KREDIBILITEETTITEORIASTA

Ellen Loikas

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2022

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LOIKAS, ELLEN: Kredibiliteettiteoriasta
Pro gradu -tutkielma, 43 s.
Sovellettu matematiikka
Toukokuu 2022

Vakuutusmaailmassa tulee tilanteita, joissa tulee määrittää vakuutusmaksu ryhmälle vakuutussopimuksia, joista on tiedossa vain muutamia maksettuja vahinkokorvauksia. Toisaalta suuremmalla ryhmällä enemmän tai vähemmän vastaavia sopimuksia on tiedossa huomattavasti enemmän vahinkohistoriaa. Kredibiliteettiteoria on matemaattinen apuväline, joka ottaa huomioon sekä yksilöllisen vahinkohistorian että isomman mahdollisimman heterogeenisen joukon, kollektiivin, vahinkohistorian.

Tutkielmassa esitellään neljä kredibiliteettimallia, joilla kaikilla on erilaiset oletukset ja vaatimukset koskien aineiston muuttujia. Bayesin mallilla saavutetaan paras estimaattori kokemusperäiselle vakuutusmaksulle, joka riippuu myös yksilöllisestä vahinkohistoriasta. Bayes-preemio ei kuitenkaan täytä vaatimusta estimaattorin yksinkertaisuudesta, sillä sitä ei tavallisesti voida esittää suljetussa analyyttisessa muodossa ja näin ollen se voidaan laskea vain numeerisia menetelmiä käyttäen. Bühlmannin malli hyödyntää koko portfolion samankaltaisia riskejä muodostaessaan kredibiliteettiestimaattorin ja näin saavutettu estimaattori on paras lineaarinen estimaattori Bayes mielessä, kun optimaalisuusehtona on kvadraattinen tappiofunktio. Jotta Bühlmannin mallin kredibiliteettiestimaattoria voidaan hyödyntää, tulee estimaattorin parametrit vielä estimoida. Bühlmann-Straub malli on vakuutuskäytännössä käytetyin kredibiliteettimalli. Sen oletukset eroavat Bühlmannin mallin oletuksista siten, että vahinkosuhdemuuttujien ei tarvitse olla samoin jakautuneita. Mallin kredibiliteettiestimaattori on kahden estimaattorin painotettu keskiarvo, jossa kummankin yhteenlaskettavan termin paino on verrannollinen sen kvadraattisen tappion käänteisluvulle ja se on kollektiivin sisällä harhaton. Hachemeisterin regressiomalli on yleistys Bühlmann-Straub mallista. Siinä sallitaan eri keskiarvot ja varianssit sekä sallitaan kovarianssi havaintojen ja sopimusten välille.

Asiasanat: kredibiliteettiteoria, Bayes-preemio, Bühlmannin malli, Bühlmann-Straub malli, Hachemeisterin regressiomalli.

Sisältö

1 Johdanto

Vakuutusten pohjalla oleva perusajatus on, että yksilöt, joilla on yhtälainen altistuminen tietylle riskille, muodostavat yhdessä ”riskiryhmään kuuluvien yhteisön”, jotta he pystyvät sietämään havaitun riskin. Nyky-yhteiskunnassa tämä ajatus on useimmiten havaittavissa vakuutusten muodossa. Vakuutusmaksujen muodossa ”riskiryhmään kuuluvien yhteisön” jäsenet siirtävät riskinsä vakuutusyhtiölle.

Perustehtävänä riskiä luokiteltaessa on määrittää puhdas riskipreemio $P_i = E[X_i]$, jossa X_i on kertynyt korvaussumma. Klassinen ajattelutapa olettaa, että joidenkin objektiivisesti mitattavissa olevien ominaisuuksien perusteella riskit voidaan luokitella homogeenisiin riskiluokkiin ja että tilastotieto ja teoria, erityisesti suurten lukujen laki, mahdollistavat riskipreemion määrittämisen suurella tarkkuudella.

Kuitenkin tosielämässä lukuisat asiat vaikuttavat riskipreemion kokoon. Jotta järkeviä homogeenisiä riskiluokkia saataisiin muodostettua, tulisi portfolio jakaa hyvin suureen määrään luokkia. Hyvin moni näistä luokista sisältäisi vain muutaman riskin ja näin ollen tarjoaisi vain vähän tilastotietoa tulevien riskien luokitteluun. Toisaalta, jos portfolio jaetaan suuriin luokkiin, oletus homogeenisistä riskiprofiileista luokkien sisällä ei toteudu. Todellisuudessa mitkään riskit eivät ole täysin samanlaisia keskenään.

Jokaisen riskin tietty riskialtistuminen vaikuttaa kyseisen riskin tarkasteltavaan yksilölliseen vahinkohistoriaan. Kuitenkin yksilön havaittu vahinkohistoria on liian suppea ollakseen tilastollisesti luotettava. Toisaalta jokainen yksilöllinen riski on osa riskikollektiivia ja isojen kollektiivien vahinkohistoria tarjoaa luotettavaa tilastotietoa. Tätä tietoa hyväksikäyttäen voidaan laskea keskimääräisen kertyneen korvausmäärän odotusarvo riskiä kohden. Kuitenkin, kun arvioidaan annetun yksilöllisen riskin hyvyyttä, kollektiivin vahinkohistoriasta saadun tiedon hyöty on rajallista. Intuitiivisesti onkin selvää, että arvioitaessa riskiä tulisi hyväksikäyttää sekä havaittua yksilöllistä vahinkohistoriaa että kollektiivin vahinkohistoriaa. Kredibiliteettiteoria tarjoaa luotettavan matemaattisen perustan siihen, miten nämä eri vahinkohistoriat tulisi yhdistää.

Tässä tutkielmassa esitetään yleisimpiä kredibiliteettimalleja sekä muodostetaan kaavat kredibiliteettiestimaattoreille jokaisen mallin oletusten alaisuudessa. Lisäksi luvussa 4 käsitellään estimaattorien harhattomuutta yksinkertaisen Bühlmannin mallin tilanteessa. Työ pohjautuu suurilta osin Bühlmannin ja Gislerin kirjaan A Course in Credibility Theory and its Applications [1].

2 Johdatus kredibiliteettiteoriaan

Kredibiliteettiteoria on matemaattinen apuväline heterogeenisten kollektiivien kuvailemiseen. Se vastaa kysymykseen, miten yksilöllinen ja kollektiivinen vahinkohistoria tulisi yhdistää.

2.1 Yksilöllinen riski

Yksilöllistä riskiä voidaan ajatella mustana laatikkona, joka tuottaa kokonaisvahinkomenoja X_j $(j = 1, 2, ..., n)$, jossa X_j kuvaa korvaussummaa vuonna j. Muuttujat X_j $(j = 1, 2, ..., n)$ tulkitaan satunnaismuuttujina, ja tämä koskee myös menneitä periodeja, sillä havaitut arvot olisivat voineet olla myös eri suuruisia.

Edellisten periodien havaintojen pohjalta halutaan määrittää riskipreemio tulevan periodin kokonaisvahinkomenolle. Jotta näin voidaan tehdä, on satunnaismuuttujan X_j kertymäfunktiosta tehtävä tiettyjä oletuksia. Yksinkertaisimmat perusoletukset ovat:

Oletus 2.1

O1: Stationaarisuus: Kaikki satunnaismuuttujat X_j ovat samoin jakautuneita, ja niillä on (ehdollinen) kertymäfunktio $F(x)$ (annettuna aiemmat havainnot).

O2: (Ehdollinen) Riippumattomuus: Satunnaismuuttujat X_j, $j = 1, 2, ...$, ovat (ehdollisesti) riippumattomia (annettuna jakauma $F(x)$).

Stationaarisuusoletus mahdollistaa yhteyden luomisen menneen ja tulevan välille. Oletus stationaarisuudesta vaaditaan aina, kun lasketaan vakuutusmaksuja historiatietojen perusteella. Vahva stationaarisuusoletus O1 tullaan myöhemmin heikentämään ja yleistämään. Käytännössä stationaarisuus voidaan usein saavuttaa tekemällä sovituksia inflaatioon, indeksointiin sekä trendien eliminointiin.

Tyypillisesti vakuutusmaailmassa kohdataan seuraavanlaisia tilanteita:

(i) F on tuntematon
(ii) F vaihtelee eri riskeillä

Jotta kohdat (i) ja (ii) voidaan formalisoida selvemmin, käytetään tilastollisen päättelyn teorialle tyypillistä merkintätapaa: indeksöidään jakautuma F parametrillä ϑ ja kirjoitetaan F_ϑ ja sanotaan

(i) ϑ on tuntematon

(ii) ϑ vaihtelee eri riskeillä

Parametrisointi on aina mahdollista toteuttaa. Tavallisesti kirjoitetaan, että ϑ on jonkin abstraktin avaruuden Θ alkio. Nyt voidaan ajatella, että ϑ on "riskiprofiili".

2.2 Oikea yksilöllinen riski

Vakuutusmaksun laskentaperiaatteella $\mathcal{H}$ tarkoitetaan funktiota, joka määrittää reaaliluvun satunnaismuuttujalle X. Muuttujalla X on jakaumafunktio F. Näin saadaan

$X \longmapsto \mathcal{H}(X)$,

tai ilmaisten, että $\mathcal{H}$:n arvo riippuu ainoastaan jakaumasta F,

$F \longmapsto \mathcal{H}(F)$.

Tunnetuimpia "klassisia" vakuutusmaksun laskentaperiaatteita ovat:

Odotusarvoperiaate:	$X \longmapsto (1+\alpha)E[X]$	$\alpha > 0$;
Keskihajontaperiaate:	$X \longmapsto E[X] + \beta\sigma(X)$	$\beta > 0$;
Varianssiperiaate:	$X \longmapsto E[X] + \gamma\sigma^2(X)$	$\gamma > 0$;
Eksponenttiperiaate:	$X \longmapsto \frac{1}{\delta} lnE[e^{\delta X}]$	$\delta > 0$.

Jokaiselle näistä periaatteista vakuutusmaksu $\mathcal{H}(X)$ voidaan hajottaa riskimaksuun $E[X]$ ja positiiviseen varmuuslisään, joka on määritelty parametreilla α, β, γ ja δ.

Varmuuslisän taloudellisen tarpeellisuuden taustalla on vakuutusyhtiöiden tarve riskinkantovarallisuuteen[1], jotta yhtiö selviää korvausvaatimusten epävakaisuudesta sekä pystyy täyttämään velvoitteensa vakuutetuille epäsuotuisina vuosina. Sijoittajien tulisi saada hyvitystä siitä, että he altistavat pääomansa riskille. Varmuuslisä kompensoi tätä riskiä ja se voidaan nähdä riskipääoman kustannuksena.

Vakuutusmaksun laskentaperiaatetta $\mathcal{H}$ soveltamalla saatava oikea yksilöllinen preemio on $\mathcal{H}(F_\vartheta)$. Nyt rajoitutaan käsittelemään riskimaksua. Näin ollen päädytään seuraavaan oikean yksilöllisen riskin määritelmään.

Määritelmä 2.1 *Riskin, jonka riskiprofiili on ϑ, oikea yksilöllinen preemio on*

$$P^{ind}(\vartheta) = E[X_{n+1}|\vartheta] =: \mu(\vartheta) \tag{2.1}$$

[1]riskinkantovarallisuus = risk-bearing capital

Oikeaa yksilöllistä preemiota kutsutaan myös oikeudenmukaiseksi riskipreemioksi. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jatkossa usein kirjoitetaan $E_\vartheta[\cdot]$ sen sijaan, että kirjoitettaisiin $E[\cdot|F_\vartheta]$ tai $E[\cdot|\vartheta]$.

Yksilöllistä hinnoitteluongelmaa voidaan kuvailla määrän $\mu(\vartheta)$ määrittämisenä. Kuitenkin tavallisesti vakuutuskäytännöissä sekä ϑ että $\mu(\vartheta)$ ovat tuntemattomia. Näin ollen tavoitteena on löytää muuttujalle $\mu(\vartheta)$ estimaattori $\widehat{\mu(\vartheta)}$.

2.3 Kollektiivin riskin hinnoitteluongelma

Vakuutusyhtiö vakuuttaa monenlaisia riskejä. Jotta riskit voidaan luokitella ja siten hinnoitella, riskit ryhmitellään "samanlaisen riskin" luokkiin objektiivisten riskiominaisuuksien perusteella. Kredibiliteettiteorian puitteissa on tärkeää, ettei jokaista riskiä tarkastella yksittäin, vaan jokainen riski ajatellaan kuuluvan "samanlaisen" riskin ryhmiin, joita kutsutaan kollektiiveiksi.

Jokaista kollektiivin riskiä i kuvaa sen yksilöllinen riskiprofiili ϑ_i. Nämä parametrit ϑ_i ovat joukon Θ alkioita, ja Θ on joukko, joka koostuu kaikista mahdollisista arvoista, joita kollektiivin riskien riskiprofiilit voivat saada. Erikoistapaus on homogeeninen kollektiivi, jossa Θ koostuu vain yhdestä alkiosta. Tämä vastaa tilannetta, jossa kollektiivin jokaisella jäsenellä on täsmälleen sama riskiprofiili ja siten myös vastaavilla kokonaisvahinkosummilla sama jakaumafunktio. Kuitenkin yleisesti vakuutusmaailmassa tarkasteltavat riskiryhmät tai kollektiivit ovat useimmiten heterogeenisiä. Toisin sanoen, kollektiivin eri riskien ϑ-arvot eivät ole kaikki samoja, vaan ovat ennemminkin otoksia joukosta Θ, joka koostuu useammasta kuin yhdestä alkiosta. Vaikka kollektiivin riskit ovat erilaisia, niillä on myös jotain yhteistä: ne kaikki kuuluvat samaan kollektiiviin, eli ne ovat kaikki otoksia samasta joukosta Θ. Tätä tilannetta tarkoitetaan, kun sanotaan, että kollektiivin riskit ovat "samanlaisia".

Kollektiivin eri riskeihin liittyvät tietyt ϑ-arvot ovat tyypillisesti tuntematomia vakuuttajalle. Vakuuttaja kuitenkin tietää jotain kollektiivin rakenteesta ennakkotietojen ja tilastollisen tiedon perusteella. Esimerkiksi autovakuutuksen tapauksessa vakuuttaja voi tietää esimerkiksi, että useimmat kuljettajat ovat "hyviä" riskejä ja he harvoin tekevät korvausvaatimuksia, kun taas pieni prosenttiosuus kuljettajista tekevät toistuvasti korvausvaatimuksia. Tämä tieto voidaan muodollisesti tiivistää todennäköisyysjakaumaan $U(\vartheta)$ yli avaruuden Θ.

