

УДК 519.6

Д. О. Топчий

## THE THEORY OF PLAFALES: КОНСТРУЮВАННЯ СТАНДАРТНОГО БАЗИСУ SSE•12

*У статті на основі the theory of plafales показано основні кроки алгоритму конструювання стандартного базису серендипового скінченного елемента – SSE•12 (бікубічна апроксимація).*

**Ключові слова:** бікубічна апроксимація, базисні функції, *plafal* (-es).

### Вступ

Історія методу скінченних елементів (МСЕ) почалася із ідеї видатного математика Р. Куранта, яку він оприлюднив у 1943 році [1 – 4]. Спочатку ідея Куранта не зацікавила дослідників, тому що її реалізація вимагала великих обсягів обчислювальної роботи. Після появи ЕОМ метод почали активно розробляти інженери-дослідники. Саме вони, а не математики відразу окупували обчислювальні машини з метою отримати відповіді на практичні питання. Процедура Куранта стала новим кроком в обчислювальній математиці, хоча вплив методу скінченних різниць (МСР) деякий час лишався (до появи довільної триангуляції Тернера). Швидкий розвиток і популяризація МСЕ пояснюють професійною підготовкою користувачів. З іншого боку, дехто вважає (і не без підстав), що брак математичних знань у інженерно орієнтованих фахівців був головною причиною появи й розповсюдження в МСЕ хибних гіпотез і неадекватних моделей. Найбільша кількість помилок пов'язана з конструюванням функцій форми (базисних функцій) скінченних елементів, зокрема елементів серендипової сім'ї. Ці елементи були справжнім відкриттям у МСЕ.

У якості обчислювального шаблону квадрат із білінійною інтерполяцією вперше був використаний у 1964 році [5]. Цей елемент добре комбінується з трикутним симплексом, утворюючи просту й ефективну сітку МСЕ. Як правило, квадрати корисні всередині розрахункової області, а трикутники – у примежовій смужці. У реальних двовимірних і тривимірних задачах межі розрахункової області границі між елементами, а також границі поділу (в неоднорідному середовищі) часто криволінійні [5, 6, 7]. Саме такий елемент досліджували в 1968 році [8] Ергатудіс, Айронс і Зенкевич. Це був приклад успішного застосування ізопараметричної техніки, яка полягає [9] у виборі кусково-поліноміальних функцій для визначення перетворення координат. Термін «ізопараметрична» означає, що для перетворення координат вибирають ті самі поліноми, які інтерполюють фізичне поле, тобто базисні функції виконують подвійну роль. У 1968 році автори [8] не врахували, що роль базисних функцій – потрійна. Їх використовують у задачах локалізації навантажень на скінченний елемент. Якщо внутрішні вузли є, перетворення може бути чутливим до переміщень цих вузлів. Можливо, автори [8] спостерігали цю особливість і саме тому відмовились від внутрішнього вузла лагранжевої моделі. На початку 80-х років ХХ століття, коли стало зрозуміло, що роль матричної алгебри в МСЕ перебільшена, з'явилися геометричні підходи [10], а також стохастичні процедури побудови базисів [11, 12]. Не буде перебільшенням підкреслити, що бікубічна апроксимація (інтерполяція) посідає особливе місце в теорії поліноміального наближення функцій двох аргументів.

На нашу думку, з'явилась можливість запропонувати відмінний від вищезгаданих процедур алгоритм конструювання базисних функцій на основі the theory of plafales [13, 14, 15]. Ми вважаємо, що роль базисних функцій – четверна. ІТ-платформи в МСЕ, які можуть бути створеними на основі алгоритмів the theory of plafales [16], містять у собі поняття

алгоритмічної складності: введення в програмний комплекс базисних (і глобальних базисних) функцій, а також пошук розв'язання проблеми програмно-апаратним комплексом є функціями часу. Отже, базисні функції – функції часу. Безумовно, невід'ємним складником вищезгаданої ІТ-платформи є процес її функціональної візуалізації [17].

