

Класифікація дистрибутивних функцій відбивної здатності поверхні

Романюк О.Н.

Вінницький національний технічний університет
ran@vstu.vinnica.ua

Abstract

Romanyuk A. The Bidirectional Reflectance Distributive Function Classification . The Bidirectional Reflectance Distributive Function classification according to the various properties is proposed.

Вступ

Відповідно до прийнятого в комп'ютерній графіці підходу розрахунок освітленості точок поверхні розпадається на дві основні задачі [1]. Перша – передбачає визначення способу розрахунку освітленості в заданій точці тривимірного простору та вирішується за допомогою побудови математичної моделі освітлення. Друга задача використовує модель освітлення для розрахунків освітленості тривимірних об'єктів із конкретною геометрією й властивостями поверхні та вирішується за допомогою так званої моделі зафарбовування (Shading model). Для заданих оптичних властивостей поверхні, відносного положення поверхні на сцені, положення джерела світла, характеристик джерел світла та орієнтації площини спостереження модель освітлення дозволяє розрахувати інтенсивність світла, випромінюваного з визначеної точки поверхні в заданому напрямку спостереження [2, 3]. На даний час розроблено велику множину моделей освітлення, однак їх класифікацію проведено не було.

Мета статті – розробка класифікації локальних моделей відбивної здатності поверхонь.

Побудова дистрибутивних функцій відбивної здатності поверхонь

При формуванні зображень із використанням локальної моделі освітлення взаємодія обмежується тільки однократним відбиттям світла від поверхні. При цьому розраховується дифузна й спекулярна складові кольору, а розсіяне світло апроксимується. Такі моделі найбільш поширені на даний час і застосовуються в системах реального часу.

За оптичні властивості поверхні відповідає двопробенева дистрибутивна функція відбивної здатності ДФВЗ (BRDF - Bidirectional Reflectance Distributive Function) [1-5]. Вона є моделлю освітлення і визначає, яку долю випромінювання, яке надійшло в точку з напрямку \vec{V}_i , буде

відбито в напрямку \vec{L}_i (рис.1, а). ДФВЗ є функцією кількох змінних [3-5]

$$BRDF = f_{\lambda}(\alpha, \mu_1, \varphi, \mu_2, x) = f(\vec{L}, \vec{V}),$$

де λ - довжина хвилі, $(\alpha, \mu_1), (\varphi, \mu_2)$ - параметри, що визначають відповідно напрямок падаючого світла і напрямку спостереження. У загальному випадку дистрибутивна функція залежить також і від положення точки на поверхні, однак у комп'ютерній графіці для спрощення вважається, що властивості відбиття матеріалу не змінюються з положенням точки на поверхні. В загальному випадку це характерно для однорідних матеріалів, однак легко може бути враховано при триангуляції.

Інтенсивність випромінювання I в заданому напрямку визначається як величина променевого потоку через ділянку ds_{\perp} (рис.1, б), перпендикулярну променю, в межах диференціального тілесного кута $d\omega$, який дорівнює площі нескінченно малого елемента на поверхні одиничної сфери

$$I = \frac{d\Phi}{ds_{\perp} d\omega} = \frac{d\Phi}{ds \cos \alpha d\omega},$$

де $d\omega = \sin \alpha d\alpha d\mu_1$.

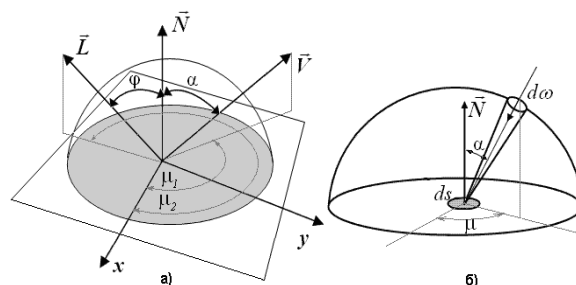


Рисунок 1 – Вихідні дані для розрахунку ДФВЗ

ДФВЗ може бути розрахована за формулою

$$BRDF = \frac{dI(\vec{V}_i)}{I(L_i) \cos \alpha_i d\omega_i}$$

Дистрибутивні функції відбивної здатності поверхонь повинні задовольняти принципу симетричності Гельмгольца та збереження енергії. Принцип симетричності передбачає незмінність значення функції за умови зміни місцями вхідного й вихідного напрямлення. Закон збереження енергії стосовно ДФВЗ передбачає, що світлова енергія, яка розсіюється поверхнею, не може бути більшою за енергію, яка попала на поверхню.