Määritelmä 2.2 *Todennäköisyysjakaumaa $U(\vartheta)$ kutsutaan kollektiivin rakenteelliseksi funktioksi*[2]*.*

[2]rakenteellinen funktio = structural function

Jakaumaa $U(\vartheta)$ voidaan tulkita usealla eri tavalla, joista yleisimmässä tulkinnassa kollektiivin ϑ-arvot ajatellaan olevan satunnainen otos määrätystä joukosta Θ; tällöin funktio $U(\vartheta)$ kuvaa ϑ-arvojen ideaalista esiintymistiheyttä avaruudessa Θ. Tätä tulkintaa kutsutaan *empiiriseksi Bayesilaiseksi ajattelutavaksi*. Empiirisessä Bayesilaisessa metodissa jakaumafunktio $U(\vartheta)$ määräytyy ainoastaan aineiston pohjalta. *Puhtaassa Bayesilaisessa tulkinnassa* ajatellaan jakaumafunktion $U(\vartheta)$ koostuvan henkilökohtaisista uskomuksista, ennakkotiedoista ja aktuaarin kokemuksista, jolloin jakauman keskiarvo ja varianssi ovat ennalta määrättyjä, toisin kuin empiirisessä Bayesilaisessa tulkinnassa.

Edellisessä luvussa määriteltiin oikea yksilöllinen preemio. Nyt määritellään vastaava preemio kollektiiville.

Määritelmä 2.3 *Kollektiivin preemio määritellään seuraavasti*

$$P^{coll} = \int_{\Theta} \mu(\vartheta) dU(\vartheta) =: \mu_0. \tag{2.2}$$

Kootaan tähän asti tarkastellut kaksi preemiota yhteen:

Oikea yksilöllinen preemio $P^{ind}(\vartheta) = \mu(\vartheta) = E_{\vartheta}[X_{n+1}]$. Tämä vastaa yksittäisen riskin odotettua vahinkomäärää (annettuna yksilöllinen riskiprofiili ϑ) tarkasteluperiodilla $n+1$. Koska ϑ on tuntematon vakuuttajalle, on myös $\mu(\vartheta)$ tuntematon. Tämän preemion estimoimiseksi vakuuttajalla on parhaassa tapauksessa käytössään kyseisen riskin muutaman edellisen periodin vahinkohistoria. Kuitenkin tavallisesti tämä informaatio on hyvin rajallista ja sillä on vähän arvoa ennustetta tehtäessä.

Kollektiivin preemio $P^{coll} = \mu_0 = \int_{\Theta} \mu(\vartheta) dU(\vartheta)$. Tämä vastaa yksittäisen riskin odotettua vahinkomäärää, kun odotusarvo on keskiarvo yli kollektiivin kaikkien riskien odotusarvojen, eli kollektiivin preemio on yksilöllisen preemion odotusarvo. Useimmiten tämäkin suure on vakuuttajalle tuntematon. Kuitenkin, kohtuullisen kokoisille kollektiiveille, toisin kuin yksilölliselle preemiolle, tämä preemio voidaan estimoida huomattavalla tarkkuudella edellisten periodien havaintojen perusteella.

Vakuutusyhtiöille on keskeisen tärkeää pystyä laskemaan kollektiivin preemio, josta käytetään myös nimitystä tariffitaso. Jos vakuuttaja vaatii jokaiselta kollektiivin jäseneltä saman preemion, P^{coll}, niin tilit olisivat tasapainossa, eli yli koko kollektiivin, vakuutusmaksut olisivat yhtä suuret kuin kertyneet korvausvaatimukset (odotusarvollisesti). Tästä herää kysymys, miksi vakuutusyhtiöt ovat niin kiinnostuneita ”oikeasta” yksilöllisestä preemiosta. Vastaus tähän kysymykseen on yksinkertainen ja se voidaan selkeimmin esittää seuraavana väitteenä.

Väite 2.4 *Kilpailukykyisin hinta on oikea yksilöllinen preemio.*

Kilpailu pakottaa vakuutusyhtiöt tarjoamaan reiluinta mahdollista hintaa vakuutuksille. Jos vakuutusyhtiö asettaa kaikille heterogeenisen kollektiivin riskeille vakuutuksen hinnan samaksi, niin hyvät riskit maksavat liikaa ja huonot riskit liian vähän vakuutuksesta. Jos nyt kilpaileva vakuutusyhtiö tarjoaa hintoja, jotka eivät ole samat kaikille ja jotka ovat siten reilumpia, niin silloin sen vakuutusmaksut hyville riskeille ovat halvempia. Verrattaessa ensimmäiseen yhtiöön, tämä kilpaileva yhtiö on houkuttelevampi hyville riskeille ja vähemmän houkutteleva huonoille riskeille. Tällä voi olla katastrofaalinen vaikutus ensimmäiselle yhtiölle: se menettää hyvät riskit ja kasvattaa huonojen riskien määrää. Vakuuttajat viittaavat tällaiseen ilmiöön haitallisena valikoitumisena[3]. Tämä tarkoittaa, että kollektiivi muuttuu ja rakenteellinen funktio muuttuu vakuuttajalle epäsuotuisammaksi.

2.4 Vakuutusmaksun hinnoitteluongelman esittäminen Bayesilaisen tilastotieteen kielellä

Aliluvussa 2.3 esitetty kollektiivin hinnoitteluongelma voidaan selkeimmin esittää Bayesilaisen tilastotieteen kielellä.

Jokaista riskiä kuvaa sen yksillöllinen riskiprofiili ϑ, joka itsessään on satunnaismuuttujan Θ realisaatio. Näin ollen seuraava pitää paikkansa:

(i) Muuttujat $X_1, X_2, ...$ ovat ehdollisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita jakaumafunktion F_ϑ mukaan, annettuna tapahtuma $\Theta = \vartheta$.

(ii) Muuttuja Θ on itsessään satunnaismuuttuja jakaumafunktiolla U.

Seuraavaksi esitetään muutamia huomioita yllä olevasta esityksestä. Edellisen tulkinnan mukaan yksilöllinen preemio itsessään on satunnaismuuttuja $\mu(\Theta)$. Yksilöllisen preemion oikeaa arvoa ei tiedetä, mutta muuttujan $\mu(\Theta)$ mahdollisista arvoista ja niiden esiintymistodennäköisyyksistä kuitenkin tiedetään jotain. Näin ollen on luonnollista mallintaa muuttuja $\mu(\Theta)$ satunnaismuuttujana.

Yksilöllistä preemiota merkitään nyt seuraavasti

$$P^{ind} = \mu(\Theta) := E[X_{n+1}|\Theta],$$

joka on ehdollinen odotusarvo ja siten satunnaismuuttuja. Nyt on tärkeää huomioida muutos merkintätavassa ja tulkinnassa verrattuna kaavassa (2.1) esitettyyn oikeaan yksilölliseen preemioon.

[3] haitallinen valikoituminen = adverse selection

On oleellista huomata, että tässä mallissa kaikki riskit ovat ennakkoon samanarvoisia. Tiedetään, että portfoliossa on sekä parempia että huonompia riskejä. Kuitenkaan ei voida ennakkoon tietää, kumpaan luokkaan tietty riski kuuluu. Vain jälkikäteen, kun yksittäisestä riskistä on tehty havainto, voidaan tehdä riskin luokasta päätelmä. Tämä huomio formalisoi päätelmän siitä, että kollektiivi on ryhmä, jonka riskit luokitellaan samankaltaisiin riskeihin, mutta kuitenkaan ne eivät ole täysin samanlaisia.

Mallissa kollektiivin preemio

$$P^{coll} = \mu_0 = \int_{\Theta} \mu(\vartheta) dU(\vartheta) = E[X_{n+1}]$$

on ehdoton odotusarvo, ja näin ollen vakio.

Bayesilaisessa tulkinnassa muuttujat $X_1, X_2, ...$ ovat vain ehdollisesti riippumattomia, kun Θ on annettuna. Ilman ehdollisuutta ne ovat positiivisesti riippuvia. Tämä on selvästi nähtävissä seuraavasta:

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) =& E[Cov(X_1, X_2|\Theta)] + Cov(E[X_1|\Theta], E[X_2|\Theta]) \\ =& Cov(\mu(\Theta), \mu(\Theta)) \\ =& Var(\mu(\Theta)) > 0. \end{aligned}$$

3 Bayesilainen lähestymistapa kredibiliteettiteoriaan

Vakuutusten hinnoittelussa tavoitteena on estimoida oikea vakuutusmaksu $\mu(\Theta)$ niin tarkasti kuin mahdollista. Yksi mahdollisuus on käyttää estimaattorina kollektiivin vakuutusmaksua μ_0, eli tarkasteltavan yksittäisen riskin vakuutusmaksu saadaan estimoitua laskemalla keskiarvo koko kollektiivin odotusarvoille. Tämä estimaattori ei ota huomioon mahdollista aikaisempaa yksilöllistä vahinkohistoriaa. Jos riskiä on havainnoitu n vuoden periodin ajan ja jos $\mathbf{X}$ kuvastaa tämän periodin aikana kertyneitä kokonaiskorvausmäärien vektoria, niin tämä tieto tulisi sisällyttää vakuutusmaksun estimointiprosessiin. Menetelmää, jossa yksilöllinen vahinkohistoria huomioidaan, kutsutaan kokemusperäiseksi tariffoinniksi tai kredibiliteetiksi. Parasta kokemusperäistä vakuutusmaksua, joka riippuu yksilöllisestä vahinkohistoriavektorista $\boldsymbol{X}$ kutsutaan Bayes preemioksi.

Määritelmä 3.1 *Bayes preemio määritellään seuraavasti:*

$$P^{Bayes} = \widetilde{\mu(\Theta)} := E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{X}]. \tag{3.1}$$

3.1 Bayesilainen riski ja estimaattori

Nyt havaintovektorin $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$ jakaumafunktio $F_\vartheta(\boldsymbol{x}) = P_\vartheta[\mathbf{X} \leq \boldsymbol{x}]$ on täysin tai osittain tuntematon, sillä ϑ on täysin tai osittain tuntematon. Bayesilaisessa tilastotieteessä tarkastellaan käyrän $R_T(\vartheta)$ tasoitettua keskiarvoa, jossa keskiarvo on painotettu todennäköisyysjakauman $U(\vartheta)$ odotusarvoilla. Edellä $R_T(\vartheta)$ on estimaattorin T riskifunktio

$$R_T(\vartheta) := E_\vartheta[L(\vartheta, T)] = \int_{\mathbb{R}^n} L(\vartheta, T(\boldsymbol{x}))dF_\vartheta(\boldsymbol{x}), \tag{3.2}$$

jossa $L(\vartheta, T(\boldsymbol{x}))$ on tappiofunktio.

Määritelmä 3.2 *Estimaattorin T Bayes-riski apriorisen jakauman $U(\vartheta)$ suhteen määritellään seuraavasti*

$$R(T) := \int_\Theta R_T(\vartheta)dU(\vartheta).$$

Kun oletetaan, että yllä määritetty integraalia on järkevä, voidaan estimaattorit järjestää kasvavan riskin mukaan.

Seuraavassa määritelmässä käytetään hyväksi merkintää:

$$\begin{aligned}&\text{Jos } \tilde{x} \in D \text{ ja } g(\tilde{x}) \leq g(x) \text{ kaikille } x \in D,\\ &\text{niin } \tilde{x} = \underset{x \in D}{arg\ min}\ \ g(x).\end{aligned}$$

Määritelmä 3.3 *Bayes-estimaattori* $\widetilde{T}$ *määritellään*

$$\widetilde{T} := \underset{T \in D_1}{arg\ min} \quad R(T), \tag{3.3}$$

jossa D_1 *on joukko, joka sisältää kaikki matemaattisesti hyväksyttävät estimaattorit, eli estimaattorit, joilla on integroituva riskifunktio. Sanotaan, että* $\widetilde{T}$ *on Bayes-estimaattori jakauman* $U_{\boldsymbol{x}}$ *suhteen.*

Huomautus käytettäviin merkintöihin: merkataan kirjaimella P yhteisjakaumaa $(\Theta, \boldsymbol{X})$, kirjaimella F muuttujan $\boldsymbol{X}$ reunajakaumaa ja $U_{\boldsymbol{x}}$ on muuttujan Θ ehdollinen jakauma annettuna $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$.

Jotta Bayes-estimaattori saadaan muodostettua, tarkastellaan seuraavaa yhtälöä:

$$\begin{aligned} R(T) &= \int_{\Theta} R_T(\vartheta) dU(\vartheta) = \int_{\Theta} E_{\vartheta}[L(\vartheta, T)] dU(\vartheta) \\ &= \int_{\Theta} \int_{\mathbb{R}^n} L(\vartheta, T(\boldsymbol{x})) dF_{\vartheta}(\boldsymbol{x}) dU(\vartheta) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Theta} L(\vartheta, T(\boldsymbol{x})) dU_{\boldsymbol{x}}(\vartheta) dF(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Yhtälöä hyväksikäyttäen voidaan johtaa seuraava sääntö Bayes-estimaattorin muodostamiselle:

Lause 3.4 *Kaikille mahdollisille havainnoille* $\boldsymbol{x}$, $\widetilde{T(\boldsymbol{x})}$ *saa sellaisen arvon, joka minimoi lausekkeen* $\int_{\Theta} L(\vartheta, T(\boldsymbol{x})) dU_{\boldsymbol{x}}(\vartheta)$. *Toisin sanoen, jokaiselle mahdolliselle havainnolle* $\boldsymbol{x}$, $\widetilde{T(\boldsymbol{x})}$ *on Bayes-estimaattori jakauman* $U_{\boldsymbol{x}}$ *suhteen.*

Termistöä: Bayesilaisessa tilastotieteessä jakaumaa $U(\vartheta)$ kutsutaan muuttujan Θ aprioriseksi jakaumaksi ja jakaumaa $U_{\boldsymbol{x}}(\vartheta)$ muuttujan Θ aposterioriseksi jakaumaksi.