### Аналіз досліджень

Ця стаття ґрунтується на роботах [13, 14, 15], а також на матеріалах конференції [16, 18].

### Мета роботи

Основна мета роботи – показати алгоритм формоутворення поверхні  $L_i(x, y, t)$  (бікубічна апроксимація) базисної функції від часу.

### Актуальність роботи

ІТ-платформи в МСЕ (на базі алгоритмів the theory of plafales) можуть містити компонент штучного інтелекту – конструювання базисних функцій в автоматичному режимі.

### Основна частина

Будемо розглядати стандартний квадрат  $2 \times 2$  з 12 вузлами – серендипів скінченний елемент (рис. 1). Базисні функції бікубічної інтерполяції  $L_i(x, y)$  ( $i = \overline{1;12}$ ) повинні задовольняти інтерполяційну гіпотезу:

$$L_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, \quad \sum_{i=1}^{12} L_i(x, y) = 1, \quad (1)$$

де  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера,  $i$  – номер функції,  $k$  – номер вузла.

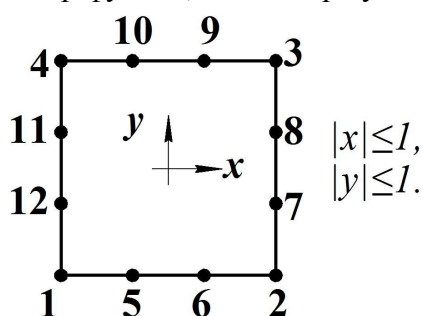


Рис. 1. Серендипів СЕ бікубічної інтерполяції (12 вузлів)

Стандартний базис ССЕ • 12 має вигляд [19]:

$$\begin{aligned} L_1(x, y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(-10+9(x^2+y^2)), & L_2(x, y) &= \frac{1}{32}(1+x)(1-y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ L_3(x, y) &= \frac{1}{32}(1+x)(1+y)(-10+9(x^2+y^2)), & L_4(x, y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1+y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ L_5(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-3x), & L_6(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1+3x), \\ L_7(x, y) &= \frac{9}{32}(1-y^2)(1+x)(1-3y), & L_8(x, y) &= \frac{9}{32}(1-y^2)(1+x)(1+3y), \\ L_9(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1+y)(1+3x), & L_{10}(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1+y)(1-3x), \\ L_{11}(x, y) &= \frac{9}{32}(1-y^2)(1-x)(1+3y), & L_{12}(x, y) &= \frac{9}{32}(1-y^2)(1-x)(1-3y). \end{aligned} \quad (2)$$

Розглянемо властивості функції  $L_i(x, y, t)$ :

$$L_i(x, y, t) = L_i(x, y) \circ G(t) = \begin{cases} L_i(x, y), & t \equiv T, i = \overline{1;12}, \\ N_i(x, y), & t \in (\gamma; T]; \gamma \geq 0; i = \overline{1;12}, \end{cases} \quad (3)$$

$$z_{x,y} = G(t),$$

де параметр  $t$  – час;  $T$  – момент часу, за якого утворюється поверхня (2); відповідно  $N_i(x, y)$  – поверхні, які утворюються в моменти часу  $t \in (\gamma; T]$ ;  $G(t)$  – глобальна функція часу змін аплікат поверхонь  $L_i(x, y, t)$ . Надалі (у неявному вигляді)  $G(t)$  виступатиме композицією об'єктів the theory of plafales.

Інтерполяційну гіпотезу для функцій  $N_i(x_k, y_k)$  представимо так:

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik} \circ G(t). \quad (4)$$

Для функцій  $N_i(x, y)$  справджується така оцінка:

$$|N_i(x, y)| \leq 1. \quad (5)$$

### Уведення систем і підготовка обчислювального шаблону

Уведемо такі системи the theory of plafales: the static canvas of plafal (статичний килим)  $PF_k^{U^{SP}}$  [15, с. 16], the «ensemble» of the points (ансамбль точок)  $PF_r^{ens(i,e)}_{(i,j)}$  [15, с. 569 – 575], the imaginary point of plafal (уявна точка)  $PF^{(i,e)pi}$  [15, с. 29 – 86], the degenerate isolated point of plafal (вироджена ізольована точка)  $PF^{bd(i,e)p(i,e)}$  [15, с. 23 – 25], the flickering point of plafal (мерехтлива точка)  $PF^{(i,e)pid}$  [15, с. 87 – 152].