Рівняння рендерингу, яке описує поширення світла в тривимірній сцені, є записом закону збереження енергії для електромагнітного випромінювання в точці x : інтенсивність випромінювання в напрямку \vec{V}_i складається з інтенсивності, яке випромінюється самою поверхнею в точці x , і інтенсивності відбитого випромінювання. Рівняння рендерингу у формі Каджій має такий вигляд [3]

$$I_V = I_e + \int_{2\pi} BRDF \cdot I_i \cos \alpha_i d\omega_i,$$

де I_i - інтенсивність випромінювання, яке надходить в точку з напрямку \vec{L}_i , I_V - інтенсивність випромінювання в напрямку \vec{V}_i , I_e - власна інтенсивність випромінювання X у напрямку \vec{V}_i . Вираз під знаком інтеграла - це сума випромінювань, що прийшли в точку поверхні із просторової півсфери та відбиті поверхнею відповідно до її "відбивної здатності". Рівняння рендерингу записано для інтегральної інтенсивності кольору, але формально воно залишається справедливим і для спектральної інтенсивності.

Методи, які використовуються для моделювання освітлення, оперують із розсіяним і відбитим світлом [1-5]. Відбите світло у своєму складі має дві компоненти: дифузну та спекулярну.

Розсіяне (фонове) світло – це світло, яке відбивається від навколишнього середовища. Точне моделювання даної складової світла вимагає великих обчислювальних витрат і тому воно при використанні локальних моделей освітлення апроксимується [1, 7].

Для врахування фонового освітлення можна припустити, що всі поверхні повністю освітлюються розсіяним світлом I_a . При цьому фоновий вклад у дифузне відбиття в будь-якій точці поверхні буде дорівнювати $I_{am} = I_a \cdot k_a$, де k_a - коефіцієнт відбиття розсіяного світла

($0 \leq k_a \leq 1$).

Дифузне відбиття [1, 2, 5, 6] характерно для матових і шорстких поверхонь із хаотичними нерівностями, розміри яких співставні з довжиною хвилі або перевищують їх. Дифузне відбиття визначає видимість оточуючих тіл, оскільки кожна точка освітленої поверхні випромінює відбиті промені в усі сторони. При відсутності дифузного відбиття тіла не видно (повітря, скло).

При наявності в сцені точкового джерела світла, інтенсивність дифузійного відбиття пропорційна косинусу кута між нормаллю до поверхні й напрямком на джерело світла. У цьому випадку для обчислення інтенсивності дифузійного відбиття застосовують закон косинусів Ламберта [1-6]

$$I_d = I_0 \cdot k_d \cdot \cos \theta,$$

де I_0 - інтенсивність джерела світла, $k_d \in [0, 1]$ - коефіцієнт дифузійного відбиття, θ - кут падіння, що розраховує як кут між напрямком на джерело світла \vec{L} і нормаллю \vec{N} до поверхні (рис.2).

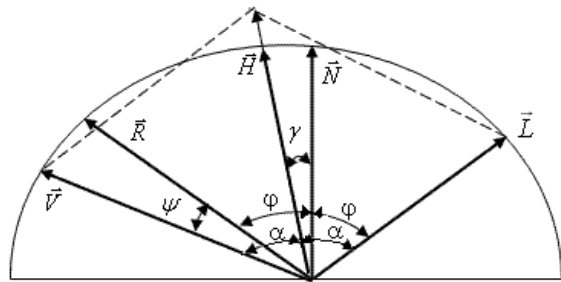


Рисунок 2 – Вектори нормалей до точки поверхні

Якщо вектори \vec{N} і \vec{L} нормалізовано, то $\cos \theta = \vec{N} \cdot \vec{L}$. Основною властивістю дифузійного відбиття є рівномірність відбитого світла в усіх напрямках.

