

Tesis Doctoral: Revisitando el modelo de Markowitz: modelos de optimización y aplicaciones

María Luisa Martínez Nieto
Doctoranda

Doctor Don Francisco Fernández Navarro

Doctor Don Mariano Carbonero Ruz

Doctora Doña Teresa Montero Romero

Directores



Programa de Doctorado en Ciencia de los Datos

Universidad Loyola Andalucía

Sevilla, 2022

Para mi marido *Rafa*,
y mis hijos *Carlos y Blanca*,
que nacieron con esta tesis.
Para mis padres y mis hermanos,
Juan y Luisa,
Pedro José y Jesús Javier

”En tiempo de desolación nunca hacer mudanza, mas estar firme y constante en los propósitos y determinación en que estaba el día antecedente a la tal desolación, o en la determinación en que estaba en la antecedente consolación. Porque así como en la consolación nos guía y aconseja más el buen espíritu, así en la desolación el malo, con cuyos consejos no podemos tomar camino para acertar”

San Ignacio de Loyola

Agradecimientos

En este apartado agradeceré el acompañamiento que he tenido en este doctorado y narraré anécdotas y experiencias personales que recuerden que el camino nunca está libre de sinsabores o dificultades emocionales.

En primer lugar, quiero agradecer a la Universidad Loyola Andalucía por haberme dado la oportunidad de realizar el doctorado, y por la labor de acompañamiento institucional y procedimental que han realizado durante todos estos años. Decidir comenzar el doctorado fue un atrevimiento que empezó con un correo electrónico a la Universidad al que me contestaron muy amablemente. Este entusiasmo me confirmó que había tomado el camino correcto y me animó a seguirlo. Pronto se desvaneció cuando me informaron de todos los requisitos que debía reunir para ser doctora, el camino no sería ni corto ni fácil.

En segundo lugar, gracias a mis directores por haberme enseñado tanto y haber tenido tanta paciencia y tiempo para dedicarme. Siempre con buenas palabras, entendiéndome y aconsejándome en el camino. El segundo reto fue decidir quiénes serían mis directores y cuál sería el tema. Desde mi experiencia personal, esta definición y coordinación de ideas es una de las fases más difíciles e importantes del doctorado y de ella dependen el futuro éxito de la tesis.

En tercer lugar, mostrar mi agradecimiento a toda mi familia por confiar en mí para hacer el doctorado, haberme ayudado en el día a día a compaginarlo con mi trabajo, y haberse sacrificado en todo momento para que yo pueda sacar tiempo para avanzar en la tesis. Sin su apoyo no habría sido posible conseguirlo. En mi caso personal lo más difícil ha sido tener la fuerza de voluntad y capacidad de trabajo suficiente para renunciar al ocio y tiempo libre con ellos, y organizar tanto su vida como la mía para ir logrando los objetivos de este camino de tesis. Os quiero mucho.

Al final de todos estos agradecimientos hay que caer en la cuenta de que la tesis es el resultado o trabajo de muchos, y que gracias a todos los granos de arena que cada uno ha aportado en mí, hoy puedo estar concluyendo mi castillo.

Resumen

Hace ya 70 años que Markowitz (1952) propuso el modelo tradicional y clásico de selección de carteras de inversión, el *Modelo Media Varianza (MV)*. Parte de la hipótesis del comportamiento del inversor racional que pretende maximizar la rentabilidad de su cartera al mínimo riesgo.

El problema de optimización de Markowitz determina para una cartera de N activos ($n = 1, \dots, N$), los pesos óptimos de los activos en cartera w_1, \dots, w_N ($\sum_{n=1}^N w_n = 1$), utilizando como inputs la rentabilidad estimada con la esperanza matemática (μ_n) de la serie temporal de precios de los activos, y el riesgo con su varianza (σ_{nm}) y covarianza (σ_{nm}). El problema puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{mín}_{w_1, \dots, w_N} \quad & \lambda \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} - (1 - \lambda) \sum_{n=1}^N w_n \mu_n. \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Donde $\lambda \in [0, 1]$, y se incluyen dos restricciones para asegurar que se invierte toda la cantidad inicial disponible ($\sum_{n=1}^N w_n = 1$), y no se permiten posiciones cortas para la compra de activos ($w_1, \dots, w_N \geq 0$).

Con ello, construye la frontera eficiente formada por la combinación de todas aquellas carteras que consiguen la máxima rentabilidad con el mínimo riesgo. El inversor selecciona una cartera dentro de la frontera eficiente según su perfil de riesgo (λ).

El *Modelo Media Varianza* es el paradigma teórico de todo el desarrollo de la Teoría de Carteras moderna pero sufre una serie de limitaciones prácticas que han permitido generar un universo de investigación sobre el mismo. A continuación, se detallan las principales limitaciones detectadas:

- Los estimadores de los dos parámetros del modelo están en diferentes unidades. La rentabilidad está estimada en unidades con la esperanza matemática

(μ_n) , mientras que el riesgo está estimado en unidades al cuadrado, (σ_{nm}) . Por tanto, los resultados obtenidos como inputs del problema están en diferentes escalas generando soluciones óptimas diferentes a las deseadas.

- Existe una gran sensibilidad de los pesos de los activos en cartera (w_1, \dots, w_N) ante pequeños cambios en las estimaciones de rentabilidad y riesgo. Como consecuencia, las carteras no son estables en el largo plazo y cambian su composición con facilidad ante cambios en las estimaciones. Esta limitación no es más que una confirmación del problema anterior, y es que los estimadores de rentabilidad y riesgo parecen no ser los adecuados para una correcta resolución del problema de optimización.
- Las carteras generadas con el *Modelo Media Varianza (MV)* están muy concentradas en pocos activos de gran rentabilidad, provocando que las carteras no estén diversificadas. Está comúnmente aceptado que la diversificación de las carteras mejora su rendimiento en el largo plazo. Al estar distribuido el riesgo entre diferentes activos, la cartera no es tan sensible ante cambios de rentabilidad inesperados de los mismos.
- Gran rigidez del modelo al establecer a priori las ponderaciones de los dos objetivos en la función de optimización a través del hiperparámetro de aversión al riesgo (λ) . Diferentes valores del hiperparámetro λ generan diferentes soluciones óptimas del problema. Por este motivo es muy importante que estos estén bien fijados.

Adicionalmente, en el mundo académico se entiende que el valor de este hiperparámetro define la aversión al riesgo del inversor. Lógicamente, para ponderar el riesgo en la función objetivo, inversores más arriesgados darán un valor más bajo a este hiperparámetro pero inversores más conservadores darán un valor más alto.

Desde 1952, cuando Markowitz propuso el *Modelo Media Varianza*; se han desarrollado en la investigación varias alternativas a este, se han propuesto nuevos estimadores de rentabilidad y riesgo, y se han introducido nuevos objetivos al

problema. Todas estas aportaciones han tenido el objetivo común de mejorar los resultados empíricos o prácticos del *Modelo Media Varianza*.

En esta tesis por compendio, se realizan varias aportaciones científicas que tienen por objetivo común contribuir a la mejora del *Modelo Media Varianza*. Seguidamente, se exponen dichas aportaciones estrechamente relacionadas con cada una de las limitaciones detectadas en dicho modelo:

- Con el propósito de superar las dos primeras deficiencias del modelo expuestas anteriormente, se propone el *Modelo Media Cuadrado Varianza o Mean Squared Variance (MSV)*, que iguala las unidades de los estimadores de ambos parámetros elevando al cuadrado la esperanza matemática ($\sum_{n=1}^N w_n \mu_n$) para la rentabilidad. El problema de optimización se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{mín}_{w_1, \dots, w_N} \quad & \lambda \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} - (1 - \lambda) \left(\sum_{n=1}^N w_n \mu_n \right)^2. \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Como puede observarse está formulado igual que el *Modelo Media Varianza* salvo en el estimador de rentabilidad. Es un problema cuadrático no convexo y para resolverlo es necesario reformularlo a través de un programa lineal entero mixto o *Mixed-Integer Linear Programming (MILP)* (Xia et al., 2020). Se pretende homogeneizar las unidades de los inputs del problema para obtener mejores resultados que en el modelo tradicional de Markowitz .

- Para superar la limitación de concentración de carteras del *Modelo Media Varianza (MV)*, se han propuesto diversos y recientes *Modelos de Diversificación*, que introducen este tercer objetivo en el problema de optimización. En esta tesis se ha realizado una revisión del estado del arte que tiene como resultado una categorización y clasificación de todos los *Modelos de Diversificación* existentes en la literatura. Con ello, se pretende que se desarrolle

con éxito la inclusión de la diversificación como tercer objetivo y que sirva de síntesis de todo lo que se ha estudiado en la Teoría de Carteras Moderna.

Se han categorizado en tres enfoques principales; los *Enfoques de Ponderación Igualitaria*, el *Enfoques de Control de los Límites Superiores e Inferiores* y el *Enfoque de la Función de Costes*. El primero se caracteriza por repartir a partes iguales la inversión inicial entre los activos o su riesgo. El segundo por introducir restricciones en el problema de optimización que limitan la inversión por cada activo o clase de activos. Y el tercero por incluir la diversificación en la función objetivo del problema de optimización.

Adicionalmente, se desconoce científicamente en qué escenarios los *Modelos de Diversificación* son capaces de superar los resultados obtenidos por el *Modelo Media Varianza (MV)*. Por tanto, en esta tesis se han realizado dos estudios comparativos con catorce estrategias de inversión, que incluyen *Modelos de Media Varianza y Modelos de Diversificación*, en treinta y cuatro bases de datos diferentes, durante periodos de estabilidad e inestabilidad financiera (COVID-19).

- Se ha identificado que, tanto el *Modelo Media Varianza* como los *Modelos de Diversificación*, incluyen en sus respectivos problemas de optimización hiperparámetros de riesgo (λ) y diversificación (δ), que se fijan a priori definiendo el perfil de riesgo del inversor.

En esta tesis se presenta un procedimiento de optimización Bayesiano de los hiperparámetros que selecciona los valores óptimos de cada uno de ellos en base a los rendimientos globales de la cartera. Es un algoritmo que actúa como una caja negra, probando a ciegas valores de los hiperparámetros y calculando sus soluciones óptimas. Con la evaluación continúa de los resultados obtenidos se va acercando cada vez más al valor óptimo del parámetro.

La expectativa que este procedimiento de optimización de los hiperparámetros sirva para que los modelos se adapten mejor al perfil de riesgo de los activos susceptibles de formar parte de la cartera óptima, y no sólo al perfil

de riesgo del inversor. Es fundamental que cada inversor seleccione la cartera que incluya activos adaptados a su perfil de riesgo.

Si esto fuera posible, la optimización de los hiperparámetros no sólo serviría para flexibilizar el *Modelo Media Varianza*, si no también para identificar el perfil de riesgo óptimo del inversor para cada base de datos de activos.

En resumen, el *Modelo Media Varianza* es el paradigma teórico de la selección de carteras de inversión pero debido a sus limitaciones no ha sido muy utilizado en el mundo práctico. Con objeto de mejorar estas limitaciones, en esta tesis por compendio se realizan las siguientes aportaciones: se propone una alternativa al *Modelo Media Varianza*, el *Modelo media cuadrado Varianza* que unifica las unidades de sus estimadores, se realiza una categorización de los *Modelos de Diversificación* y se estudian los escenarios en los que opera mejor que el *Modelo Media Varianza*, y por último, se presenta y aplica un procedimiento de optimización bayesiano para la selección de los hiperparámetros incluidos en ambos tipos de modelos.

Palabras claves o Keywords: Modelo Media Varianza, Modelos de Diversificación, optimización de hiperparámetros, y rendimiento fuera de la muestra. O por su traducción al inglés, *Mean Variance Model*, *Diversification Models*, *Hyperparameter optimization*, y *Out-of-sample performance*

Índice general

1	Introducción, objetivos y estructura	16
1.1	Introducción: contexto de la investigación	16
1.1.1	Marco teórico	16
1.1.2	El Modelo de Media Varianza; limitaciones y nuevas pro- puestas	18
1.1.3	Modelos de Diversificación	25
1.1.4	Resumen y síntesis de modelos de inversión	31
1.2	Objetivos y justificación académica de la tesis	32
1.3	Estructura del compendio	35
2	Publicaciones de la tesis doctoral	44
2.1	Artículo I	45
2.2	Artículo II	59
2.3	Artículo III	60
3	Conclusiones y futuras líneas de investigación	61
3.1	Conclusiones Metodológicas	61
3.2	Conclusiones Empíricas	63
3.3	Futuras líneas de investigación	66
	Bibliography	69
	Anexos	75

A	Comunicaciones presentadas en Congresos Internacionales	75
A.0.1	II Congreso Iberoamericano de Jóvenes Investigadores en Ciencias Económicas y Dirección de Empresas	75
A.0.2	III Congreso Iberoamericano de Jóvenes Investigadores en Ciencias Económicas y Dirección de Empresas	87
A.0.3	Primer premio a la mejor comunicación en el área de finanzas	101

Índice de cuadros

1.1	Descripción de las estrategias de inversión implementadas los estudio experimentales y que forman parte del marco teórico de esta tesis, junto con los hiperparámetros asociados y el rango de valores que estos hiperparámetros pueden tomar	31
1.2	Subperiodos de análisis de la base de datos, definiendo el número total de datos T , el periodo de estimación D , el periodo de validación Q y el número total de activos N	41

Capítulo 1

Introducción, objetivos y estructura

1.1 Introducción: contexto de la investigación

1.1.1 Marco teórico

Los mercados financieros nacen como consecuencia de la necesidad de las empresas privadas de obtener financiación a cambio de ceder parte de su propiedad a través de acciones que representan una parte alícuota de su capital. Los inversores que invierten en los mercados financieros buscan generar rentabilidad al dinero que poseen. El inversor puede decidir invertir en un sólo activo o hacerlo en varias clases de activos (letras del tesoro, depósitos bancarios, renta variable, bonos de empresas públicas y privadas), diversificando y construyendo lo que se conoce como carteras de inversión.

La finalidad principal de la investigación en la gestión de carteras de inversión es encontrar algún modelo o método que garantice la obtención de beneficios para el inversor. Para ello, es necesario estudiar y conocer el comportamiento de la oferta y la demanda en los mercados financieros.

Académicamente, existen dos corrientes que defiende dos posiciones enfrentadas sobre el comportamiento de los precios de los activos en los mercados financieros: la *Teoría de Eficiencia de los Mercados Financieros* (Sharpe, 1964) y las *Teorías Conductistas* (De Bondt and Thaler, 1985). La primera de ellas defiende que los precios de los activos en los mercados financieros recogen toda la información del mercado, y por ende, se puede estimar a priori el valor futuro del activo a

través de información de mercado. La segunda defiende la imperfección del mercado, es decir, que los precios de los activos no recogen toda la información existente, ya que el comportamiento de los inversores está movido por factores psicológicos que son irracionales y no son predecibles.

Desde el punto de vista del comportamiento de la demanda en los mercados financieros, objetivamente, todo inversor, ya sea particular o institucional lo que busca es conseguir más dinero del que tenía, y además satisfacer otra serie de necesidades, pero sin olvidar nunca que nadie quiere invertir para perder capacidad económica.

A pesar de este objetivo común de todos los inversores, cada inversor tiene sus preferencias personales. La consecución del primer objetivo de rentabilidad y estos objetivos individuales tiene un precio, este precio es el riesgo de la cartera, o la probabilidad de obtener pérdidas en la misma.

Por lo tanto, lo primero a definir desde el punto de vista de la demanda son los objetivos de los inversores. Esto se puede realizar de dos formas, con un criterio generalista a través de la asunción de reglas comunes de comportamiento de todos los inversores, o de criterios individualizados, definiendo las funciones de utilidad de cada inversor (Xue et al., 2018).

A través de la maximización de las funciones de utilidad se puede obtener la cartera óptima adaptada a cada inversor (Hagströmer and Binner, 2009). Los principales inconvenientes de estos modelos son el mayor coste económico y computacional de esta adaptación individualizada (Tu and Zhou, 2011). Otro autores lo que proponen es una adaptación intermedia entre los objetivos de los inversores y los modelos de gestión de carteras, a través de la realización de cuestionarios de evaluación del perfil de riesgo de los inversores. Estos cuestionarios sirven para categorizar a los inversores dentro de un grupo de comportamiento, en cada uno de esos grupos el modelo de selección de carteras es diferente pero común a todos los del mismo grupo (Jung et al., 2018).

El criterio generalista común y universal de comportamiento del inversor lo definió Markowitz (1952) denominándolo, *Comportamiento del Inversor Racional*,

que pretende maximizar su rentabilidad al mínimo riesgo. Con esta hipótesis crea el modelo tradicional de gestión de carteras de inversión, también denominado, *Modelo Media Varianza (MV)*, que muestra la curva de carteras que ofrecen la mayor rentabilidad al mínimo riesgo. A esta curva se le denomina *Frontera Eficiente*. Dentro de esa curva, y dado el perfil de riesgo de cada inversor, se elige una de las carteras dentro de la frontera eficiente. Esta será la cartera óptima para aquel inversor.

Posteriormente, en la literatura han surgido nuevos modelos que intentan superar las limitaciones del modelo de Markowitz (1952), principalmente los errores de estimación de sus parámetros de rentabilidad y riesgo y la alta sensibilidad de los pesos de los activos en la cartera ante cambios en las estimaciones (Black and Litterman, 1992). Otra de las críticas al *Modelo Media Varianza* es que normalmente invierte en pocos activos muy rentables, generando por tanto, carteras muy concentradas y poco diversificadas (Lin, 2013). Para superar este último inconveniente se han propuesto modelos que incluyan un tercer objetivo de diversificación, adicional a la rentabilidad y el riesgo (Schmidt, 2019).

Por todo lo anterior, y con la finalidad de desarrollar el marco teórico de la tesis, en el apartado 1.1.2 se analiza en detalle el *Modelo Media Varianza (MV)*, sus limitaciones, y nuevas propuestas que han surgido para superarlas. En el apartado 1.1.3 se resume la revisión literaria que se ha realizado sobre las estrategias de inversión que incluyen la diversificación como tercer objetivo de los modelos de gestión de carteras. En ambos apartados se detallan todas las estrategias de inversión que luego han sido aplicados en los dos estudios empíricos que forman parte del compendio de esta tesis.

1.1.2 El Modelo de Media Varianza; limitaciones y nuevas propuestas

El *Modelo Media Varianza (MV)* de gestión de carteras de Markowitz optimiza, para una cartera que contiene N activos ($n = 1, \dots, N$), la cantidad óptima a invertir en la cartera para cada activo, w_1, \dots, w_N ($\sum_{n=1}^N w_n = 1$), usando como inputs del problema la rentabilidad estimada con la esperanza matemática de la rentabilidad de la serie histórica de precios (μ_n), el riesgo estimado con la varianza de la misma serie

temporal (σ_n) y la matriz de covarianza de los activos (σ_{nm}) (Kalayci et al., 2019; Markowitz, 1952). La media de la cartera y la varianza se expresa matemáticamente como se define a continuación:

$$\sum_{n=1}^N w_n \mu_n.$$

$$\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm}, (\sigma_{nn} = \sigma_n^2),$$

1.1.2.1 Alternativas en la formulación del problema de optimización del modelo Media Varianza

Los dos objetivos del *Modelo Media Varianza (MV)*; maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo, pueden optimizarse independientemente. El *Modelo de Máxima Rentabilidad Global o Global Maximum Return (GMR)* es un problema de optimización convexo. Puede formularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{w_1, \dots, w_N} \quad & \sum_{n=1}^N w_n \mu_n. \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dónde la solución óptima se obtiene invirtiendo todo el presupuesto en el activo con mayor rentabilidad en cada momento.

Desafortunadamente, a pesar de su gran sencillez, este modelo presenta desventajas al no tener en cuenta ni la diversificación ni el riesgo, y, normalmente, buenos resultados de rentabilidad de un activo en periodo de estimación no aseguran una buena rentabilidad en el futuro.

El segundo *Modelo de Mínima Varianza Global o Global Minimum Variance (GMV)* no tiene en cuenta la rentabilidad esperada y pone el foco solamente en la minimización del riesgo (Coqueret, 2015). El modelo GMV ha sido muy estudiado en el mundo académico debido a su simplicidad relacionada con la evaluación y

comparación de los diferentes estimadores de matriz de covarianzas (Bodnar et al., 2018; Coqueret, 2015; Maillet et al., 2015). El problema de optimización se expresa con el siguiente problema convexo:

$$\begin{aligned}
 & \underset{w_1, \dots, w_N}{\text{mín}} && \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} \\
 & \text{s. t.} && \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\
 & && w_1, \dots, w_N \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

El problema de optimización del modelo de Markowitz que incorpora los dos objetivos anteriores es un problema multiobjetivo y estocástico. Multiobjetivo porque tiene dos objetivos contrapuestos, maximizar rentabilidad y minimizar el riesgo, y estocástico, porque no se conoce con certeza el valor futuro de sus variables y deben ser estimadas.