На статичному килимі (поверхня нульового рівня)  $PF_k^{U^{SP}}$  ансамбль точок  $PF_r^{ens(i,e)}_{(i,j)}$  [15, с. 569] створює стандартний квадрат  $2 \times 2$ :  $PF_r^{ens(i,e)}_{(i,j)F^d(x,y)}$  із 12 вузлами по контуру (рис. 2):

$$PF_k^{U^{SP}} : PF_r^{ens(i,e)}_{(i,j)} \rightarrow PF_r^{ens(i,e)}_{(i,j)F^d(x,y)}. \quad (6)$$

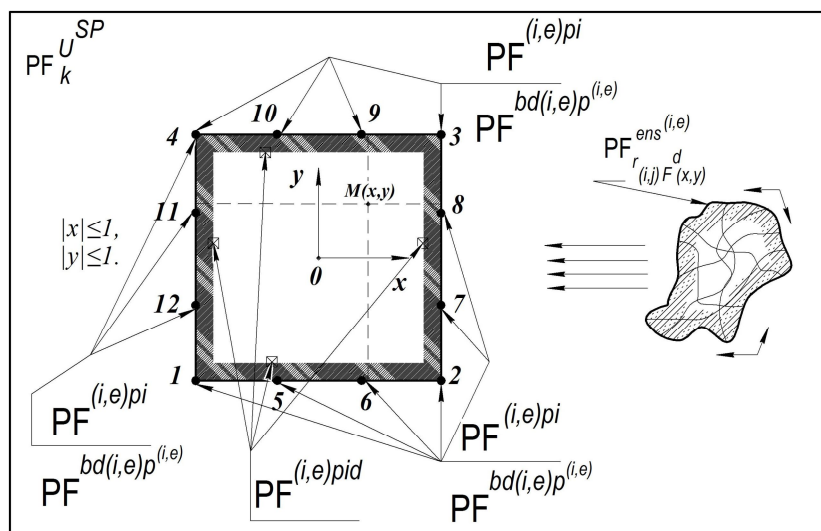


Рис. 2. Створення скінченного елемента

У якості обчислювального шаблону у загальному вигляді розглядатимемо рис. 3. Вузли 1,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 – уявні  $PF^{(i,e)pi}$  або вироджені ізольовані точки  $PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}}$  (для кожної з дванадцяти базисних функцій свій випадок розташування), між якими здійснюється перехід за часом [15, с. 31, с. 41]. Уздовж сторін 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4, 4 – 1 (відповідно по контуру) і всередині квадрата (область  $D$ ) розташовані мерехтливі точки  $PF^{(i,e)pid}$ .

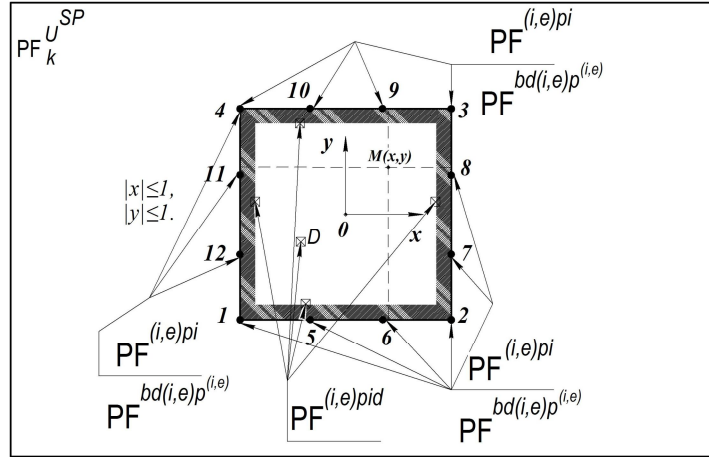


Рис. 3. Обчислювальний шаблон

**Конфігурації обчислювального шаблону**

Використовуючи інтерполяційну гіпотезу (1), задамо [15, с. 30]:

$$N_i(x_i, y_i) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1 = 1, \tag{7}$$