При формуванні перспективних зображень необхідно врахувати затухання інтенсивності кольору з відстанню. Інтенсивність світла обернено пропорційна квадрату відстані від джерела. У випадку перспективного перетворення в якості відстані до джерела можна взяти відстань до центра проекції, і, якщо об'єкт достатньо віддалений, то зображення буде адекватним. Якщо ж центр розміщено близько до об'єкту, то квадрат відстані змінюється достатньо швидко, і в цьому випадку краще використати лінійне затухання. Тоді [2, 5, 6]

$$I_d = \frac{I_0 \cdot k_d \cdot \cos \theta}{d + k}$$

де d - відстань до спостерігача, $k \geq 1$ - константа.

Класифікація дистрибутивних функцій відбивної здатності поверхні та їх аналіз

На рис. 3 зображено класифікацію локальних моделей освітлення, яка включає найпоширеніші на даний час дистрибутивні функції відбивної здатності поверхні. Зрозуміло, що наведена класифікація може доповнюватися новими моделями.

Локальні моделі освітлення можна розділити на дві групи. Перша включає ті ДФВЗ поверхні, які отримано експериментальним шляхом. Вони найбільш поширені, оскільки достатньо прості та забезпечують прийнятну реалістичність відтворення об'єктів, для яких не вимагається точна фізична інформація про освітлення. До другої групи відносяться більш точні моделі, які, як правило, ураховують як корпускулярну, так і хвильову природу світлового потоку. В таких моделях поверхня розглядається у вигляді мікроскопічних ділянок. При цьому

враховується шорсткість поверхні. У деяких моделях, враховується затінення поверхні можливими мікроставпями або їх перешкоджання проходженню світлового потоку.

ДФВЗ можна розділити на ізотропні та анізотропні. Ізотропні ДФВЗ інваріантні відносно повороту навколо вектору нормалі до поверхні. Навпаки, в анізотропних дистрибутивних функціях відбивні властивості матеріалу міняються при повороті навколо вектора нормалі. До анізотропних матеріалів відносять, наприклад, атласні поверхні, наполоірований метал.

При використанні експериментальних ДФВЗ залежно від методу зафарбовування використовуються різні операнди. У більшості випадків дистрибутивна функція визначається через скалярний добуток відповідних нормованих векторів, який дорівнює косинусу кута між цими векторами. Значно рідше оперують зі значенням кута між векторами, оскільки це передбачає виконання обернених тригонометричних функцій.

