案した要素を提案2、Ibrahimbegovic等が提案した混合型の要素を文献[2]として表記する。

3.1 パッチテスト

最初にパッチテストを文献[2]に示されている歪んだ一要素で行う。このテストは提案した要素のテストばかりでなくその要素に存在する非論理的なモード見つけることが出来る。歪んだ要素に最小の拘束を課し引張力を作用させた。本研究の提案1と提案2の要素はパッチテストを通過した。

3.2 単純梁(高次数パッチテスト)

高さ $h$ と長さ $l$ の比が10の単純梁に純曲げを課する。解析例は図一2に示し、回転自由度は拘束しないが、最小限の拘束を課す。2種類の荷重ケースを考え第一番目の荷重は縁端部に一組の集中荷重を作用させ、第二番目の荷重には単位モーメントを作用させる。解析結果は鉛直変位1.5と縁端部の回転0.6の梁理論の厳密解と比較した。この解析結果は表1に示す。



図一2 単純梁

表-1 単純梁 (図-2)

Load	Mesh	Disp.	文献(2)	提案 1	提案 2
case1	reg.	Vert. displ	1.5	1.5	1.5
		End. rot	0.6	0.6	0.6
	dist.	Vert. displ	1.14185	1.38585	1.38417
		End. rot	0.57255	0.56029	0.54603
case2	reg.	Vert. displ	1.5	1.5	1.51030
		End. rot	0.62070	1.09491	0.64972
	dist.	Ver. displ	1.39220	1.41380	1.39014
		End. rot	0.50612	0.86339	0.58349

### 3.3 片持ち梁

せん断力荷重を作用させた片持ち梁 (図-3) 及び縁端部に単位モーメントを作用させた片持ち梁 (図-4) をテスト問題として選んだ。解析結果は弾性解の先端の鉛直変位 (0.3553) と比較し表2にまとめた

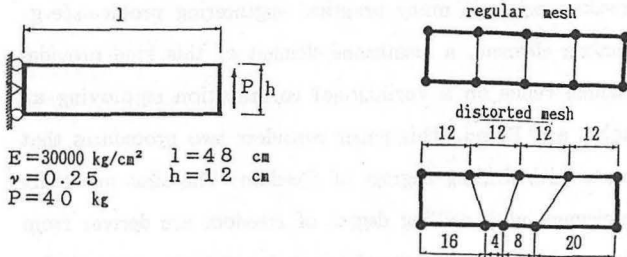


図-3 片持ち梁

表-2 片持ちはり (図-3)

Mesh	文献(2)		提案 1		提案 2	
	Quadrilateral	Triangular	Quadrilateral	Triangular	Quadrilateral	Triangular
4×1	0.3445	0.0910	0.3446	0.1985	0.3410	0.1757
8×2	0.3504	0.1955	0.3569	0.2997	0.3556	0.2698
16×4	0.3542	0.2934	0.3585	0.3414	0.3577	0.3290
4×1*	0.3066	—	0.3414	—	0.3343	—

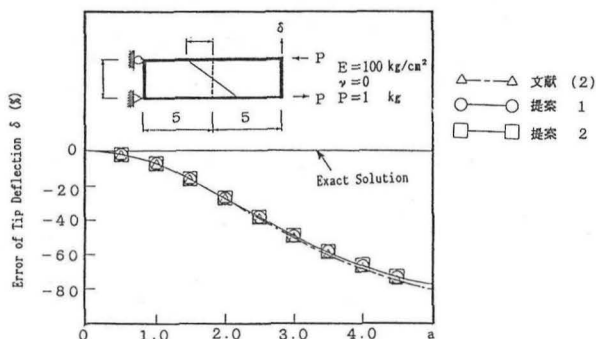


図-4 端部曲げモーメント下の片持ち梁

### 3.4 COOKの問題

Cookが提言している台形状の板殻構造は一般的テスト問題 (図-5) である。挙動を支配するせん断力のほかに、このモデルはメッシュの効果も表わす。解析結果 (表-3) は文献 [2] の同じ解析モデルの値 (23.91) と比較した。

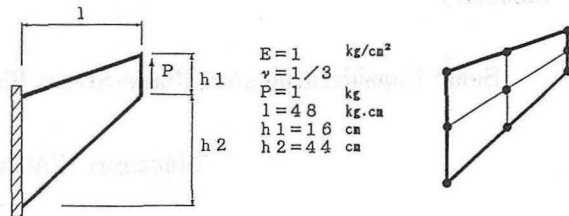


図-5 Cookの解析モデル

表-3 Cookモデルの解析結果 (図-5)

Mesh	文献(2)	提案 1	提案 2
1×1	14.066	16.712	16.669
2×2	20.683	21.642	21.537
4×4	22.993	23.241	23.111
8×8	23.668	23.697	23.615

### 4. あとがき

本研究では変位型有限要素における要素辺に中間節点を持つ平面応力要素の剛性行列を変換行列Tによって回転自由度を有する平面応力要素に変換する統一的な定式化と具体的な有限要素を提案できたと考える。また、このアルゴリズムは、従来から使用されている既存の有限要素プログラムに容易に組み込むことができる。今後の課題は、この要素の非線形問題に対する適用について検討を行うことである。

### [参考文献]

[1] T.J.R.Hughes and F.Brezzi, On drilling degrees of freedom. Comp.methods appl.mech. eng.,72,105-121 (1989)  
 [2] A.Ibrahimbegovic, R.L.Taylor and E.Wilson, A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. Int.J.numer.methods eng., Vol.30,445-457(1990)  
 [3] D.J.Allman, A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis. Int.j. number.methods eng., Vol.26,717-730(1988)

**キーワード**

有限要素解析, 平面応力場, 面内回転, シェル

.....

**Summary****Some Considerations on Plane Stress Finite Elements Including Drilling Degrees of Freedom**

Masanori WATANABE, Shigeyuki MAEDA

Department of Civil Engineering, Hosei University †

Hiroshi TAKEDA

Computer Center, Hosei University †

The need for membrane elements with drilling degrees of freedom arises in many practical engineering problems(e.g. infilled frames, folded plates, etc.). When combined with a bending element, a membrane element of this kind provides a versatile tool for analysis of shells. A novel approach, which relies on a variational formulation employing an independent rotation field, has been presented recently by Hughes and Brezzi. This paper considers two procedures that yield improved stiffness matrices for plane stress finite elements with drilling degrees of freedom. The first procedure is that a quadrilateral membrane and plane triangular finite element with drilling degrees of freedom are derived from the nine-node, two-dimensional Lagrange element and the six-node standard two-dimensional triangular element, respectively. The second procedure is that using a shape function proposed in this paper, the above two finite elements with drilling degrees of freedom are derived from variational principles employing an independent rotation field. Several numerical examples are presented to demonstrate the accuracy of the membrane element proposed herein.

**Keywords**

Finite element analysis, numerical analysis, plane stress field, in-plane rotation, analysis of shell, continuum mechanics

---

† 3-7-2 Kajino-cho, Koganei-shi, Tokyo 184, Japan