де  $a(m(t)) \pm 1$  – характеристична функція уявної точки;  $m(t)$  – функція часу характеристичної функції. Використовуючи інтерполяційну гіпотезу (1), задамо [15, с. 30]:

$$N_i(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1 = 0, \tag{8}$$

де  $a(n(t)) \pm 1$  – характеристична функція виродженої ізольованої точки;  $n(t)$  – функція часу характеристичної функції. Використовуючи властивість  $|N_i(x, y)| \leq 1$ , покладемо значення аплікат уздовж контура 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4, 4 – 1 і в області  $D$  [15, с. 88]:

$$N_i(x, y) = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1; \quad |a(h(t)) \pm 1| < 1, \tag{9}$$

де  $a(h(t)) \pm 1$  – характеристична функція мерехтливої точки;  $h(t)$  – функція часу характеристичної функції.

Відповідно для характеристичних функцій  $a(m(t)) \pm 1$ ,  $a(n(t)) \pm 1$ ,  $a(h(t)) \pm 1$  з’являються такі можливості:

– Для (7), (8), (9) існує спільне значення часу  $t = T$ , за якого вони мають місце, а отже,  $m(t)$ ,  $n(t)$  і  $h(t)$  є взаємопов’язаними між собою таким чином:

$$\begin{cases} a(m(t)) = 0, \\ a(n(t)) = 1. \end{cases} \Rightarrow n(t) = f(m(t)); \tag{10}$$

$$h(t) = h_1(t) \circ h_2(t) = m(t, \beta) \circ n(t, \beta); \quad |\beta| < 1. \tag{11}$$

Ця конструкція – «м’яке» моделювання [20] конфігурації обчислювального шаблону.

–  $m(t)$  і  $n(t)$  є довільними функціями, а отже, для кожної із них можуть існувати власні моменти часу, за яких справджуються рівності (7), (8), (9).

Послідовність побудови (переходу за часом) базисних функцій складається з такого

ланцюга:  $L_1(x, y) \rightarrow L_2(x, y) \rightarrow L_3(x, y) \rightarrow L_4(x, y) \rightarrow \dots \rightarrow L_{12}(x, y)$ . Між базисними функціями здійснюються плавні переходи за часом. Надалі побудову ланцюгів базисних функцій проводитимемо відповідно у двох вищезазначених можливостях. Відлік часу розпочнемо з  $t = 0$ .

**Побудова базисної функції в 1-ому вузлі**

Згідно з (4), (7), (8), (9) отримуємо конфігурацію базисної функції в 1-ому вузлі, рис. 4:

$$\begin{cases} N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1 = 1, \\ N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1 = 0; \quad k = \overline{2;12}, \\ N_1(x, y)_{1-2,4-1,D} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \alpha; \quad |\alpha| < 1, \\ N_1(x, y)_{2-3,3-4} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \equiv 0. \end{cases} \quad (12)$$