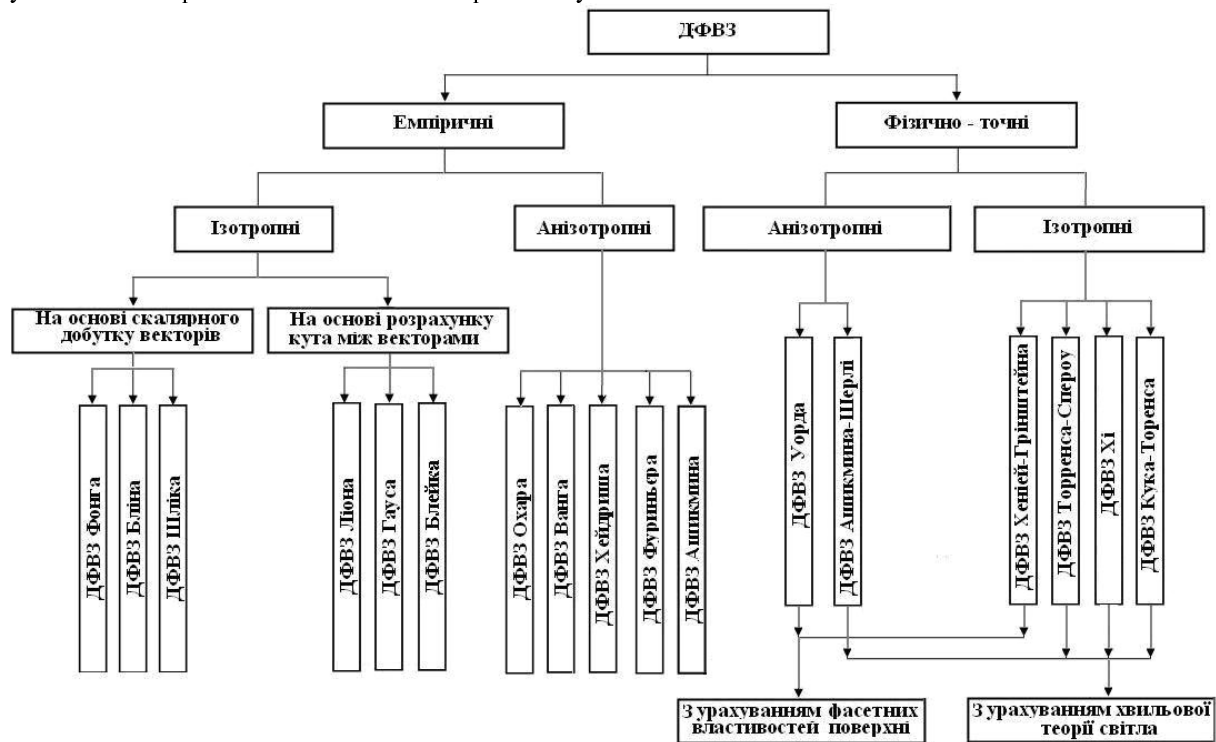


Рисунок 3 – Класифікація ДФВЗ

У комп'ютерній графіці найбільш часто користуються емпіричною моделлю зафарбовування Буї-Туонга Фонга [7], що має вигляд

$$I_s = I \cdot \varpi(\theta, \lambda) \cdot \cos^n \alpha,$$

де $\varpi(\theta, \lambda)$ - крива відбиття, що визначає відношення дзеркально відбитого світла до падаючого як функцію кута падіння θ і довжини хвилі λ , n - коефіцієнт спекулярності поверхні, що визначає її ступінь віддзеркалювання.

Функція $\varpi(\theta, \lambda)$ досить складна, тому її у більшості випадків заміняють константою k_s , яку визначають експериментально або вибирають з естетичних міркувань.

Завдяки дзеркальному відбиттю на блискучих предметах з'являються відблиски, для яких має місце максимальна концентрація світлової енергії в епіцентрі відблиску з подальшим її затуханням із віддаленням від нього (рис.). Виділяють епіцентр відблиску і його зону затухання, яка отримала назву блюмінгу. Як правило, ці зони розділяє точка перегину функції $\cos^n \psi$.

У ДФВЗ Бліна [8] $\cos \alpha = \vec{V} \cdot \vec{R}$, де $\vec{R} = 2(\vec{L} \cdot \vec{N})\vec{N} - \vec{L}$. Вектор \vec{R} називають вектором дзеркального відбиття. У дистрибутивній функції Бліна, яка історично появилася пізніше ДФВЗ Фонга, замість $\cos \alpha$ використовують $\cos \gamma = \vec{N} \cdot \vec{H}$, де $\vec{H} = \vec{L} + \vec{V} / |\vec{L} + \vec{V}|$. Вектор \vec{H} називають серединним, оскільки його напрям співпадає з бісектрисою кута між векторами \vec{L} і \vec{V} . У роботі [6] показано, що при формуванні спекулярної складової кольору згідно ДФВЗ Фонга і Бліна мають місце візуальна відмінність у формуванні відблисків.