En la literatura se han desarrollado diferentes formas de formular y resolver el problema de optimización que se presenta en el *Modelo Media Varianza (MV)*:

- Modelo de restricciones. Incluye uno de los objetivos en la función a optimizar y el otro lo incorpora como restricción del modelo. Se puede introducir la maximización de la rentabilidad en la función objetivo e incorporar el riesgo como restricción del problema, definiendo a priori el máximo nivel del riesgo que el inversor estaría dispuesto a tolerar, σ_{MAX} :

$$\begin{aligned}
 & \underset{w_1, \dots, w_N}{\text{máx}} && \sum_{n=1}^N w_n \mu_n. \\
 & \text{s. t.} && \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} \leq \sigma_{\text{MAX}}. \\
 & && \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\
 & && w_1, \dots, w_N \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Otra opción es minimizar el riesgo en la función objetivo e introducir la rentabilidad en las restricciones, para ello habría que definir la mínima rentabilidad

que el inversor estaría dispuesto a asumir, μ_{MIN} :

$$\begin{aligned}
 & \underset{w_1, \dots, w_N}{\text{mín}} && \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm}. \\
 \text{s. t.} &&& \sum_{n=1}^N w_n \mu_n \geq \mu_{MIN}. \\
 &&& \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\
 &&& w_1, \dots, w_N \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

- Programa de objetivo. Se incluyen los dos últimos elementos mencionado previamente, σ_{MAX} y μ_{MIN} , en la función objetivo, y se minimiza la distancia a ellos:

$$\begin{aligned}
 & \underset{w_1, \dots, w_N}{\text{mín}} && \left(\sum_{n=1}^N w_n \mu_n - \mu_{MIN} \right) + \left(\sigma_{MAX} - \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} \right). \\
 \text{s. t.} &&& \sum_{n=1}^N w_n \mu_n \geq \mu_{MIN}. \\
 &&& \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} \leq \sigma_{MAX}. \\
 &&& \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\
 &&& w_1, \dots, w_N \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

- Suma ponderada de objetivos. Incluye los dos objetivos en la función a optimizar ponderando la importancia de uno de ellos a través de la inclusión de un hiperparámetro al problema, λ . Lo más usual en el estado del arte es ponderar el riesgo, de tal forma que, λ , estaría definiendo la aversión al riesgo del inversor, valores más altos serían para inversores más conservadores y valores más bajo para inversores más arriesgados. El problema de optimización

quedaría formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{mín}_{w_1, \dots, w_N} \quad & \lambda \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} - \sum_{n=1}^N w_n \mu_n. \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\
 & w_1, \dots, w_N \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Estos parámetros ($\sigma_{\text{MAX}}, \mu_{\text{MIN}}, \lambda$) son tradicionalmente definidos antes de la resolución del problema de optimización como una asunción de las preferencias de riesgo del inversor (Markowitz, 2012; Schmidt, 2019). Es importante destacar que la definición de estos parámetros es crucial para la elección de la cartera óptima dentro de la frontera eficiente de Markowitz (Markowitz, 2014).

Además, hay que destacar que las cuatro formulaciones son equivalentes, o lo que es lo mismo, que la solución de cada problema también es óptima para los otros, siempre y cuando los parámetros sean los mismos.

1.1.2.2 Limitaciones del Modelo Media Varianza y propuestas de modelos alternativos

Los modelos y estudios realizados desde la aparición del *Modelo Media Varianza* (MV) de Markowitz han coincidido en enunciar como principales deficiencias del mismo, las siguientes:

- Los errores de estimación de los parámetros de rentabilidad y riesgo. Estos errores en la estimación de los parámetros provocan que las carteras óptimas seleccionadas no obtengan los resultados esperados.
- La elevada fluctuación de los pesos de los activos en las carteras óptimas ante pequeños cambios de estimación de la rentabilidad y riesgo de los activos. Como consecuencia, ante pequeños errores de estimación se seleccionaran carteras óptimas muy diferentes.
- Las carteras óptimas tienden a estar excesivamente concentradas en un limitado número de activos. Normalmente, incluyen los dos o tres activos más

rentables, no asegurando la diversificación esperada.

Para superar la primera de las limitaciones se han propuesto nuevos estimadores de rentabilidad y riesgo. El estimador de rentabilidad más comúnmente utilizado ha sido el usado en el *Capital Asset Model Pricing (CAPM)* (Merton, 1973; Sharpe, 1964), que fue propuesto por William Sharpe, premio nobel de economía, en su libro “Portfolio Theory and Capital Markets” en 1970 (Sharpe, 1970).

Sharpe (1964) creó la *Teoría de Eficiencia de los Mercados*, que defiende que toda la información de los precios de los activos están recogida en la información del mercado, de tal forma que, la rentabilidad de los activos (μ_n) puede ser estimada con el riesgo del mercado (σ_m) y el interés libre de riesgo (r_{free}).

Gracias a este modelo ha surgido una alternativa al *Modelo Media Varianza* que maximiza el conocido Sharpe Ratio, *El Modelo de Sharpe o Sharpe Ratio Optimization (SRO)*, (Bailey and Lopez de Prado, 2012; Moody and Saffell, 2001; Sharpe, 1964), que cuantifica el exceso de rentabilidad por unidad de riesgo con respecto al interés libre de riesgo. El problema de optimización queda formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max_{w_1, \dots, w_N} & \frac{\sum_{n=1}^N w_n \mu_n - r_{free}}{\sqrt{\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm}}} \\ \text{s. t.} & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

El problema de optimización anterior puede ser reducido a un problema estándar cuadrático convexo asumiendo que el universo de activos es capaz de superar la rentabilidad de la tasa de interés libre de riesgo ($\sum_{n=1}^N w_n \mu_n - r_{free} > 0$). Este modelo tiene como principal limitación que asume que el inversor da la misma importancia al riesgo que a la rentabilidad.

Con el propósito de adaptar los modelos a las preferencias del inversor han surgido nuevos modelos que intentan minimizar las pérdidas de la cartera (Giannopoulos et al., 2005; Markowitz, 2012). En estos casos, el riesgo es estimado normalmente a través de la *Semivarianza* (Macedo et al., 2017; Markowitz, 2012) o el *Value at risk (VaR)* (Giannopoulos et al., 2005; Rockafellar et al., 2000). La semiva-

rianza sólo tiene en cuenta las variaciones negativas de rentabilidad con respecto al valor esperado, mientras que el VaR es la cantidad máxima que un inversor estaría dispuesto a perder en un periodo de tiempo dado un nivel de confianza determinado.

Otros investigadores han propuesto técnicas más avanzadas para mejorar el modelo tradicional de *Media Varianza (MV)* en la gestión de carteras. A continuación se expone un resumen de los principales puntos de avance científicos que se han desarrollado:

- Uso de técnicas bayesianas en los estimadores para dar más importancia a las últimas observaciones de las series temporales (Frost and Savarino, 1988). Las técnicas bayesianas también han sido incorporadas en los modelos de gestión de carteras para incluir las opiniones subjetivas del inversor sobre el comportamiento de determinados activos con ciertos niveles de confianza (Black and Litterman, 1992; Martellini and Ziemann, 2007; Satchell and Scowcroft, 2000).
- Técnicas de remuestreo eficiente para generar secuencias de rentabilidades de activos con la *simulación de Montecarlo* y con la media de estas obtener los pesos óptimos de los activos en la cartera óptima (Michaud and Michaud, 2008).
- Utilización de técnicas innovadoras de *Machine Learning* y *Aprendizaje Automático por Refuerzo*. Normalmente, para la estimación de las rentabilidades de los activos se utilizan redes neuronales, y para la optimización de carteras algoritmos genéticos, o modelos tradicionales como el *Modelo Media Varianza* (Roodposhti et al., 2016; Deplano et al., 2016; Gunasekaran and Ramaswami, 2014; Freitas et al., 2009). El aprendizaje automático por refuerzo aprende estrategias de inversión a través de un sistema de recompensa (Moody and Saffell, 2001; Varela et al., 2016).
- *Modelos de Dominancia*. Estos modelos pretenden superar en todo momento a un valor o índice de referencia. Los *Modelos de Dominancia de primer*

orden intentan conseguir siempre una cartera o activo que tenga una rentabilidad superior al índice de referencia. Los *Modelos de Dominancia de segundo orden* intentan conseguir en cada momento temporal una cartera que en rentabilidad acumulada sea mejor al índice o valor de referencia. Los *Modelos de Dominancia de segundo orden* son los más utilizados en la investigación empírica por su mayor flexibilidad (Dentcheva and Ruszczyński, 2006).

1.1.3 Modelos de Diversificación

Para superar la limitación de concentración de activos en la cartera óptima del *Modelo Media Varianza (MV)* han nacido diferentes modelos de gestión de cartera que introducen la diversificación como tercer objetivo. De esta manera se reduce la concentración de la cartera óptima, se disminuye y distribuye el riesgo de la cartera, y se reducen por tanto los errores de estimación y la sensibilidad de pesos de los activos en cartera ante cambios en las estimaciones.

Se ha hecho una revisión literaria del estado del arte para identificar las diferentes formas en las que la diversificación ha sido introducida en los modelos de gestión de cartera. Para sintetizarlos y desarrollarlos, se han establecidos tres grupos: *Enfoques de Ponderación Igualitaria*, *Enfoques de Control de los Límites Superiores e Inferiores* y *Enfoque de la Función de Costes*. A continuación, en los siguiente subapartados se desarrollaran los modelos incluidos en cada categoría.

1.1.3.1 Enfoque de Ponderación Igualitaria

Estos enfoques tienen como punto en común que pretenden distribuir de forma igualitaria la ponderación de los activos en carteras o el riesgo que cada activo aporta a la cartera.

La regla más simple para distribuir el peso de los activos en carteras es seguir la regla $1/N$ o *Modelo de Ponderación Igualitaria o Equally Weighted (EW)* (Benartzi and Thaler, 2001; Li et al., 2021; Windcliff and Boyle, 2004) que distribuye todo el presupuesto de inversión a partes iguales entre el número total de activos (N). Muchos investigadores la han utilizado como un benchmark debido a los resultados tan competitivos que ha obtenido en los resultados fuera de la muestra (DeMiguel

et al., 2009; Duchin and Levy, 2009; Kritzman et al., 2010; Tu and Zhou, 2011). La principal ventaja de esta regla es que no estima ningún parámetro (ni riesgo ni rentabilidad) y las carteras óptimas no sufren variaciones como consecuencia de errores de estimación en los mismos. Además, cuanto mayor sea N mayor será la diversificación y por tanto, la distribución del riesgo en la cartera. Por otra parte, tiene la desventaja de no seguir ningún criterio económico para la selección de activos y por tanto incluir activos con rentabilidades negativas o riesgos muy altos.

DeMiguel et al. (2009) realizaron un estudio empírico para ilustrar bajo qué condiciones el *Modelo de Media Varianza (MV)* podía superar a la regla “ $\frac{1}{N}$ ”. En el estudio se incluyen catorce problemas de optimización de gestión de carteras testeados en siete bases de datos. Sus resultados indican que ninguno de los modelos comparados logran superar significativamente a la regla “ $\frac{1}{N}$ ”. Con lo que concluyen que es necesario introducir la diversificación en los modelos de gestión de cartera, y que, probablemente, los errores en las estimaciones de los parámetros del *Modelo Media Varianza (MV)* son la causa principal de los bajos rendimientos obtenidos empíricamente.

Una de las principales críticas a la regla “ $\frac{1}{N}$ ” es que, en caso de contener activos con perfiles o comportamiento de riesgo muy similares no garantiza la diversificación (Bai et al., 2016; Chaves et al., 2011). Para superar esta limitación han nacido en la Teoría Financiera nuevos modelos que distribuyen el riesgo que cada activo aporta en la cartera, en vez de distribuir el peso de los activos por el total de inversión de la cartera (Asness et al., 2012; Cesarone et al., 2020; Qian, 2011; Roncalli and Weisang, 2016). El modelo más conocido es el *Modelo de Contribución de Riesgos Ponderados o Equally Weighted Risk Contributions (EWRC)* (Kolm et al., 2014; Maillard et al., 2010) que cuantifica el riesgo total de los n -th activos en cartera con la derivada parcial del riesgo con respecto al peso de los n -th activos:

$$w_n \times \partial_{w_n} \left(\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} \right) = w_n \times \frac{w_n \sigma_n^2 + \sum_{n \neq m} w_m \sigma_{nm}}{\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm}} \propto w_n \times (\Sigma \mathbf{w})_n, \quad (1.8)$$

dónde $\Sigma \in R^{N \times N}$ es la matriz de covarianza, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N) \in R^N$ el vector de

pesos, y $(\Sigma \mathbf{w})_n$ los n -th líneas del vector de la matriz obtenida del producto de Σ con \mathbf{w} . El problema puede ser formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{mín}_{w_1, \dots, w_N} \quad & \sum_{n,m=1}^N (w_n \times (\Sigma \mathbf{w})_n - w_m \times (\Sigma \mathbf{w})_m)^2. \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

y puede resolverse usando un algoritmo de un programa secuencial cuadrático . Es importante destacar que el modelo EWRC tiene su origen en el *Modelo de Máxima Diversificación o Maximum Diversification (MD)* (Choueifaty and Coignard, 2008), que maximiza el siguiente ratio de diversificación:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{w_1, \dots, w_N} \quad & \frac{\sum_{n=1}^N w_n \sigma_{nn}}{\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm}}. \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.1.3.2 Enfoque de Control de Límites Superior e Inferior

Una de las formas más sencillas de asegurar la diversificación en el *Modelo Media Varianza (MV)* es introducir un límite superior e inferior de inversión en el número de activos o en un grupo de activos con comportamientos similares. Abdelaziz et al. (2007) propusieron introducir dos restricciones al *Modelo Media Varianza (MV)*. La primera restricción limita la cantidad invertida en cada activo a un rango entre cero y el diez por ciento de la cantidad total del presupuesto de inversión. La segunda restricción limita la cantidad a invertir en activos del sector de la banca, los seguros y el leasing al treinta por ciento del presupuesto total de la cartera.

Masri et al. (2010) introducen dos restricciones simultaneas de límite superior e inferior en la proporción a invertir (w_n) en cada activo (n):

$$\gamma_n \leq w_n \leq \kappa_n, n = 1, \dots, N, \quad (1.11)$$

dónde el límite inferior (γ_n) y el superior (κ_n) $\in [0, 1]$. El programa de optimización cuadrática resultante que incluye las restricciones anteriores se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \underset{w_1, \dots, w_N}{\text{mín}} \quad & \lambda \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} - \sum_{n=1}^N w_n \mu_n. \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & \gamma_n \leq w_n \leq \kappa_n \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En la ciencia financiera también se ha propuesto la forma canónica de estas restricciones (Lin, 2013). Concretamente, Lin (2013) desarrolla la forma canónica de:

- La restricción del límite superior que genera el *Modelo de restricción de límite superior o Weight Upper-Bound Constraint (WUBC)*:

$$\max(w_1, \dots, w_N) \leq U_W, \quad (1.13)$$

dónde $\max(\cdot)$ devuelve el máximo componente del vector, y U_W es el límite superior asociado con la restricción de diversificación;

- La restricción de límite inferior que genera el *Modelo de restricción de límite inferior o Weight Lower-Bound Constraint (WLBC)*:

$$\min(w_1, \dots, w_N) \geq L_W, \quad (1.14)$$

dónde L_W es el límite inferior asociado con la restricción de diversificación, y $\min(\cdot)$ devuelve el mínimo componente del vector;

- La restricción norma- L^p :

$$\sum_{n=1}^N |w_n|^p \leq U_n, \quad (1.15)$$

dónde U_n representa el límite superior de la restricción de diversificación de la norma- L^p ;

- La restricción de entropía:

$$-\sum_{n=1}^N w_n \ln w_n \geq L_E, \quad (1.16)$$

dónde L_E es el límite inferior de la restricción de diversificación entrópica.

Los resultados analíticos del estudio muestran que la restricción de límite inferior es la más estricta forzando la diversificación, y consecuentemente tiene una menor región factible. Mientras que la restricción entrópica es la que menos restringe la región factible, y por tanto, menor diversificación consigue.

1.1.3.3 Enfoque de la Función de Costes

La característica común de este grupo de estrategias es que introducen la diversificación en la función de coste del problema de optimización. Schmidt (2019) propuso el *Modelo Media Varianza Diversificado o Diversified Mean-Variance Portfolio (DMV)* dónde se incorpora un potenciador de la diversificación en la función objetivo, dando lugar al siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{w_1, \dots, w_N} \quad & \lambda \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} - \sum_{n=1}^N w_n \mu_n + \delta \sum_{n=1}^N w_n^2 \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

dónde $\delta \sum_{n=1}^N w_n^2$ es el potenciador de la diversificación, y δ es el hiperparámetro que establece la importancia de dicho potenciador. Esta estrategia se comporta como la regla “1/ N ” cuando δ toma valores altos. En cualquier caso, ambos parámetros δ y λ se deben definir a priori y representan las preferencias del inversor con respecto a la

diversificación y el riesgo, respectivamente. Estas propiedades fueron anteriormente estudiadas en Bouchaud et al. (1997); Kolm et al. (2014).

La formulación de la estrategia DMV es muy similar a la estrategia de diversificación de Kullback-Leibler (Bera and Park, 2008; Liesiö et al., 2020). El criterio de Kullback-Leibler es también conocido como la métrica de Entropía Cruzada y cuantifica, la seudo distancia entre la distribución de probabilidad de los pesos de los activos con los pesos asociados a la regla “ $1/N$ ”:

$$\sum_{n=1}^N w_n \ln(w_n/p_n), \quad (1.18)$$

dónde $p_1 = \dots = p_n = 1/N$. Dicha métrica de diversificación es la misma que la entropía negativa de Shannon (Huang, 2012; Usta and Kantar, 2011) porque el vector incluye p_1, \dots, p_N elementos seguidos en una distribución uniforme; por tanto, la métrica puede quedar definida como:

$$- \sum_{n=1}^N w_n \ln(w_n). \quad (1.19)$$

La entropía de Yager (Yu et al., 2014) es otra alternativa para medir la distancia entre la cantidad invertida en cada activo y la regla “ $1/N$ ”. El presupuesto de inversión se reparte entre los activos más uniformemente cuando la entropía de Yager aumenta, y llega a su mínimo cuando $w_1 = \dots = w_N = 1/N$. Se define de la siguiente manera:

$$\left(\sum_{n=1}^N |w_n - 1/N|^z \right)^{1/z}, \quad (1.20)$$

dónde $z \geq 1$. Incorporando al *Modelo Media Varianza (MV)* la entropía de Yager se define el *Modelo de Diversificación de Yager o Diversified Mean-Variance Portfolio of Yager (DMVY)* DeMiguel et al. (2009) propusieron un modelo mixto entre el *Modelo de Ponderaciones Igualitarias o Equally-Weighted (EW)* $1/N$ y el *Modelo Media Varianza o Equally Weighted and Minimum-Variance (EW-MV)* como una alternativa que promueve la diversificación en la función de coste. Esta estrategia pondera ambos modelos en la función objetivo del problema de optimización (Jiang

et al., 2019).

1.1.4 Resumen y síntesis de modelos de inversión

A continuación se detallan las estrategias de inversión que se han desarrollado en los apartados 1.1.2 y 1.1.3 y que han sido la base de los dos estudios empíricos realizados en esta tesis por compendio. De izquierda a derecha se incluye la abreviatura de la denominación de las diferentes estrategias de inversión por sus siglas en inglés, el nombre de la estrategia, y el rango de valores que puede tomar el hiperparámetro, si es que procede:

Abbr.	Nombre	Hiperparámetros
Modelos Media Varianza y sus variantes		
MV	El Modelo Media Varianza	$\lambda \in [0, 1]$
GMR	El Modelo de Máxima Rentabilidad Global	-
GMV	El Modelo de Mínima Varianza Global	-
SRO	El Modelo de Sharpe	-
Modelos de Diversificación		
EW	Modelo de Ponderación Igualitaria	-
EWRC	Modelo de Contribución de Riesgos Ponderados	-
MD	Modelo de Máxima Diversificación	-
WUBC	Modelo de restricción límite superior	$\lambda \in [0, 1], U_B \in [1/N, 1]$
WLBC	Modelo de restricción de límite inferior	$\lambda \in [0, 1], L_B \in [0, 1/N]$
DMV	Modelo Media Varianza Diversificado	$\lambda \in [0, 1], \delta \in [0, 1]$
DMVY	Modelo de Diversificación de Yager	$\lambda \in [0, 1], \delta \in [0, 1]$
EWMV	Modelo de Ponderación Igualitaria-Media Varianza	$\lambda \in [0, 1], \delta \in [0, 1]$

Cuadro 1.1: Descripción de las estrategias de inversión implementadas los estudio experimentales y que forman parte del marco teórico de esta tesis, junto con los hiperparámetros asociados y el rango de valores que estos hiperparámetros pueden tomar

Dónde λ es el hiperparámetro que define el perfil de riesgo del inversor en todos los modelos, δ define la importancia de la diversificación como tercer objetivo del problema de Markowitz. U_W y L_B son los límites superior e inferior de las restricciones asociadas a la diversificación.

En todos los estudios empíricos que se han realizado con estos modelos estos hiperparámetros han sido definidos a priori, condicionando la elección de la cartera óptima y provocando que el modelo de selección de cartera pierda adaptación al perfil de riesgo de los activos.

1.2 Objetivos y justificación académica de la tesis

Los objetivos de esta tesis son dos:

- Proponer una nueva estrategia de inversión de carteras que mejore el modelo clásico de Markowitz.
- Realizar un estudio empírico comparativo de diferentes estrategias de inversión que incluyan técnicas de diversificación para identificar aquellas estrategias que mejor operan tanto en entornos estables como inestables.

Como consecuencia de la revisión del estado del arte que se ha hecho sobre los modelos de selección de carteras de inversión, y que se ha expuesto en el apartado 1.1, se han detectado las siguientes deficiencias del estado del arte:

- La introducción de la diversificación como tercer objetivo es un área novedosa de la investigación en la selección de carteras de inversión, sobre el cual no se ha realizado una revisión literaria ni una recopilación y categorización de todos los modelos.
- No se ha identificado ningún estudio empírico comparativo que ofrezca conclusiones sobre si dichos *Modelos de Diversificación* son capaces de mejorar los resultados de fuera de la muestra al *Modelo de Media Varianza* y sus variantes.

Por tanto, tampoco se ha concluido acerca de qué escenarios (número de activos, tipos de activos por geografías y sectores, longitud de las ventanas de estimación de la rentabilidad y riesgo de la cartera, etc.) las estrategias de diversificación presentan resultados competitivos en comparación con los *Modelos de Media Varianza*.

- Todos los parámetros que hay dentro de los distintos modelos de selección de carteras se definen a priori, condicionando, por tanto, la solución óptima del problema de optimización.

Uno de los modelos de selección de carteras que incluye un hiperparámetro es el modelo clásico de Markowitz cuando se formulan los dos objetivos dentro

de la función a optimizar ¹. El hiperparámetro λ tiene la función de ponderar la importancia relativa del riesgo con respecto a la rentabilidad en la función objetivo. Cuando se establece un $\lambda = 0,2$, por ejemplo, se está seleccionando una cartera dentro de la frontera eficiente para un inversor a un determinado perfil de riesgo. Sin embargo, se desconoce, si subiendo $\lambda = 0,3$ la variación de rentabilidad en la cartera es más que proporcional a la variación que sufriría el riesgo. Por tanto, si un inversor conociese exactamente el funcionamiento de la relación rentabilidad-riesgo quizás estaría dispuesto a asumir mayor riesgo a cambio de una variación superior de rentabilidad.