3.2 Bayesilainen tilastotiede ja maksuhinnoitteluongelma

Valitaan nyt tappiofunktioksi kvadraattinen tappiofunktio

$$L(\vartheta, T(\boldsymbol{x})) = (\mu(\vartheta) - T(\boldsymbol{x}))^2.$$

Täten saadaan kaikkien estimaattorien $\mu(\Theta)$ avaruuteen seuraavanlainen järjestys:

Määritelmä 3.5 *Estimaattori* $\widehat{\mu(\Theta)}$ *on vähintään yhtä hyvä kuin toinen estimaattori* $\widehat{\mu(\Theta)}^*$, *jos*

$$E\Big[\big(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta)\big)^2\Big] \leq E\Big[\big(\widehat{\mu(\Theta)}^* - \mu(\Theta)\big)^2\Big].$$

Termiä $E\Big[\big(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta)\big)^2\Big]$ *kutsutaan estimaattorin* $\widehat{\mu(\Theta)}$ *kvadraattiseksi tappiofunktioksi.*

Lause 3.6 *Bayes-estimaattori kvadraattisen tappiofunktion suhteen on*

$$\widetilde{\mu(\Theta)} = E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{X}]. \tag{3.4}$$

Todistus: Olkoon $\widehat{\mu(\Theta)}$ termin $\mu(\Theta)$ estimaattori ja $\widetilde{\mu(\Theta)}$ sen aposteriorinen odotusarvo $E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{X}]$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&E\big[(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\big] = E\Big[E\Big[(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\Big|\boldsymbol{X}\Big]\Big] \\
&=E\Big[E\Big[(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)} + \widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\Big|\boldsymbol{X}\Big]\Big] \\
&=E\Big[E\Big[(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)})^2 + 2(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)})(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta)) \\
&\quad + (\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2|\boldsymbol{X}\Big]\Big] \\
&=E\Big[(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)})^2\Big] + E\Big[(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\Big] - 2E\Big[E\Big[\widetilde{\mu(\Theta)}^2\Big|\boldsymbol{X}\Big]\Big] \\
&\quad + 2E\Big[E\Big[\widehat{\mu(\Theta)}(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta)) + \widetilde{\mu(\Theta)}\mu(\Theta)\Big|\boldsymbol{X}\Big]\Big] \\
&=E\Big[(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)})^2\Big] + E\Big[(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\Big] \\
&\quad - 2\Big(E\Big[\widetilde{\mu(\Theta)}^2\Big] - E\Big[\widetilde{\mu(\Theta)}E\Big[\mu(\Theta)\Big|\boldsymbol{X}\Big]\Big]\Big) + 2\widehat{\mu(\Theta)}E\Big[\widetilde{\mu(\Theta)} - E\Big[\mu(\Theta)\Big|\boldsymbol{X}\Big]\Big] \\
&=E\Big[(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)})^2\Big] + E\Big[(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\Big] - 2\Big(E\Big[\widetilde{\mu(\Theta)}^2\Big] - E\Big[\widetilde{\mu(\Theta)}^2\Big]\Big) \\
&\quad + 2\widehat{\mu(\Theta)}E\Big[\widetilde{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)}\Big] \\
&=E\Big[(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)})^2\Big] + E\Big[(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\Big].
\end{aligned}$$

Tämän perusteella kaikista termin $\mu(\Theta)$ estimaattoreista estimaattorilla $\widetilde{\mu(\Theta)} = E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{X}]$ on pienin kvadraattinen tappio. □

Edellä nähtiin, että kvadraattisen tappiofunktion käyttäminen johtaa siihen, että paras vakuutusmaksu on yksilöllisen riskipreemion $\mu(\Theta)$ aposteriorinen odotusarvo. Tällä estimaattorilla on myös toinen tärkeä ominaisuus.

Esitetään yhteisjakauma P muodossa

$$dP(\vartheta, \boldsymbol{x}) := dF_\vartheta(\boldsymbol{x})dU(\vartheta).$$

Jokaiselle mitalliselle joukolle $C \in \mathcal{B}^n := \sigma(X_1, ..., X_n)$ pätee satunnaismuuttujan ehdollisen odotusarvon määritelmän mukaan, että

$$A := \int_\Theta \int_C \widetilde{\mu(\vartheta)} dP(\vartheta, \boldsymbol{x}) = \int_\Theta \int_C \mu(\vartheta) dP(\vartheta, \boldsymbol{x}) =: B. \tag{3.5}$$

Edellisiä yhtälöitä voidaan tulkita seuraavasti: jos saadut vakuutusmaksut asetetaan yhtäsuureksi Bayes-preemion kanssa, niin silloin A vastaa summaa, joka on saatu havaintoja $\boldsymbol{X} \in C$ vastaavasta osakollektiivistä. Ja B vastaa odotettua kertynyttä korvausmäärää, joka maksetaan havaintoja $\boldsymbol{X} \in C$ vastaavalle osakollektiiville. Tämä tarkoittaa, että jokaisen osakollektiivin yli, joka on määritelty menneen vahinkohistorian suhteen, summa, joka saadaan yhtiöön on yhtäsuuri kuin summa, joka maksetaan ulos.

Seuraavaksi esitetään muutamia huomioita tappiofunktiosta. Vastaavasti kuten yksilöllinen vakuutusmaksu, myös kollektiivin vakuutusmaksu saadaan ratkaistua kvadraattista tappiofunktiota käyttämällä. Tämä voidaan ajatella tilanteeksi, jolloin vahinkohistoriaa ei ole laisinkaan saatavilla. Tasapainoargumentti (3.5) on vahva syy kvadraattisen tappiofunktion käyttämiseen. Symmetrisen tappiofunktion käyttö, joka rankaisee yhtä paljon niin voitoista kuin tappioista, kuvastaa tilannetta, jossa vakuutuksen antajalla ja ottajalla on yhtä suuri neuvotteluvoima. Näin ollen saatavaa vakuutusmaksua voidaan pitää reiluna molemmille osapuolille. Toisaalta tarkasteltaessa yksipuolisesti vakuutusyhtiön näkökulmaa, olisi vahingollisempaa käyttää liian alhaisia vakuutusmaksuja kuin liian korkeita, joten tappiofunktion ei tulisi olla symmetrinen estimoitavan parametrin läheisyydessä. Kuitenkin tässä keskitytään ainoastaan riskimaksuun[4]. Vakuutuksen ottajalta veloitettava vakuutusmaksu sisältää myös varmuuslisän. Vakuutettavan kohteen riskialttius tulee ottaa huomioon juuri varmuuslisässä.

Lause 3.7

(i) Bayes-preemion kvadraattinen tappio on

$$E\left[(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\right] = E[Var(\mu(\Theta)|\boldsymbol{X})]. \tag{3.6}$$

(ii) Kollektiivin vakuutusmaksun kvadraattinen tappio on

$$\begin{aligned} E\left[(\mu_0 - \mu(\Theta))^2\right] &= Var(\mu(\Theta)) \\ &= E[Var(\mu(\Theta)|\boldsymbol{X})] + Var(E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{X}]). \end{aligned} \tag{3.7}$$

[4]riskimaksu = pure risk premium

Todistus: Kohta (i) seuraa suoraa ehdollisen varianssin määritelmästä.

$$\begin{aligned}
E\Big[(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\Big] &= E\Big[(\mu(\Theta) - E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{X}])^2\Big] \\
&= E\Big[\underbrace{E\big[(\mu(\Theta) - E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{X}])^2\big|\boldsymbol{X}\big]}_{\substack{\text{ehdollisen varianssin määritelmä:} \\ Var(Y|X) = E[(Y-E[Y|X])^2|X]}}\Big] \\
&= E\big[Var(\mu(\Theta)|\boldsymbol{X})\big]
\end{aligned}$$

Kohdassa (ii) $\mu_0 = E[X_{n+1}] = E[\underbrace{E[X_{n+1}|\Theta]}_{=\mu(\Theta)}] = E[\mu(\Theta)]$, joten tästä seuraa suoraan, että $E\big[(\mu_0 - \mu(\Theta))^2\big] = Var(\mu(\Theta))$. Toinen yhtäsuuruus on tunnettu kokonaisvarianssikaava. $\square$

Bayes-preemion kvadraattinen tappio on yhtä suuri kuin kollektiivin vakuutusmaksun kvadraattisen tappion ensimmäinen varianssikomponentti.

4 Bühlmannin malli

Edellisessä luvussa nähtiin, että Bayes-preemio $\widetilde{\mu(\Theta)} = E[\mu(\Theta)|\mathbf{X}]$ on paras estimaattori kaikkien mahdollisten estimaattorifunktioiden luokassa. Kuitenkin tavallisesti kyseistä estimaattoria ei voida esittää suljetussa analyyttisessa muodossa ja se voidaan laskea vain käyttäen numeerisia menetelmiä. Näin ollen se ei täytä vaatimusta yksinkertaisuudesta. Lisäksi, jotta $\widetilde{\mu(\Theta)}$ voidaan laskea, täytyy ehdollisen jakauman lisäksi määrittää apriorinen jakauma, jota käytännössä ei usein voida päätellä aineistosta.

Kredibiliteetin perusideana on pakottaa estimaattorin vaadittava yksinkertaisuus rajaamalla sallittujen estimaattorifunktioiden luokka siten, että se pitää sisällään vain estimaattorit, jotka ovat lineaarisia havaintojen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$ suhteen. Toisin sanoen tavoitteena on löytää paras estimaattori lineaaristen estimaattorifunktioiden luokasta. Tässä yhteydessä "paras" ymmärretään Bayes mielessä ja optimaalisuusehtona on taas kvadraattinen tappio. Näin ollen kredibiliteettiestimaattorit ovat lineaarisia Bayes-estimaattoreita.

Aikaisemmin ollaan keskitytty vain yhteen yksittäiseen riskiin ja kredibiliteettiestimaattori ollaan johdettu käyttäen vain tämän yksittäisen riskin havaintoja. Kuitenkin käytännössä käytettävissä on usein havaintoja koko portfolion samankaltaisilta riskeiltä $i = 1, 2, ..., I$.

Merkitään riskin i havaintovektoria $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in})'$ ja sen riskiprofiilia Θ_i. Oletetaan, että jokaiselle portfolion riskille Θ_i ja $\mathbf{X}_i$ toteuttavat seuraavat yksinkertaisen kredibiliteettimallin oletukset.

Oletus 4.1 (yksinkertainen kredibiliteettimalli)

O1: Satunnaismuuttujat X_j $(j = 1, ..., n)$ ovat ehdollisesti riippumattomia annettuna $\Theta = \vartheta$ ja niillä on sama jakaumafunktio F_ϑ ja ehdolliset momentit

$$\mu(\vartheta) = E[X_j|\Theta = \vartheta],$$
$$\sigma^2(\vartheta) = Var(X_j|\Theta = \vartheta).$$

O2: Θ on satunnaismuuttuja, jolla on jakauma $U(\vartheta)$.

Näin päädytään yksinkertaiseen Bühlmannin malliin, joka on julkaistu artikkelissa ”Experience Rating and Credibility” [3].

Yksinkertaisen Bühlmannin mallin oletukset

(B1) Satunnaismuuttujat X_{ij} $(j = 1, ..., n)$ ovat ehdollisesti riippumattomia annettuna $\Theta_i = \vartheta$ ja niillä on sama jakaumafunktio F_ϑ ja ehdolliset momentit

$$\mu(\vartheta) = E[X_{ij}|\Theta_i = \vartheta],$$
$$\sigma^2(\vartheta) = Var(X_{ij}|\Theta_i = \vartheta).$$

(B2) Parit $(\Theta_1, \mathbf{X}_1), ..., (\Theta_I, \mathbf{X}_I)$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita.

Mallissa käytetään myös seuraavia merkintöjä

$$\begin{aligned} P^{ind} =& \mu(\Theta_i) = E[\mathbf{X}_i|\Theta_i], \\ P^{coll} =& \mu_0 = E[\mu(\Theta_i)] = \int_\Theta \mu(\vartheta) dU(\vartheta). \end{aligned}$$

Tavoitteena on löytää kredibiliteettiestimaattori yksinkertaisessa Bühlmannin mallissa. Nyt halutaan estimoida jokaiselle riskille i oma yksilöllinen preemio $\mu(\Theta_i)$. Näin ollen tavoitteena ei ole löytää vain yhtä kredibiliteettiestimaattoria, vaan halutaan löytää preemioiden $\mu(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaattorit $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$, kun $i = 1, 2, ..., I$. Määritelmän mukaan estimaatorien $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ tulee olla havaintojen lineaarisia funktioita. Jotta kredibiliteettiestimaattorit voidaan laskea, tulee aina määrittää seuraavat asiat: suure, jota halutaan estimoida sekä tilastot, joihin kredibiliteettiestimaattorien tulee pohjautua. Preemion $\mu(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaattori voi olla vain riskin i havaintojen lineaarinen funktio tai portfolion kaikkien havaintojen lineaarinen funktio.