У сучасних пакетах тривимірної графіки широкого поширення отримала дистрибутивна функція Шліка [9], яка має такий вигляд

$$\cos \gamma / (n - n \cos \gamma + \cos \gamma).$$

ДФВЗ Шліка має значно меншу обчислювальну складність порівняно з функціями Фонга та Бліна. На жаль, наявність операції ділення значно ускладнює апаратну реалізацію функції. Аналіз показав, що дистрибутивна функція Шліка з відтворює епіцентр відблиску з максимальна відносною похибкою, що не перевищує 10%. За цією областю спостерігається суттєве розходження з результатами, отриманими згідно з моделлю освітлення Бліна. Суттєвим недоліком ДФВЗ Шліка є те, що дистрибутивна функція в зоні формування блюмінга падає до нульового рівня надзвичайно повільно (див. рис. 1), що обумовлює неприродне освітлення графічного об'єкта та додаткові обчислення за рахунок збільшення інтервалу зміни аргументу.

Більш досконалою є ДФВЗ [10] $\left(\frac{7 \cdot n}{16} \cdot (\cos \gamma - 1) + 1\right)^2$, яку отримав автор. Ця функція май значно більшу точність відтворення відблиску. Достатньо сказати, що до точки перегину ДФВЗ максимальна абсолютна похибка

запропонованої функції втричі менша порівняно з функцією Шліка. При цьому вірно передається зона блюмінга функції.

Склад і кількість операцій для обчислення такої дистрибутивної функції дозволяє її легко реалізувати апаратно, у той час, як наявність операції ділення для обчислення функції Шліка обмежує її апаратну реалізацію.

Оскільки світло відбивається від зовнішньої поверхні (за винятком металів і деяких твердих барвників), то відбитий промінь зберігає властивості падаючого.

Поєднуючи в одній моделі формули для розрахунку розсіяного, дифузного та дзеркального світла отримуємо [1, 2]

$$I = I_a \cdot k_a + \frac{I}{k+d} (k_a \cdot \cos \theta + k_s \cdot \cos^n \gamma)$$

У машинній графіці ця модель часто називається функцією зафарбування й застосовується для розрахунку інтенсивності кольору пікселів зображення. Щоб одержати кольорове зображення, потрібно знайти функції зафарбування для кожного із трьох основних кольорів. Константа k_s , як правило, однакова для всіх трьох основних кольорів, оскільки кольори дзеркально відбитого світла визначається кольорами падаючого.

У комп'ютерній іноді для формування відблисків використовують ДФВЗ Гауса [10], яка має такий вигляд

$$e^{-\frac{n \cdot (\angle(\vec{H}, \vec{L}))^2}{2}}$$

Така дистрибутивна функція оперує кутом між векторами, що передбачає виконання трудомісткої операції арккосинуса. Дистрибутивна функція Гауса з високою точністю відтворює як епіцентр відблиску, так і його зону затухання (блюмінгу) і в засобах комп'ютерної графіки знайшла широке поширення для аналізу зображень.

Згідно ДФВЗ Блейка [11]

$$ДФВЗ = \begin{cases} \frac{(\gamma+b)^2}{b(b-a)}, & \text{якщо } -b \geq \gamma \text{ або } b \leq \gamma, \\ 1 - \frac{\gamma^2}{ab}, & \text{якщо } -b \leq \gamma \leq -a, \\ \frac{(\gamma-b)^2}{b(b-a)}, & \text{якщо } a \leq \gamma \leq b, \end{cases}$$

де

$$a = \frac{n+5,6}{n(0,09n+5,2)},$$

$$b = \frac{n+65}{5n+31,7}$$

Як і в попередньому випадку модель оперує з кутом, визначення якого потребує великих витрат часу. На жаль, функція не забезпечує достатню точність відтворення відблисків, а тому можливі візуальні відмінності між еталонним і сформованим зображенням.