Adicionalmente, es importante que los modelos de selección de cartera no solo se adapten al perfil de riesgo del inversor si no también al perfil de riesgo de los activos. Si se define a priori el parámetro se pierde libertad en el modelo para que se adapte a los perfiles de riesgos de los diferentes activos, susceptibles de formar parte de la cartera, según sus precios históricos.

- El modelo clásico de Markowitz (1952) introduce en el problema de optimización dos estimadores de rentabilidad y riesgo en unidades distintas. La rentabilidad se calcula con la esperanza matemática, y el riesgo con la varianza de la serie temporal de precio de los activos. La esperanza matemática se mide en unidades, sin embargo, la varianza se mide en unidades al cuadrado. Esto provoca que los valores de las estimaciones utilizados como outputs sean más dispersos y menos homogéneos.

Para solventar las deficiencias detectadas y descritas anteriormente, en la presente tesis doctoral se realizan las siguientes contribuciones científicas:

- Se ha realizado una revisión literaria sobre el estado del arte de los *Modelos de Diversificación*, obteniendo como resultado una identificación y categorización de todos ellos. Esta síntesis es fundamental para realizar futuros estudios e identificar todas las mejoras que se van implementando en la investigación. Se han clasificado en tres categorías según la forma en la que introducen la

¹Ver formulación en el apartado 1.1.2, fórmula 1.6

diversificación dentro del problema de optimización. La revisión y categorización de las estrategias de diversificación están incluidas en el marco teórico esencial de esta tesis desarrollado en el apartado 1.1.3.

- Se han elaborado dos estudios empíricos comparativos de once y trece estrategias de inversión que incluyen el *Modelo de Media Varianza* y sus variantes, *Modelos de Diversificación* y *Modelos de Dominancia Estocástica*. Ver artículo 2 y 3 en los apartados 2.2 y 2.3 de este compendio.

En el primer estudio, incluido en el artículo 2 de este compendio, se han comparado los resultados obtenidos por once estrategias de inversión en treinta bases de datos de diferentes entornos financieros estables. Las bases de datos seleccionadas difieren en las tipologías y número de activos incluidos, ventanas de estimación utilizadas y geografías de los mercados financieros.

En el segundo estudio, incluido en el artículo 3 de este compendio, se realiza en un periodo financieramente inestable debido a las consecuencias de la pandemia del COVID-19. Se ha realizado sobre la Bolsa española debido a que fue una de las economías más afectadas por las consecuencias de la pandemia, y una de las pioneras en aplicar medidas legales estrictas y restrictivas de movilidad a los ciudadanos.

Ambos estudios contribuyen a la identificación de los escenarios financieros idóneos para la utilización o el uso de estrategias de diversificación.

- Se presenta un método de optimización de los valores de los hiperparámetros asociados a las diferentes estrategias de inversión. Esta optimización de los hiperparámetros ha sido utilizada en los tres artículos que forman esta tesis por compendio y se incluyen en el apartado 2.

La finalidad de esta optimización de los hiperparámetros es que los modelos de inversión se adapten a los comportamientos de los activos en los diferentes mercados.

Esta optimización del hiperparámetro se ha realizado mediante un proceso de optimización bayesiano. Es un algoritmo parecido a una caja negra que va va-

riando los valores del hiperparámetro para ver cuales son los que mejores resultados consiguen. Evaluando continuamente los resultados va aproximando los valores de los hiperparámetros a aquellos valores que consiguen mejores resultados en el problema de optimización de la cartera global.

De esta manera, cada base de datos de activos utilizada para la selección de carteras queda asociada con un valor óptimo de sus hiperparámetros. Este valor óptimo define el perfil de riesgo idóneo de los inversores que deberían operar en dicho mercado o categoría de activos.

- Se propone una alternativa al *Modelo Media Varianza (MV)* para que sus dos estimadores de rentabilidad y riesgo sean estimados en las mismas unidades. El modelo de ha desarrollado en el primer artículo de esta tesis por compendio.

La rentabilidad se estima a través de la esperanza matemática al cuadrado y el riesgo con la varianza de la serie temporal de precio de los activos. El principal inconveniente de este problema a nivel matemático es que no es un problema cuadrático convexo, y por tanto, es necesario transformarlo a un programa lineal mixto integrado para poder resolverlo.

Como se esperaba, los resultados obtenidos con el modelo propuesto son mejores que los del *Modelo Media Varianza* medidos en términos de rentabilidad acumulada de la cartera (MR) y Sharpe Ratio (SR). Los resultados confirman que al estar los dos estimadores expresados en las mismas unidades los resultados numéricos son más homogéneos y menos dispersos.

Todas estas aportaciones están incluidas en los tres artículos que forman parte de esta tesis por compendio y que pasan a resumirse en el siguiente apartado.

1.3 Estructura del compendio

La tesis doctoral que se presenta está desarrollada en la modalidad de compendio de artículos. Todos los artículos están publicados en revistas indexadas en el Journal Citation Reports (JCR). En este apartado se hará una breve descripción del conteni-

do de los artículos publicados y se explicará cómo se alinean con los objetivos de la tesis.

1. El título de la primera publicación de este compendio es “Mean Squared Variance Portfolio: A Mixed-Integer Linear Programming Formulation”. Se ha publicado en la revista *Mathematics*, revista indexada en el primer cuartil (Q1) del índice Journal Citation Reports (JCR-2020), con un índice de impacto de 2,258, y con una posición de 8/84 en la categoría de *operations research and management science*.

En este artículo se desarrolla un modelo alternativo al *Modelo Media Varianza* de Markowitz (1952), cumpliendo el primer objetivo de la tesis. En el *Modelo Media Varianza* se estima la rentabilidad a través de la esperanza matemática de la serie histórica de precio de los activos en bolsa, y el riesgo, a través de la varianza de la misma. Se propone un modelo de media al cuadrado varianza con la finalidad de tener los dos estimadores medidos en las mismas unidades. De esta forma se cambia y mejora la solución óptima del problema de optimización con respecto al modelo de Markowitz ya que compara estimaciones homogéneas realizadas en las mismas unidades consiguiendo outputs menos dispersos. La rentabilidad se estima a través de la esperanza matemática al cuadrado, y el riesgo, a través de la varianza. El modelo queda formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \min_{w_1, \dots, w_N} \quad & \lambda \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} - (1 - \lambda) \left(\sum_{n=1}^N w_n \mu_n \right)^2. \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\
 & w_1, \dots, w_N \geq 0,
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

dónde el término $\sum_{n=1}^N w_n \mu_n$ es la media de la cartera, $\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm}$, ($\sigma_{nm} = \sigma_n^2$) es la varianza de la cartera y $\lambda \in [0, 1]$ es un hiperparámetro del problema que mide la importancia relativa del riesgo con respecto a la media al cuadrado. Para la selección del hiperparámetro se aplica un proceso bayesiano

novedoso que funciona como una caja negra, probando valores individuales del hiperparámetro y viendo qué valores obtienen mejores resultados. Gracias a la evaluación constante, el algoritmo va acercando el valor del parámetro a su valor óptimo.

El principal inconveniente de este planteamiento es la resolución del problema de optimización ya que es un programa cuadrático no convexo. Por ello, se propone una formulación alternativa del problema a través de un programa lineal entero mixto o *Mixed-Integer Linear Programming (MILP)* (Xia et al., 2020), con sus siglas en inglés. A través del MILP, introduciendo los multiplicadores de Lagrange y la no permisividad de ventas en corto como restricciones, se consigue linealizar el problema de optimización y llegar a la solución óptima.

La validación empírica del modelo se realiza con un método de ventana de estimación móvil fuera de la muestra (Bergmeir and Benítez, 2012). Dada una serie de T meses de rentabilidad de activos, con una ventana de estimación M , en cada mes t , empezando por el mes $t = M + 1$, se computan los datos del mes previo M para calcular los pesos óptimos. El proceso se repite Q veces, se va añadiendo la estimación de rentabilidad del periodo siguiente y eliminando la estimación de la rentabilidad más antigua. Para esta validación empírica se ha seleccionado un $M = 60$, $M = 120$ y $M = 240$ y $Q = 36$.

Se utilizan 8 bases de datos diferentes extraídas de la página web de Kenneth French de la universidad de Dartmouth² que contienen activos de las bolsas bursátil de América del Norte de NYSE, AMEX, y NASDAQ, con diferente número y categoría de activos. Cada base de datos contiene rentabilidades mensuales con respecto a la letra del tesoro mensual del mercado de América del Norte. El último periodo mensual que contiene cada base de datos es el 1 de agosto de 2020.

La estrategia MSV se compara con el modelo tradicional de *Media Varianza*

²<http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/>.

(*MV*), y sus variantes, GMR y GMV ³. Los resultados obtenidos se evalúan en término de *Rentabilidad Media de la cartera o Mean Return (MR)*:

$$MR = (1/Q) \sum_{q=1}^Q r_q. \quad (1.22)$$

y *Sharpe ratio (SR)*:

$$SR = \frac{MR}{\sqrt{(1/Q) \sum_{q=1}^Q (r_q - MR)^2}}. \quad (1.23)$$

Los resultados se comparan con dos test estadísticos no paramétricos; el test de Friedman que establece un ranking entre las estrategias en términos de MR y SR, y el test de Holm, que identifica entre qué estrategias existe una diferencia significativa en términos de ranking. Los ranking asignan un $R = 1$ para el mejor modelo en términos de MR o SR, según se esté evaluando, y $R = 10$ para el peor.

Desde un punto de vista objetivo, se observa que el modelo MSV propuesto obtiene los mejores resultados en doce bases de datos, y el segundo mejor resultado en nueve bases de datos en términos de MR. En el caso de la métrica del índice de Sharpe, obtiene los mejores resultados para diez bases de datos y el segundo mejor resultado para doce bases de datos.

2. La segunda publicación de este compendio tiene por título “An experimental study on diversification in portfolio optimization”. Ha sido publicada en *Expert Systems with Applications*, revista indexada en el primer cuartil (Q1) del índice Journal Citation Reports (JCR-2020), con un índice de impacto de 6,954, y con una posición de 6/99 en la categoría de *operations research and management science*.

En esta publicación se realiza un estudio empírico en el que se comparan los resultados fuera de la muestra de once estrategias de inversión en treinta

³Ver apartado 1.1.2 y fórmulas 1.1 y 1.2, respectivamente.

bases de datos diferentes en entornos financieramente estables. Con ello se pretende cumplir parte del segundo objetivo de esta tesis por compendio y dar luz sobre cuáles son los entornos en las que estrategias de diversificación baten los resultados de los *Modelos Media Varianza*. Además, se propone un método de optimización de los hiperparámetros incluidos en cada una de estas estrategias a través de un algoritmo bayesiano.

Se comparan once estrategias de inversión, todas ellas incluidas en la tabla 1.1 excepto el *Modelo de Sharpe*.

Se han utilizado 30 bases de datos diferentes extraídas de la página web de Kenneth French de la universidad de Dartmouth ⁴ que contienen activos de las mercados bursátiles de América del Norte de NYSE, AMEX, y NASDAQ, Asia, Europa, Japón y mercados emergentes. También incluyen carteras de diferentes sectores industriales. El número de activos que contiene cada una de ellas oscila entre 6 y 100 activos. Cada base de datos contiene rentabilidades mensuales con respecto a la letra del tesoro mensual del mercado de América del Norte. El último periodo mensual considerado en todas las bases de datos es el 1 de septiembre de 2020.

Al igual que en el primer artículo las carteras óptimas se calculan a través de ventanas de estimación móviles (M) de 60, 120 y 240 meses, con un número total de meses (T) de 96, 156 y 256, respectivamente. Las medidas de rendimientos evaluadas en cada estrategia y cada base de datos son; la *Rentabilidad Media* de la cartera ⁵, el *Índice de Sharpe* de la cartera ⁶, el *Calma Ratio (CR)*:

$$CR = MR/d, \quad (1.24)$$

y el *Índice de Estabilidad o Stability Index (SI)*:

⁴<http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/>.

⁵Ver fórmula 1.22.

⁶Ver fórmula 1.23.

$$SI = (1/Q-1)(1/N) \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{n=1}^N (|w_n^{q+1} - w_n^q|), \quad (1.25)$$

dónde d es la máxima caída de rentabilidad, w_n^{q+1} es el peso óptimo en la interacción $q + 1$ para el activo n -th y w_n^q es el peso de la estrategia en el activo n -th en la interacción q -th.

De la misma manera que en el primer artículo, se realizan dos test no paramétricos (el test de Friedman y el test de Holm) para comprobar si existe diferencia significativa entre las diferentes estrategias en términos de ranking.

Las estrategias de inversión que mejores resultados obtienen en términos de media son la estrategia GMR y EWMV y las que mejores resultados obtienen en términos de SR y CR son el modelo GMV y DMVY. En términos de índice de estabilidad los mejores modelos son el EWRC y el MD. Los mejores modelos en MR no son significativamente mejores que el resto, sin embargo, para el SR y el CR, el modelo GMV si es significativamente mejor que el EW y el MD, y para el SI, el modelo EWRC es significativamente mejor que todos los otros 10 modelos.

3. La tercera publicación de este compendio se titula “COVID-19 impact on the Spanish stock exchange with 2 mean-variance and diversification-based portfolios”. Ha sido publicada en la revista *Applied Economics Letters*, indexada en el tercer cuartil (Q3) del índice Journal Citation Reports (JCR-2020), con un índice de impacto de 1,157, y con una posición de 282/376 en la categoría de *Economics*.

En esta publicación se realiza un estudio empírico en el que se comparan los resultados fuera de la muestra de trece estrategias de inversión el mercado bursátil español durante el periodo de inestabilidad financiero provocado por el COVID-19. Con ello, se completa la consecución del segundo objetivo de esta tesis por compendio y se observan cuáles son las estrategias más robustas en periodos de gran inestabilidad financiera. Igualmente, se estiman los

hiperparámetros de los diferentes modelos a través de un proceso bayesiano.

Se incluyen las doce estrategias de inversión incluidas en la tabla 1.1, y el *Modelo de Dominancia estocástica de segundo orden*, descrito en el apartado 1.1.2.

En el estudio empírico se han utilizado activos del mercado bursátil español, concretamente, se han seleccionado los treinta y dos activos que han permanecido fijos en el Ibex-35 durante el periodo comprendido entre el 25 de noviembre de 2019 y 11 de enero de 2021. Las rentabilidades diarias han sido calculadas como diferencia de precio final menos inicial partido por inicial. Se ha dividido la bases de datos en cuatro periodos en función de la intensidad con la que el COVID-19 ha afectado a la sociedad española:

ID	Dataset	Date	T	D	Q	N
1	Pre-COVID-19 period	25/11/2019 to 06/03/2020	73	48	25	32
2	Lockdown period	09/03/2020 to 19/06/2020	72	47	25	32
3	Stability period	22/06/2020 to 30/09/2020	73	48	25	32
4	Second COVID-19 wave period	01/10/2020 to 11/01/2021	71	46	25	32

Cuadro 1.2: Subperiodos de análisis de la base de datos, definiendo el número total de datos T , el periodo de estimación D , el periodo de validación Q y el número total de activos N

En la tabla anterior se incluye un detalle de cada periodo; su ID o nombre de la base de datos, el periodo bursátil incluido en cada una de ellas, el número total de días totales (T), la longitud de la ventana de estimación (D), el número de repeticiones o validaciones realizadas (Q), y el número de activos (N).

Se ha seleccionado el mercado financiero español porque España fue uno de los primeros países en estar afectado por el COVID-19, y por tanto, combatirlo con medidas de restricciones a la movilidad de los ciudadanos, e indirectamente, a la economía nacional en general.

Los resultados obtenidos han sido comparados con tres métricas, la rentabilidad media (MR)⁷, el ratio de Sharpe (SR)⁸ y el Carlma Ratio (CR)⁹.

⁷Ver fórmula 1.22.

⁸Ver fórmula 1.23.

⁹Ver fórmula 1.24.

Los resultados obtenidos muestran que las mejores estrategias para las tres métricas de evaluación son el modelo GMV, EWRC y DMV, soportando la hipótesis tradicional de que en periodos de inestabilidad financiera es importante distribuir el riesgo de la cartera y promover la diversificación.

Capítulo 2

Publicaciones de la tesis doctoral

En esta tesis por compendio titulada *Revisitando el modelo de Markowitz: modelos de optimización y aplicaciones* se incluyen los siguiente estudios publicados:

1. Artículo I

Fernández-Navarro, F.; Martínez-Nieto, L.; Carbonero-Ruz, M.; Montero-Romero, T. (2021) Mean Squared Variance Portfolio: A Mixed-Integer Linear Programming Formulation. *Mathematics* 9 (3), 223.

<https://doi.org/10.3390/math9030223>

2. Artículo II

Martínez-Nieto, L.; Fernández-Navarro, F.; Carbonero-Ruz, M.; Montero-Romero, T. (2021) An experimental study on diversification in portfolio optimization. *Expert Systems with Applications*, 181:115203.

<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115203>

3. Artículo III

Martínez-Nieto, L.; Fernández-Navarro, F.; Montero-Romero, T.; Carbonero-Ruz, M.; (2021) Covid-19 impact on the spanish stock exchange with mean-variance and diversification-based portfolios. *Applied Economics Letters*, 0(0):1–7. <https://doi.org/10.1080/13504851.2021.1990203>

2.1 Artículo I

Título: *Mean Squared Variance Portfolio: A Mixed-Integer Linear Programming Formulation*

Revista: *Mathematics*



Autores: Francisco Fernández-Navarro, Luisa Martínez-Nieto, Mariano Carbonero-Ruz, Teresa Montero-Romero.

Indicios de calidad del artículo según la edición de JCR de referencia: Revista indexada en el primer cuartil (**Q1**) del Índice *Journal Citation Reports* (JCR-2020), con un índice de impacto de 2,258, y con una posición de 8/84 en la categoría de *operations research and management science*.

DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/math9030223>.

Article

Mean Squared Variance Portfolio: A Mixed-Integer Linear Programming Formulation

Francisco Fernández-Navarro ^{1,*}, Luisa Martínez-Nieto ², Mariano Carbonero-Ruz ¹
and Teresa Montero-Romero ²¹ Department of Quantitative Methods, Universidad Loyola Andalucía, 41704 Sevilla, Spain; mariano@uloyola.es² Department of Financial Economics and Accounting, Universidad Loyola Andalucía, 41704 Sevilla, Spain; mlmartinezniето@al.uloyola.es (L.M.-N.); tmontero@uloyola.es (T.M.-R.)

* Correspondence: fafernandez@uloyola.es

Abstract: The mean-variance (MV) portfolio is typically formulated as a quadratic programming (QP) problem that linearly combines the conflicting objectives of minimizing the risk and maximizing the expected return through a risk aversion profile parameter. In this formulation, the two objectives are expressed in different units, an issue that could definitely hamper obtaining a more competitive set of portfolio weights. For example, a modification in the scale in which returns are expressed (by one or percent) in the MV portfolio, implies a modification in the solution of the problem. Motivated by this issue, a novel mean squared variance (MSV) portfolio is proposed in this paper. The associated optimization problem of the proposed strategy is very similar to the Markowitz optimization, with the exception of the portfolio mean, which is presented in squared form in our formulation. The resulting portfolio model is a non-convex QP problem, which has been reformulated as a mixed-integer linear programming (MILP) problem. The reformulation of the initial non-convex QP problem into an MILP allows for future researchers and practitioners to obtain the global solution of the problem via the use of current state-of-the-art MILP solvers. Additionally, a novel purely data-driven method for determining the optimal value of the hyper-parameter that is associated with the MV and MSV approaches is also proposed in this paper. The MSV portfolio has been empirically tested on eight portfolio time series problems with three different estimation windows (composing a total of 24 datasets), showing very competitive performance in most of the problems.

Keywords: mean-variance portfolio; portfolio diversification; non-convex quadratic programming; mixed-integer linear programming



Citation: Fernández-Navarro, F.; Martínez-Nieto, L.; Carbonero-Ruz, M.; Montero-Romero, T. Mean Squared Variance Portfolio: A Mixed-Integer Linear Programming Formulation. *Mathematics* **2021**, *9*, 223. <https://doi.org/10.3390/math9030223>

Academic Editor: Román Ferrer, Rafael Benítez and Vicente J. Bolós

Received: 18 December 2020

Accepted: 20 January 2021

Published: 23 January 2021

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Markowitz (1952) [1,2] proposed the well-known mean-variance (MV) portfolio model under the assumption that a rational investor aims at maximizing returns and minimizing risks. Mathematically speaking, the MV portfolio framework is a bi-objective optimization problem, where an efficient frontier is composed by all combination assets that are not dominated by any other in expected return and risk simultaneously. The two goals that are associated with the framework can be addressed separately as two independent optimization problems giving rise to the global maximum return (GMR) [3] and global minimum variance (GMV) [4–6] portfolios.

The MV portfolio has been widely implemented in the scientific community and accepted by professionals [7–9]. The main advantages of the approach are its ease of use, since the theory presents the concept of return and risk in a straightforward fashion and the ease in which the optimization problem is formulated. Unfortunately, the MV portfolio has yet to be proven competitive in out-of-sample validation [10–12]. Thus, the main limitations of the theory are as follows:

- High concentration: MV-inspired portfolios are highly concentrated on a few securities with the "best" features [13,14]. Assets with either high expected returns or low expected variance will be overweighted, in this way losing the power of diversification that the theory is supposed to ensure [15].
- Instability: MV portfolios tend to drastically re-allocate resources when the asset features change slightly, regardless of transaction costs or data inaccuracy [16,17]. This mainly occurs because MV portfolios do not take estimation inaccuracy into account and concentrate on assets with "good" features.
- Sensitivity to input errors: because the MV portfolio gives excessive weight to assets with high expected returns, the resulting portfolios are highly sensitive to errors in the input data [18–20].

The optimization problem that is associated with the MV portfolio can be formulated in several ways, depending on how the risk aversion parameter is incorporated into the equations. The main formulations for the optimization problem can be summarized, as follows:

1. Maximize the expected return for a specified risk: the first possible formulation includes the maximization of the portfolio mean in the objective function of the problem and the maximum level of risk that an investor is able to assume as a constraint of the problem.
2. Minimize the risk for a pre-determined expected return: the second alternative tries to minimize the risk and introduces the minimum level of the mean return as a constraint of the optimization.
3. Minimize the risk and maximize the expected return combining both of the objectives through a user-defined risk aversion parameter.