Tavallisesti kredibiliteettiestimaattori on määritelty parhaana estimaattorina, joka on portfolion kaikkien havaintojen lineaarinen funktio. Eli preemion $\mu(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaattori $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ on määritelmän mukaan paras estimaattori luokassa

$$\left\{ \widehat{\mu(\Theta_i)} : \widehat{\mu(\Theta_i)} = a + \sum_{k=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} X_{kj}; \quad a, b_{kj} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Seuraavaksi tavoitteena on johtaa estimaattorin $\widehat{\mu(\Theta_i)}$ kaava. Määritelmän mukaan $\widehat{\mu(\Theta_i)}$ täytyy olla muotoa

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = \hat{a}_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{kj}^{(i)} X_{kj},$$

jossa kerrointen $\hat{a}_0^{(i)}, \hat{a}_{11}^{(i)}, \hat{a}_{12}^{(i)}, ..., \hat{a}_{1n}^{(i)}, \hat{a}_{21}^{(i)}, ..., \hat{a}_{In}^{(i)}$ tulee ratkaista

$$\begin{aligned} &E\Big[\Big(\mu(\Theta_i) - \hat{a}_0^{(i)} - \sum_{k=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{kj}^{(i)} X_{kj}\Big)^2\Big] \\ &= \min_{a_0^{(i)}, a_{11}^{(i)}, ..., a_{In}^{(i)} \in \mathbb{R}} E\Big[\Big(\mu(\Theta_i) - a_0^{(i)} - \sum_{k=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{(i)} X_{kj}\Big)^2\Big]. \end{aligned}$$

Koska todennäköisyysjakuma on sama jokaiselle $X_{k1}, X_{k2}, ..., X_{kn}$ ja $\widehat{\mu(\Theta_i)}$ on yksikäsitteisesti määritelty, täytyy pitää paikkansa, että

$$\hat{a}_{k1}^{(i)} = \hat{a}_{k2}^{(i)} = \cdots = \hat{a}_{kn}^{(i)}.$$

Näin ollen estimaattori $\widehat{\mu(\Theta_i)}$ on muotoa

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = \hat{a}_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{I} \hat{b}_k^{(i)} \bar{X}_k,$$

jossa

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{kj}.$$

Kertoimet $\hat{a}_0^{(i)}$ ja $\hat{b}_k^{(i)}$ saadaan ratkaistua minimoimalla odotusarvo

$$E\Big[\Big(\mu(\Theta_i) - \hat{a}_0^{(i)} - \sum_{k=1}^{I} \hat{b}_k^{(i)} \bar{X}_k\Big)^2\Big].$$

Mahdollinen minimikohta löytyy ratkaisemalla osittaisderivaattojen nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \hat{a}_0^{(i)}} E\Big[\Big(\mu(\Theta_i) - \hat{a}_0^{(i)} - \sum_{k=1}^{I} \hat{b}_k^{(i)} \bar{X}_k\Big)^2\Big] = 0 \\
&\Leftrightarrow -2E\Big[\mu(\Theta_i) - \hat{a}_0^{(i)} - \sum_{k=1}^{I} \hat{b}_k^{(i)} \bar{X}_k\Big] = 0 \\
&\Leftrightarrow E\Big[\mu(\Theta_i)\Big] = \hat{a}_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{I} \hat{b}_k^{(i)} E\Big[\bar{X}_k\Big]
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \hat{b}_k^{(i)}} E\Big[\Big(\mu(\Theta_i) - \hat{a}_0^{(i)} - \sum_{k=1}^{I} \hat{b}_k^{(i)} \bar{X}_k\Big)^2\Big] = 0 \\
&\Leftrightarrow -2E\Big[\Big(\mu(\Theta_i) - \hat{a}_0^{(i)} - \sum_{j=1}^{I} \hat{b}_j^{(i)} \bar{X}_j\Big)\bar{X}_k\Big] = 0 \\
&\Leftrightarrow E\Big[\Big(\mu(\Theta_i) - \hat{a}_0^{(i)} - \sum_{j=1}^{I} \hat{b}_j^{(i)} \bar{X}_j\Big)\bar{X}_k\Big] = 0 \\
&\Leftrightarrow E\Big[\mu(\Theta_i)\bar{X}_k\Big] - E\Big[\hat{a}_0^{(i)}\bar{X}_k\Big] - \sum_{j=1}^{I} \hat{b}_j^{(i)} E\Big[\bar{X}_j\bar{X}_k\Big] = 0 \\
&\Leftrightarrow E\Big[\mu(\Theta_i)\bar{X}_k\Big] - \hat{a}_0^{(i)} E\Big[\bar{X}_k\Big] - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{I} \hat{b}_j^{(i)} E\Big[\bar{X}_j\Big]E\Big[\bar{X}_k\Big] - \hat{b}_k^{(i)} E\Big[\bar{X}_k^2\Big] \\
&\quad + \hat{b}_k^{(i)} E\Big[\bar{X}_k\Big]^2 - \hat{b}_k^{(i)} E\Big[\bar{X}_k\Big]^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow E\Big[\mu(\Theta_i)\bar{X}_k\Big] - E\Big[\bar{X}_k\Big]\Big(\hat{a}_0^{(i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{I} \hat{b}_j^{(i)} E\Big[\bar{X}_j\Big] - \hat{b}_k^{(i)} E\Big[\bar{X}_k\Big]\Big) \\
&\quad - \hat{b}_k^{(i)} Var(\bar{X}_k) = 0 \\
&\Leftrightarrow E\Big[\mu(\Theta_i)\bar{X}_k\Big] - E\Big[\bar{X}_k\Big]\underbrace{\Big(\hat{a}_0^{(i)} - \sum_{j=1}^{I} \hat{b}_j^{(i)} E\Big[\bar{X}_j\Big]\Big)}_{=E[\mu(\Theta_i)]} - \hat{b}_k^{(i)} Var(\bar{X}_k) = 0 \\
&\Leftrightarrow E\Big[\mu(\Theta_i)\bar{X}_k\Big] - E\Big[\bar{X}_k\Big]E\Big[\mu(\Theta_i)\Big] - \hat{b}_k^{(i)} Var(\bar{X}_k) = 0 \\
&\Leftrightarrow Cov\big(\mu(\Theta_i), \bar{X}_k\big) - \hat{b}_k^{(i)} Var(\bar{X}_k) = 0.
\end{aligned}
$$

Osittaisderivaattojen nollakohdista saadaan ratkaistua yhtälö

$$Cov(\mu(\Theta_i), \bar{X}_k) = \hat{b}_k^{(i)} Var(\bar{X}_k),$$

jonka vasen puoli on yhtäsuuri kuin nolla, kun $i \neq k$. Tämän seurauksena $\hat{b}_k^{(i)} = 0$, kun $i \neq k$. Näin ollen mallissa muuttujan $\mu(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaattori riippuu ainoastaan riskin i havaitusta keskiarvosta $\bar{X}_i$, eikä ole riippuvainen kollektiivin muista riskeistä. Kredibiliteettiestimaattori on siis muotoa

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \hat{a}_0^{(i)} + \hat{b}_i^{(i)} \bar{X}_i.$$

Ensimmäisestä osittaisderivaatan nollakohdasta saadaan ratkaistua

$$\begin{aligned}
\hat{a}_0^{(i)} &= \underbrace{E[\mu(\Theta_i)]}_{=:\mu_0} - \hat{b}_i^{(i)} E[\bar{X}_i] = \mu_0 - \frac{1}{n} \hat{b}_i^{(i)} \sum_{j=1}^{n} E[X_{ij}] \\
&= \mu_0 - \frac{\hat{b}_i^{(i)}}{n} \sum_{j=1}^{n} E[E[X_{ij}|\Theta_i]] = \mu_0 - \frac{\hat{b}_i^{(i)}}{n} \sum_{j=1}^{n} E[\mu(\Theta_i)] \\
&= \mu_0 - \frac{\hat{b}_i^{(i)}}{n} n\mu_0 = \mu_0(1 - \hat{b}_i^{(i)}),
\end{aligned}$$

sillä tiedetään, että $\hat{b}_k^{(i)} = 0$, kun $i \neq k$. Jotta toisesta osittaisderivaatan nollakohdasta saadaan ratkaistua $\hat{b}_i^{(i)}$, muokataan ensin lausekkeet $Cov(\bar{X}_i, \mu(\Theta_i))$ ja $Var(\bar{X}_i)$ ymmärrettävämpään muotoon.

$$\begin{aligned}
Cov(\bar{X}_i, \mu(\Theta_i) &= E[\bar{X}_i \mu(\Theta_i)] - E[\bar{X}_i] E[\mu(\Theta_i)] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E[X_{ij} \mu(\Theta_i)] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E[X_{ij}] E[\mu(\Theta_i)] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E[E[X_{ij} \mu(\Theta_i)|\Theta_i]] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E[E[X_{ij}|\Theta_i]] E[\mu(\Theta_i)] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E[\mu(\Theta_i) E[X_{ij}|\Theta_i]] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E[\mu(\Theta_i)]^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E[\mu(\Theta_i)^2] - E[\mu(\Theta_i)]^2 \\
&= E[\mu(\Theta_i)^2] - E[\mu(\Theta_i)]^2 \\
&= Var(\mu(\Theta_i)) =: \tau^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{X}_i) =& Var(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}) = \frac{1}{n^2}(E[Var(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}|\Theta_i)] + Var(E[\sum_{j=1}^{n} X_{ij}|\Theta_i]))\\
=& \frac{1}{n^2}(E[\sum_{j=1}^{n} Var(X_{ij}|\Theta_i) + 2\sum_{1\le j<k\le n} \underbrace{Cov(X_{ij}, X_{ik}|\Theta_i)]}_{=0}\\
&+ Var(\sum_{j=1}^{n} E[X_{ij}|\Theta_i]))\\
=& \frac{1}{n^2}(\sum_{j=1}^{n} E[\sigma^2(\Theta_i)] + n^2 Var(\mu(\Theta_i)))\\
=& \frac{E[\sigma^2(\Theta_i)]}{n} + Var(\mu(\Theta_i)) =: \frac{\sigma^2}{n} + \tau^2
\end{aligned}
$$

Nyt saadaan toisesta osittaisderivaatan nollakohdasta ratkaistua muuttuja $\hat{b}_i^{(i)}$.

$$
\hat{b}_i^{(i)} = \frac{Cov(\mu(\Theta_i), \bar{X}_i)}{Var(\bar{X}_i)} = \frac{\tau^2}{\sigma^2/n + \tau^2} = \frac{n}{n + \sigma^2/\tau^2}
$$

Edellä on todistettu seuraava lause:

Lause 4.1 *Yksinkertaisen Bühlmannin mallin puitteissa kredibiliteettiestimaattori on*

$$
\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \alpha\bar{X}_i + (1-\alpha)\mu_0, \tag{4.1}
$$

jossa

$$
\mu_0 = E[\mu(\Theta_i)], \tag{4.2}
$$

$$
\alpha = \frac{n}{n + \sigma^2/\tau^2}. \tag{4.3}
$$

Edellä on osoitettu, että kaavan (4.1) antama $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ ei ole vain havaintoihin $\mathbf{X}_i$ perustuva kredibiliteettiestimaattori, vaan se perustuu portfolion kaikkiin havaintoihin, eli havaintovektoriin $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1', \mathbf{X}_2', ..., \mathbf{X}_I')$. Kredibiliteettipreemio P^{cred} on nyt siis painotettu keskiarvo yksilöllisestä havaitusta keskiarvosta $\bar{X}_i$ ja kollektiivin preemiosta P^{coll}. Osamäärää $\kappa = \sigma^2/\tau^2$ kutsutaan *kredibiliteettikertoimeksi*, joka voidaan myös kirjoittaa muodossa $\kappa = (\sigma/\mu_0)^2(\tau/\mu_0)^{-2}$. Termi τ/μ_0 on kollektiivin preemion $\mu(\Theta_i)$ vaihtelukerroin[5], joka on hyvä mittari portfolion heterogeenisyydelle. Termi $\sigma/\mu_0 = \sqrt{E[Var(X_{ij}|\Theta_i)]}/E[X_{ij}]$ on puolestaan riskinsisäinen odotettu keskihajonta jaettuna yleisellä odotusarvolla[6] ja tämä termi on hyvä mittari ris-

[5]vaihtelukerroin = coefficient of variation

[6]yleinen odotusarvo = overall expected value

kinsisäiseen vaihtelevuuteen. Nyt voidaan nähdä, että kredibiliteettikerroin α kasvaa, kun havaintovuosien n lukumäärä kasvaa, portfolion heterogeenisyys kasvaa tai riskinsisäinen vaihtelu vähenee.

4.1 Harhattomat estimaattorit

Jotta edellisen luvun tuloksia voidaan hyödyntää, tulee parametrit μ_0, σ^2 ja τ^2 estimoida. Jotta estimaattorit olisivat hyviä, tulee niiden olla harhattomia. [4]

(i) μ_0: Luonnollinen estimaattori parametrille μ_0 on havaintokeskiarvo

$$\hat{\mu}_0 = \frac{1}{In}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\bar{X}_i. \tag{4.4}$$

Estimaattori $\hat{\mu}_0$ on harhaton, sillä $E[\hat{\mu}_0] = \frac{1}{In}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{E[X_{ij}]}_{=\mu_0} = \mu_0$.

(ii) σ^2: Muuttujan $\sigma^2(\Theta_i)$ estimoimiseen käytettäisiin estimaattorina otosvarianssia

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2,$$

joka on harhaton, sillä $E[\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2] = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\sigma^2(\Theta_i) + \mu^2 - \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{n} - \mu^2) = \sigma^2(\Theta_i)$.
Parametrille σ^2 saadaan estimaattori keskiarvoistamalla yli riskiyksiköiden

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{I(n-1)}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2. \tag{4.5}$$

Estimaattori $\hat{\sigma}^2$ on edelleen myös harhaton.