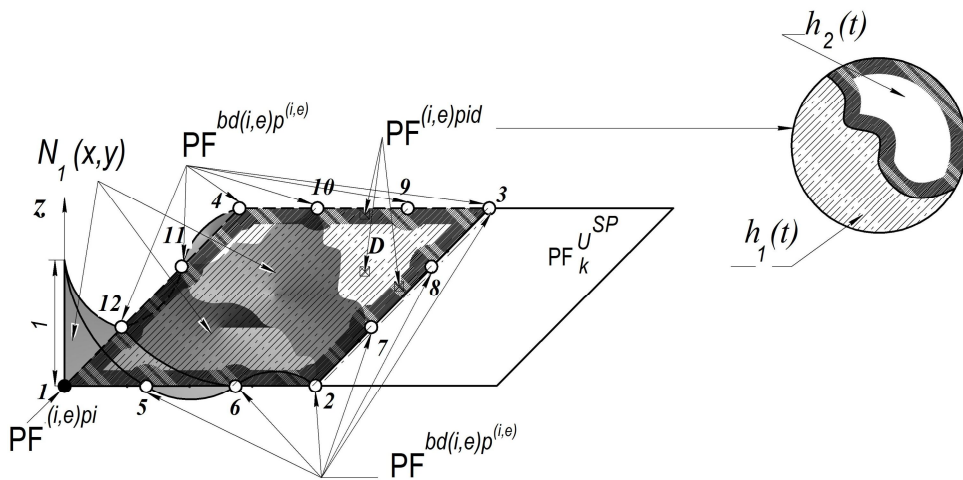


Рис. 4. Конфігурація базисної функції в 1-ому вузлі

У відповідності з конфігураціями обчислювального шаблону, отримаємо:  
– Згідно з (10):

$$\exists a = \ln: \begin{cases} \ln(m(t)) = 0, \\ \ln(n(t)) = 1. \end{cases} \Rightarrow n(t) = e \times m(t); \quad (13)$$

Задамо  $A: m(t) = t \Rightarrow n(t) = e \times t$ . Тоді (11) набуде вигляду:

$$\begin{cases} h(t)_{1-2,4-1} = t \times (-\frac{9}{16}\beta^3 + \frac{9}{16}\beta^2 + \frac{1}{16}\beta - \frac{1}{16}) + (e \times t) \times (1 - (-\frac{9}{16}\beta^3 + \frac{9}{16}\beta^2 + \frac{1}{16}\beta - \frac{1}{16})); \quad |\beta| < 1, \\ h(t)_{1-2}: \beta = x; \quad h(t)_{4-1}: \beta = y. \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} h(t)_D = t \times \zeta + (e \times t) \times \tau; \quad |\zeta| < 1; \quad |\tau| < 1, \\ h(t)_D: (\zeta; \tau) = (x, y). \end{cases}$$

З (13), (14) і  $A$  встановлюємо, що система (12) набирає чинності (утворюється поверхня  $L_i(x, y)$ ) за  $t = T = 1$ :

$$\begin{cases} N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = \ln(1)+1=1, \\ N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = \ln(e)-1=0; \quad k = \overline{2;12}, \\ N_1(x, y)_{1-2,4-1,D} = PF^{(i,e)pid} \equiv L_1(x, y), \\ N_1(x, y)_{2-3,3-4} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = \ln(e)-1 \equiv 0. \end{cases} \quad (15)$$

За  $0 < t < 1$  система (12) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = \ln(t) \pm 1, \\ N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = \ln(e \times t) \pm 1; \quad k = \overline{2;12}, \\ N_1(x, y)_{1-2,4-1,D} = PF^{(i,e)pid} = \ln(h(t)_{1-2,4-1,D}) \pm 1, \\ N_1(x, y)_{2-3,3-4} = PF^{(i,e)pid} = \ln(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \equiv \ln(e \times t) \pm 1. \end{cases} \quad (16)$$

Функція  $N_1(x, y)$  має вигляд:

$$N_1(x, y) = (\ln(t) \pm 1)^\circ (\ln(e \times t) \pm 1)^\circ (\ln(h(t)_{1-2,4-1,D}) \pm 1); \quad 0 < t \leq 1, \quad (17)$$

де композиції функцій в (17) рівнозначні (15) і (16).