The above problems could have linear or non-linear constraints, equality, and inequality constraints. Furthermore, the three described optimization problems are mathematically equivalent and the solutions are called mean-variance (MV) efficient. Hence, the efficient points in the return-risk plot are called the efficient frontier.

One of the potential limitations of the third formulation of the problem is that it combines two objectives that are measured in different units. In fact, the variance is a second-order moment statistic and the mean is a first-order moment one. Consequently, a modification in the scale in which returns are expressed (both by one or percent, for example), differently affects them, accordingly changing the solution of the problem. Furthermore, the most widely used performance measure in the quantitative finance literature to compare portfolio strategies is the Sharpe ratio, which computes the quotient between the return of the portfolio with respect to the standard deviation of the portfolio's excess return [21–23]. As can be seen, the Sharpe ratio assesses the two objectives in the same unit level, unlike the third formulation of the optimization problem, which evaluates the objectives in different units [24].

Motivated by this fact, a novel portfolio strategy, which is denoted as mean squared variance (MSV), which calculates the two objectives of the minimization function of the problem in the same unit is proposed in this paper. Specifically, the mean return of the portfolio is expressed in squared form in the proposed strategy, aiming to provide a straightforward manner of comparing the two objectives in the same unit. The resulting portfolio model is a non-convex quadratic programming (QP) problem, which has been reformulated as a mixed-integer linear programming (MILP) problem to reach, in this way, the global solution of the problem.

The reformulation of the baseline QP problem as an MILP is done via the adaptation of the QP problem as a linear complementary problem, the use of binary variables and big-M constraints to model the complementary constraints. The estimation of the upper bounds on the dual variables was borrowed from the work of [25] for the case of a standard QP problem. The reformulation of the initial non-convex QP problem into an MILP has the advantage of ensuring that the global solution is obtained via the use of current state-of-the-art MILP solvers.

Finally, an innovative purely data-driven method for determining the optimal value of the hyper-parameter that is associated with the MV and MSV strategies (the risk aversion parameter, λ) is also proposed in this paper. The hyper-parameter optimization is based on a Bayesian approach for the global optimization of λ [26]. The approach will allow the manuscript authors to show that the proposed formulation of the MV problem helps the global optimization procedure achieve a more competitive set of portfolio weights (in terms of the Sharpe ratio).

The rest of the paper is organized, as follows. Section 2 describes the foundations of the proposed mean squared variance (MSV) strategy and its reformulation as a mixed-integer linear programming (MILP) optimization problem. Section 3 details the experimental framework that was developed for the empirical comparison of the state-of-the-art portfolio strategies implemented. Section 4 reports the statistical results obtained by the different strategies and Section 5 presents the conclusions that were reached in the study.

2. The Proposed Method

The aim of this section is to describe the mathematical formulation (Section 2.1) and foundations (Section 2.2) of the proposed method, named the mean squared variance (MSV) portfolio, as well as to provide the necessary details to reformulate the model as a mixed-integer linear programming (MILP) optimization problem (Section 2.3).

2.1. Mathematical Formulation of the Model

The proposed method determines, for a portfolio consisting of N assets ($n = 1, \dots, N$), the optimal weights of the portfolio's value invested in each asset, $w_1, \dots, w_N \geq 0$ ($\sum_{n=1}^N w_n = 1$), while using, as inputs of the problem, the expected returns (μ_n), risks (σ_n) and covariances between assets (σ_{nm}). As previously mentioned, the associated optimization problem of the model is very similar to the Markowitz optimization, except in the part of the portfolio mean, which is presented in squared form in our formulation. Thus, the MSV portfolio is defined as:

$$\begin{aligned} \min_{w_1, \dots, w_N} \quad & \lambda \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} - (1 - \lambda) \left(\sum_{n=1}^N w_n \mu_n \right)^2 \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1, \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where the term $\sum_{n=1}^N w_n \mu_n$ is the portfolio mean, $\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm}$, ($\sigma_{nn} = \sigma_n^2$) is the portfolio variance and $\lambda \in [0, 1]$ is a hyper-parameter of the problem that weights the relative importance of the risk with respect to the mean squared return. The model can also be formulated in matrix form as follows:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \quad & \lambda \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} - (1 - \lambda) \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}. \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1. \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{2}$$

where $\mathbf{w} = (w_1 \dots w_N)^T \in \mathbb{R}^N$ is the vector with the optimal weights of the portfolio, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is the covariance matrix of the asset's returns, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \dots \mu_N)^T \in \mathbb{R}^N$ is the vector with the expected returns, and $\mathbf{0}$ and $\mathbf{1}$ are N -dimensional vectors with zeros and ones in all the rows, respectively. For ease of reference, the proposed MSV portfolio is expressed as:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{H} \mathbf{w}. \\
 & \text{s. t.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1. \\
 & \quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{3}$$

with $\mathbf{H} = \lambda \mathbf{\Sigma} - (1 - \lambda) \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, and $\mathbf{R} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T$ and the constant $1/2$ has been incorporated in the objective function in order to facilitate its derivation.

2.2. Main Foundations of the Model

In this section, the optimal portfolios of the MSV and MV models are analytically compared. The GMV and GMR portfolios are also included in the study for reference. The four optimization problems share the same feasible region and, therefore, for their analysis, it will suffice to compare their objective functions:

$$\begin{aligned}
 F^{\text{MSV}}(\mathbf{w}|\lambda) &= \lambda \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} - (1 - \lambda) \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}. \\
 F^{\text{MV}}(\mathbf{w}|\lambda) &= \lambda \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} - (1 - \lambda) \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}. \\
 F^{\text{GMV}}(\mathbf{w}) &= \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}. \\
 F^{\text{GMR}}(\mathbf{w}) &= -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}.
 \end{aligned}$$

It is straightforward to realize that, when only the expected return is taken into account ($\lambda = 0$), the MSV, MV, and GMR models provide the same optimal solution. Additionally, when only risk is taken into account ($\lambda = 1$), MSV, MV, and GMV achieve the same portfolio. The analysis in intermediate situations, when both return and risk ($0 < \lambda < 1$) are considered, is not so immediate. This is pursued assuming that $0 < \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} < 1$ and, therefore, the expected return for any portfolio is positive and lower than 100%. Under these conditions, $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} = (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu})^2 < \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}$, so $F^{\text{MV}}(\mathbf{w}|\lambda) \leq F^{\text{MSV}}(\mathbf{w}|\lambda)$.

In any case, Section 4 shows how the mathematical formulation of the MSV problem helps the model to achieve significantly better out-of-sample Sharpe ratios than the ones that were reported by the traditional MV method.

2.3. Mixed-Integer Linear Programming Reformulation

The \mathbf{H} matrix in the QP problem that is associated to the model (see Equation (3)) is the difference between two positively weighted matrices ($\mathbf{\Sigma}$ and \mathbf{R}). In this context, positivity of \mathbf{H} can not be assured and the QP problem associated may be a non-convex QP problem. Due to this fact, the authors detail below how the model could be reformulated as an MILP optimization problem. The reformulation will allow for us to yield the global optimum in each portfolio problem using the current state-of-the-art MILP solvers.

The first step in the reformulation is the introduction of the Lagrange multipliers $\kappa \in \mathbb{R}$ for the equality constraint and $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^N$ for the non-negativity constraints (no short sales restrictions). The KKT conditions for the problem after introducing those multipliers are given by:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} \mathbf{w} + \mathbf{1} \kappa - \boldsymbol{\delta} &= \mathbf{0}. \\
 \mathbf{w}^T \boldsymbol{\delta} &= 0. \\
 \mathbf{1}^T \mathbf{w} &= 1. \\
 \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta} &\geq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

In this way, the KKT points of the optimization problem are denoted as:

$$\Omega_{\text{KKT}} = \{(\mathbf{w}, \kappa, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^{2N+1} : (\mathbf{w}, \kappa, \boldsymbol{\delta}) \text{ satisfy Equations in (4)}\} \tag{5}$$

In the proposed portfolio problem, the KKT conditions are first-order necessary conditions for the optimal solutions of the system, since the feasible set of QP is a polyhedron. Because of that, the KKT conditions can be incorporated into the optimization problem

as redundant constraints, in this way obtaining the following equivalent formulation of the problem:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \quad (1/2)\mathbf{w}^T \mathbf{H} \mathbf{w}. \\
 & \text{s. t.} \quad \mathbf{H} \mathbf{w} + \mathbf{1} \kappa - \delta = \mathbf{0}. \\
 & \quad \quad \mathbf{w}^T \delta = 0. \\
 & \quad \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1. \\
 & \quad \quad \mathbf{w}, \delta \geq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Next, the KKT conditions are used in order to linearize the objective function, as suggested in [27]. First, the equality constraint $\mathbf{H} \mathbf{w} = \delta - \mathbf{1} \kappa$ is used to express the objective function as:

$$(1/2)\mathbf{w}^T \mathbf{H} \mathbf{w} = (1/2)\mathbf{w}^T (\delta - \mathbf{1} \kappa) = (1/2)\mathbf{w}^T \delta - (1/2)\mathbf{w}^T \mathbf{1} \kappa, \tag{7}$$

and, second, when considering that $\mathbf{w}^T \delta = 0$ and $\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$, the final objective function, in linear form, is defined as $-(1/2)\kappa$, equivalent to $-\kappa$.

As a result of the previously mentioned transformations, the optimization problem (3) is equivalent to the following problem with a linear (instead of quadratic) objective:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \quad -\kappa. \\
 & \text{s. t.} \quad \mathbf{H} \mathbf{w} + \mathbf{1} \kappa - \delta = \mathbf{0}. \\
 & \quad \quad \mathbf{w}^T \delta = 0. \\
 & \quad \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1. \\
 & \quad \quad \mathbf{w}, \delta \geq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

and, while taking into account that the δ and \mathbf{w} variables are complementary to each other (complementary constraint), the problem can be formulated as:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \quad -\kappa. \\
 & \text{s. t.} \quad \mathbf{H} \mathbf{w} + \mathbf{1} \kappa - \delta = \mathbf{0}_N. \\
 & \quad \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1. \\
 & \quad \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{w} \perp \delta \leq \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{9}$$

where $\mathbf{w} \perp \delta$ denotes perpendicularity between vectors \mathbf{w} and δ , and it impedes the optimization problem as a linear problem. Note that problem (9) is equivalent to 2^N linear programs obtained by making each possible assignment for the complementary variables: either $\delta_n = 0$ or $w_n = 0$ for each $n = 1, \dots, N$; hence, it is not possible for the optimization problem to have a finite optimal solution that is not attained. Therefore, problem (9) can be reformulated as an MILP while assuming that the upper bounds for \mathbf{w} and δ exist and they are defined as vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ with entries u_n and v_n :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \quad -\kappa. \\
 & \text{s. t.} \quad \mathbf{H} \mathbf{w} + \mathbf{1} \kappa - \delta = \mathbf{0}. \\
 & \quad \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1. \\
 & \quad \quad 0 \leq w_n \leq u_n. \\
 & \quad \quad 0 \leq \delta_n \leq v_n. \\
 & \quad \quad z_n \in \{0, 1\},
 \end{aligned} \tag{10}$$

for $n = 1, \dots, N$. The obvious drawback of this formulation is that in order to find u_n and v_n , the upper bounds of w_n and δ_n should be known a priori. The upper bound, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, for the primal variables, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$, is $\mathbf{u} = \mathbf{1}$ and it can be computed (while assuming that the feasible set of QP is non-empty and bounded) by setting:

$$u_n = \max\{w_n : \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1, w_n \geq 0\}, \quad (11)$$

for every $n = 1, \dots, N$. The calculation of the upper bounds, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, on the dual variables, $\delta \in \mathbb{R}^N$, was borrowed from the research work of [25], which sets those bounds (for a standard quadratic program) as:

$$\mathbf{v} \geq s\mathbf{1}, \quad (12)$$

with

$$s = 2N(\|\mathbf{H}\|_{\infty, \infty} + \|\mathbf{f}\|_{\infty}), \quad (13)$$

where $\|\mathbf{f}\|_{\infty} = 0$ in the proposed formulation as \mathbf{f} represents the vector that is associated with the linear part of the optimization problem (non-existent in the MSV strategy).

3. Experimental Framework

The aim of this section is to fully define the datasets and methods used for comparison purposes, the performance metrics, and the hypothesis tests that were implemented in the present empirical study.

3.1. Out-Of-Sample Empirical Validation and Portfolio Problems Selected

The empirical validation implemented is inspired by the rolling window out-of-sample validation method [28]. Therefore, given a time series with T months of securities returns, an estimation window length, M , is selected and, in each month t , starting from $t = M + 1$, the data in the previous M months are employed to compute the optimal weights that are associated with each strategy. The return in month t is computed while using the previously computed weights.

The optimization process is repeated Q times by adding, in each iteration, the return of the next period in the time series and removing from the estimation window the earliest return. In this way, the outcome of this empirical validation, for each strategy and time series tested, is a set of Q out-of-sample returns, r_1, \dots, r_Q . In the experimental framework, the estimation window length, M , is set to 60, 120, and 240, as recommended in [10], $M \in \{60, 120, 240\}$. Additionally, the validation process is repeated 36 times, $Q = 36$.

Table 1 details the properties of the selected time series portfolio problems, for each portfolio problem, its ID, name (Dataset), the estimation window length (M), the number of total months considered (T) and the number of assets (N). The datasets considered were obtained from Kenneth French's web site at Dartmouth University (<http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/>). It is important to mention that these portfolio problems have been widely used in the community for validating novel portfolio strategies [10,29,30]. The date of the last monthly excess returns considered for all the problems is 1 August 2020.

Each dataset contained monthly returns in excess of the one-month Treasury bill rate. All portfolios are constructed on June of each year with NYSE, AMEX, and NASDAQ stocks (real-world portfolio datasets). The industry portfolio holds one portfolio of each of five or ten different groups of sectors that formed by the SIC code (consumer durable and non-durables, manufacturing, oil and gas, business equipment, transmission, retail, healthcare, utilities, and others, etc.).

Table 1. Characteristics of the benchmark datasets.

ID.	Dataset	M	T	N
Industry Portfolios				
{1, 2, 3}	5 Industry Portfolios	{60, 120, 240}	{96, 156, 276}	5
{4, 5, 6}	10 Industry Portfolios	{60, 120, 240}	{96, 156, 276}	10
Emerging Market Factors				
{7, 8, 9}	6 Emerging Market Portfolios Formed on BM and OP	{60, 120, 240}	{96, 156, 276}	6
{10, 11, 12}	6 Emerging Market Portfolios Formed on Size and BM	{60, 120, 240}	{96, 156, 276}	6
{13, 14, 15}	6 Emerging Market Portfolios Formed on Size and OP	{60, 120, 240}	{96, 156, 276}	6
Bivariate sorts on Size, BM and I				
{16, 17, 18}	6 Portfolios Formed on Size and BM	{60, 120, 240}	{96, 156, 276}	6
{19, 20, 21}	6 Portfolios Formed on Size and I	{60, 120, 240}	{96, 156, 276}	6
Bivariate sorts on Size, BM and I				
{22, 23, 24}	25 European Portfolios Formed on Size and BM	{60, 120, 240}	{96, 156, 276}	25

BM: Book-to-Market; OP: Operating Profitability; I: Investment.

3.2. Strategies Implemented

The proposed strategy (MSV) is compared, in the experimental study, to the baseline MV strategy and its corresponding parts: the GMR and GMV strategies. The proposed strategy, MSV, and the well-known MV both include an additional hyper-parameter, λ , which defines the importance of the variance term with respect to the mean. The range of values of the λ hyper-parameter has been set to $\lambda \in [0, 1]$.

3.3. Performance Measures

In the experimentation, two well-known performance measures are computed for each strategy in each time series portfolio problem. Specifically:

1. The out-of-sample mean returns (MR):

$$MR = (1/Q) \sum_{q=1}^Q r_q. \quad (14)$$

2. The out-of-sample Sharpe ratio (SR), defined as the sample mean of out-of-sample excess returns, MR, divided by their corresponding sample standard deviation:

$$SR = \frac{MR}{\sqrt{(1/Q) \sum_{q=1}^Q (r_q - MR)^2}}. \quad (15)$$

3.4. Hyper-Parameter Optimization

In this research, the hyper-parameters of each strategy have been globally optimized while using the data available in the estimation window part in order to adapt the model to the behavior of the market in each dataset. Thus, the last year of the estimation window data was used in an internal validation process to evaluate the performance, in terms of out-of-sample Sharpe ratio, which is associated with the specific value of the hyper-parameter being explored, whereas the previous years were employed to compute the optimal weights for this λ value.

The hyper-parameter optimization was implemented through a Bayesian process. Bayesian optimization is an algorithm employed in global optimization to minimize a certain objective function, treated as a black box, by varying the value of its independent variables. The algorithm itself relies on an internal Gaussian process that approximates the objective function and it is trained by subsequent evaluations of the true objective. The

approximated model is used for optimization to reduce computational costs and for its robust nature in addressing stochastic noise in function evaluations.

3.5. Statistical Hypothesis Testing

Statistical hypothesis testing was used in order to provide statistical support in the evaluation of the reported results. It is important to clarify that a statistical analysis through parametric tests could lead to mistaken conclusions in this study, since a previous evaluation of the MR and SR values that were provided by the strategies implemented resulted in rejecting the normality and equality of the variance hypothesis. Furthermore, as noted by Demšar [31], the independence condition is not truly verified in a rolling window out-of-sample validation. For these reasons, two non-parametric Friedman tests (with the ranking of MR and SR of the strategies as the test variables) were carried out to assess the statistical significance of the rank differences. Consequently, a non-parametric Holm post hoc test was used to ascertain which strategies were distinctive among the multiple comparisons performed [31].

4. Results

In this section, the different experimental analyses that were carried out with the proposed portfolio model are detailed. In particular, the goals of the section are as follows:

1. to compare the out-of-sample performance of the MSV portfolio with the performance provided by state-of-the-art MV-based strategies (Section 4.1); and,
2. to analyse the diversification levels produced by the proposed MSV portfolio and the MV portfolio in problems with different dimensions (Section 4.2).

4.1. Performance Analysis

In this subsection, the performance results of the MSV strategy are compared to those that are provided by the standard MV strategy and its corresponding individual components (the GMV and GMR strategies). Table 2 shows the MR and SR out-of-sample performance results for each time series and the implemented strategies. For the strategies requiring an internal hyper-parameter optimization (such as the MV or MSV), the validation process is repeated 10 times in order to evaluate the robustness of the stochastic optimization procedure (Section 3.4) and, consequently, the performance reported for those strategies in each dataset is the mean and standard deviation of the MR and SR performance achieved in the 10 repetitions considered for the time series being analyzed (Table 2). Based on the reported MR and SR for each technique and dataset, the ranking of each strategy in each dataset and measure ($R = 1$ for the best performing strategy and $R = 4$ for the worst one) is obtained. In addition, Table 2 presents the mean MR and SR over the 24 datasets that were considered for each strategy (\overline{MR} and \overline{SR}) and their corresponding mean rankings (\overline{R}_{MR} and \overline{R}_{SR}).

From a purely descriptive point of view, it can be concluded that the MSV strategy obtained the best results in 12 datasets and the second-best results in nine problems when the MR measure is considered. With regard to the SR measure, the MSV portfolio achieved the best results in 10 time series and the second-best results in 12 datasets. Furthermore, the MSV portfolio yields the best mean ($\overline{MR} = 0.8731$, $\overline{SR} = 0.1607$) and ranking ($\overline{R}_{MR} = 1.7500$, $\overline{R}_{SR} = 1.7083$) in MR and SR, respectively. The second-best mean ranking is obtained by the baseline MV method in the two performance measures ($\overline{R}_{MR} = 2.4792$, $\overline{R}_{SR} = 2.5417$). The third most competitive method appears to be the GMR strategy that achieved the second-best mean MR ($\overline{MR} = 0.8426$) and the third-best mean MR and SR ranking ($\overline{R}_{MR} = 2.5208$, $\overline{R}_{SR} = 2.7292$). Finally, the worst performing portfolio was the GMV one, which reported the worst mean MR and SR ($\overline{MR} = 0.6934$, $\overline{SR} = 0.1369$) and worst mean MR and SR ranking ($\overline{R}_{MR} = 3.2500$, $\overline{R}_{SR} = 3.0208$).

The competitive performance of the proposed portfolio can also be graphically seen in Figure 1, in which the cumulative monthly returns of the four implemented strategies during the out-of-sample validation process for the five Industry Portfolio problems ($M = 60$, $ID = 1$) are reported. The MSV strategy seems to be an appealing approach for

portfolio optimization, in performance terms, as can be seen in Figure 1. Another aspect that is important to stress is that the MSV portfolio is less sensitive to the length of the estimation windows than its comparison strategies, reporting competitive results for different values of M (unlike, for example, the GMR strategy that usually only achieves competitive results for small values of M). In a similar fashion, the MSV strategy also achieves competitive results for different values of N (problems with a different number of assets).

Table 2. Statistical results of the strategies implemented: the mean returns (MR) and Sharpe ratio (SR) out-of-sample performance of each strategy and dataset (MR and SR), mean MR (\overline{MR}), mean MR ranking (\overline{R}_{MR}), mean SR (\overline{SR}) and mean SR ranking (\overline{R}_{SR}). The datasets are denoted by their IDs. The best results are in bold face and second-best results in italics.