Дзеркальна модель ДФВЗ, яку запропонував Уорд [12, 13], базується на більш детальному аналізі процесу відображення світла від реальних поверхонь. У деякому наближенні люба поверхня може бути замінена сукупністю великої кількості мікроскопічних дзеркально відбивних площадок (фасетне подання поверхні). Якщо всі площадки орієнтовані однаково, то поверхня буде відбивати світло як дзеркало. В протилежному випадку частина світла буде розсіяна й в інших напрямках. Якщо середнє відхилення в орієнтації площадок дорівнює m , то ДФВЗ такої поверхні буде мати вигляд [12,13]

$$\frac{1}{\sqrt{(N \cdot L)(N \cdot V)}} \frac{1}{4\pi m^2} e^{\frac{(N \cdot H)^2 - 1}{m^2 (N \cdot H)^2}},$$

У загальному випадку ДФОЗ, яка ураховує фасетну структуру поверхні, має такий вигляд [2, ,13]

$$\frac{F}{\pi} \frac{D \cdot G}{(\vec{N} \cdot \vec{L}) \cdot (\vec{N} \cdot \vec{V})},$$

де D - функція розподілу мікрограней на поверхні, F - коефіцієнт Френеля, G - коефіцієнт ослаблення світла, обумовленого тим, що грані маскують і затіняють одну одну.

У моделі Торренса-Сперроу [13] передбачається, що мікрограні орієнтовані згідно розподілення Гауса : $D = c_1 \cdot \exp(-\gamma / m)^2$.

У моделі Кука – Торенса [14] застосовують більш точну модель Бекмана [2,13].

$$D = \frac{1}{m^2 \cdot (N \cdot H)^4} e^{\frac{(N \cdot H)^2 - 1}{m^2 (N \cdot H)^2}}.$$

Для розрахунку коефіцієнтів ослаблення світла використовують формулу [2, 13, 14]

$$G = \min\left(\frac{2 \cdot (\vec{N} \cdot \vec{H})(\vec{N} \cdot \vec{V})}{(\vec{H} \cdot \vec{V})}, \frac{2 \cdot (\vec{N} \cdot \vec{H})(\vec{N} \cdot \vec{L})}{(\vec{H} \cdot \vec{L})}, 1\right)$$

Перший вираз у функції мінімуму визначає складову маскування, а другий самозатінення.

Коефіцієнт Френеля F [2, 3, 4, 15] можна розрахувати за формулою

$$F(\lambda, \vec{H}, \vec{L}) = 0.5 \cdot \frac{(g-c)^2}{(g+c)^2} \left(1 + \left(\frac{c \cdot (g+c) - I}{c \cdot (g-c) + I} \right)^2 \right),$$

де $c = \vec{N} \cdot \vec{H}$, $g = \sqrt{c^2 + \tau^2} + I$, τ - коефіцієнт переломлення матеріалу.

Ураховуючи складність обчислень формули Френеля у комп'ютерній графіці використовують таку апроксимацію Шліка [15]

$$F(\lambda, \vec{H}, \vec{L}) = F(0) + (1 - F(0))(1 - \vec{V} \cdot \vec{N})^5,$$

де $F(0)$ - коефіцієнт відбиття при нормальному падінні променя (перпендикулярно до поверхні).

У деяких моделях дистрибутивної функції ураховуються ефекти оптики, наприклад, дифракцію і інтерференцію. До таких моделей відносять фізично-точну модель Хі [16], яка включає 15 параметрів. Трудомісткість обчислень суттєво обмежують її використання в системах реального часу.

При використанні моделей освітлення Фонга та Бліна дзеркальні відблиски мають той же колір, що й у падаючого світла. Принциповою відмінністю моделей Торренса-Сперроу, Кука-Торренса є те, що колір відблиску залежить від довжини хвиль падаючих променів і матеріалу об'єкта.