Плавний перехід від  $L_1(x, y) \rightarrow N_2(x, y)$  здійснюється за правилами «absolute transition» (абсолютного переходу) і «absolute reversionary returning back transition after a certain time» (абсолютний реверсивний перехід через певний час) [15, с. 31; 15, с. 41]:

$$\begin{cases} PF^{(i,e)pi} \xrightarrow{\Omega(g(t))} PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}}, \\ g(t) = (\ln(m(1+c))^\circ \ln(n(1+c; \infty)) + (-1)^{[m(1+c)^\circ n(1+c; \infty)]}). \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \xrightarrow{\Omega(g^r(t))} PF^{(i,e)pi}, \quad (k=2) \\ g_1(t) = (\ln(m(1+c))^\circ \ln(n(T_2)) + (-1)^{[m(1+c)^\circ n(T_2)]}); \quad t \in [1+c; T_2], \\ g_2(t) = (\ln(m(T_2+d))^\circ \ln(n(T_2+d; \infty)) + (-1)^{[m(T_2+d)^\circ n(T_2+d; \infty)]}), \\ g^r(t) = g_1(t) \cup g_2(t), \end{cases} \quad (19)$$

де  $(1+c)$  – момент часу плавного переходу  $L_1(x, y) \rightarrow N_2(x, y)$ ;  $(T_2+d)$  – момент часу плавного переходу  $L_2(x, y) \rightarrow N_3(x, y)$ ;  $T_2$  – момент часу, за якого, для функції  $N_2(x, y)$  набирає чинність система (27).

– Нехай  $\forall m(t): \exists t = T_1$ , так що виконується (7):

$$N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = a(m(T_1)) \pm 1 = 1. \quad (20)$$

Нехай  $\forall n(t): \exists t = T_2 \neq T_1$ , так що виконується (8):

$$N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(T_2)) \pm 1 = 0. \quad (21)$$

З урахуванням (14) зведемо (20) і (21) до єдиних умов (22), (23):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 T_2 > T_1 : \\
 N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1; \sup_t(a(m(t)) \pm 1) = 1; \quad t \in (0; T_2], \\
 N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1; \inf_t(a(n(t)) \pm 1) = 0; \quad t \in (0; T_2]; \quad k = \overline{2; 12}, \\
 PF^{(i,e)pid} = a\left(\left(-\frac{9}{16}\beta^3 + \frac{9}{16}\beta^2 + \frac{1}{16}\beta - \frac{1}{16}\right) \times m(t) + \left(1 - \left(-\frac{9}{16}\beta^3 + \frac{9}{16}\beta^2 + \frac{1}{16}\beta - \frac{1}{16}\right)\right) \times n(t)\right) \pm 1 = \\
 = N_1(x, y)_{1-2,4-1} = \lambda_1\beta^3 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\beta + \lambda_4; \quad \lambda_j \in R; \quad j = \overline{1; 4}; \quad T_1 < t < T_2, \\
 PF^{(i,e)pid} = a(\zeta \times m(t) + \tau \times n(t)) \pm 1 = N_1(x, y)_D = \sum_{k,l=0}^4 \mu_{kl} \times \zeta^k \tau^l; \quad \mu_{kl} \in R, \quad T_1 < t < T_2, \\
 PF^{(i,e)pid} = a(h(t)_{1-2,4-1,D}) \pm 1 = N_1(x, y)_{1-2,4-1,D} = L_1(x, y), \quad t = T_2, \\
 N_1(x, y)_{2-3,3-4} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \inf_t(a(n(t)) \pm 1) = 0; \quad t \in (0; T_2].
 \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 T_2 < T_1 : \\
 N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1; \sup_t(a(m(t)) \pm 1) = 1; \quad t \in (0; T_1], \\
 N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1; \inf_t(a(n(t)) \pm 1) = 1; \quad t \in (0; T_1]; \quad k = \overline{2; 12}, \\
 PF^{(i,e)pid} = a\left(\left(-\frac{9}{16}\beta^3 + \frac{9}{16}\beta^2 + \frac{1}{16}\beta - \frac{1}{16}\right) \times m(t) + \left(1 - \left(-\frac{9}{16}\beta^3 + \frac{9}{16}\beta^2 + \frac{1}{16}\beta - \frac{1}{16}\right)\right) \times n(t)\right) \pm 1 = \\
 = N_1(x, y)_{1-2,4-1} = \lambda_1\beta^3 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\beta + \lambda_4; \quad \lambda_j \in R; \quad j = \overline{1; 4}; \quad T_2 < t < T_1, \\
 PF^{(i,e)pid} = a(\zeta \times m(t) + \tau \times n(t)) \pm 1 = N_1(x, y)_D = \sum_{k,l=0}^4 \mu_{kl} \times \zeta^k \tau^l; \quad \mu_{kl} \in R, \quad T_2 < t < T_1, \\
 PF^{(i,e)pid} = a(h(t)_{1-2,4-1,D}) \pm 1 = N_1(x, y)_{1-2,4-1,D} = L_1(x, y), \quad t = T_1, \\
 N_1(x, y)_{2-3,3-4} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \inf_t(a(n(t)) \pm 1) = 1; \quad t \in (0; T_1].
 \end{array} \right. \quad (23)$$