ID	MR Metric				SR Metric				ID
	GMV	GMR	MV	MSV	GMV	GMR	MV	MSV	
1	0.9521	<i>1.6197</i>	1.1717 _{0.0065}	1.8161 _{0.0000}	0.1330	0.2243	0.1646 _{0.0015}	0.2339 _{0.0000}	1
2	1.4004	1.8981	<i>1.8977</i> _{0.0003}	1.8981 _{0.0000}	0.2825	0.3408	<i>0.3391</i> _{0.0008}	0.3408 _{0.0000}	2
3	1.3098	0.9897	<i>1.3146</i> _{0.0013}	1.3478 _{0.0034}	0.2698	0.1748	<i>0.2705</i> _{0.0008}	0.2775 _{0.0021}	3
4	0.6058	2.1011	1.4175 _{0.0008}	<i>1.2533</i> _{0.0338}	0.1411	0.3493	0.2426 _{0.0005}	<i>0.2965</i> _{0.0098}	4
5	0.6324	1.9033	<i>1.2299</i> _{0.0012}	1.1355 _{0.0004}	0.1541	0.3077	<i>0.2174</i> _{0.0013}	0.2062 _{0.0003}	5
6	0.7234	1.2039	0.8252 _{0.0021}	<i>1.0470</i> _{0.0866}	0.1752	0.2079	0.2093 _{0.0007}	<i>0.2084</i> _{0.0124}	6
7	0.5404	0.5456	<i>0.5477</i> _{0.0008}	0.5577 _{0.0013}	<i>0.1016</i>	0.0960	<i>0.1016</i> _{0.0003}	0.1028 _{0.0005}	7
8	0.5473	0.4494	<i>0.5342</i> _{0.0008}	0.4494 _{0.0000}	0.1027	0.0791	<i>0.0959</i> _{0.0002}	0.0791 _{0.0000}	8
9	0.5118	−0.1094	−0.1042 _{0.0118}	<i>0.0021</i> _{0.0089}	0.0960	−0.0175	−0.0166 _{0.0019}	<i>0.0021</i> _{0.0017}	9
10	0.1898	0.6411	<i>0.6524</i> _{0.0419}	0.6848 _{0.0321}	0.0324	0.1277	<i>0.1295</i> _{0.0072}	0.1351 _{0.0057}	10
11	0.4162	0.6039	0.5962 _{0.0051}	<i>0.6005</i> _{0.0041}	0.0742	<i>0.1268</i>	0.1249 _{0.0010}	0.1270 _{0.0007}	11
12	0.3150	<i>0.1772</i>	<i>0.1772</i> _{0.0000}	0.1775 _{0.0012}	<i>0.0561</i>	0.0306	0.0306 _{0.0000}	<i>0.0309</i> _{0.0002}	12
13	0.1505	0.4075	0.1259 _{0.0031}	<i>0.2530</i> _{0.0810}	0.0262	0.0747	0.0220 _{0.0010}	<i>0.0456</i> _{0.0266}	13
14	0.2519	0.3078	0.2679 _{0.0014}	<i>0.2756</i> _{0.0294}	0.0444	0.0614	0.0474 _{0.0008}	<i>0.0515</i> _{0.0091}	14
15	0.1601	0.3181	0.1640 _{0.0321}	<i>0.1919</i> _{0.0705}	0.0283	0.0561	0.0291 _{0.0087}	<i>0.0339</i> _{0.0124}	15
16	1.1048	<i>1.7043</i>	1.5803 _{0.1945}	1.7876 _{0.0000}	0.2017	<i>0.3252</i>	0.2992 _{0.0413}	0.3288 _{0.0000}	16
17	1.4131	1.4092	<i>1.4394</i> _{0.0187}	1.4656 _{0.0021}	0.2534	0.2600	0.2682 _{0.0022}	<i>0.2639</i> _{0.0007}	17
18	1.0582	0.1845	<i>1.1500</i> _{0.0018}	1.2829 _{0.3904}	<i>0.2032</i>	0.0276	0.2013 _{0.0004}	0.2280 _{0.0085}	18
19	1.0294	1.4941	<i>1.4982</i> _{0.1002}	1.5056 _{0.0196}	0.1948	0.2271	<i>0.2445</i> _{0.0106}	0.2621 _{0.0023}	19
20	1.0063	<i>1.0665</i>	1.0790 _{0.0008}	1.0067 _{0.0009}	0.1908	0.1721	0.1930 _{0.0001}	<i>0.1912</i> _{0.0003}	20
21	0.7662	0.0917	0.7658 _{0.0009}	0.7664 _{0.0007}	0.1488	0.0134	0.1497 _{0.0002}	<i>0.1490</i> _{0.0002}	21
22	0.4391	0.5806	0.5843 _{0.0091}	<i>0.5823</i> _{0.0064}	0.1011	<i>0.1019</i>	0.0468 _{0.0015}	0.1048 _{0.0023}	22
23	0.7158	0.8431	<i>0.8613</i> _{0.0148}	0.8641 _{0.0217}	0.1801	0.1530	0.1548 _{0.0027}	<i>0.1577</i> _{0.0031}	23
24	0.4016	−0.2092	−0.1046 _{0.0113}	<i>0.0032</i> _{0.0283}	0.0953	−0.0347	−0.0324 _{0.0023}	<i>0.0008</i> _{0.0009}	24
\overline{MR}	0.6934	<i>0.8426</i>	0.8196	0.8731	0.1369	0.1452	<i>0.1472</i>	0.1607	\overline{SR}
\overline{R}_{MR}	3.2500	2.5208	2.4792	1.7500	3.0208	2.7292	2.5417	1.7083	\overline{R}_{SR}

In order to determine the statistical significance of the rank differences reported for each strategy in the different problems, a non-parametric Friedman test [32] with the ranking of MR and SR of the techniques that were implemented as the test variables has been carried out. The test shows that the effect of the strategy used for portfolio optimization is statistically significant at a significance level of 5%, as the confidence interval is $C_0 = (0, F_{0.05} = 2.7374)$ and the F-distribution statistical values are $F^* = 6.6840 \notin C_0$ for MR and $F^* = 5.4109 \notin C_0$ for SR. Consequently, the null hypothesis stating that all strategies perform equally in mean ranking is rejected.

Based on this rejection, the non-parametric Holm test was implemented to compare all of the strategies to the proposed MSV method (which was used as the control method). Table 3 shows the results of the Holm test for the MR and SR performance measures. From the results of this test, it can be concluded that MSV obtains a significantly better MR ranking than all of the remaining strategies for $\alpha = 0.10$ and statistically outperforms the GMV strategy for $\alpha = 0.05$. While using the Sharpe ratio, SR, as the test variable, the MSV portfolio achieves significantly better results than the comparison methods for $\alpha = 0.10$ and $\alpha = 0.05$.

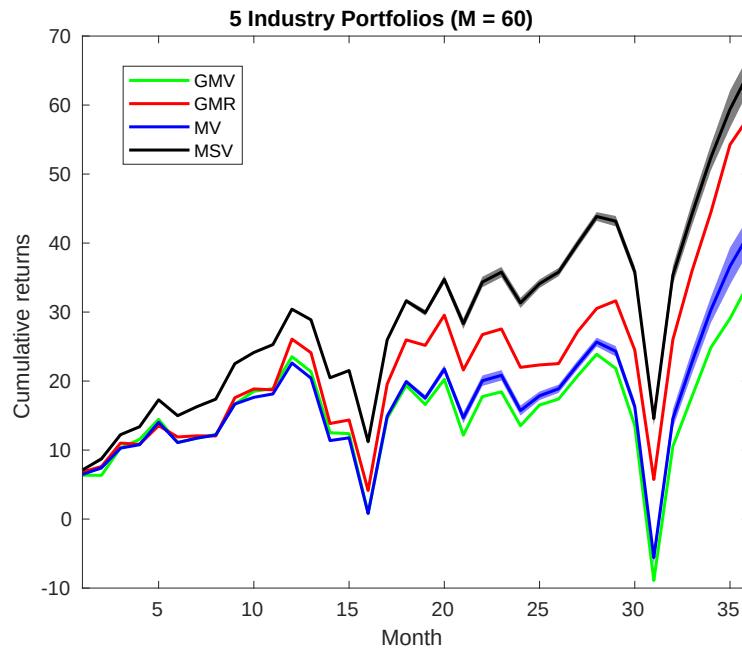


Figure 1. Cumulative monthly returns plot of the four portfolios implemented from 1 September 2017–1 August 2020.

As can be seen, the MSV model achieve significantly better out-of-sample results (in MR and SR) that its MV counterpart. Thus, it is assumed that the current formulation of the model helps in the tuning of the risk aversion profile parameter and, consequently, it helps in obtaining a final competitive out-of-sample performance.

Table 3. Statistical results for the Holm test for $\alpha = 0.10$ and $\alpha = 0.05$ using the mean squared variance (MSV) strategy as the control method: mean MR and SR ranking of the strategies implemented (\bar{R}_{MR} and \bar{R}_{SR}), z-statistics and p-values of the Holm tests for the MR and SR analysis and adjusted α Holm values ($\alpha_{0.10}$ and $\alpha_{0.05}$). The best results are in bold face and second-best results in italics.

MR Analysis					
Method	\bar{R}_{MR}	z-statistic	p-value	$\alpha_{0.10}$	$\alpha_{0.05}$
GMV _{•,◦}	3.2500	4.0249	1×10^{-4}	0.0333	0.0167
GMR _•	2.5208	2.0683	0.0386	0.0500	0.0250
MV _•	2.4792	1.9566	0.0504	0.1000	0.0500
MSV	1.7500	-	-	-	-
SR Analysis					
Method	\bar{R}_{SR}	z-statistic	p-value	$\alpha_{0.10}$	$\alpha_{0.05}$
GMV _{•,◦}	3.0208	3.5218	4×10^{-4}	0.0333	0.0167
GMR _{•,◦}	2.7292	2.7394	0.0062	0.0500	0.0250
MV _{•,◦}	2.5417	2.2362	0.0253	0.1000	0.0500
MSV	1.7083	-	-	-	-

•: Statistical difference with $\alpha = 0.10$; ◦: Statistical difference with $\alpha = 0.05$.

4.2. Diversification Analysis

An additional experimental study was performed in order to graphically illustrate the level of portfolio concentration of the MSV portfolio in contrast to the MV portfolio [4,13].

In this empirical study, the diversification levels of the MSV and MV portfolios in different types of problems were compared according to their $w^T w$ values, a mathematical proxy for assessing the degree of concentration in the portfolio weights [12,33–35]. Thus, Figure 2 shows the boxplots of diversification of the optimal weights of the MV and MSV portfolios for $\lambda \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ in problems with different numbers of assets ($N \in \{7, 8, 9, 10\}$). For each value of N , the boxplot of each strategy is computed according to 30 randomly generated portfolio problems with the same number of assets and λ values. In this specific experiment, the randomly generated expected returns are within the range $[0.5, 1.0]$.

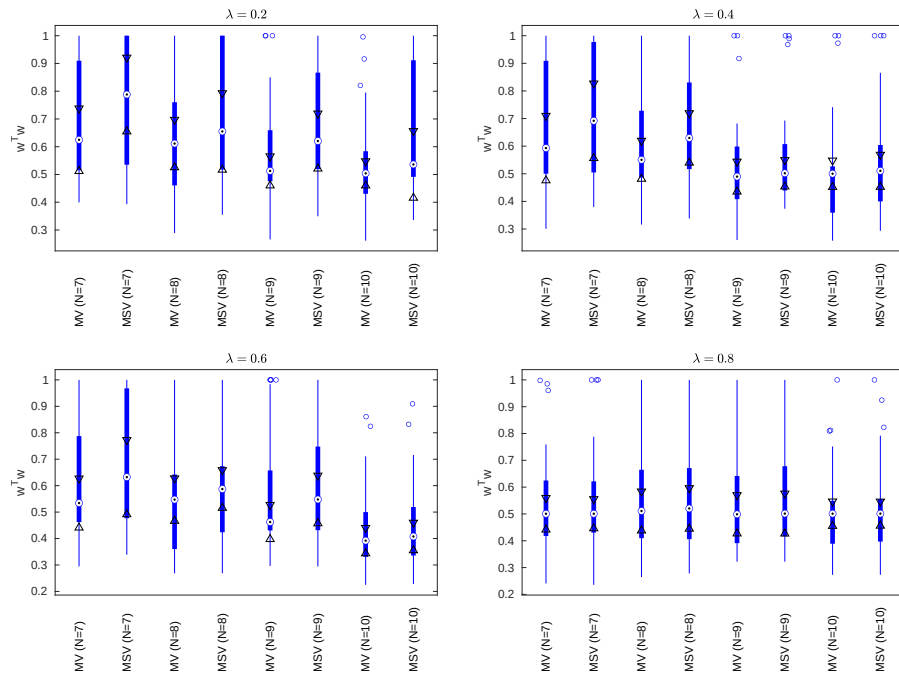


Figure 2. The boxplots of diversification for the MV and MSV strategies for $N \in \{7, 8, 9, 10\}$ and $\lambda \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

The MSV tends to produce more concentrated portfolios than its MV counterpart when the expected return of the portfolio is within the range $[0.5, 1.0]$, as can be seen in Figure 2. In cases where the randomly generated expected returns are within the range $[0.0, 0.5]$, the results (with respect to the diversification level) are just the opposite. As expected, the difference in concentrations is reduced when λ is close to one, since both of the portfolios converge to the GMV portfolio when $\lambda = 1$.

5. Conclusions

In this paper, an alternative to the traditional mean-variance (MV) strategy, named the mean squared variance (MSV) portfolio, is proposed. The novel proposed portfolio model overcomes the original limitation of the traditional model that expresses the two conflicting objectives in different units by including the expected return term in squared form. The proposed portfolio model is presented as a non-convex QP problem, which has been reformulated as a mixed-integer linear programming (MILP) problem to be globally solved by state-of-the-art MILP solvers.

Besides, a novel data-driven approach that is based on a Bayesian approach to estimate the optimal value of the hyper-parameter associated with the MV and MSV strategies is also proposed in this paper. The aim is to show that the formulation of the MSV problem

helps the global optimization procedure achieve a more competitive set of portfolio weights (in terms of the Sharpe ratio).

The proposed portfolio model was empirically tested on 8 portfolio problems with three different estimation windows (24 datasets were considered), reporting in most of the problems a very competitive performance of both the mean return and Sharpe ratio. In this research work, it is assumed that the current formulation of the model helps the tuning of the risk aversion profile parameter and, consequently, it helps in obtaining a final competitive performance.

Author Contributions: Conceptualization, F.F.-N. and M.C.-R.; Methodology, F.F.-N. and M.C.-R.; Software, F.F.-N.; Validation, F.F.-N.; Formal analysis, F.F.-N. and L.M.-N.; Data curation, L.M.-N. and T.M.-R.; Writing—original draft preparation, F.F.-N.; Writing—review and editing, L.M.-N., T.M.-R. and M.C.-R. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: The research work of F.F.N. is funded by the Spanish Ministry of Science under Project ENE2017-88889-C2-1-R.

Institutional Review Board Statement: Not applicable

Informed Consent Statement: Not applicable

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Abbreviations

The following abbreviations are used in this manuscript:

BM	Book-to-market
GMR	Global maximum return
GMV	Global minimum variance
I	Investment
MILP	Mixed-integer linear programming
MR	Mean return
MSV	Mean squared variance
MV	Mean-variance
OP	Operating profitability
QP	Quadratic programming
SR	Sharpe ratio

References

1. Markowitz, H. Portfolio selection. *J. Financ.* **1952**, *7*, 77–91.
2. Markowitz, H. Mean–variance approximations to expected utility. *Eur. J. Oper. Res.* **2014**, *234*, 346–355. [[CrossRef](#)]
3. Zhou, R.; Palomar, D.P. Understanding the Quintile Portfolio. *IEEE Trans. Signal Process.* **2020**, *68*, 4030–4040. [[CrossRef](#)]
4. Coqueret, G. Diversified minimum-variance portfolios. *Ann. Financ.* **2015**, *11*, 221–241. [[CrossRef](#)]
5. Maillet, B.; Tokpavi, S.; Vaucher, B. Global minimum variance portfolio optimisation under some model risk: A robust regression-based approach. *Eur. J. Oper. Res.* **2015**, *244*, 289–299. [[CrossRef](#)]
6. Bodnar, T.; Parolya, N.; Schmid, W. Estimation of the global minimum variance portfolio in high dimensions. *Eur. J. Oper. Res.* **2018**, *266*, 371–390. [[CrossRef](#)]
7. Lim, A.E.; Zhou, X.Y. Mean-variance portfolio selection with random parameters in a complete market. *Math. Oper. Res.* **2002**, *27*, 101–120. [[CrossRef](#)]
8. Yin, G.; Zhou, X.Y. Markowitz’s mean-variance portfolio selection with regime switching: From discrete-time models to their continuous-time limits. *IEEE Trans. Autom. Control* **2004**, *49*, 349–360. [[CrossRef](#)]
9. Usta, I.; Kantar, Y.M. Mean-variance-skewness-entropy measures: A multi-objective approach for portfolio selection. *Entropy* **2011**, *13*, 117–133. [[CrossRef](#)]
10. DeMiguel, V.; Garlappi, L.; Uppal, R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *Rev. Financ. Stud.* **2009**, *22*, 1915–1953. [[CrossRef](#)]
11. Tu, J.; Zhou, G. Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. *J. Financ. Econ.* **2011**, *99*, 204–215. [[CrossRef](#)]
12. Li, H.; Huang, Q.; Wu, B. Improving the naive diversification: An enhanced indexation approach. *Financ. Res. Lett.* **2020**, 101661. [[CrossRef](#)]
13. Schmidt, A.B. Managing portfolio diversity within the mean variance theory. *Ann. Oper. Res.* **2019**, *282*, 315–329. [[CrossRef](#)]

14. Cai, H.; Schmidt, A.B. Comparing mean–variance portfolios and equal-weight portfolios for major US equity indexes. *J. Asset Manag.* **2020**, *21*, 326–332. [[CrossRef](#)]
15. Bird, R.; Tippett, M. Note—naive diversification and portfolio risk—A note. *Manag. Sci.* **1986**, *32*, 244–251. [[CrossRef](#)]
16. Schreiner, J. Portfolio revision: A turnover-constrained approach. *Financ. Manag.* **1980**, *9*, 67–75. [[CrossRef](#)]
17. Kourtis, A. A Stability Approach to Mean-Variance Optimization. *Financ. Rev.* **2015**, *50*, 301–330. [[CrossRef](#)]
18. Best, M.J.; Grauer, R.R. On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: Some analytical and computational results. *Rev. Financ. Stud.* **1991**, *4*, 315–342. [[CrossRef](#)]
19. Chopra, V.K.; Ziemba, W.T. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. In *Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making: Part I*; World Scientific: London, UK, 2013; pp. 365–373.
20. Palczewski, A.; Palczewski, J. Theoretical and empirical estimates of mean–variance portfolio sensitivity. *Eur. J. Oper. Res.* **2014**, *234*, 402–410. [[CrossRef](#)]
21. Sharpe, W.F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *J. Financ.* **1964**, *19*, 425–442.
22. Sharpe, W.F. *Portfolio Theory and Capital Markets*; McGraw-Hill College: New York, NY, USA, 1970.
23. Bailey, D.H.; Lopez de Prado, M. The Sharpe ratio efficient frontier. *J. Risk* **2012**, *15*, 3–44. [[CrossRef](#)]
24. Sharpe, W.F. The sharpe ratio. *J. Portf. Manag.* **1994**, *21*, 49–58. [[CrossRef](#)]
25. Xia, W.; Vera, J.C.; Zuluaga, L.F. Globally solving nonconvex quadratic programs via linear integer programming techniques. *INFORMS J. Comput.* **2020**, *32*, 40–56. [[CrossRef](#)]
26. Mockus, J. *Bayesian Approach to Global Optimization: Theory and Applications*; Springer Science & Business Media: Berlin/Heidelberg, Germany, 2012; Volume 37.
27. Giannessi, F.; Tomasin, E. Nonconvex quadratic programs, linear complementarity problems, and integer linear programs. In Proceedings of the IFIP Technical Conference on Optimization Techniques, Rome, Italy, 7–11 May 1973; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1973; pp. 437–449.
28. Bergmeir, C.; Benítez, J.M. On the use of cross-validation for time series predictor evaluation. *Inf. Sci.* **2012**, *191*, 192–213. [[CrossRef](#)]
29. Black, A.J.; McMillan, D.G. Non-linear predictability of value and growth stocks and economic activity. *J. Bus. Financ. Account.* **2004**, *31*, 439–474. [[CrossRef](#)]
30. Swinkels, L.; Tjong-A-Tjoe, L. Can mutual funds time investment styles? *J. Asset Manag.* **2007**, *8*, 123–132. [[CrossRef](#)]
31. Demšar, J. Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets. *J. Mach. Learn. Res.* **2006**, *7*, 1–30.
32. Friedman, M. A comparison of alternative tests of significance for the problem of m rankings. *Ann. Math. Stat.* **1940**, *11*, 86–92. [[CrossRef](#)]
33. Bender, J.; Briand, R.; Nielsen, F.; Stefek, D. Portfolio of risk premia: A new approach to diversification. *J. Portf. Manag.* **2010**, *36*, 17–25. [[CrossRef](#)]
34. Liesiö, J.; Xu, P.; Kuosmanen, T. Portfolio Diversification based on Stochastic Dominance under Incomplete Probability Information. *Eur. J. Oper. Res.* **2020**, *286*, 755–768. [[CrossRef](#)]
35. Cesarone, F.; Scozzari, A.; Tardella, F. An optimization–diversification approach to portfolio selection. *J. Glob. Optim.* **2020**, *76*, 245–265. [[CrossRef](#)]

2.2 Artículo II

Título: *An experimental study on diversification in portfolio optimization*

Revista: *Expert Systems with Applications*



Autores: Luisa Martínez-Nieto, Francisco Fernández-Navarro, Mariano Carbonero-Ruz, Teresa Montero-Romero.

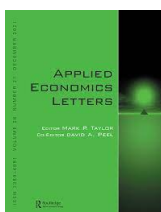
Indicios de calidad del artículo según la edición de JCR de referencia: Revista indexada en el primer cuartil (**Q1**) del Índice *Journal Citation Reports* (JCR-2020), con un índice de impacto de 6,954, y con una posición de 6/99 en la categoría de *operations research and management science*.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115203>.

2.3 Artículo III

Título: *COVID-19 impact on the Spanish stock exchange with mean-variance and diversification-based portfolios*

Revista: *Applied Economics Letters*



Autores: Luisa Martínez-Nieto, Francisco Fernández-Navarro, Teresa Montero-Romero, Mariano Carbonero-Ruz.

Indicios de calidad del artículo según la edición de JCR de referencia: Revista indexada en el tercer cuartil (**Q3**) del Índice *Journal Citation Reports* (JCR-2020), con un índice de impacto de 1,157, y con una posición de 282/376 en la categoría de *Economics*.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115203>.

Capítulo 3

Conclusiones y futuras líneas de investigación

Tras el desarrollo de esta labor investigadora, que tiene como resultado las tres publicaciones incluidas en este compendio, se han llegado las conclusiones que se exponen a continuación.