(iii) τ^2: Muuttujan $\mu(\Theta_i) = E[X_{ij}|\Theta_i]$ harhaton estimaattori on $\bar{X}_i$, sillä $E[E[X_{ij}|\Theta_i]] = E[X_{ij}] = \mu_0$ ja $E[\bar{X}_i] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E[X_{ij}] = \mu_0$. Näin ollen luonnollinen estimaattori parametrille τ^2 saataisiin keskiarvoistamalla yli riskiyksiköiden

$$\frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_i - \hat{\mu}_0)^2.$$

Estimaattori ei kuitenkaan ole harhaton. Tämä voidaan todeta seuraavalla laskulla.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I}E[(\bar{X}_i-\hat{\mu}_0)^2] &= \frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I}E\Big[\Big(\frac{I-1}{I}\bar{X}_i-\frac{1}{I}\sum_{j\neq i}\bar{X}_j\Big)^2\Big]\\
=&\frac{I}{I-1}E\Big[\Big(\frac{I-1}{I}\bar{X}_1-\frac{1}{I}\sum_{j=2}^{I}\bar{X}_j\Big)^2\Big]\\
=&\frac{I}{I-1}E\Big[\Big(\frac{I-1}{I}(\bar{X}_1-\mu_0)-\frac{1}{I}\sum_{j=2}^{I}(\bar{X}_j-\mu_0)\Big)^2\Big]\\
=&\frac{I}{I-1}\Big(\Big(\frac{I-1}{I}\Big)^2E[(\bar{X}_1-\mu_0)^2]+\frac{I-1}{I}E[(\bar{X}_1-\mu_0)^2]\Big)\\
=&E[(\bar{X}_1-\mu_0)^2]=E[\bar{X}_1^2-2\mu_0\bar{X}_1+\mu_0^2]\\
=&\frac{1}{n^2}E\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_{1i}X_{1j}\Big]-\frac{2}{n}\mu_0E\Big[\sum_{j=1}^{n}X_{1j}\Big]+\mu_0^2\\
=&\frac{1}{n^2}\Big(nE[X_{11}^2]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}E[X_{1i}X_{1j}]\Big)-\frac{2}{n}\mu_0nE[X_{11}]+\mu_0^2\\
=&\frac{1}{n}\big(Var(X_{11})+E[X_{11}]^2\big)+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}E[E[X_{1i}X_{1j}|\Theta_1]]-\mu_0^2\\
=&\frac{1}{n}\big(E[Var(X_{11}|\Theta_1)]+Var(E[X_{11}|\Theta_1])+\mu_0^2\big)\\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}E[\mu(\Theta_1)^2]-\mu_0^2\\
=&\frac{1}{n}(\sigma^2+\tau^2+\mu_0^2)+\frac{n(n-1)}{n^2}\big(Var(\mu(\Theta_1))+E[\mu(\Theta_1)]^2\big)-\mu_0^2\\
=&\frac{1}{n}(\sigma^2+\tau^2+\mu_0^2)+\frac{n-1}{n}(\tau^2+\mu_0^2)-\mu_0^2=\tau^2+\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

Estimaattoria tulee korjata, jotta siitä saadaan harhaton. Parametrin τ^2 harhattomaksi estimaattoriksi saadaan

$$
\hat{\tau}^2=\frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_i-\hat{\mu}_0)^2-\frac{1}{n}\hat{\sigma}^2. \tag{4.6}
$$

5 Kredibiliteettiestimaattori yleisessä tilanteessa

Yleisessä tilanteessa tavoitteena on edelleen löytää muuttujan $\mu(\Theta)$ kredibiliteettiestimaattori, joka perustuu havaintovektoriin $\mathbf{X}$. Toisin kuin edellä, nyt ei kuitenkaan määritellä tarkasti muuttujia $\mu(\Theta)$ ja $\mathbf{X}$, eikä niiden todennäköisyysrakennetta. Näin ollen yleisen tilanteen ainoa matemaattinen rakenne on, että tavoitteena on estimoida jokin tuntematon reaaliarvoinen satunnaismuuttuja $\mu(\Theta)$ perustuen tunnettuun satunnaisvektoriin $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$. Yleisen tilanteen matemaattinen rakenne mahdollistaa sen, että muuttuja $\mu(\Theta)$ vaihdetaan millä tahansa neliöintegroituvalla[7] satunnaismuuttujalla Y.

Kredibiliteettiestimaattorit ovat aina parhaita estimaattoreita ennalta annetussa luokassa. Annettuna vektori $\mathbf{X}$, määritellään seuraavaksi kaksi kyseistä luokkaa $L(\mathbf{X}, \mathbf{1})$ ja $L_e(\mathbf{X})$ sekä niitä vastaavat kredibiliteettiestimaattorit.

Määritelmä 5.1 *Muuttujan $\mu(\Theta)$ kredibiliteettiestimaattori, joka perustuu vektoriin $\mathbf{X}$ on paras mahdollinen estimaattori luokassa*

$$L(\mathbf{X}, 1) := \Big\{ \widehat{\mu(\Theta)} : \widehat{\mu(\Theta)} = a_0 + \sum_j a_j X_j,\ a_0, a_1, ... \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Jatkossa käytetään merkintöjä P^{cred} tai $\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}$ ilmaisemaan tätä estimaattoria. Näin ollen pätee

$$P^{cred} = \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} = \underset{\widehat{\mu(\Theta)} \in L(\mathbf{X},1)}{argmin}\ E\left[(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2 \right]. \tag{5.1}$$

Jotta saadaan tehtyä selkeä ero homogeenisestä kredibiliteettiestimaattorista, joka määritellään alla, niin edellä olevaan estimaattoriin viitataan usein kirjallisuudessa epähomogeenisenä kredibiliteettiestimaattorina.

Määritelmä 5.2 *Muuttujan $\mu(\Theta)$ homogeeninen kredibiliteettiestimaattori, joka perustuu vektoriin $\mathbf{X}$, on paras mahdollinen estimaattori kollektiivisesti harhattomien estimaattorien luokassa*

$$L_e(\mathbf{X}) := \Big\{ \widehat{\mu(\Theta)} : \widehat{\mu(\Theta)} = \sum a_j X_j,\ a_1, a_2, ... \in \mathbb{R},\ E\big[\widehat{\mu(\Theta)}\big] = E[\mu(\Theta)] \Big\}.$$

[7] neliöintegroituva = square integrable

Jatkossa käytetään merkintöjä $P^{cred_{hom}}$ tai $\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{hom}$ ilmaisemaan tätä estimaattoria. Erona epähomogeeniseen estimaattoriin, homogeenisessä estimaattorissa ei ole vakiotermiä a_0 ja määritelmä vaatii, että se on harhaton yli kollektiivin. Kuitenkaan ei vaadita, että estimaattori olisi harhaton mille tahansa muuttujan ϑ yksittäiselle arvolle. Muodollisesti kirjoitetaan

$$P^{cred_{hom}} = \widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}^{hom} = \underset{\widehat{\mu(\Theta)} \in L_e(\mathbf{X})}{argmin}\ E\left[(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2\right]. \tag{5.2}$$

Homogeenistä estimaattoria määrittäessä tulee ottaa huomioon, ettei yhtäkään kollektiivisesti harhatonta estimaattoria ole olemassa. Tällöin luokka $L_e(\mathbf{X})$ on tyhjä ja ei ole olemassa yhtään määritelmän 5.2 mukaista homogeenistä estimaattoria. Lisäksi homogeeninen estimaattori on järkevä vain, jos havaintovektori $\mathbf{X}$ sisältää rinnakkaisdataa[8], eikä vain ainoastaan tietoja yhdestä riskistä.

Vakiotermin pakottaminen nollaksi yhdistettynä kollektiivisen harhattomuusehdon kanssa automaattisesti tarkoittaa muuttujan μ_0 sisäänrakennettua estimaattoria, mikä on pääasiallinen syy homogeenisen kredibiliteettiestimaattorin harkitsemiseen.

[8]rinnakkaisdata = collateral data

6 Bühlmann-Straub malli

Bühlmannin ja Straubin vuonna 1970 kehittämä malli on yleistys Bühlmannin mallista [5]. Se on edelleen vakuutuskäytännössä käytetyin ja tärkein kredibiliteettimalli. Mallilla on lukuisia käyttösovelluksia niin henkivakuutuksissa kuin omaisuusvakuutuksissa sekä ensivakuuttamisessa ja jälleenvakuuttamisessa.

6.1 Mallin oletukset

Oletetaan annetuksi portfolio, joka koostuu I riskistä tai riskikategoriasta. Käytetään seuraavia merkintöjä

X_{ij}: riskin i vahinkosuhde vuonna j

w_{ij}: vahinkosuhteeseen liittyvä tunnettu paino.

Vahinkosuhde X_{ij} voidaan kirjoittaa muodossa $X_{ij} = S_{ij}/w_{ij}$, jossa S_{ij} on kertynyt korvaussumma vuodelta j. Painot w_{ij} tulkitaan yleisesti lukumäärämittana, mutta muutkin tulkinnat ovat mahdollisia.

Mallin oletukset
Yksilöllinen riskiproiili ϑ_i, joka on satunnaismuuttujan Θ_i realisaatio, karakterisoi riskin i. Havaintojen oletetaan olevan riippumattomia ja niillä oletetaan olevan vakio keskiarvo, mutta varianssi vaihtelee tunnettujen painojen w_{ij} kanssa.

(BS1) Parit $(\Theta_1, \boldsymbol{X}_1)$, $(\Theta_2, \boldsymbol{X}_2)$,... ovat riippumattomia, ja Θ_1, Θ_2,... ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita,

(BS2) Satunnaismuuttujat $\{X_{ij} : j = 1, 2, ..., n\}$ ovat ehdollisesti riippumattomia, annettuna Θ_i,

(BS3) $E[X_{ij}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$,

(BS4) $Var[X_{ij}|\Theta_i] = \dfrac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}}$.

Oletuksen (BS1) mukaan riskit ovat riippumattomia, toisin sanoen satunnaismuuttujat, jotka kuuluvat eri sopimuksiin, ovat riippumattomia. Yleisesti tämä oletus ei tuota ongelmia käytännön kannalta. Oletus, että riskit olisivat apriorisesti samanlaiset, ei ole aina käytännössä voimassa ja tapauskohtaisesti tulisi aina miettiä oletuksen järkevyys.

Oletuksen (BS2) ehdollista riippumattomuutta voidaan heikentää. Kaikki tämän kappaleen tulokset ovat voimassa, jos vektorin $\boldsymbol{X}_i$ alkiot ovat keskimäärin ehdollisesti korreloimattomia, eli jos $E[Cov(X_{ik}, X_{il}|\Theta_i)] = 0$, kun $k \neq l$.

Oletuksen (BS3) mukaan “todellinen” yksilöllinen vahinkosuhde on vakio yli ajan. Käytännössä tämä oletus ei kuitenkaan usein päde: esimerkiksi tarkasteltavat muuttujat X_{ij} riippuvat inflaatiosta tai vakuutusehdot ovat muuttuneet tarkasteluperiodin aikana.

Oletuksen (BS4) mukaan ehdollinen varianssi on kääntäen verrannollinen tunnetun painon w_{ij} kanssa. Usein vakuutussovelluksissa satunnaismuuttuja X_{ij} voidaan kirjoittaa muodossa $X_{ij} = S_{ij}/V_{ij}$, missä S_{ij} on vuonna j kertynyt kokonaisvahinkosumma ja V_{ij} on annettu lukumäärämitta, esimerkiksi sopimusten lukumäärä ilmaistuna vuosissa vuonna j. Tavallisesti näitä lukumäärämittoja V_{ij} käytetään painoina w_{ij}. Jos muuttujat X_{ij} voidaan kirjoittaa muodossa $X_{ij} = \frac{1}{V_{ij}} \sum_{\nu=1}^{V_{ij}} S_{ij}^{(\nu)}$, niin oletus (BS4) on järkevä.

Seuraavat suureet ovat mallin kannalta oleelliset:

Riski i	**kollektiivi/portfolio**
$\mu(\Theta_i) := E[X_{ij}\|\Theta_i]$ $\sigma^2(\Theta_i) := w_{ij} Var(X_{ij}\|\Theta_i)$	$\mu_0 := E[\mu(\Theta_i)]$ $\sigma^2 := E[\sigma^2(\Theta_i)]$ $\tau^2 := Var(\mu(\Theta_i))$
Tulkinta:	Tulkinta:
$\mu(\Theta_i)$: yksilöllinen riskipreemio, $\sigma^2(\Theta_i)$: yksilöllisen riskin varianssi (normalisoitu painoon 1).	μ_0: kollektiivinen preemio, σ^2: yksilöllisen riskin keskivarianssi (normalisoituna painoon 1; ensimmäinen varianssikomponentti), τ^2: yksilöllisten riskipreemioiden välinen varianssi (toinen varianssikomponentti).

6.2 Bühlmann-Straub mallin kredibiliteettipreemio

Tavoitteena on estimoida jokaiselle riskille i yksilöllinen vahinkosuhde $\mu(\Theta_i)$. Vahinkosuhteen $\mu(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaattori riippuu vain riskistä i tehdyistä havainnoista. Riskin i havaintovektoriin $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in})'$ perustuva kredibiliteetti-estimaattori on

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = a_{i0} + \sum_j a_{ij} X_{ij}. \tag{6.1}$$

Mallin riskien riippumattomuusoletuksesta seuraa, että kaikille $k \neq i$ ja kaikille l pätee

$$Cov(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}, X_{kl}) = Cov(\mu(\Theta_i), X_{kl}) = 0. \tag{6.2}$$

Se, että riski i riippuu vain yksilöllisestä vahinkohistoriasta, eikä muiden riskien vahinkohistorioista, on intuitiivisesti selvää. Jos apriorinen odotusarvo μ_0 tunnetaan, niin muut riskit eivät voi tarjota lisäinformaatiota, sillä ne ovat riippumattomia tarkasteltavasta riskistä. Kuitenkin käytännössä μ_0 ei ole yleensä tunnettu. Tällöin muut riskit sisältävät tietoa apriorisen odotusarvon estimoinniksi.

Oletusten (BS3) ja (BS4) mukaan havainnot X_{ij} ovat yksilökohtaisesti harhattomia (eli ehdollisesti harhattomia annettuna Θ_i) ja niiden ehdolliset varianssit ovat kääntäen verrannollisia painojen w_{ij} kanssa. Paras lineaarinen estimaattori, joka on yksilökohtaisesti harhaton ja jolla on pienin ehdollinen varianssi, on painotettu keskiarvo

$$X_i = \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij},$$

jossa $w_{i\bullet} = \sum_j w_{ij}$. Muuttujalle X_i pätee

$$\begin{aligned}
E[X_i|\Theta_i] &= E[\frac{1}{w_{i\bullet}} \sum_j w_{ij} X_{ij} | \Theta_i] = \frac{1}{w_{i\bullet}} \sum_j E[w_{ij} X_{ij} | \Theta_i] \\
&= \frac{1}{w_{i\bullet}} \sum_j w_{ij} E[X_{ij}|\Theta_i] = \frac{1}{w_{i\bullet}} \sum_j w_{ij} \mu(\Theta_i) \\
&= \mu(\Theta_i) \frac{1}{w_{i\bullet}} w_{i\bullet} = \mu(\Theta_i)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
Var(X_i|\Theta_i) &= Var(\frac{1}{w_{i\bullet}} \sum_j w_{ij} X_{ij} | \Theta_i) = \frac{1}{w_{i\bullet}^2} \sum_j w_{ij}^2 Var(X_{ij}|\Theta_i) \\
&= \frac{1}{w_{i\bullet}^2} \sum_j w_{ij}^2 \frac{1}{w_{ij}} \sigma^2(\Theta_i) = \frac{1}{w_{i\bullet}^2} w_{i\bullet} \sigma^2(\Theta_i) = \frac{1}{w_{i\bullet}} \sigma^2(\Theta_i).
\end{aligned}$$

Seuraavaksi esitetään ilman todistuksia aputulos, jota hyödyntäen saadaan johdettua muuttujaan X_i perustuva kredibiliteettiestimaattori ja tämän jälkeen näytettyä, että se on koko aineistoon perustuva kredibiliteettiestimaattori. Lemman 6.1 todistuksen löytää Bühlmannin ja Gislerin kirjasta [1].