Анізотропна модель Ашикмина [17] є експериментальною і визначає розміри відлиску в напрямках u , v (рис.)

$$\frac{\sqrt{(n_u + 1)(n_v + 1)}}{2\pi} (\vec{N} \cdot \vec{H})^{n_u \cdot \cos^2 \phi + n_v \cdot \sin^2 \phi}.$$

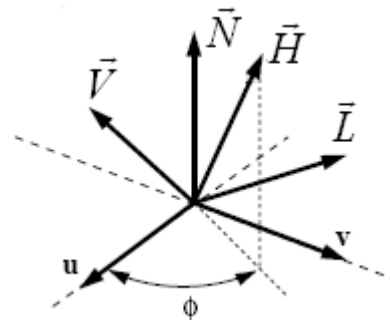


Рисунок 4 – Вихідні параметри для анізотропної моделі модель Ашикмина

Формула ДФВЗ Уорда [3,12] для анізотропного зафарбування має такий вигляд

$$\frac{1}{\sqrt{(\vec{N} \cdot \vec{L})(\vec{N} \cdot \vec{V})}} \frac{1}{4\pi m_x m_y} e^{\frac{(\vec{T} \cdot \vec{P})^2}{m_x^2} + \frac{1 - (\vec{T} \cdot \vec{P})^2}{m_y^2} \times \frac{(\vec{N} \cdot \vec{H})^2 - 1}{(\vec{N} \cdot \vec{H})^2}},$$

де $\vec{P} = \vec{H} - (\vec{N} \cdot \vec{H})\vec{N} / |\vec{H} - (\vec{N} \cdot \vec{H})\vec{N}|$

В емпіричній моделі освітлення Фуриньєра [4] анізотропні відблиски формуються з використанням декількох обчислень значень освітленості по ізотропним моделям із різними значеннями нормалі.

Для формування відблиску у формі еліпса згідно анізотропної моделі Охара використовують ДФВЗ [4]

$$\left[\frac{a^2 b^2 c^2 (\vec{H} \cdot \vec{L})^2}{U + M} \right]^{n/2},$$

$$\text{Де } U = a^2 b^2 (\vec{H} \cdot \vec{L})^2,$$

$$M =$$

$$1 - (\vec{H} \cdot \vec{L})^2 \cdot (b^2 c^2 (\vec{H} \cdot \vec{T})^2 + c^2 a^2 (1 - (\vec{H} \cdot \vec{T})^2))$$

a, b, c – радіуси еліпсоїда, які задають функцію світлової плями вздовж напрямку дотичного вектору, бінормалі й нормалі відповідно. Така модель є достатньо трудомісткою та передбачає установки відразу чотирьох параметрів.

У моделі Ванга [4] використовується лише два параметра. ДФВЗ має такий вигляд

$$(\vec{H} \cdot \vec{L})^{\frac{m\zeta}{m - (m - \zeta)(\vec{H} \cdot \vec{T})^2}}$$

де $m, \zeta \in [1, \infty)$, степені відблиску поверхні в напрямку дотичного вектору і бінормалі. При $m = \zeta$ модель описує звичайне ізотропне відбиття. Чим більша різниця між m і ζ , тим яскравіше виражені анізотропні властивості матеріалу.

Анізотропна модель Хейдриш - Сейдла [19] є експериментальною та визначається за формулою

$$((\vec{L} \times \vec{T})(\vec{V} \times \vec{T}) - (\vec{L} \cdot \vec{T})(\vec{V} \cdot \vec{T}))^n,$$

$$\vec{T} = \left| \vec{N} \times \left| \vec{D} \times \vec{N} \right| \right|,$$

де \vec{D} - одиничний вектор, який визначає анізотропний напрямок.