Para su resumen y exposición, las conclusiones se han dividido en *Conclusiones Metodológicas* y *Conclusiones Empíricas*; las primeras incluyen todas las conclusiones relacionadas con las dos contribuciones metodológicas realizadas en esta tesis, mientras que las segundas detallan conclusiones analíticas obtenidas en la aportación de categorización, síntesis y análisis que se ha realizado sobre los *Modelos de Diversificación*.

3.1 Conclusiones Metodológicas

Seguidamente, se van a exponer las *Conclusiones Metodológicas* de esta tesis:

- Para superar la diferencia en unidades de los dos estimadores de los inputs del *Modelo Media Varianza*, en esta tesis se ha propuesto una alternativa, el *Modelo Media Cuadrado Varianza (MSV)*, expuesto en el **artículo I**. Los hallazgos devueltos en el análisis realizado demuestran que ***Modelo Media Cuadrado Varianza* obtiene mejores resultados que el *Modelo Media Varianza (MV)* y sus variantes**, el *Modelo de máxima rentabilidad (GMR)* y *Modelo de mínima varianza (GMV)*.

En términos estadísticos, el *Modelo Media Cuadrado Varianza (MSV)* es significativamente mejor que los modelos MV, GMR y GMV en la métrica de Sharpe Ratio. En términos de Rentabilidad Media de la cartera (MR), sólo es significativamente mejor que el modelo GMR. Otro indicador que refuerza la supremacía del modelo MSV sobre el resto es la Rentabilidad Acumulada, en la que obtiene mejores resultados que el resto de modelos.

Igualmente, también se ha comprobado la sensibilidad de los resultados obtenidos en cada modelo ante cambios en las ventanas de estimación o número de activos. En este sentido, el modelo MSV es el menos sensible ante ambas modificaciones.

- Con la finalidad de flexibilizar el *Modelo Media Varianza*, en esta tesis se ha aplicado **un procedimiento Bayesiano de optimización de los hiperparámetros de riesgo (λ), diversificación (δ), y límites superior e inferior de inversión en activos (U_W y L_B)**. **El procedimiento de optimización consigue resultados muy competitivos en términos de Rentabilidad Media, Índice de Sharpe y Calma Ratio, para los hiperparámetros de riesgo (λ) y diversificación (δ) en periodos de estabilidad financiera**, en los once modelos de inversión que se han comparado en el Artículo II.

Por el contrario, no ocurre lo mismo para los modelos que incluyen los hiperparámetros límites (U_W y L_B). Esto puede ser debido a que las restricciones de diversificación reducen la región factible del problema, provocando que las soluciones posibles no sean las óptimas.

En otros términos, la inclusión de la diversificación como límite de inversión de activos en las restricciones del problema de optimización de Markowitz genera más rigidez al modelo al disminuir su región factible. Rigidez que ni la optimización del hiperparámetro consigue flexibilizar.

De la misma manera, en el Artículo III también se utiliza este procedimiento para la selección del hiperparámetro para testear si los resultados son los mismos en el periodo de inestabilidad financiera generado por el COVID-19.

Al contrario que ocurre en periodos estables, durante la pandemia de COVID-19 se observa que los modelos que contienen hiperparámetros optimizados obtienen muy malos resultados.

Hemos atribuido este bajo rendimiento a la divergencia existente entre los datos incluidos en los periodos de estimación y de validación. Esta hipótesis se confirma cuando se observa que los rendimientos obtenidos entre los subperiodos de mayor inestabilidad financiera (periodo de confinamiento del COVID-19 y la segunda ola de COVID-19) son mejores que en el resto ya que los datos de estimación y validación son más homogéneos.

3.2 Conclusiones Empíricas

Con el objetivo de conocer en qué escenarios los *Modelos de Diversificación* categorizados superan al *Modelo Media Varianza* se han comparado los rendimientos obtenidos en base a cuatro métricas, por catorce estrategias de inversión, en treinta y cuatro bases de datos diferentes.

Las *Conclusiones Empíricas* obtenidas en ambos estudios empíricos, incluidos en los Artículos II y III de esta tesis, son las siguientes:

- **Las estrategias de inversión que mejor operan en términos de *Rentabilidad Acumulada o Mean Return (MR)*, *Sharpe Ratio (SR)* y *Calma Ratio (CR)* son aquellas que gestionan y distribuyen el riesgo y la diversificación de carteras tanto en periodos de estabilidad financiera como de inestabilidad financiera.**

En periodos de estabilidad financiera destacan los resultados del *Modelo GMV* y el *Modelo DMVY*. Si bien es cierto, estas diferencias obtenidas en las métricas de MR, SR y CR no son en su mayoría significativas.

En periodos de inestabilidad financiera vuelve a destacar el *Modelo GMV* y el *Modelo EWRC*. Si se analiza la evolución de la riqueza en este periodo y se compara con el rendimiento del índice de referencia de los activos, el Ibex35, únicamente el modelo EWRC y GMV lo superan. Con una cantidad inicial

invertida de 1.000 euros, el modelo EWRC consigue 1,018 euros, GMV 1,000 euros, y 990 euros el Ibex-35.

- Por el contrario, a la luz de los resultados obtenidos en términos del *Índice de Estabilidad o Stability Index (SI)* de las cartera, se concluye que los **Modelos de Ponderación Igualitaria son los más estables, con ninguna o pocas entradas y salidas de activos**. Además, esta diferencia lograda es significativamente mejor que el resto de modelos.

Los *Modelos de Ponderación Igualitaria* obtienen los peores resultados en términos de MR, SR y CR pero los mejores en SI, planteando el debate de los costes de transacción. Habría que preguntarse hasta cuántos costes de transacción podrían soportar el resto de estrategias para seguir siendo más rentables que los *Modelos de Ponderación Igualitaria*.

- Adicionalmente, en el Artículo II, que incluye el estudio empírico en periodos de estabilidad financiera, se ha evaluado la sensibilidad de los diferentes modelos ante diferentes escenarios. Para ello, se han seleccionado bases de datos que contienen diferentes número de activos ($N \in [1, 100]$), con diferentes ventanas de estimación ($M = 60$, $M = 120$ y $M = 240$, 5 años, 10 años y 20 años, respectivamente) y en diferentes mercados financieros de distintas geografías y activos de sectores diferentes.

Los resultados de los diferentes escenarios testeados arrojan las siguientes conclusiones:

- **La mejor ventana de estimación M es una ventana media de 10 años ($M = 120$).** Esta ventana de estimación es la óptima para la mayoría de los modelos excepto para el *Modelo de Máxima Rentabilidad* que opera mejor con ventanas de estimación más cortas ($M = 60$).

Estos resultados están en línea con lo que se ha estudiado en el mundo académico. Frost and Savarino (1986) afirman que las estimaciones de rentabilidad con largos periodos de tiempo difuminan la estimación

de rentabilidad y es necesario dar más importancia a los precios más recientes.

En el estudio empírico de DeMiguel et al. (2009) se observa también que los estimadores de rentabilidad son más sensibles a cambios en las ventanas de estimación que los de riesgo.

- Se esperaba que las bases de datos con mayor número de activos generaran mayores valores de los hiperparámetros de riesgo (λ) y diversificación (δ), ya que a mayor número de activos más capacidad de conseguir mayor diversificación del riesgo.

Sin embargo, se ha comprobado que para los escenarios analizados, **no existe relación entre el número de activos N y los valores de los hiperparámetros de riesgo λ y diversificación δ .**

Igualmente, se tenía la expectativa de que, a mayor número de activos N , los *Modelos de Ponderación Igualitaria* consiguieran mejores resultados al estar más diversificados por contener mayor número de activos en su cartera óptima. Hipótesis apoyada por el estudio de DeMiguel et al. (2009).

Tampoco se ha evidenciado que exista relación entre el número de activos N y los mejores resultados de los *Modelos de Ponderación Igualitaria* como se esperaba. Esto puede deberse a que lo importante no es la cantidad si no la calidad del número de activos introducidos en la cartera óptima.

- Las carteras del mercado americano son las que mejores resultados obtienen, en contraposición con las del mercado asiático.
- Los activos incluidos en las bases de datos del estudio y susceptibles de ser seleccionados son a su vez carteras de inversión. Estas carteras de inversión han sido construidas en base a diferentes criterios.

Comparando los resultados obtenidos por cada tipo de cartera, la que mejor ha funcionado para todas las estrategias es la que selecciona sus

activos por el criterio de *operating profitability*¹. Los peores criterios de selección son el grado de inversión en activos² y el *book to market*³.

3.3 Futuras líneas de investigación

Por último, en los siguientes párrafos se detallan una serie de propuestas sobre futuras líneas de investigación identificadas a la luz del proceso de investigación:

- Incluir la sostenibilidad como tercer objetivo del *Modelo Media Varianza* a través de las técnicas con las que ha sido incorporada la diversificación. Como se indicaba en el apartado 1.1, los inversores ya no sólo pretenden obtener rentabilidad en sus inversiones, sino también otros objetivos más globales como la protección del medio ambiente, el respeto por los derechos sociales, etc. La cartera seleccionada en estos modelos sería una cartera sostenible, donde no sólo la rentabilidad importe, sino también las contribuciones en términos de sostenibilidad que las empresas hicieran a la sociedad.
- Incluir en el *Modelo Media Cuadrado Varianza (MSV)* la diversificación como tercer objetivo. Con este planteamiento se combinarían dos modelos, uno de *Modelo Media Varianza* y otro *Modelo de Diversificación*, que según las conclusiones de esta tesis, obtienen resultados muy competitivos en todos los escenarios.
- Realizar un estudio empírico donde se pruebe la eficacia y eficiencia de la optimización de los hiperparámetros en diferentes periodos de estimación y con el uso de nuevas técnicas que innoven el procedimiento de optimización. Podrían utilizarse técnicas novedosas como redes neuronales, y otros procesos de optimización alternativos.
- Individualización de los periodos de estimación y validación de los parámetros de rentabilidad y riesgo con herramientas de análisis de datos para adap-

¹Es el resultado de explotación de la actividad de la compañía, excluyendo gasto de deterioro y amortizaciones, ingresos y gastos financieros, e impuestos.

²Es el porcentaje de inversión en activos sobre EBITDA.

³Es el precio de las acciones de una sociedad en el mercado financiero dividido por el valor en libros o valor contable por acción de dicha sociedad.

tarlos al comportamiento de los datos de precios históricos de los activos. De este modo se pretende que los datos del periodo de estimación y validación sean más homogéneos para mejorar las estimaciones de los parámetros de rentabilidad y riesgo. Estos periodos serán de diferente tamaño y duración según el comportamiento del precio de los activos.

- Inclusión de los costes de transacción en los diferentes modelos o estrategias de inversión testados para poder concluir si los *Modelos de Ponderación Igualitaria*, al generar carteras más estables (con menor compraventa de activos), consiguen mejores rendimientos que el resto de estrategias aunque a priori sean menos rentables.

Bibliografía

- Abdelaziz, F. B., Aouni, B., and El Fayedh, R. (2007). Multi-objective stochastic programming for portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, 177(3):1811–1823.
- Asness, C. S., Frazzini, A., and Pedersen, L. H. (2012). Leverage aversion and risk parity. *Financial Analysts Journal*, 68(1):47–59.
- Bai, X., Scheinberg, K., and Tutuncu, R. (2016). Least-squares approach to risk parity in portfolio selection. *Quantitative Finance*, 16(3):357–376.
- Bailey, D. H. and Lopez de Prado, M. (2012). The sharpe ratio efficient frontier. *Journal of Risk*, 15(2):13.
- Benartzi, S. and Thaler, R. H. (2001). Naive diversification strategies in defined contribution saving plans. *American economic review*, 91(1):79–98.
- Bera, A. K. and Park, S. Y. (2008). Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle. *Econometric Reviews*, 27(4-6):484–512.
- Bergmeir, C. and Benítez, J. M. (2012). On the use of cross-validation for time series predictor evaluation. *Information Sciences*, 191:192–213.
- Black, F. and Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial analysts journal*, 48(5):28–43.
- Bodnar, T., Parolya, N., and Schmid, W. (2018). Estimation of the global minimum variance portfolio in high dimensions. *European Journal of Operational Research*, 266(1):371–390.

- Bouchaud, J.-P., Potters, M., and Aguilar, J.-P. (1997). Missing information and asset allocation. Science & finance (cfm) working paper archive, Science & Finance, Capital Fund Management.
- Cesarone, F., Scozzari, A., and Tardella, F. (2020). An optimization–diversification approach to portfolio selection. *Journal of Global Optimization*, 76(2):245–265.
- Chaves, D., Hsu, J., Li, F., and Shakernia, O. (2011). Risk parity portfolio vs. other asset allocation heuristic portfolios. *The Journal of Investing*, 20(1):108–118.
- Choueifat, Y. and Coignard, Y. (2008). Toward maximum diversification. *The Journal of Portfolio Management*, 35(1):40–51.
- Coqueret, G. (2015). Diversified minimum-variance portfolios. *Annals of Finance*, 11(2):221–241.
- De Bondt, W. F. and Thaler, R. (1985). Does the stock market overreact? *The Journal of finance*, 40(3):793–805.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., and Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy? *The review of Financial studies*, 22(5):1915–1953.
- Dentcheva, D. and Ruszczyński, A. (2006). Portfolio optimization with stochastic dominance constraints. *Journal of Banking & Finance*, 30(2):433–451.
- Deplano, I., Squillero, G., and Tonda, A. (2016). Anatomy of a portfolio optimizer under a limited budget constraint. *Evolutionary Intelligence*, 9.
- Duchin, R. and Levy, H. (2009). Markowitz versus the talmudic portfolio diversification strategies. *The Journal of Portfolio Management*, 35(2):71–74.
- Freitas, F. D., De Souza, A. F., and de Almeida, A. R. (2009). Prediction-based portfolio optimization model using neural networks. *Neurocomputing*, 72(10-12):2155–2170.

- Frost, P. A. and Savarino, J. E. (1986). An empirical bayes approach to efficient portfolio selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pages 293–305.
- Frost, P. A. and Savarino, J. E. (1988). For better performance: Constrain portfolio weights. *Journal of Portfolio Management*, 15(1):29.
- Giannopoulos, K., Clark, E., and Tunaru, R. (2005). Portfolio selection under var constraints. *Computational Management Science*, 2(2):123–138.
- Gunasekaran, M. and Ramaswami, K. (2014). A hybrid intelligent system of anfis and capm for stock portfolio optimization. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 26(1):277–286.
- Hagströmer, B. and Binner, J. M. (2009). Stock portfolio selection with full-scale optimization and differential evolution. *Applied financial economics*, 19(19):1559–1571.
- Huang, X. (2012). An entropy method for diversified fuzzy portfolio selection. *International Journal of Fuzzy Systems*, 14(1).
- Jiang, C., Du, J., and An, Y. (2019). Combining the minimum-variance and equally-weighted portfolios: Can portfolio performance be improved? *Economic Modelling*, 80:260–274.
- Jung, D., Dorner, V., Weinhardt, C., and Puzmaz, H. (2018). Designing a robo-advisor for risk-averse, low-budget consumers. *Electronic Markets*, 28(3):367–380.
- Kalayci, C. B., Ertenlice, O., and Akbay, M. A. (2019). A comprehensive review of deterministic models and applications for mean-variance portfolio optimization. *Expert Systems with Applications*, 125:345–368.
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., and Fabozzi, F. J. (2014). 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2):356–371.

- Kritzman, M., Page, S., and Turkington, D. (2010). In defense of optimization: the fallacy of $1/n$. *Financial Analysts Journal*, 66(2):31–39.
- Li, H., Huang, Q., and Wu, B. (2021). Improving the naive diversification: An enhanced indexation approach. *Finance Research Letters*, 39:101661.
- Liesiö, J., Xu, P., and Kuosmanen, T. (2020). Portfolio diversification based on stochastic dominance under incomplete probability information. *European Journal of Operational Research*.
- Lin, J.-L. (2013). On the diversity constraints for portfolio optimization. *Entropy*, 15(11):4607–4621.
- Macedo, L. L., Godinho, P., and Alves, M. J. (2017). Mean-semivariance portfolio optimization with multiobjective evolutionary algorithms and technical analysis rules. *Expert Systems with Applications*, 79:33–43.
- Maillard, S., Roncalli, T., and Teiletche, J. (2010). The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 36(4):60–70.
- Maillet, B., Tokpavi, S., and Vaucher, B. (2015). Global minimum variance portfolio optimisation under some model risk: A robust regression-based approach. *European Journal of Operational Research*, 244(1):289–299.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91.
- Markowitz, H. (2012). Which risk-measure best represents return distributions with large deviations? *International Journal of Portfolio Analysis and Management*, 1(2):93–111.
- Markowitz, H. (2014). Mean–variance approximations to expected utility. *European Journal of Operational Research*, 234(2):346–355.
- Martellini, L. and Ziemann, V. (2007). Extending black-litterman analysis beyond the mean-variance framework. *The Journal of Portfolio Management*, 33(4):33–44.

- Masri, H., Abdelaziz, F. B., and Meftahi, I. (2010). A multiple objective stochastic portfolio selection program with partial information on probability distribution. In *2010 Second International Conference on Computer and Network Technology*, pages 536–539. IEEE.
- Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 867–887.
- Michaud, R. O. and Michaud, R. O. (2008). *Efficient asset management: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation*. Oxford University Press.
- Moody, J. and Saffell, M. (2001). Learning to trade via direct reinforcement. *IEEE transactions on neural Networks*, 12(4):875–889.
- Qian, E. (2011). Risk parity and diversification. *The Journal of Investing*, 20(1):119–127.
- Rockafellar, R. T., Uryasev, S., et al. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2:21–42.
- Roncalli, T. and Weisang, G. (2016). Risk parity portfolios with risk factors. *Quantitative Finance*, 16(3):377–388.
- Roodposhti, F., Chavoshi, K., Saber, E., and Bashirpour, A. (2016). Optimization of the mutual-fund portfolio of tehran stock exchange using artificial neural networks and genetic algorithm. *International Business Management*, 10:2249–2256.
- Satchell, S. and Scowcroft, A. (2000). A demystification of the black–litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. *Journal of Asset Management*, 1(2):138–150.
- Schmidt, A. B. (2019). Managing portfolio diversity within the mean variance theory. *Annals of Operations Research*, 282(1-2):315–329.

- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3):425–442.
- Sharpe, W. F. (1970). *Portfolio theory and capital markets*. McGraw-Hill College.
- Tu, J. and Zhou, G. (2011). Markowitz meets talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. *Journal of Financial Economics*, 99(1):204–215.
- Usta, I. and Kantar, Y. M. (2011). Mean-variance-skewness-entropy measures: A multi-objective approach for portfolio selection. *Entropy*, 13(1):117–133.
- Varela, M., Viera, O., and Robledo, F. (2016). A q-learning approach for investment decisions. *Trends in Mathematical Economics*, pages 347–368.
- Windcliff, H. and Boyle, P. P. (2004). The 1/n pension investment puzzle. *North American Actuarial Journal*, 8(3):32–45.
- Xia, W., Vera, J. C., and Zuluaga, L. F. (2020). Globally solving nonconvex quadratic programs via linear integer programming techniques. *INFORMS Journal on Computing*, 32(1):40–56.
- Xue, J., Liu, Q., Li, M., Liu, X., Ye, Y., Wang, S., and Yin, J. (2018). Incremental multiple kernel extreme learning machine and its application in robo-advisors. *Soft Computing*, 22(11):3507–3517.
- Yu, J.-R., Lee, W.-Y., and Chiou, W.-J. P. (2014). Diversified portfolios with different entropy measures. *Applied Mathematics and Computation*, 241:47–63.

Apéndice A

Comunicaciones presentadas en Congresos Internacionales

A.0.1 II Congreso Iberoamericano de Jóvenes Investigadores en Ciencias Económicas y Dirección de Empresas

II CONGRESO IBEROAMERICANO AJICEDE VALENCIA,
28-29 NOVIEMBRE 2019

APRENDIZAJE AUTOMÁTICO PARA LA CREACIÓN DE
CARTERAS DE INVERSIÓN PERSONALIZADAS

María Luisa Martínez Nieto, mlmartineznieto@al.ulyola.es
Mariano Carbonero Ruz, mcarbonero@ulyola.es
Francisco de Asis Fernández Navarro, fafernandez@ulyola.es
Teresa Montero Romero, tmontero@ulyola.es

Palabra clave:

Aprendizaje automático; carteras de inversión

Área temática propuesta:

Finanzas y Contabilidad

Área temática alternativa:

Emprendimiento y nuevas ideas de negocio

Índice

1. INTRODUCCIÓN	2
2. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	3
3. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN E IMPLICACIONES	5
3.1. Las carteras de valores y su situación actual	5
3.2. Posibles expansiones del modelo centradas en el pequeño inversor	6
3.3. Formulación como problema, resolución y la automatización del óptimo a partir de los movimientos recientes	7
Referencias	10

APRENDIZAJE AUTOMÁTICO PARA LA CREACIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN PERSONALIZADAS

1. INTRODUCCIÓN

La optimización de carteras de inversión ha sido ampliamente estudiada desde diferentes puntos de vista. Desde el punto de vista de la demanda, la teoría clásica de Markowitz (1952) sobre la selección de carteras ha sido la más aplicada, en ella se buscan las combinaciones de activos que maximizan la rentabilidad (estimada por el valor esperado de su función de distribución) para un nivel de riesgo (estimado por la varianza de la función de distribución de la rentabilidad), o viceversa. Estas combinaciones de activos en cartera componen lo que se denomina la frontera eficiente. Desde el punto de vista de la oferta, el modelo clásico es el Capital Asset Prices Model (CAPM, por sus siglas en inglés) de Sharpe (1964). Este modelo parte de la hipótesis de un mercado de capitales competitivo, e indica que la rentabilidad de los activos exigidas por los inversores depende del riesgo sistemático del activo y de la rentabilidad libre de riesgo del mercado.

En estos últimos 50 años desde que se crearon las teorías clásicas de la oferta y la demanda se han desarrollado nuevos modelos de selección de activos que mejoran las limitaciones del modelo de Markowitz (1952), entre los que destaca el modelo de Black y Litterman (2006). Las tendencias actuales se acercan al mundo práctico de gestión de carteras para crear carteras multiperiodos, con diferentes estimadores de rentabilidad y riesgo y que logren acercarse a las preferencias de cada inversor Kolm y cols. (2014).