Lemma 6.1 (normaaliyhtälöt) $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ *on (epähomogeeninen) muuttujan* $\mu(\Theta_i)$ *muuttujaan* X_i *perustuva kredibiliteettiestimaattori, jos ja vain jos seuraavat normaaliyhtälöt toteutuvat:*

$$i)\quad E[\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i)] = 0 \tag{6.3}$$

$$ii)\quad Cov[\mu(\Theta_i), X_j] = Cov[\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}, X_j], \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{6.4}$$

Lemman 6.1 perusteella ja koska $E[X_i] = E[E[X_i|\Theta_i]] = E[\mu(\Theta_i)] = \mu_0$, tiedetään, että kredibiliteettiestimaattorin tulee olla muotoa (6.5) ja sen tulee toteuttaa yhtälö (6.6):

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i)\mu_0 \tag{6.5}$$

$$Cov(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}, X_i) = \alpha_i Cov(X_i, X_i) = Cov(\mu(\Theta_i), X_i). \tag{6.6}$$

Soveltamalla kokonaisvarianssi- ja kokonaiskovarianssikaavoja tiedetään, että

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_i) =& Var(X_i) = E[Var(X_i|\Theta_i)] + Var(E[X_i|\Theta_i]) \\ =& E[\frac{1}{w_{i\bullet}}\sigma^2(\Theta_i)] + Var(\mu(\Theta_i)) \\ =& \frac{1}{w_{i\bullet}} E[\sigma^2(\Theta_i)] + \tau^2 \\ =& \frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} Cov(\mu(\Theta_i), X_i) =& E[Cov(\mu(\Theta_i), X_i|\Theta_i)] + Cov(E[\mu(\Theta_i)|\Theta_i], E[X_i|\Theta_i]) \\ =& 0 + Cov(\mu(\Theta_i), \mu(\Theta_i)) = Var(\mu(\Theta_i)) \\ =& \tau^2. \end{aligned}$$

Näiden avulla saadaan kaavasta (6.6) ratkaistua α_i:

$$\alpha_i = \frac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}} + \tau^2} = \frac{w_{i\bullet}\tau^2}{\sigma^2 + w_{i\bullet}\tau^2} = \frac{w_{i\bullet}}{\frac{\sigma^2}{\tau^2} + w_{i\bullet}}. \tag{6.7}$$

Seuraavaksi halutaan osoittaa, että $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ on myös koko aineiston pohjalta laskettu riskin i kredibiliteettiestimaattori. Ylempänä on osoitettu, että riskin i kredibiliteettiestimaattori riippuu vain riskin i aineistosta, joten osoitettavaksi enää jää, että

$$Cov(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}, X_{ij}) = Cov(\mu(\Theta_i), X_{ij}) = \tau^2, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{6.8}$$

Tulos saadaan johdettua seuraavasti

$$\begin{aligned}
Cov(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}, X_{ij}) =& Cov(\alpha_i X_i + (1-\alpha_i)\mu_0, X_{ij}) \\
=& \alpha_i Cov(X_i, X_{ij}) + \underbrace{(1-\alpha_i)Cov(\mu_0, X_{ij})}_{=0} \\
=& \alpha_i Cov(\sum_k \frac{w_{ik}}{w_{i\bullet}} X_{ik}, X_{ij}) \\
=& \alpha_i \sum_k \frac{w_{ik}}{w_{i\bullet}} Cov(X_{ik}, X_{ij}) \\
=& \alpha_i \sum_k \frac{w_{ik}}{w_{i\bullet}} (E[Cov(X_{ik}, X_{ij}|\Theta_i)] \\
& + Cov(E[X_{ik}|\Theta_i], E[X_{ij}|\Theta_i])) \\
=& \alpha_i \sum_k \frac{w_{ik}}{w_{i\bullet}} (E[Var(X_{ik}|\Theta_i)]\delta_{kj} + Var(\mu(\Theta_i))) \\
=& \alpha_i \sum_k \frac{w_{ik}}{w_{i\bullet}} (\frac{\sigma^2}{w_{ik}}\delta_{kj} + \tau^2) \\
=& \alpha_i (\sum_k \frac{w_{ik}}{w_{i\bullet}}\tau^2 + \frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}}) \\
=& \frac{w_{i\bullet}}{\frac{\sigma^2}{\tau^2} + w_{i\bullet}} \frac{1}{w_{i\bullet}} (w_{i\bullet}\tau^2 + \sigma^2) \\
=& \frac{w_{i\bullet}\tau^2 + \sigma^2}{\frac{\sigma^2 + w_{i\bullet}\tau^2}{\tau^2}} \\
=& \tau^2,
\end{aligned}$$

$$\text{jossa } \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{kun } k = j \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Näin ollen (6.8) pitää paikkansa, ja seuraava tulos on todistettu.

Lause 6.2 *Bühlmann-Straub mallin (epähomogeeninen) kredibiliteettiestimaattori on*

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \alpha_i X_i + (1-\alpha_i)\mu_0 = \mu_0 + \alpha_i(X_i - \mu_0), \tag{6.9}$$

jossa

$$
\begin{aligned}
X_i &= \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij}, \\
w_{i\bullet} &= \sum_j w_{ij} \\
\alpha_i &= \frac{w_{i\bullet}}{w_{i\bullet} + \sigma^2/\tau^2}.
\end{aligned}
$$

6.3 Kredibiliteettiestimaattorin tulkinta

Lauseen 6.2 antamalle kredibiliteettiestimaattorille voidaan antaa hyvä ja intuitiivinen tulkinta. Estimaattorin kaavassa (6.9) parametri μ_0 on paras estimaattori, joka perustuu ainoastaan ennakkotietoihin ja sillä on kvadraattinen tappio

$$E\big[(\mu_0 - \mu(\Theta_i))^2\big] = Var(\mu(\Theta_i)) = \tau^2.$$

Termi X_i on paras lineaarinen ja yksilökohtaisesti harhaton estimaattori, joka perustuu ainoastaan havaintovektoriin $\mathbf{X}_i$. Sillä on seuraava kvadraattinen tappio:

$$
\begin{aligned}
E\big[(X_i - \mu(\Theta_i))^2\big] &= E\Big[\Big(\sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij} - \mu(\Theta_i)\Big)^2\Big] \\
&= E\Big[E\Big[\Big(\sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} (X_{ij} - \mu(\Theta_i))\Big)^2 \Big| \Theta_i\Big]\Big] \\
&= E\Big[\frac{1}{w_{i\bullet}^2} E\Big[\Big(\sum_j w_{ij} (X_{ij} - \mu(\Theta_i))\Big)^2 \Big| \Theta_i\Big]\Big] \\
&= E\Big[\frac{1}{w_{i\bullet}^2} Var\Big(\sum_j w_{ij} X_{ij} \Big| \Theta_i\Big)\Big] \\
&= E\Big[\frac{1}{w_{i\bullet}^2} \sum_j w_{ij}^2 Var(X_{ij}|\Theta_i)\Big] \\
&= E\Big[\frac{1}{w_{i\bullet}^2} \sum_j w_{ij}^2 \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}}\Big] \\
&= E\Big[\frac{1}{w_{i\bullet}} \sigma^2(\Theta_i)\Big] = \frac{\sigma^2}{w_{i\bullet}}.
\end{aligned}
$$

Kredibiliteettiestimaattori on kahden estimaattorin painotettu keskiarvo, jossa kummallekin yhteenlaskettavalle termille määrätty paino on verrannollinen sen kvadraattisen tappion käänteisluvulle, eli

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \alpha_i X_i + (1 - \alpha_i)\mu_0,$$

jossa

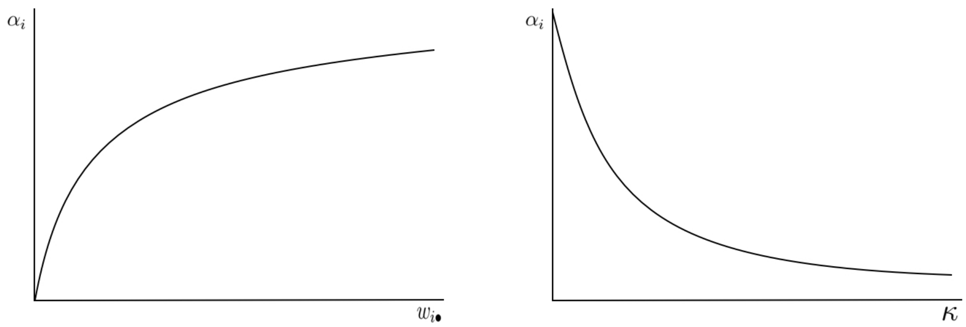
$$\alpha_i = \frac{(\sigma^2/w_{i\bullet})^{-1}}{(\tau^2)^{-1} + (\sigma^2/w_{i\bullet})^{-1}}.$$

Seuraavaksi esitetään muutamia huomioita kredibiliteettiestimaattorista: Kredibiliteettikerroin $\kappa = \sigma^2/\tau^2$ voidaan myös kirjoittaa seuraavassa muodossa

$$\kappa = \frac{(\sigma/\mu_0)^2}{(\tau/\mu_0)^2}.$$

Kredibiliteettikertoimen nimittäjän neliöjuuri τ/μ_0 on yksilöllisen preemion $\mu(\Theta_i)$ vaihtelukerroin, joka on hyvä mittari portfolion heterogeenisyydelle, eli toisin sanoen hyvä mittari riskien väliselle vaihtelulle. Parametri σ on riskin sisäinen keskimääräinen keskihajonta, joka on normalisoitu painoon 1 ja parametri μ_0 on koko portfolion yli keskiarvoistettu odotusarvo. Näin ollen termi σ/μ_0 voidaan tulkita riskinsisäisten vaihtelukertoimien keskiarvona ja se on hyvä mittari riskinsisäiseen vaihtelevuuteen.

Kredibiliteettipainon α_i kaavasta nähdään, että mitä korkeampi kredibiliteettipaino $w_{i\bullet}$ on, sitä suurempi paino α_i on (Kuva 6.1a), sekä mitä pienempi kredibiliteettikerroin $\kappa = \sigma^2/\tau^2$ on, sitä suurempi kredibiliteettipaino α_i on (Kuva 6.1b).



(a) (b)

Kuva 6.1: Kredibiliteettipaino α_i parametrien $w_{i\bullet}$ ja κ funktioina.

Kredibiliteettiestimaattorin odotusarvo $E\left[\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}\right] = E[\alpha_i X_i + (1 - \alpha_i)\mu_0] = \alpha_i E[X_i] + (1 - \alpha_i)\mu_0 = \mu_0$, eli keskimäärin riski on arvioitu oikein kollektiivitasolla. Sanotaan, että kredibiliteettiestimaattori on kollektiivin sisällä harhaton.

Kredibiliteettiestimaattorin $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ määrittämiseksi tarvitaan havaittujen vahinkosuhteiden X_{ij} ja niitä vastaavien painojen w_{ij} lisäksi niin kutsuttuja rakenteellisia parametreja μ_0, σ^2 ja τ^2. Ne voidaan määrittää joko ennakkotietoihin perustuen, esimerkiksi asiantuntijoiden mielipiteiden perusteella (puhdas Bayesilainen menettelytapa) tai samanlaisten riskien kollektiivin havaintojen perusteella (empiirinen Bayesilainen menettelytapa).

7 Hachemeisterin regressiomalli

Hachemeisterin regressiomalli on yleistys Bühlmann-Straub mallista. Sen on kehittänyt Hachemeister vuonna 1975 [2]. Hachemeister kehitti lineaarisen regressiomallin, jossa aika on riippumattomana muuttujana, sillä inflaatiosta oli muodostunut suuri ongelma kredibiliteettiestimaattorin muodostuksessa [5]. Mallissa i.i.d.-oletuksen sijaan sallitaan eri keskiarvot ja varianssit ja lisäksi sallitaan mahdollinen kovarianssi havaintojen ja sopimusten välille.

Ensimmäisessä alaluvussa esitetään lyhyesti tuloksia standardista regressiomallista, joka on yksi regressiokredibiliteettimallin alalajeista Hachemeisterin regressiomallin lisäksi. Standardin regressiomallin tulosten pohjalta Hachemeisterin regressiomallin tuloksia on helpompi ymmärtää.

7.1 Regressiokredibiliteettimalli ja standardi regressiomalli

Klassisen tilastotieteen yleinen lineaarinen malli on seuraava

$$\mathbf{X} = Y \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
\text{jossa } \mathbf{X} &= \text{havaintovektori, jonka alkiot ovat satunnaismuuttujia ja} \\
&\quad\ \text{jonka koko on } n \times 1, \\
Y &= \text{tunnettu mallimatriisi}^9\text{, jonka koko on } n \times p \ \ (p \leq n), \\
\boldsymbol{\beta} &= \text{tuntematon parametrivektori, jonka koko on } p \times 1, \\
\boldsymbol{\epsilon} &= \text{satunnaishajontavektori, jonka koko on } n \times 1, \text{ ja jolle} \\
&\quad\ \text{pätee } E[\boldsymbol{\epsilon}] = \mathbf{0} \text{ ja } Cov(\epsilon, \epsilon') = \Sigma.
\end{aligned}$$

Jatkossa oletetaan, että matriisi Y on aina täyttä astetta p.

Tärkeitä erikoistapauksia ovat pienimmän neliösumman menetelmä, jossa satunnaishajontavektorin kovarianssimatriisi on

$$\Sigma = \sigma^2 \cdot I,$$

sekä painotettu pienimmän neliösumman menetelmä, jossa satunnaishajontavektorin kovarianssimatriisi on

$$\Sigma = \sigma^2 \cdot W^{-1}, \tag{7.2}$$

jossa

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n \end{pmatrix},$$

[9] mallimatriisi = design matrix

ja $w_1, ..., w_n$ ovat tunnettuja painoja.

Lause 7.1 *Paras lineaarinen harhaton estimaattori vektorille* $\boldsymbol{\beta}$ *on*

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (Y'\Sigma^{-1}Y)^{-1}Y'\Sigma^{-1}\mathbf{X}. \tag{7.3}$$

Estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ *kovarianssimatriisi on*

$$\Sigma_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = (Y'\Sigma^{-1}Y)^{-1}. \tag{7.4}$$

Lauseen 7.1 todistusta ei esitetä tässä tutkielmassa, mutta sen voi löytää Weisbergin kirjasta [6].