Модель Ашикмина-Шерлі [17] враховує хвильові властивості світла, а тому використовує коефіцієнт Френеля. Ця ДФВЗ має такий вигляд

$$\frac{\sqrt{(n_u + 1)(n_u + I)}}{8\pi} \times$$

$$\frac{(\vec{N} \cdot \vec{H})^{n_u \cdot \cos^2 \phi + n_v \cdot \sin^2}}{(\vec{N} \cdot \vec{L}) \max((\vec{N} \cdot \vec{V}), (\vec{N} \cdot \vec{L}))} F(\vec{N} \cdot \vec{L})$$

Висновки

Розроблено класифікацію дистрибутивних функцій відбивної здатності поверхні, яка розподіляє ДФВЗ по різним ознакам. Запропонована класифікація дозволяє вибрати тип дистрибутивної функції для конкретних застосувань.

Аналіз показав, що дистрибутивні функції відбивної здатності поверхні мало пристосовані до програмно-апаратної реалізації, оскільки є достатньо трудомісткими і включають «довгі» операції. Розрахунок ДФВЗ передбачає нормалізацію векторів, що вимагає достатньо великих обчислювальних витрат. Ураховуючи, що дистрибутивна функція й нормалізовані вектори обчислюються для кожної точки поверхні, то продуктивність формування графічних сцен у значній мірі визначається саме реалізацією зазначених процедур.

Найбільшого поширення серед ДФВЗ отримали моделі освітлення Фонга і Бліна. Це пояснюється їх простотою, залежністю від косинуса кута між векторами, а не від кута між ними.

Фізично-точні моделі, які ураховують фасетну структуру поверхні та хвильову теорію світла, доцільно розраховувати програмним шляхом (піксельними шейдерами), оскільки вони достатньо трудомісткі.

Література

1. Херн Д., Павлин Бейкер М. Компьютерная графика и стандарт OpenGL. -М. : Издательский дом «Вильямс».2005.-1168 с.
2. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики: Пер. с англ. - М.: Мир, 1989. - 512 с.
3. Калютов А.В. Введение в фотореалистическую графику.—СПб.: Политехника, 2006. —118 с.
4. Малашенкова И. В., Моисейкин А. Моделирование свойств поверхности объекта. // Математическая морфология, Том 5 Выпуск 4, 2006
5. Gebhardt N. Einige BRDF Modelle // <http://www.irrlicht3d.org/papers/BrdfModelle.pdf>

6. Романюк О.Н. Дослідження дистрибутивних функцій відбивної здатності поверхонь// Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології, 2007, №1(13), -с.45-50.
7. Phong B.T. Illumination for computer generated images// Comm. of the ACM. - 18(6). - June 1975. - pp. 311-317.
8. Blinn J.. "Models of Light Reflection For Computer Synthesized Pictures. In Proceedings SIGGRAPH, July 1977.
9. Schlick C. A Fast Alternative to Phong's Specular Model // Graphics Gems IV. Academic Press. - 1994. - pp. 404-409.
10. Романюк О.Н. Ефективна модель для відтворення спекулярної складової кольору// Проблеми інформатизації та управління: Збірник наукових праць: Випуск 2 (20). – К.:НАУ,2007, с.115-120.
11. Blake E.H., Disselkoe V.C., Kuijk A.A. Faster Phong shading // Computer Graphics Forum. - vol 6. - 1991. - pp. 115-131.
12. Ward G. Measuring and modeling anisotropic reflection. cg, 26(2):265–272,1992.
13. Ward G. The radiance lighting simulation and rendering system. Computer Graphics Proceedings of SIGGRAPH 94), pages 459–472, July 1994.
14. Cook R. and Torrance. A reflectance model for computer graphics. Technical report, Computer Graphics, vol. 15, no. 3, ACM., 1981.
15. Schlick C. An inexpensive BRDF model for physically-based rendering // ComputerGraphics Forum. - № 13(3). - 1994. - pp. 233-246.
16. Xiao D. He, Kenneth E. Torrance, Francois X. Sillion, and Donald P. Greenberg. A Comprehensive Physical Model for Light Reflection. Technical report, Cornell University, 1991.
17. Ashikhmin M. and Shirley P. An anisotropic Phong BRDF model. Journal of Graphics Tools, 5(2), pp. 25-32, 2000.