Igualmente, existe la necesidad de aplicar nuevos modelos de incertidumbre para considerar el proceso dinámico de la inversión y la optimización de varios objetivos contrapuestos. Se han aplicado nuevas técnicas de optimización a la gestión de carteras de inversión (Masmoudi y Abdelaziz, 2018). También, gracias al avance de las nuevas técnicas de computación se han creado modelos de selección de carteras que utilizan métodos de aprendizaje automático como las redes neuronales, algoritmos genéticos y el aprendizaje por refuerzo (Moody y Saffell, 2001).

De la combinación entre la individualización de las carteras a las preferencias del inversor y las nuevas técnicas de aprendizaje automático ha surgido en el mundo práctico un nuevo producto disruptivo denominado robo advisor. Son algoritmos automatizados que toman decisiones de inversión adaptadas a perfiles de riesgo de cada inversor y con balanceo automático de cartera que asegura el mantenimiento en el largo plazo. Tienen un capital mínimo de inversión que se establece normalmente a partir de mil euros, sus comisiones son muy bajas y algunos incluso optimizan fiscalidad en las retiradas.

El objetivo de la investigación es crear un algoritmo de aprendizaje automático que sea capaz de crear carteras de inversión individualizadas. El algoritmo será capaz de tomar decisiones de inversión gracias a la automatización del óptimo a partir de los movimientos que se producen en

el mercado. Esta línea de investigación rompe con los modelos tradicionales de gestión de carteras en la que el gestor administra carteras de inversión de grandes patrimonios, con altas comisiones y sin excesiva individualización. Si bien es cierto, aunque supone un avance con respecto al negocio tradicional, no se puede prescindir de la implicación humana necesaria de gestores e informáticos que revisen el buen comportamiento del algoritmo y su toma de decisión.

2. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El propósito de la investigación es aplicar un modelo de aprendizaje automático que dé respuesta a la optimización de objetivos contrapuestos y a la incertidumbre en la gestión de carteras de inversión. Además, se busca la individualización de carteras de forma automática a los diferentes perfiles de inversores. Para ello se propone un objetivo general:

- Proponer una máquina de aprendizaje automático que cree carteras de inversión personalizadas.

Para un mejor entendimiento se definen dos objetivos específicos:

- a Creación de una máquina de aprendizaje automático con diferentes tipos de activos que diseñe, revise y actualice de manera automática carteras de inversión individualizadas, que tengan en cuenta las preferencias de cada inversor con la finalidad de mantener un nivel de rentabilidad mejor que el mercado para cada nivel de riesgo.
- b Análisis de cómo responde la máquina de aprendizaje automático creada ante cambios en los inputs del modelo.

Las principales hipótesis en las que se basa el estudio son:

- Hipótesis del comportamiento de un inversor racional (Markowitz, 1952). El comportamiento de un inversor racional cuando invierte su dinero en una cartera es maximizar la rentabilidad y minimizar su riesgo. Dos objetivos contrapuestos pues para conseguir mayor rentabilidad hay que pagar el precio de asumir mayor riesgo, y con incertidumbre ya que no se conocen a priori los datos futuros de rentabilidad y riesgo de los activos.
- El método de aprendizaje automático es un método válido para predecir variables estocásticas. Es capaz de recoger la incertidumbre de estas variables en base a series temporales históricas de cada activo y optimizar diferentes objetivos contrapuestos. Adicionalmente, gracias a las técnicas de computación avanzada se hace posible el manejo de mayor cantidad de datos o inputs que mejoran el comportamiento del modelo.

Para desarrollar el primero de los objetivos específicos se han analizado y seleccionado los activos que formarán parte de la base de datos sobre la cual se selecciona la cartera óptima. Los criterios que se han tenido en cuenta para la selección de activos han sido:

- Mercado geográfico en el que cotizan los activos. Se ha seleccionado el mercado español de bolsas y valores.
- Tipo de rentabilidad ofrecida por los activos, según sea renta fija o variable. Se ha seleccionado únicamente activos de renta variable principalmente porque tienen mayor liquidez y el abanico de rentabilidad y riesgo que ofrecen es más amplio.
- Sectores al que pertenece cada activo. Se va a seleccionar una muestra representativa de cada sector.

Aún no está completamente definido, pero se quiere realizar sobre las compañías que componen el Ibex 35. Por tanto, la base de datos de activos susceptibles de ser seleccionados en la cartera es renta variable cotizada española durante los ejercicios 2016 y 2017. Los datos se han adquirido de Bolsas y Mercados Españoles. Incluyen precios de apertura, cierre y tick by tick data de las órdenes de compra y venta por segundo con la máxima profundidad disponible del mercado.

A partir de este conjunto de datos, el objetivo es generar un modelo que permita tomar decisiones sobre composición de cartera a pequeños inversores. Para la consecución de esta meta se plantea subdividir el problema en otros cuatro, secuenciales:

1. Usar los datos sobre precios de títulos para, mediante optimización matemática, construir el conjunto de carteras eficientes día a día. La novedad en este aspecto es la incorporación, hasta donde resulte técnicamente posible, de costes como el de transacción que, aunque irrelevantes cuando se gestionan grandes volúmenes, pueden ser significativos para pequeños inversores.
2. Tras la determinación de la frontera eficiente, los gustos del inversor, manifestados a través de su utilidad, elegir "su" cartera óptima. De este modo, se dispondrá de una base de datos de decisiones óptimas personalizadas, fruto de la conjunción de la universalidad de la frontera eficiente y la subjetividad de las preferencias del inversor.
3. Construir un modelo de predicción que permita, si es posible, estimar con éxito la composición de las carteras óptimas generadas en el punto anterior, pero en función de los volúmenes negociados en los días anteriores. Este modelo predictivo permitiría al inversor pronosticar con alguna antelación una cartera de alta rentabilidad (no necesariamente óptima si la predicción, como cabe esperar, no es perfecta).

4. Completar el modelo con un análisis de sensibilidad que indique en qué modo las carteras se ven afectadas en su composición (y consecuentemente en su rentabilidad) ante pequeñas variaciones en los intereses del inversor.

3. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN E IMPLICACIONES

3.1. Las carteras de valores y su situación actual

Como ya se ha comentado en el apartado 1 existen dos teorías clásicas del comportamiento de los mercados financieros desde el punto de vista de la oferta y la demanda, Sharpe (1964) y Markowitz (1952), respectivamente. Con el avance de la investigación han surgido debates científicos en torno a estas formas de entendimiento de los mercados financieros.

Desde la demanda, han surgido nuevas corrientes con mayor acercamiento a las preferencias del inversor, analizando la curva de utilidad de los mismos y optimizando en base a estas. El problema de estas corrientes es que tienen un alto coste computacional para la definición de una función de utilidad para cada inversor y su optimización. Esta individualización tan adaptada también conllevaría altos costes de gestión. Con Markowitz la toma de decisión del inversor se realiza en una segunda fase cuando ya se tienen todas las carteras que aseguran al menos obtener la máxima rentabilidad al mínimo riesgo. Es en ese punto cuando el inversor decide cuál de las carteras quiere dentro de las combinaciones de la frontera eficiente.

Las principales limitaciones del modelo de Markowitz son la dificultad de estimación de las rentabilidades esperadas, la gran variabilidad de los pesos en cartera ante cambios en dichas estimaciones y el no aseguramiento de la diversificación (la mayoría de las carteras suelen contener pocos activos con mucho peso). Para mejorar estas limitaciones y acercar más la cartera a las preferencias de cada inversor han surgido nuevos modelos de selección de carteras. La recopilación de estos modelos se ha realizado teniendo en cuenta los modelos utilizados normalmente por los algoritmos automáticos de selección de carteras:

- Modelo de Black-Litterman (Black y Litterman, 2006). Calcula la rentabilidad de los activos en equilibrio según el modelo CAPM y permite introducir las expectativas del gestor en las estimaciones de rentabilidad con diferentes niveles de confianza.
- Modelo de pérdidas máximas (Tavakoli Baghdadabad, 2013). Este modelo pone el foco en las preferencias del inversor que es adverso al riesgo, aquel inversor que intenta minimizar el riesgo de tener grandes pérdidas, o pérdidas por debajo de ciertas cantidades. Por tanto, no se mide el riesgo por la varianza de la rentabilidad como en el modelo de Markowitz si no por la variabilidad negativa.
- Modelo de optimización a escala completa (Hagströmer y Binner, 2009). Estos modelos de

optimización maximizan la función de utilidad del inversor para cada uno de los posibles escenarios de rentabilidad de las posibles combinaciones de activos en cartera.

Desde la oferta, Sharpe defiende la eficiencia del mercado lo que supone que el precio de los activos en el mercado es capaz de recoger toda la información disponible en cada momento. Las teorías conductistas son las corrientes contrapuestas que defienden un mercado de inversión ineficiente debido a los comportamientos irracionales del inversor por factores psicológicos. Uno de sus principales representantes es De Bondt y Thaler (1985) que estudia las variaciones bruscas de precio de activos ante cambios de información en el mercado.

Por todo lo anterior, existen dos debates científicos; individualización de carteras contra generalización, y, mercado eficiente o ineficiente. Todas las corrientes de pensamiento tienen sus argumentos a favor y en contra, al final, la principal consecuencia es tener que decidir si aceptar un modelo generalista que se pueda aplicar en este fenómeno aleatorio o, por el contrario, rebatir la eficacia de estos modelos generalistas ante la gran incertidumbre de los mercados financieros. En esta investigación se pretende crear un equilibrio entre ambos debates. Aplicar modelos generalistas de selección de carteras, pero acercados a las preferencias de cada inversor, aplicando distintos modelos según la aversión al riesgo e introduciendo restricciones que logren adaptar los modelos al mundo práctico. No se establecerán presunciones ni hipótesis sobre el juego de precios del mercado ya que el algoritmo aprenderá directamente cómo se comporta el mercado, gracias a los datos de órdenes de compra y venta que tendrá como inputs.

3.2. Posibles expansiones del modelo centradas en el pequeño inversor

Como se ha comentado en el apartado 3.1 las adaptaciones que se desean introducir en el modelo de selección de cartera pretenden conseguir un doble objetivo; individualización en la selección de carteras en los modelos generalistas y acercamiento del modelo a mundo práctico.

Para lograrlos se van a definir dos perfiles de inversores, estándar y conservadores o adversos al riesgo. La función de utilidad y el modelo de selección de cada perfil será diferente. Ambos modelos serán posiblemente adaptados por los costes y restricciones que se describen a continuación:

- Costes de transacción. Todo inversor que desee comprar activos tiene que pensar que esta decisión tiene diferentes costes directos; comisiones de gestión, comisiones de depósito o custodia o comisiones de gestión activa. Para simplificar estos costes se va a suponer que cada operación de compra y de venta lleva asociado un coste variable del 0,5 %.
- Costes de ejecutabilidad. Son costes indirectos que se producen por la diferencia de precio desde que se decide invertir en un activo hasta que la operación se ejecuta. Uno de los estudios más detallados de este punto y que se tomará como referencia es el de Almgren

y cols. (2005) que separa este coste en dos, uno temporal y otro permanente. El efecto permanente tiene en cuenta las operaciones que se ejecutan dentro del volumen total del activo y el temporal únicamente el tiempo que tarda la orden en ejecutarse.

- Coste fiscal. Todo inversor en España debe tributar por el beneficio obtenido de venta de sus activos patrimoniales, dentro de los que se encuentran las acciones. En el caso de España se tributa un 19% por los dividendos y las ganancias obtenidas por diferenciales de compra y venta.
- Sólo inversión en posiciones largas de compra, nunca ponerse en corto en un activo. Principalmente debido a que estos algoritmos están pensados para el mantenimiento de las carteras en el largo plazo.
- Limitaciones presupuestarias para no invertir todo el capital y dejar parte como liquidez, y para diversificar entre sectores.

Estos costes que debe asumir el inversor pueden ser introducidos en el modelo media varianza de dos formas diferentes; dentro de la función de optimización como menor rentabilidad o dentro de las restricciones del modelo.

De cara a la evaluación de la actuación del algoritmo por encima de mercado se van a utilizar las siguientes métricas:

- Ratio de Sharpe. Mide el exceso de rentabilidad conseguido por unidad de riesgo.

$$S = \frac{E(R) - R_f}{\sigma} \quad (1)$$

Dónde, $E(R)$ es la rentabilidad esperada de la cartera, R_f la rentabilidad del activo libre de riesgo y σ la desviación típica de la rentabilidad.

- Value at Risk (Var) o valor en riesgo. Probabilidad de pérdida por encima de un valor y horizonte temporal determinado (Morgan, 1996).

$$Prob(R \leq -VaR) \geq p \quad (2)$$

3.3. Formulación como problema, resolución y la automatización del óptimo a partir de los movimientos recientes

Como se ha indicado en el apartado 2 el problema de selección de carteras es un problema multiobjetivo y estocástico que complica su resolución matemática. Por este motivo se deben aplicar métodos que resuelvan estos dos problemas. Entre los métodos aplicados en la literatura para resolver estos inconvenientes se encuentran (Masmoudi y Abdelaziz, 2018):

1. Métodos para resolver el problema multiobjetivo. Se utiliza el óptimo de Pareto, que es el punto en el cual no se puede mejorar el resultado de unos de los objetivos sin empeorar el resultado de los otros. Además, para pasar de un problema multiobjetivo a uno de objetivo simple existen diversas opciones; combinar soluciones que ponderan los objetivos dentro de una misma función (suma ponderada de objetivos), introducir los objetivos como restricciones del problema (modelo de restricciones) y asociar valores ideales de logro de cada uno de los objetivos definiendo como función objetivo la minimización de dichas distancias (ya sea el valor ideal el determinado por el inversor o el óptimo de cada objetivo si el resto no se pretendiese optimizar).
2. Métodos para resolver el problema estocástico. Existen dos enfoques principales, el enfoque de probabilidades limitadas y el enfoque de recurso. El primero resuelve el problema de optimización únicamente para ciertos valores con una probabilidad determinada. El segundo penaliza soluciones no deseables con una función de coste.

Asimismo, se han aplicado técnicas de aprendizaje automático en la selección de carteras. El objetivo del aprendizaje automático es el reconocimiento de patrones mediante técnicas de computación avanzada, normalmente algoritmos. Se clasifican en tres grandes grupos:

- No supervisado. Trabaja con datos no etiquetados en los que se pretende inferir una estructura oculta.
- Supervisado. Intenta buscar una función que mapee características de la de destino a través del aprendizaje.
- Por refuerzo. Se entrena a través de refuerzos. Cuando el agente se equivoca se le indica y se le dice cuanto error ha cometido para que no vuelva a ejecutar la acción

Dentro de estas técnicas, la más aplicada a la gestión de carteras ha sido el aprendizaje supervisado, concretamente las redes neuronales y los algoritmos genéticos. Las primeras se han utilizado para predecir las rentabilidades futuras en base a series históricas y los segundos para realizar la selección de activos en cartera (Rahnamay Roodposhti, Chavoshi, Saber, y Bashirpour, 2016), (Deplano, Squillero, y Tonda, 2016), (Gunasekaran y Ramaswami, 2014) y (Freitas, De Souza, y de Almeida, 2009), entre otros. La principal ventaja de estas técnicas es que son modelos no lineales que permiten recoger toda la incertidumbre que existe dentro de los mercados financieros y, además, se consigue que los algoritmos vayan aprendiendo.

En esta investigación se va a construir el algoritmo mediante una red neuronal. Como se ha descrito en el apartado 2, habrá dos fases:

- En la primera fase, los inputs de precios diarios (medios y/o de cierre) determinan el óptimo de Pareto de las carteras. En la misma fase, las preferencias del inversor, manifestadas en

su función de utilidad junto con los costes, permiten elegir una cartera óptima.

- En la segunda fase, los inputs son los costes, los volúmenes y precios diarios de compras y ventas en sesiones anteriores y output esperado la cartera óptima determinada en la fase 1. La fiabilidad de la predicción, más los costes de transacción y más la divergencia entre el beneficio de la cartera actual y la óptima deben ayudar al inversor a decidir sobre el cambio de cartera.

El objetivo es que el algoritmo sea capaz de aprender a predecir la composición de la cartera según los movimientos de mercado pudiendo pronosticar con antelación carteras de alta rentabilidad. Se hará un análisis de sensibilidad para ver cómo varía la composición de las carteras en función de las preferencias del inversor.

Referencias

- Almgren, R., Thum, C., Hauptmann, E., y Li, H. (2005). Direct estimation of equity market impact. *Risk*, 18, 57–62.
- Black, F., y Litterman, R. (2006). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48, 28–43. doi: 10.2469/faj.v48.n5.28
- De Bondt, W. F. M., y Thaler, R. (1985). Does the stock market overreact? *The Journal of Finance*, 40(3), 793–805.
- Deplano, I., Squillero, G., y Tonda, A. (2016). Anatomy of a portfolio optimizer under a limited budget constraint. *Evolutionary Intelligence*, 9, 125–136. doi: 10.1007/s12065-016-0144-3
- Freitas, F. D., De Souza, A. F., y de Almeida, A. R. (2009). Prediction-based portfolio optimization model using neural networks. *Neurocomputing*. doi: 10.1016/j.neucom.2008.08.019
- Gunasekaran, M., y Ramaswami, K. S. (2014). A hybrid intelligent system of ANFIS and CAPM for stock portfolio optimization. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. doi: 10.3233/IFS-120736
- Hagströmer, B., y Binner, J. M. (2009). Stock portfolio selection with full-scale optimization and differential evolution. *Applied Financial Economics*, 19:19, 1559-1571. doi: 10.1080/09603100903018778
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., y Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*. doi: 10.1016/j.ejor.2013.10.060
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Masmoudi, M., y Abdelaziz, F. B. (2018). Portfolio selection problem: a review of deterministic and stochastic multiple objective programming models. *Annals of Operations Research*. doi: 10.1007/s10479-017-2466-7
- Moody, J., y Saffell, M. (2001). Learning to trade via direct reinforcement. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 12(4), 875–889. doi: 10.1109/72.935097
- Morgan, J. (1996). Riskmetrics - Technical document. En Morgan Guaranty Trust Company of New York (Ed.), . New York.
- Rahnamay Roodposhti, F., Chavoshi, K., Saber, E., y Bashirpour, A. (2016). Optimization of the mutual-fund portfolio of Tehran stock exchange using artificial neural networks and genetic algorithm. *International Business Management*, 10(11), 2249–2256.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19(3), 425–442.
- Tavakoli Baghdadabad, M. R. (2013). The effects of drawdown risk reduction on the US hedge funds. *Journal of Derivatives and Hedge Funds*. doi: 10.1057/jdhf.2013.2

**A.0.2 III Congreso Iberoamericano de Jóvenes Investigadores
en Ciencias Económicas y Dirección de Empresas**

III CONGRESO IBEROAMERICANO AJICEDE EDICIÓN
VIRTUAL, 26-27 NOVIEMBRE 2020

REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA APLICACIÓN DE TÉCNICAS
DE DIVERSIFICACIÓN EN LA GESTIÓN DE CARTERAS DE
INVERSIÓN AUTOMATIZADAS

María Luisa Martínez Nieto, mlmartineznieto@al.ulyola.es
Mariano Carbonero Ruz, mcarbonero@ulyola.es
Francisco de Asis Fernández Navarro, fafernandez@ulyola.es
Teresa Montero Romero, tmontero@ulyola.es

Palabra clave:

Diversificación; carteras de inversión

Área temática propuesta:

Finanzas y Contabilidad

Área temática alternativa:

Emprendimiento y nuevas ideas de negocio

Índice

1. INTRODUCCIÓN	2
2. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	3
3. RESULTADOS Y CONCLUSIONES E IMPLICACIONES	4
3.1. Carteras con el mismo peso por activo	5
3.2. Controlar con límites superiores e inferiores de inversión en los activos en cartera	6
3.3. Introducir la diversificación en la función de coste	8
3.4. Conclusiones e implicaciones	9
Referencias	11

REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE DIVERSIFICACIÓN EN LA GESTIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN AUTOMATIZADAS

1. INTRODUCCIÓN

La optimización de carteras de inversión ha sido ampliamente estudiada desde diferentes puntos de vista proponiendo diferentes modelos de optimización para conseguir rentabilidad en el corto y en largo plazo. Algunos de los modelos propuestos consiguen batir la rentabilidad de mercado y garantizar un rendimiento estable pero todos ellos adolecen de algún inconveniente que lo hacen incompleto debido a la gran complejidad del campo que intentan abordar. El mercado financiero es muy complejo y difícil de predecir ya que existen muchos intereses cruzados de los agentes que operan en él, el sector privado busca financiación y los inversores quieren rentabilidad.

El modelo clásico de gestión de carteras es el modelo media varianza de Markowitz (1952), un problema de optimización cuadrático con doble objetivo, maximizar la rentabilidad al mínimo riesgo (hipótesis del inversor racional). La frontera eficiente está formada por todas aquellas carteras que consiguen la mayor rentabilidad con el mínimo riesgo. La rentabilidad la estima con el valor esperado de las series temporales de precios de activos y el riesgo con la varianza de estas mismas. El problema tiene que superar un doble reto ya que debe alcanzar dos objetivos contrapuestos y estocásticos, es por ello que para resolverlo se debe utilizar el óptimo de Pareto y sacrificar las mejores soluciones de cada objetivo por una solución de compromiso.

Está ampliamente demostrado que tres son sus principales limitaciones; los errores de estimación de los parámetros, la gran variabilidad de los pesos de los activos de cartera con respecto a la variabilidad en las estimaciones de los parámetros y la alta concentración de activos (poca diversificación, coloquialmente expresado, "pone los huevos en la misma cesta"). El desarrollo literario del modelo durante estos sesenta años posteriores se ha centrado en la mejora de sus principales limitaciones (Kolm, Tütüncü, y Fabozzi, 2014) y en la resolución del problema matemático aplicando nuevas técnicas de resolución de los problemas de optimización (Masmoudi y Abdelaziz, 2018). Para mejorar los errores de estimación se han propuesto nuevos estimadores de rentabilidad y riesgo, como el de Black y Litterman (1992) que combina el modelo CAPM (Capital Assets Price Model) (Sharpe, 1964) con las previsiones subjetivas de los inversores para determinados niveles de confianza. También se han propuesto técnicas bayesianas para mejorar las estimaciones (Michaud y Ma, 2001) y nuevas técnicas de aprendizaje automático (Moody y Saffell, 2001).