Умови (22) і (23) є узагальненими до конфігурації (12). Функція  $N_1(x, y)$  має вигляд:

$$N_1(x, y) = (a(m(t)) \pm 1)^\circ (a(n(t)) \pm 1)^\circ (a(h(t)_{1-2,4-1,D}) \pm 1); \quad t \in (0; T_1] \quad \text{або} \quad t \in (0; T_2], \quad (24)$$

де композиції функцій у (24) рівносильні (22) і (23).

Плавний перехід від  $L_1(x, y) \rightarrow N_2(x, y)$  здійснюється за правилами [15, с. 31; 15, с. 41]:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 PF^{(i,e)pi} \xrightarrow{\Omega(g(t))} PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}}, \\
 g(t) = (a(m(T_{1,2} + c))^\circ a(n(T_{1,2} + c; \infty)) + (-1)^{[m(T_{1,2} + c)^\circ n(T_{1,2} + c; \infty)]}).
 \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \xrightarrow{\Omega(g^r(t))} PF^{(i,e)pi}, \quad (k = 2) \\
 g_1(t) = (a(m(T_{1,2} + c))^\circ a(n(T_3)) + (-1)^{[m(T_{1,2} + c)^\circ n(T_3)]}); \quad t \in [T_{1,2} + c; T_3], \\
 g_2(t) = (a(m(T_3 + d))^\circ a(n(T_3 + d; \infty)) + (-1)^{[m(T_3 + d)^\circ n(T_3 + d; \infty)]}), \\
 g^r(t) = g_1(t) \cup g_2(t),
 \end{array} \right. \quad (26)$$

де  $(T_{1,2} + c)$  – момент часу плавного переходу  $L_1(x, y) \rightarrow N_2(x, y)$ ;  $(T_3 + d)$  – момент часу плавного переходу  $L_2(x, y) \rightarrow N_3(x, y)$ ;  $T_3$  – момент часу, за якого для функції

$N_2(x, y)$  набирає чинність система (27).

### Побудова базисних функцій у 2 – 12-ому вузлах

Побудова функцій  $N_j(x, y)$ ,  $j = \overline{2;12}$  відбувається аналогічно функції  $N_1(x, y)$  з урахуванням конфігурацій базисних функцій (27):

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1 = 1; & i = \overline{2;12}, \\ N_i(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1 = 0; & k = \overline{1;12} / \{i\}, \\ N_i(x, y)_{i \in m \cap n, D} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \alpha; & |\alpha| < 1, \\ N_i(x, y)_{i \notin m \cap n} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \equiv 0, \end{cases} \quad (27)$$

де  $i \in m \cap n$  – вузол, з яким асоціюються сторона(-и) стандартного квадрата.

### Ансамблювання поверхонь

Виходячи із всього вищезазначеного, отримуємо для (3), що  $G(t)$  – глобальна функція часу змін аплікат поверхонь  $L_i(x, y, t)$ :

$$G(t) = N_1(x, y) \circ N_2(x, y) \circ N_3(x, y) \circ N_4(x, y) \circ N_5(x, y) \circ N_6(x, y) \circ N_7(x, y) \circ N_8(x, y) \circ N_9(x, y) \circ N_{10}(x, y) \circ N_{11}(x, y) \circ N_{12}(x, y) \circ g(t) \circ g^r(t). \quad (28)$$