Regressiokredibiliteettimallissa oletetaan annettuna portfolio, joka koostuu I riskistä. Olkoon

$$\mathbf{X}_i' = (X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in})$$

riskin i havaintovektori ja $\mathbf{w}_i' = (w_{i1}, ..., w_{in})$ havaintoihin liittyvien tunnettujen painojen vektori.

Oletetaan, että ehdollisesti annettuna Θ_i, $\mathbf{X}_i$ toteuttaa regressioyhtälön (7.1). Tämä oletus johtaa regressiovektorin $\boldsymbol{\beta}$ tulkintaan, joka eroaa klassisessa tilastotieteessä käytetystä tulkinnasta: vektorin $\boldsymbol{\beta}$ alkioiden ei ajatella olevan vakiosuureita (jotka ovat tuntemattomia, ja näin ollen ne tulee estimoida), vaan ennemmin ajatellaan olevan satunnaismuuttujia, joiden jakauman määrittää kollektiivin rakenne.

Standardin regressiomallin oletukset

Riskiä i kuvaa yksilöllinen riskiprofiili ϑ_i, joka on itsessään realisaatio satunnaismuuttujasta Θ_i. Tehdään seuraavat oletukset:

(R1) Parit $(\Theta_1, \mathbf{X}_1), (\Theta_2, \mathbf{X}_2), ...$ ovat riippumattomia ja $\Theta_1, \Theta_2, ...$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita.

(R2) Satunnaismuuttujat $\{X_{ij} : j = 1, 2, ..., n\}$ ovat ehdollisesti riippumattomia, annettuna Θ_i.

(R3) $$E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] = \underbrace{Y_i}_{n\times p} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}_{p\times 1}, \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned} \text{missä } \boldsymbol{\beta}(\Theta_i) &= \text{regressiovektori, jonka alkiot ovat lineaarisesti} \\ &\quad\ \text{riippumattomia ja jonka pituus on } p \leq n, \\ Y_i &= \text{tunnettu mallimatriisi, jonka aste on p.} \end{aligned}$$

(R4) $$Var(X_{ij}|\Theta_i) = \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}}. \tag{7.6}$$

Tavoitteena on määrittää yksilöllinen preemio $\mu_{\mathbf{a}}(\Theta_i) = E[X_{\mathbf{a}}|\Theta_i]$ mille tahansa annetuille mallivektoreille $\mathbf{a}' = (a_1, a_2, ..., a_p)$. Kun otetaan huomioon regressiomalli, on mielenkiinnon kohteena oleva suure muotoa

$$\mu_{\mathbf{a}}(\Theta_i) = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}(\Theta_i). \tag{7.7}$$

Jotta voidaan määrittää preemion $\mu_{\mathbf{a}}(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaattori mille tahansa vektorille $\mathbf{a}$, tulee ensin määrittää vektorin $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaattori.

Jotta kredibiliteettiestimaattori saadaan muodostettua, täytyy optimaaliselle tiedontiivistykselle[10] $\mathbf{B}_i = Pro(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)|L_e^{ind}(\mathbf{X}_i))$ löytää kaava. Tiedontiivistys $\mathbf{B}_i \in L_e^{ind}(\mathbf{X}_i)$ on vektorin $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ ortogonaaliprojektio aliavaruudessa $L_e^{ind}(\mathbf{X}_i)$, jos $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i \perp L_e^{ind}(\mathbf{X}_i)$. Optimaalisella tiedontiivistyksellä tarkoitetaan vektorin $\mathbf{X}_i$ muuttamista vektoriksi $\mathbf{B}_i$ siten, että sillä on sama dimensio kuin estimoitavalla vektorilla $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ ja niin ettei tarkkuuden menettämisestä rangaista. Näin ollen kredibiliteettiestimaattori on riippuvainen datasta vain vektorin $\mathbf{B}_i$ kautta. Merkitään yksilökohtaisesti harhattomien estimaattorien avaruutta notaatiolla $L_e^{ind}(\cdot)$.

Ennen optimaalisen tiedontiivistyksen ja kredibiliteettikaavan määrittämistä standardin regressiomallin oletusten alaisuudessa esitetään vastaavat tulokset yleisessä moniulotteisessa tapauksessa. Nämä tulokset esitetään ilman todistuksia, mutta niiden todistukset löytyvät Bühlmannin ja Gislerin kirjasta [1]. Tällöin oletukset vastaavat standardin regressiomallin oletuksia poislukien oletukset (R2) ja (R4).

Lause 7.2 ***(optimaalinen tiedontiivistys moniuloitteisessa tapauksessa).*** *Optimaalinen tiedontiivistys on*

$$\mathbf{B}_i := Pro(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)|L_e^{ind}(\mathbf{X}_i)), \tag{7.8}$$

missä

$$L_e^{ind}(\mathbf{X}_i) = \Big\{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)} : \beta_k(\Theta_i) = \sum_j a_{ij}^{(k)} X_{ij}, k = 1, ..., p;$$
$$E\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}\middle|\Theta_i\right] = \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)\Big\}.$$

Lause 7.3 ***(kredibiliteettiestimaattori).*** *(Epähomogeeninen) kredibiliteettiestimaattori yllämainittujen moniuloitteisen mallin oletusten alaisuu-*

[10] tiedontiivistys = data compression

dessa on

$$\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} = A_i\mathbf{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\beta}, \tag{7.9}$$
$$\textit{missä } A_i = T(T + S_i)^{-1}, \tag{7.10}$$
$$\boldsymbol{\beta} = E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)],$$
$$S_i = E[Cov(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i'|\Theta_i)],$$
$$T = Cov(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i), \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)').$$

Näin ollen tiedontiivistyksellä saatu muuttuja $\mathbf{B}_i$ sisältää kaiken informaation aineistosta epähomogeenisen kredibiliteettikaavan tapauksessa.

Lause 7.4 ***(lineaarinen tyhjentävä tunnusluku[11]).*** $\{\mathbf{B}_i : i = 1, 2, ..., I\}$ *on lineaarisesti tyhjentävä tunnusluku, eli molemmat epähomogeeninen ja homogeeninen kredibiliteettiestimaattori on riippuvainen aineistosta vain tämän tunnusluvun välityksellä.*

Vielä ennen optimaalisen tiedontiivistyksen määrittämistä standardin regressiomallin oletusten alaisuudessa määritetään standardin regressiomallin rakenteelliset parametrit:

$$\underbrace{\boldsymbol{\beta}}_{p\times 1} := E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)],$$
$$\sigma^2 := E[\sigma^2(\Theta_i)],$$
$$\underbrace{T}_{p\times p} := Cov(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i), \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)').$$

Seuraavaksi esitetään lauseet tiedontiivistykselle ja standardin tapauksen kredibiliteettikaavalle standardin regressiomallin oletusten alaisuudessa ilman todistuksia. Lauseen 7.5 todistus löytyy suoraan Bühlmannin ja Gislerin kirjasta [1].

Lause 7.5 ***(tiedontiivistys).*** *Standardin regressiomallin oletusten alaisuudessa pätee:*

i) Muuttujan $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ paras lineaarinen ja yksilökohtaisesti harhaton estimaattori on

$$\mathbf{B}_i = (Y_i'W_iY_i)^{-1}Y_i'W_i\mathbf{X}_i. \tag{7.11}$$

ii) Muuttujan $\mathbf{B}_i$ kvadraattinen tappiomatriisi on

$$E[(\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)) \cdot (\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] = \sigma^2 \cdot (Y_i'W_iY_i)^{-1}. \tag{7.12}$$

[11] tyhjentävä tunnusluku = sufficient statistic

Seuraavan lauseen alkuosa saadaan suoraa lauseesta 7.3 soveltamalla sitä lauseen 7.5 antamaan tiivistettyyn aineistoon. Kvadraattinen tappiomatriisi saadaan puolestaan soveltamalla Bühlmannin ja Gislerin kirjan [1] teoreemaa 7.5.

Lause 7.6 ***(standardin tapauksen kredibiliteettikaava).*** *Standardin regressiomallin oletusten alaisuudessa saadaan, että muuttujan $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i))$ kredibiliteettiestimaattori toteuttaa kaavan*

$$\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} = A_i \mathbf{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\beta},$$

missä

$$A_i = T(T + \sigma^2 (T_i' W_i Y_i)^{-1})^{-1}.$$

Kvadraattinen tappiomatriisi on

$$E\left[\left(\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)\right) \cdot \left(\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)\right)'\right] = (I - A_i)T.$$

7.2 Yleinen regressiomalli (Hachemeister)

Hachemeisterin regressiomalli poikkeaa standardista regressiomallista vain siten, että oletus ehdollisesta riippumattomuudesta komponenttien $\boldsymbol{X}_i$ välillä unohdetaan ja mikä tahansa komponentin $\boldsymbol{X}_i$ sisältävä ehdollinen kovarianssirakenne sallitaan.

Hachemeisterin regressiomallin oletukset

Yksilöllinen riskiprofiili ϑ_i, joka on satunnaismuuttujan Θ_i realisaatio, karakterisoi riskin i. Oletetaan, että annettuna Θ_i, Y_i toteuttaa regressioyhtälön $\boldsymbol{X}_i = Y_i \boldsymbol{\beta}(\Theta_i) + \boldsymbol{\epsilon}_i$ Tehdään seuraavat oletukset:

(H1) Parit $(\Theta_1, \boldsymbol{X}_1)$, $(\Theta_2, \boldsymbol{X}_2)$, ... ovat riippumattomia, ja Θ_1, Θ_2, ... ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita,

(H2) Satunnaismuuttujat $\{X_{ij} : j = 1, 2, ..., n\}$ ovat ehdollisesti riippumattomia, annettuna Θ_i,

(H3) $E[\boldsymbol{X}_i | \Theta_i] = \underbrace{Y_i}_{n\times p} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}_{p\times 1},$ (7.13)

missä $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ = tuntematon regressiovektori, jonka alkiot ovat lineaarisesti riippumattomia ja jonka pituus on $p \leq n$,

Y_i = tunnettu mallimatriisi, jonka aste on p,

(H4) $Cov(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_i' | \Theta_i) = \Sigma_i(\Theta_i).$ (7.14)

Oletuksesta (H4) seuraa, että matriisit

$$S_i = E[\Sigma_i(\Theta_i)], \quad (i = 1, 2, ..., I)$$

ovat rakenteellisia parametreja, kun taas standardissa regressiossa $S_i = \sigma^2 W_i^{-1}$ ja siinä on vain yksi parametri σ^2.

Tavallisesti oletetaan, että

$$\Sigma_i(\Theta_i) = W_i^{-1/2} \Sigma(\Theta_i) W_i^{-1/2}$$

ja tällöin

$$S_i = W_i^{-1/2} S W_i^{-1/2},$$

jossa

$$W_i^{-1/2} = \begin{pmatrix} w_{i1}^{-1/2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_{in}^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Oletuksesta huolimatta mallissa on edelleen paljon enemmän rakenteellisia parametreja kuin standardin regression tapauksessa. Nimittäin matriisi $S = E[\Sigma(\Theta_i)]$ sisältää $n(n+1)/2$ rakenteellista parametria standardin regression yhden rakenteellisen parametrin σ^2 sijaan.

Tavoitteena on löytää mallille kredibiliteettiestimaattori ja sen löytämiseksi keskitytään ensin tiedontiivistykseen.

Ehdollisesti annettuna Θ_i, klassisen tilastotieteen tulosten pohjalta (vrt. Lause 6.1) optimaalinen lineaarinen harhaton estimaattori on

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)} = \left(Y_i' \Sigma_i(\Theta_i)^{-1} Y_i\right)^{-1} Y_i' \Sigma_i(\Theta_i)^{-1} \mathbf{X}_i \tag{7.15}$$

ja sen kovarianssimatriisi on

$$\Sigma_{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} = \left(Y_i' \Sigma_i(\Theta_i)^{-1} Y_i\right)^{-1}. \tag{7.16}$$

Yhtälön (7.15) oikealla puolella esiintyvä kovarianssimatriisi $\Sigma_i(\Theta_i)$ on riippuvainen tuntemattomasta muuttujasta Θ_i ja näin ollen itsekin tuntematon. Bühlmann-Straub mallin kredibiliteettipainon rakenteellisena parametrina on $\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)]$, joten sen perusteella tuntematon kovarianssimatriisi yhtälössä (7.15) pitäisi korvata rakenteellisella parametrimatriisilla $S_i = E[\Sigma_i(\Theta_i)]$. Seuraava lause osoittaa, että näin toimimalla saavutetaan optimaalinen tiedontiivistys.

Lause 7.7 ***(tiedontiivistys).*** *Hachemeisterin regressiomallin oletusen alaisuudessa:*

i) Regressiovektorin $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ paras lineaarinen ja yksilökohtaisesti harhaton estimaattori on

$$\mathbf{B}_i = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} \mathbf{X}_i. \tag{7.17}$$

ii) Estimaattorin $\mathbf{B}_i$ kvadraattinen tappiomatriisi on

$$E\left[(\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)) \cdot (\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'\right] = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1}. \tag{7.18}$$

Todistus: Todistetaan ensin estimaattorin $\mathbf{B}_i$ harhattomuus:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{B}_i|\Theta_i] &= (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] \\ &= (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} Y_i \boldsymbol{\beta}(\Theta_i) \\ &= \boldsymbol{\beta}(\Theta_i). \end{aligned}$$

Seuraavaksi tulee osoittaa, että ortogonaalisuusehto

$$\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i \perp A\mathbf{X}_i - \mathbf{B}_i \tag{7.19}$$

toteutuu kaikilla matriiseilla A, joille

$$E[A\mathbf{X}_i|\Theta_i] = \boldsymbol{\beta}(\Theta_i). \tag{7.20}$$

Ortogonaalisuusehto (7.19) voidaan kirjoittaa muodossa

$$E[Cov(\mathbf{B}_i, (A\mathbf{X}_i)'|\Theta_i)] = E[Cov(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i'|\Theta_i)]. \tag{7.21}$$

Kaavasta (7.20) ja oletuksen (H3) kaavasta (7.13) saadaan

$$E[A\mathbf{X}_i|\Theta_i] = AE[\mathbf{X}_i|\Theta_i] \overset{(7.13)}{=} AY_i\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) \overset{(7.20)}{=} \boldsymbol{\beta}(\Theta_i),$$

joten tulee olla, että

$$AY_i = I.$$

Käyttämällä kaavaa (7.17) saadaan yhtälön (7.21) vasen puoli kirjoitettua muotoon

$$\begin{aligned} E[Cov(\mathbf{B}_i, (A\mathbf{X}_i)'|\Theta_i)] =& E[E[\mathbf{B}_i(A\mathbf{X}_i)'|\Theta_i] - E[\mathbf{B}_i|\Theta_i]E[(A\mathbf{X}_i)'|\Theta_i]] \\ =& E[(Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} E[\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i'|\Theta_i] A' \\ & - (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] E[\mathbf{X}_i'|\Theta_i] A'] \\ =& E[(Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i'|\Theta_i) A'] \\ =& (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' \underbrace{S_i^{-1} S_i}_{=I} A' \\ =& (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} \underbrace{Y_i' A'}_{=(AY_i)'=I} = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1}. \end{aligned}$$

Koska yhtälön (7.21) vasen puoli on riippumaton matriisista A, niin täytyy myös pitää paikkansa, että

$$E[Cov(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i'|\Theta_i)] = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1}, \tag{7.22}$$

mikä todistaa Lauseen 7.7. □

Jotta regressiovektorin $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaattori Hachemeisterin regressiomallin oletusten alasuudessa saadaan esitettyä, esitetään ensin abstraktin moniulotteisen kredibiliteettimallin oletukset sekä todistetaan moniulotteisen kredibiliteettiestimaattorin -lause. Lisäksi esitetään vielä yleisen moniulotteisen tietorakennemallin oletukset.