DeMiguel y cols. (2009) han probado empíricamente la eficiencia del modelo media varianza con respecto a la estrategia de inversión $1/n$, que consiste en invertir el capital a parte iguales entre el total de activos en cartera. Es una regla simple y sin criterio que se utiliza mucho por los inversores en la práctica. La ventaja es que no es necesario estimar ningún parámetro con lo que se elimina

el error de estimación. Para probar su eficacia evaluaron catorce modelos diferentes aplicados a siete bases de datos y compararon sus resultados en términos del ratio de Sharpe, beneficio y equivalente cierto. Ninguno de los modelos se comportó mejor que la estrategia $1/n$, por ello, sugieren que esta simple estrategia se convierta en un benchmark con el que comparar.

Motivados por estos puntos, se han propuesto en la literatura mejoras al modelo de Markowitz que aseguren la diversificación para así disminuir los errores de estimación y conseguir carteras más estables al tener distribuido el riesgo. El objetivo de la tesis es proponer un nuevo modelo de diversificación al modelo media varianza, basado en el aprendizaje automático, para así evitar la concentración de activos que existe en las carteras óptimas de Markowitz. Previamente a este objetivo, se van a desarrollar dos subobjetivos para conseguirlo:

- Conocer el estado del arte sobre los modelos de diversificación estudiados. Para ello se ha realizado una revisión sistemática con la finalidad de observar cómo se ha introducido la diversificación en el modelo de Markowitz.
- Realizar un estudio empírico comparativo de los principales modelos de diversificación propuestos con diferentes bases de datos de activos de distintos sectores y países y tamaños, para identificar el entorno óptimo del modelo de Markowitz y de los diferentes modelos de diversificación.

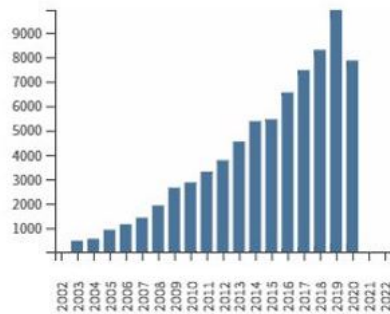
Actualmente, se acaba de terminar la revisión sistemática del estado del arte dónde se han desarrollado todos los modelos de diversificación propuestos hasta la fecha. En el segundo apartado se expone la metodología utilizada en la revisión sistemática y en el tercer apartado se comparten los principales modelos de diversificación que se han seleccionado para el estudio comparativo.

2. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El objetivo de la revisión es conocer cómo se ha introducido la diversificación en el modelo media varianza de Markowitz, para después completar el objetivo más amplio de la tesis que es proponer una nueva alternativa para asegurar la diversificación en este mismo modelo. Para la revisión sistemática se han buscado por “temas” en la colección principal de Web of Science (WoS) sin limitación temporal con cinco palabras claves en inglés;

- “Diversification” (diversificación).
- “Portfolio optimization” o “portfolio selection” (optimización de carteras o selección de carteras) o “Mean variance model” o “Markowitz model” (modelo media varianza o modelo de Markowitz).

Se obtienen 5.721 resultados. De estos primeros resultados se analiza el número de veces que han sido citados los resultados. Agrupando el número de citas por año se obtiene la siguiente gráfica:



Como puede observarse, existe un crecimiento exponencial del interés y la repercusión del estudio de la diversificación en el modelo media varianza. Por ello, se restringe la búsqueda a sólo artículos de los últimos 20 años en ciencias sociales, quedando 3.000 artículos. Se ordena por número de veces citados y se comienza a leer título y abstract. Se observa que mucho de estos resultados no incluyen métodos de diversificación si no que son modelos generales de optimización de carteras. Teniendo en cuenta las palabras claves utilizadas en los artículos de diversificación más citados se añade una restricción adicional de búsqueda por el título, dónde deben incluirse alguno de los siguientes términos:

- “Naive diversification” o “diversification” o “diversity” o “diversified”. Se pretenden incluir toda la familia léxica del término diversificación.
- “Risk parity” o “equally weighted” o “equally-weight” o “1/n” o “1/N”. Términos que hacen referencia al benchmark más conocido en diversificación.

Con esta nueva restricción se obtienen 57 artículos que forman el objeto de análisis de esta revisión. En el siguiente apartado se expone un resumen de los modelos más destacados y se clasifican en función de la forma en la que es introducida la diversificación en el modelo media varianza.

3. RESULTADOS Y CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

En vista de lo anterior, se puede afirmar que el modelo media varianza está siendo extensivamente empleado por la comunidad para construir carteras óptimas. Desafortunadamente, el modelo de optimización tiene algunas limitaciones que dificultan su implementación práctica:

- Primero, las carteras óptimas tienden a estar excesivamente concentradas en un pequeño subgrupo de toda la muestra de activos.

- Segundo, la solución óptima del modelo media varianza es muy sensible a los inputs de los parámetros, con lo que un cambio en la rentabilidad o el riesgo estimado supone un gran cambio en los activos en cartera.

Por ello, introduciendo la diversificación en algún elemento del problema de optimización se pretende superar estos dos inconvenientes. Como resultado de la revisión sistemática se han clasificado los artículos en tres categorías; modelos que reparten el riesgo a partes iguales entre los activos en carteras por el capital invertido o por el riesgo, modelos que introducen restricciones con límites superiores e inferiores de inversión en activos o en sectores, y modelos que introducen un término adicional de diversificación en la función de coste o función objetivo. A continuación, se exponen los artículos más relevantes de cada una de estas categorías.

3.1. Carteras con el mismo peso por activo

Como se menciona anteriormente, el modelo media varianza normalmente concentra las carteras en pocos activos. Una forma simple e ilusa de resolver este problema es atribuir el mismo peso a todos los activos incluidos en carteras. Estas carteras con el mismo peso son muy usadas en la literatura (Benartzi y Thaler, 2001) (Windcliff y Boyle, 2004) (Li, Huang, y Wu, 2020) ya que son una alternativa competitiva a las carteras del modelo media varianza con respecto a su actuación fuera de la muestra (DeMiguel y cols., 2009)(Duchin y Levy, 2009)(Tu y Zhou, 2011)(Kritzman, Page, y Turkington, 2010). La principal ventaja de las carteras $1/N$ es que no es necesario estimar momentos de las series de precios de activos ni optimizar una función objetivo particular con restricciones.

DeMiguel y cols. (2009) estudiaron las condiciones bajo las cuales se espera que el modelo media varianza se comporte mejor que la estrategia $1/n$. Su estudio empírico testea catorce modelos de optimización diferentes en siete bases de datos de activos. En su experimento, ninguno de estos modelos es capaz de lograr un comportamiento significativamente mejor que la regla $1/n$, lo que justifica la necesidad de incorporar la diversificación en la cartera óptima. También observaron que el comportamiento del ratio de Sharpe fuera de la muestra en el modelo media varianza era considerablemente menor que el de la estrategia $1/n$, lo que les hizo adoptar la hipótesis de que esto se producía probablemente por los errores de estimación del valor esperado y las covarianzas en el modelo media varianza.

La principal limitación de la regla $1/n$ es que no consiguen una correcta diversificación de riesgo si el riesgo de sus activos en cartera es parecido (Chaves, Hsu, Li, y Shakernia, 2011)(Bai, Scheinberg, y Tutuncu, 2016). Para superar la limitación anterior ha surgido en la literatura las carteras de riesgo paritario o “risk parity portfolio” que se centran en la distribución del riesgo más que en la distribución del capital invertido (Qian, 2011)(Asness, Frazzini, y Pedersen, 2012)(Roncalli y Weisang, 2016)(Cesarone, Scozzari, y Tardella, 2020). El mejor método que se conoce de

las carteras de riesgo paritario es la “equally-weight risk contribution”(EWRC) o contribución igualitaria ponderada de riesgo (Kolm y cols., 2014)(Maillard, Roncalli, y Teiletche, 2010). El método cuantifica el riesgo de cada activo con la derivada parcial del riesgo en función al peso de los n activos:

$$w_n \times \partial_{w_n} \left(\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} \right) = w_n \times \frac{w_n \sigma_n^2 + \sum_{n \neq m} w_m \sigma_{nm}}{\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm}} \propto w_n \times (\Sigma \mathbf{w})_n,$$

dónde $\Sigma \in R^{N \times N}$ es la matriz de covarianza, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N) \in R^N$ es el vector de peso de activos y $(\Sigma \mathbf{w})_n$ las n -th columnas del vector obtenido del producto de Σ con \mathbf{w} . Igual contribución de riesgo significa por tanto que $w_n \times (\Sigma \mathbf{w})_n = w_m \times (\Sigma \mathbf{w})_m$ para todo n, m . Matemáticamente, el problema puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} \text{mín}_{w_1, \dots, w_N} \quad & \sum_{n,m=1}^N (w_n \times (\Sigma \mathbf{w})_n - w_m \times (\Sigma \mathbf{w})_m)^2. \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned}$$

y puede ser resuelto usando un algoritmo de programación secuencial cuadrática. Se debe destacar que la estrategia EWRC está inspirada en la técnica de máxima diversificación (Choueifaty y Coignard, 2008) que maximiza el siguiente ratio de diversificación:

$$\begin{aligned} \text{máx}_{w_1, \dots, w_N} \quad & \frac{\sum_{n=1}^N w_n \sigma_{nn}}{\sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm}}. \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned}$$

3.2. Controlar con límites superiores e inferiores de inversión en los activos en cartera

Una de las maneras más simples para evitar la concentración de activos en el modelo de Markowitz es imponer un límite superior e inferior a los pesos de los activos en cartera. Partiendo de esta idea, Abdelaziz y cols. (2007) proponen un modelo de optimización de carteras en el cual la cantidad invertida en cada activo se encuentre en un intervalo entre cero y el diez por ciento del presupuesto total y la cantidad invertida total en los sectores de banca, leasing y seguros sea inferior al treinta por ciento. Masri y cols. (2010) introdujeron conjuntamente un límite superior e inferior en las proporciones a invertir de cada activo:

$$\gamma_n \leq w_n \leq \kappa_n, n = 1, \dots, N, \quad (1)$$

dónde $\gamma_n, \kappa_n \in [0, 1]$. El programa de optimización cuadrática resultante incluye las siguientes

restricciones:

$$\begin{aligned} \min_{w_1, \dots, w_N} \quad & \lambda \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} - \sum_{n=1}^N w_n \mu_n. \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & \gamma_n \leq w_n \leq \kappa_n \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned}$$

Desde una perspectiva diferente, Lin (2013) propusieron una forma canónica para las restricciones de diversificación usadas comúnmente en la literatura. Específicamente, el autor desarrolla la forma canónica de: (i) restricción del límite superior de pesos (weight upper-bound constraint (WUBC)):

$$\max(w_1, \dots, w_N) \leq U_W, \quad (2)$$

dónde $\max(\cdot)$ devuelve el máximo componente del vector U_W que es el límite superior asociado de la restricción de diversificación; (ii) restricción de límite inferior de pesos (weight lower-bound constraint (WLBC)):

$$\min(w_1, \dots, w_N) \geq L_W, \quad (3)$$

dónde L_W es el límite inferior asociado a la restricción de diversificación y $\min(\cdot)$ devuelve el mínimo componente del vector; (iii) para la restricción L^p ($\max(\cdot)$) (LNC):

$$\sum_{n=1}^N |w_n|^p \leq U_n, \quad (4)$$

dónde U_n representa el límite superior de la restricción de diversificación L^p ; y (iv) la restricción de entropía (entropy constraint (EC)):

$$-\sum_{n=1}^N w_n \ln w_n \geq L_E, \quad (5)$$

dónde L_E es límite inferior de la restricción de diversificación de la entropía. Los resultados analíticos del estudio muestran que la restricción de límite inferior es la más estricta forzando la diversificación, y consecuentemente, tiene la menor región factible, mientras que la restricción de entropía resulta ser la que menos fuerza la diversificación, y por tanto, menos reduce la región factible del problema.

3.3. Introducir la diversificación en la función de coste

En este grupo de estrategias, la diversificación se añade explícitamente en la función de coste o función objetivo del problema de optimización. Schmidt (2019) propone un modelo media varianza diversificado (DMVT) en el cual introduce un término que refuerza la diversificación en la función objetivo, dando lugar al siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{w_1, \dots, w_N} \quad & \lambda \sum_{n,m=1}^N w_n w_m \sigma_{nm} - \sum_{n=1}^N w_n \mu_n + \delta \sum_{n=1}^N w_n^2 \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{n=1}^N w_n = 1. \\ & w_1, \dots, w_N \geq 0. \end{aligned}$$

dónde el término $\delta \sum_{n=1}^N w_n^2$ es el potenciador de la diversidad y δ es un parámetro que determina la importancia del término anteriormente definido. La estrategia DMVT tiende a la estrategia $1/n$ cuando el parámetro δ toma valores grandes. En cualquier caso, ambos parámetros, δ y λ se fijan a priori en el estudio determinando las preferencias del inversor con respecto a la diversificación y el riesgo, respectivamente. Cabe mencionar que las propiedades de la estrategia ya se estudiaron en primer lugar en Kolm y cols. (2014).

La estrategia del potenciador de diversidad es muy similar a la estrategia desarrollada por Kullback-Leibler (Bera y Park, 2008)(Liesiö, Xu, y Kuosmanen, 2020). El criterio de Kullback-Leibler es conocido también como la métrica de la entropía cruzada y cuantifica, en este caso, la pseudo distancia entre la distribución de probabilidad de los pesos de activos con los pesos asociados a la estrategia $1/n$:

$$\sum_{n=1}^N w_n \ln(w_n/p_n), \quad (6)$$

dónde $p_1 = \dots = p_N = 1/n$. La medida de diversificación basada en Kullback-Leibler es la misma que la medida de entropía negativa de Shannon (Usta y Kantar, 2011)(Huang, 2012) porque el vector incluye p_1, \dots, p_N elementos seguidos de una distribución uniforme, y por tanto, la medida se podría definir como:

$$-\sum_{n=1}^N w_n \ln(w_n). \quad (7)$$

La entropía de Yanger (Yu, Lee, y Chiou, 2014) es otra alternativa para medir la distancia entre los pesos de los los activos y $1/n$. El presupuesto se reparte entre los activos más igualmente cuando la entropía de Yanger incrementa. Logra su mínimo cuando $w_1 = \dots = w_N = 1/n$ y se define como:

$$-\left(\sum_{n=1}^N |w_n - 1/n|^z\right)^{1/z}, \quad (8)$$

dónde $z \geq 1$. Debajo del mismo paraguas de estrategias, DeMiguel y cols. (2009) también propusieron la llamada teoría de la mezcla de igual ponderación $1/n$ y mínima varianza como método alternativo, para promover la diversificación explícitamente en la función de coste del problema de optimización. La estrategia es una ponderación combinada de la regla $1/n$ y la mínima varianza dónde la función objetivo es minimizar el riesgo sin tener en cuenta la rentabilidad (Jiang, Du, y An, 2019).

3.4. Conclusiones e implicaciones

El modelo media varianza de Markowitz es el modelo clásico de optimización de carteras de inversión pero adolece de algunas limitaciones en su aplicación fuera de la muestra que lo hacen poco aplicable en la práctica; errores de estimación en sus parámetros, gran variabilidad de los pesos de los activos en carteras con respecto a los parámetros y la alta concentración de activos en cartera. Por este motivo, se han propuesto alternativas que aseguren la distribución del riesgo incorporando la diversificación al modelo.

La forma más simple de conseguir la diversificación ha sido distribuir el presupuesto total de cartera por igual entre n activos. Esta forma se ha considerado un benchmark en términos de diversificación. También se han introducido restricciones en el problema de optimización que limitan la cantidad a invertir en cada activos o en un grupo determinado de estos. Por último también se ha introducido la diversificación en la función de coste añadiendo un término adicional e incluyendo la entropía.

Todos los modelos han mejorado la diversificación del modelo media varianza pero no se conoce cuál opera mejor, ni en qué entorno trabaja mejor cada uno de ellos. En todos estos modelos también se incluye un parámetro que necesita ser estimado y que normalmente se define a priori con las preferencias del inversor (aversión al riesgo). El creciente interés en el desarrollo de estas técnicas, su facilidad de incorporación al modelo, la gestión digitalizada e innovadora que supone en el mundo de las carteras de inversión, nos lleva a definir los siguientes objetivos en la tesis;

- Identificar los entornos en los que mejor opera la diversificación o el modelo de media varianza, tanto en número y clase de activos, en la longitud de series temporales de los inputs y en los diferentes mercados.
- Proponer un nuevo término a añadir en la función de coste de Markowitz para mejorar la diversificación.
- La formulación propuesta para asegurar la diversificación en el modelo media varianza se va adaptar para introducir la sostenibilidad como nuevo término en el modelo media varianza.

Los inversores actualmente no se preocupan sólo por la rentabilidad de las carteras y la seguridad que les ofrece, sino que también preguntan por “esto a dónde va” o “qué estoy aportando con mi dinero”. Es por este creciente interés que se han empezado a desarrollar fondos que aseguren una inversión responsable con el mundo y el medio ambiente. Para evaluar el grado de respeto de las empresas a esta inquietud han surgido los índices de sostenibilidad.

Referencias

- Abdelaziz, F. B., Aouni, B., y El Fayedh, R. (2007). Multi-objective stochastic programming for portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, 177(3), 1811–1823.
- Asness, C. S., Frazzini, A., y Pedersen, L. H. (2012). Leverage aversion and risk parity. *Financial Analysts Journal*, 68(1), 47–59. doi: 10.1109/ICCNT.2010.97
- Bai, X., Scheinberg, K., y Tutuncu, R. (2016). Least-squares approach to risk parity in portfolio selection. *Quantitative Finance*, 16(3), 357–376.
- Benartzi, S., y Thaler, R. H. (2001). Naive diversification strategies in defined contribution saving plans. *American economic review*, 91(1), 79–98.
- Bera, A. K., y Park, S. Y. (2008). Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle. *Econometric Reviews*, 27(4-6), 484–512.
- Black, F., y Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial analysts journal*, 48(5), 28–43.
- Cesarone, F., Scozzari, A., y Tardella, F. (2020). An optimization–diversification approach to portfolio selection. *Journal of Global Optimization*, 76(2), 245–265.
- Chaves, D., Hsu, J., Li, F., y Shakernia, O. (2011). Risk parity portfolio vs. other asset allocation heuristic portfolios. *The Journal of Investing*, 20(1), 108–118.
- Chouiefaty, Y., y Coignard, Y. (2008). Toward maximum diversification. *The Journal of Portfolio Management*, 35(1), 40–51.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., y Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy? *The review of Financial studies*, 22(5), 1915–1953.
- Duchin, R., y Levy, H. (2009). Markowitz versus the talmudic portfolio diversification strategies. *The Journal of Portfolio Management*, 35(2), 71–74.
- Huang, X. (2012). An entropy method for diversified fuzzy portfolio selection. *International Journal of Fuzzy Systems*, 14(1).
- Jiang, C., Du, J., y An, Y. (2019). Combining the minimum-variance and equally-weighted portfolios: Can portfolio performance be improved? *Economic Modelling*, 80, 260–274.
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., y Fabozzi, F. J. (2014). 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356–371.
- Kritzman, M., Page, S., y Turkington, D. (2010). In defense of optimization: the fallacy of 1/n. *Financial Analysts Journal*, 66(2), 31–39.
- Li, H., Huang, Q., y Wu, B. (2020). Improving the naive diversification: An enhanced indexation approach. *Finance Research Letters*, 101661.
- Liesiö, J., Xu, P., y Kuosmanen, T. (2020). Portfolio diversification based on stochastic dominance under incomplete probability information. *European Journal of Operational Research*,

- 286(2), 755-768.
- Lin, J.-L. (2013). On the diversity constraints for portfolio optimization. *Entropy*, 15(11), 4607–4621.
- Maillard, S., Roncalli, T., y Teïletche, J. (2010). The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 36(4), 60–70.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7, 77-91.
- Masmoudi, M., y Abdelaziz, F. B. (2018). Portfolio selection problem: a review of deterministic and stochastic multiple objective programming models. *Annals of Operations Research*, 267(1-2), 335–352.
- Masri, H., Abdelaziz, F. B., y Meftahi, I. (2010). A multiple objective stochastic portfolio selection program with partial information on probability distribution. En *2010 second international conference on computer and network technology* (pp. 536–539).
- Michaud, R. O., y Ma, T. (2001). *Efficient asset management: A practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation*. Oxford University Press.
- Moody, J., y Saffell, M. (2001). Learning to trade via direct reinforcement. *IEEE transactions on neural Networks*, 12(4), 875–889.
- Qian, E. (2011). Risk parity and diversification. *The Journal of Investing*, 20(1), 119–127.
- Roncalli, T., y Weisang, G. (2016). Risk parity portfolios with risk factors. *Quantitative Finance*, 16(3), 377–388.
- Schmidt, A. B. (2019). Managing portfolio diversity within the mean variance theory. *Annals of Operations Research*, 282(1-2), 315–329.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3), 425–442.
- Tu, J., y Zhou, G. (2011). Markowitz meets talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. *Journal of Financial Economics*, 99(1), 204–215.
- Usta, I., y Kantar, Y. M. (2011). Mean-variance-skewness-entropy measures: A multi-objective approach for portfolio selection. *Entropy*, 13(1), 117–133.
- Windcliff, H., y Boyle, P. P. (2004). The 1/n pension investment puzzle. *North American Actuarial Journal*, 8(3), 32–45.
- Yu, J.-R., Lee, W.-Y., y Chiou, W.-J. P. (2014). Diversified portfolios with different entropy measures. *Applied Mathematics and Computation*, 241, 47–63.

A.0.3 Primer premio a la mejor comunicación en el área de finanzas

**III Congreso Iberoamericano de Jóvenes
Investigadores en Ciencias Económicas y Dirección de
Empresas**



La comunicación titulada “REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE DIVERSIFICACIÓN EN LA GESTIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN AUTOMATIZADA”, elaborada por los autores María Luisa Martínez Nieto, Mariano Carbonero Ruz, Francisco de Asis Fernández Navarro y Teresa Montero Romero, recibió el primer premio a la mejor comunicación en el área de Finanzas del **III Congreso Iberoamericano de Jóvenes Investigadores en Ciencias Económicas y Dirección de Empresas**, celebrado el 26 y 27 de noviembre de 2020.

Y para que así conste, se expide la siguiente certificación a 27 de noviembre de 2020.

Fdo. Gema Albort Morant

Secretaria General de AJICEDE