### Висновки

У разі успішного тестування ІТ-платформ, які можуть бути створеними на основі алгоритмів the theory of plafales [16, 18], виникає можливість не використовувати вже відомий стандартний базис  $L_i(x, y)$ . Замість нього – одразу використовувати функції  $N_i(x, y)$ . Відповідно досліджувана функція  $L_i(x, y, t)$  матиме такий вигляд:  $L_i(x, y, t) \equiv G(t)$ . Усі відомі інформаційні платформи в МСЕ, які використовують в інженерних розрахунках, містять у собі відомий набір стандартних (О. Зенкевича) базисних функцій. Запропонований алгоритм не порушує монументальність поверхонь стандартних (О. Зенкевича) або альтернативних (А. Н. Хомченка) базисних функцій. ІТ-платформа в МСЕ (на основі алгоритмів the theory of plafales) виконуватиме такі функції: 1. В автоматичному режимі конструювати поверхню базисної функції на обчислювальному шаблоні, на якому людина ще не знайшла базис. Для того щоб платформа в кінцевому вигляді побудувала монументальну поверхню базисної функції, їй потрібно “проаналізувати” проміжні поверхні, які утворюються до фінальної — монолітної (базисної) поверхні. Для реалізації цього вводять ключовий параметр — час. 2. Відобразити формоутворення (рельєф) нестационарного температурного поля з динамічними термоелементами. 3. Функціонувати інтегрованим програмним комплексом, який буде знаходити фізично адекватні альтернативні моделі на складних обчислювальних шаблонах і виконувати свою роль в інженерних застосуваннях.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations / R. Courant / – Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 49. – P. 1 – 23.
2. Сильвестер П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П. Сильвестер, Р. Феррари. – М.: Мир, 1986. – 229 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Сегерлинд Л. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
4. Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М.: Мир, 1981. – 416 с.
5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Оден Дж. – М.: Мир, 1976. – 464 с.



с.

6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
7. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М.: Мир, 1981. – 216 с.
8. Ergatoudis I. Curved isoparametric quadrilateral elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Int. J. Solids Struct. – 1968. – V. 4. – P. 31 – 42
9. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стринг, Дж. Фикс. – М.: Мир, 1981. – 416 с.
10. Wachspress E. I. A rational finite element basis / E. I. Wachspress. – Academic Press: New York, 1975. – 216 p.
11. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. – Ив. - Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – 6 с. Деп. в ВИНТИ, № 1213.
12. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А. Н. Хомченко. – Ив. - Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – 7 с. Деп. в ВИНТИ, № 5167.
13. Topchy D. The theory of plafales: the proof of P versus NP problem / Topchy D. – Best Global Publishing, 2011. – 634 p.
14. Topchy D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems / Topchy D. – Best Global Publishing, 2013. – 695 p.
15. Topchy D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems [Електронний ресурс] / Topchy D. – Best Global Publishing, 2013. – 695 p. – Режим доступу до ресурсу: <http://eleanor-cms.ru/uploads/book.pdf>.
16. The theory of plafales: Applications of new cryptographic algorithms and platforms in Military complex, IT, Banking system, Financial market [Електронний ресурс] / Topchy D. // XLII KONFERENCJA ZASTOSOWANÍ MATEMATYKI. – 2013. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.impan.pl/~zakopane/42/Topchy.pdf>.
17. Зенкин А. А. Когнитивная компьютерная графика / Зенкин А. А. – М.: Наука, 1991. – 192 с.
18. XLII KONFERENCJA ZASTOSOWANÍ MATEMATYKI, 2013 / [Електронний ресурс] // Режим доступу до ресурсу: <http://www.impan.pl/KZM/42/>.
19. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббиа. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
20. Арнольд В. И. Жесткие и мягкие математические модели / Арнольд В. И. – М.: МЦНМО, 2008. – 32 с.

**Топчий Дмитро Олегович** – здобувач кафедри прикладної та вищої математики.

Чорноморський державний університет імені Петра Могили, м. Миколаїв.