Abstraktin moniulotteisen kredibiliteettimallin oletukset
Jokaiselle riskille i on olemassa p-ulotteinen satunnaisvektori $\boldsymbol{X}_i$, jolle pätee
i) Ehdollisesti, annettuna Θ_i,

$$E[\boldsymbol{X}_i'|\Theta_i] = \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)' = (\mu_1(\Theta_i), \mu_2(\Theta_i), ..., \mu_p(\Theta_i)), \tag{7.23}$$
$$Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i'|\Theta_i) = \Sigma_i(\Theta_i). \tag{7.24}$$

ii) Parit $(\Theta_1, \mathbf{X}_1)$, $(\Theta_2, \mathbf{X}_2)$,... ovat riippumattomia ja Θ_1, Θ_2,... ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita.

Tavoitteena on estimoida jokaiseen riskiin i liittyvä vektori $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$. Kuten edellisissäkin malleissa, tämä estimaattori riippuu rakenteellisten parametrien arvoista. Moniulotteisen kredibiliteettimallin rakenteelliset parametrit ovat

$$\boldsymbol{\mu} := E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)], \tag{7.25}$$
$$S_i := E[\Sigma_i(\Theta_i)], \tag{7.26}$$
$$T := Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i), \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)'). \tag{7.27}$$

Lause 7.8 ***(kredibiliteettiestimaattori).*** *Moniulotteinen kredibiliteettiestimaattori on*

$$\widehat{\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}} = A_i \mathbf{X}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\mu}, \tag{7.28}$$

missä

$$A_i = T(T + S_i)^{-1}$$

ja $\boldsymbol{\mu}$*,* T *ja* S_i *ovat moniulotteisen kredibiliteettimallin rakenteelliset parametrit* (7.25)-(7.27).

Todistus: Moniulotteinen kredibiliteettiestimaattori on määritelty komponenttikohtaisesti. Tavoitteena on siis löytää jokaiselle vektorin $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ komponentille siihen liittyvä kredibiliteettiestimaattori.

Kredibiliteettiestimaattorin määritelmän ja määritelmän 5.1 mukaan

$$\widehat{\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}} := Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L(\boldsymbol{X}_i, 1)),$$

missä projektio-operaattori tulisi ajatella komponenttikohtaisena ja $L(\boldsymbol{X}_i, 1)$ on vektorin $\boldsymbol{X}_i$ komponenttien ja 1 virittämä lineaarinen aliavaruus.

Nyt jokaiselle $k = 1, 2, ..., p$

$$\widehat{\widehat{\mu_k(\Theta_i)}} = a_{k0}^{(i)} + \sum_{j=1}^{p} a_{kj}^{(i)} X_{ij} \tag{7.29}$$

on vektorin $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ komponenttien kredibiliteettiestimaattori. Jokaisen tällaisen estimaattorin tulee toteuttaa normaaliyhtälöt (6.3) ja (6.4):

$$\mu_k = a_{k0}^{(i)} + \sum_{j=1}^{p} a_{kj}^{(i)} \mu_j, \tag{7.30}$$

$$Cov(\mu_k(\Theta_i), X_{im}) = \sum_{j=1}^{p} a_{kj}^{(i)} Cov(X_{ij}, X_{im}), \quad m = 1, 2, ..., p. \tag{7.31}$$

Matriiseja hyväksi käyttäen (7.29) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\widehat{\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}} = \boldsymbol{a}_i + A_i \cdot \boldsymbol{X},$$

missä

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{10}^{(i)} \\ \vdots \\ a_{k0}^{(i)} \\ \vdots \\ a_{p0}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \dots & a_{1p}^{(i)} \\ \vdots & & & \\ a_{k1}^{(i)} & a_{k2}^{(i)} & \dots & a_{kp}^{(i)} \\ \vdots & & & \\ a_{p1}^{(i)} & a_{p2}^{(i)} & \dots & a_{pp}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Normaaliyhtälöt (7.30) ja (7.31) voidaan kirjoittaa matriisimerkinnöin

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{a}_i + A_i \cdot \boldsymbol{\mu}, \tag{7.32}$$

$$Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i), \boldsymbol{X}_i') = A_i \cdot Cov(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_i'). \tag{7.33}$$

Yhtälö (7.32) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{a}_i = (I - A_i)\boldsymbol{\mu}.$$

Koska

$$\begin{aligned}
Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i), \boldsymbol{X}_i') &= E[Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i), \boldsymbol{X}_i'|\Theta_i)] + Cov(E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|\Theta_i], E[\boldsymbol{X}_i'|\Theta_i]) \\
&= Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i), \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)') \\
&= T, \\
Cov(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_i') &= E[Cov(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_i'|\Theta_i)] + Cov(E[\boldsymbol{X}_i|\Theta_i], E[\boldsymbol{X}_i'|\Theta_i]) \\
&= E[\Sigma_i(\Theta_i)] + Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i), \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)') \\
&= S_i + T,
\end{aligned}$$

saadaan yhtälöstä (7.33)

$$T = A_i(T + S_i),$$

josta saadaan

$$A_i = T(T + S_i)^{-1}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)}} &= \boldsymbol{a}_i + A_i \cdot \boldsymbol{X} \\
&= (I - A_i)\boldsymbol{\mu} + A_i\boldsymbol{X}_i.
\end{aligned}$$

□

Lause 7.9 ***(Hachemeisterin kaava).*** *Hachemeisterin regressiomallin oletusten alaisuudessa saadaan, että regressiovektorin $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaattori toteuttaa yhtälön*

$$\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} = A_i\mathbf{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\beta}, \tag{7.34}$$

missä

$$\begin{aligned}
A_i &= T\left(T + (Y_i'S_i^{-1}Y_i)^{-1}\right)^{-1}, \qquad (7.35) \\
\mathbf{B}_i &= (Y_i'S_i^{-1}Y_i)^{-1}Y_i'S_i^{-1}\mathbf{X}_i, \\
S_i &= E[\Sigma(\Theta_i)] = E[Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i'|\Theta_i)], \\
T &= Cov(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i), \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)'), \\
\boldsymbol{\beta} &= E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)].
\end{aligned}$$

Kvadraattinen tappiomatriisi on

$$E\left[\left(\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)\right) \cdot \left(\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)\right)'\right] = (I - A_i)T.$$

Todistus: Lauseen 7.8 mukaan (7.34) on tiivistykseen $\mathbf{B}_i$ perustuva kredibiliteettiestimaattori ja näin ollen

$$\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} \perp \mathbf{B}_i.$$

Seuraavaksi täytyy osoittaa, että tämä on myös koko aineistoon perustuva kredibiliteettiestimaattori, eli

$$\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} \perp \boldsymbol{X}_i. \tag{7.36}$$

Näin ollen (7.36) on vastaava kuin

$$\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} \perp \boldsymbol{X}_i - Y_i\mathbf{B}_i, \tag{7.37}$$

missä Y_i on standardin regressiomallin oletuksen (H3) mukainen matriisi. Yhtälön (7.37) vasen puoli voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}} = A_i(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i) + (I - A_i)(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}).$$

Näytetään ensin, että ensimmäinen yhteenlaskettava $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i \perp \boldsymbol{X}_i - Y_i\mathbf{B}_i$. Koska lauseen 7.2 mukaan $\mathbf{B}_i = Pro(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)|L_e^{ind}(\boldsymbol{X}_i))$ ja $Y_i\mathbf{B}_i = Pro(Y_i\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)|L_e^{ind}(\boldsymbol{X}_i))$ pätee

$$Y_i(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i) \perp \boldsymbol{X}_i - Y_i\mathbf{B}_i. \tag{7.38}$$

Koska Y_i on astetta p, yllä olevan yhtälön vasen puoli koostuu p:stä lineaarisesti riippumattomasta vektorin $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i$ lineaarikombinaatiosta, jotka kaikki ovat kohtisuorassa $\boldsymbol{X}_i - Y_i\mathbf{B}_i$ kanssa. Tästä seuraa, että kaikki $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i$ komponentit ovat kohtisuorassa $\boldsymbol{X}_i - Y_i\mathbf{B}_i$ kanssa.

Osoitetaan seuraavaksi toisen yhteenlaskettavan $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}$ kohtisuoruus.

$$\begin{aligned}
E[(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}) \cdot (\boldsymbol{X}_i - Y_i\mathbf{B}_i)'] &= E[E[(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}) \cdot (\boldsymbol{X}_i - Y_i\mathbf{B}_i)'|\Theta_i]] \\
&= E[E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)\boldsymbol{X}_i'|\Theta_i] - E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)\mathbf{B}_i'Y_i'|\Theta_i] - E[\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{X}_i'|\Theta_i] + E[\boldsymbol{\beta}\mathbf{B}_i'Y_i'|\Theta_i]] \\
&= E[(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta})(E[\mathbf{X}_i'|\Theta_i] - E[\mathbf{B}_i'|\Theta_i]Y_i')] \\
&= E[(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta})((Y_i\boldsymbol{\beta}(\Theta_i))' - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)'Y_i')] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Näin ollen on osoitettu lauseen ensimmäinen osa. Lasketaan seuraavaksi regressiovektorin kvadraattinen tappiomatriisi:

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)\right) \cdot \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)\right)'\right] \\
&\quad = A_i E[(\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)) \cdot (\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] A_i' \\
&\qquad + (I - A_i) E[(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'](I - A_i)' \\
&\quad = A_i (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} A_i' + (I - A_i) T (I - A_i)' \\
&\quad = (I - A_i) T \left[((I - A_i)T)^{-1} A_i (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} A_i' + (I - A_i)'\right] \\
&\quad = (I - A_i) T \big[T^{-1} \underbrace{(I - A_i)^{-1} A_i}_{=(A_i^{-1} - I)^{-1}} (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} A_i' + I - A_i'\big] \\
&\quad = (I - A_i) T \left[((Y_i' S_i^{-1} Y_i)(A_i^{-1} - I) T)^{-1} A_i' + I - A_i'\right] \\
&\quad = (I - A_i) T \left[((Y_i' S_i^{-1} Y_i) \left[(T(T + (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1})^{-1})^{-1} - I\right] T)^{-1} A_i' + I - A_i'\right] \\
&\quad = (I - A_i) T \left[((Y_i' S_i^{-1} Y_i) \left[(T + (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1}) T^{-1} - I\right] T)^{-1} A_i' + I - A_i'\right] \\
&\quad = (I - A_i) T \left[((Y_i' S_i^{-1} Y_i) T + I - (Y_i' S_i^{-1} Y_i) T)^{-1} A_i' + I - A_i'\right] \\
&\quad = (I - A_i) T \left[A_i' + I - A_i'\right] \\
&\quad = (I - A_i) T.
\end{aligned}
$$

Näin on saatu osoitettua kvadraattinen tappiomatriisi ja näin ollen koko lause 7.9. $\square$

8 Johtopäätökset

Kredibiliteettiteoria estimoi vakuutettavan vakuutusmaksua määrittämällä kredibiliteettikertoimen, joka määrää, missä suhteessa yksilöllinen vahinkohistoria ja kollektiivin vahinkohistoria otetaan vakuutuksen hinnoittelussa huomioon. Kredibiliteettiestimaattorin muodostamiseen on olemassa useita erilaisia kredibiliteettimalleja, joista valittaessa tulee ottaa huomioon niiden erilaiset oletukset koskien aineiston muuttujia.

Tässä työssä on esitelty neljä kredibiliteettimallia, jotka eroavat toisistaan oleellisimmin oletustensa osalta. Bayesin mallilla saavutettavaa parasta estimaattoria ei voida usein esittää suljetussa analyyttisessa muodossa, joten se ei täytyä vaatimusta kredibiliteettiestimaattorin yksinkertaisuudesta. Bühlmannin mallin kredibiliteettiestimaattori on paras lineaarinen estimaattori Bayes-mielessä. Bühlmann-Straub malli on yleistys Bühlmannin mallista, sen oletusten ero Bühlmannin malliin on, että vahinkosuhdemuuttujien ei tarvitse olla samoin jakautuneita. Hachemeisterin regressiomalli on puolestaan yleistys Bühlmann-Straub mallista. Jokainen näistä malleista antaa parhaan ratkaisun kredibiliteettiestimaattorille omien oletustensa alaisuudessa.

Kirjallisuutta

[1] Hans Bühlmann, Alois Gisler: *A Course in Credibility Theory and its Applications*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2005

[2] Charles A. Hachemeister: *Credibility for Regression models with Application to Trend*, From Credibility: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1975

[3] Hans Bühlmann: *Experience Rating and Credibility*, ASTIN Bulletin, 4:199-207, 1967

[4] Hanspeter Schmidli: *Lecture notes on Risk Theory*, Institute of Mathematics, University of Cologne

[5] Mike Tam: *Robust Credibility and Kalman Filter*, A Thesis in The Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montreal, Canada, 1998

[6] Sanford Weisberg: *Applied Linear Regression*, Wiley, New York, 2005