

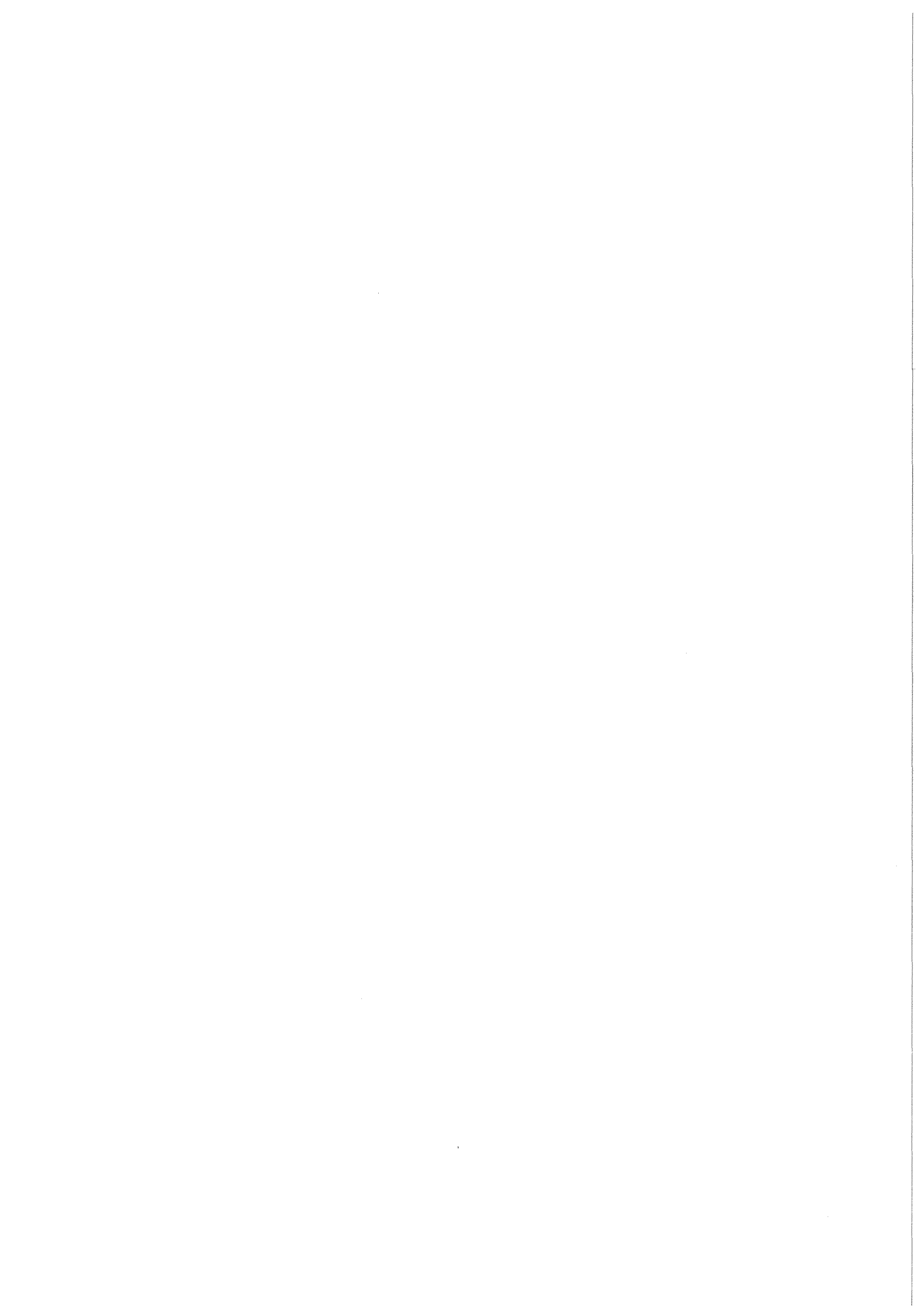


KfK 4510
Januar 1989

Numerische Simulationen von technisch relevanten Ionen-Dioden mit der Particle-in-Cell Methode

T. Westermann
Institut für Datenverarbeitung in der Technik

Kernforschungszentrum Karlsruhe



KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE
Institut für Datenverarbeitung in der Technik

KfK 4510

Numerische Simulationen von technisch relevanten Ionen-Dioden mit der
Particle-in-Cell Methode *)

Thomas Westermann

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

*) Von der Fakultät für Physik der Universität Karlsruhe
genehmigte Dissertation

Als Manuskript vervielfältigt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 7500 Karlsruhe 1

ISSN 0303-4003

Numerische Simulationen von technisch relevanten Ionen-Dioden mit der Particle-in-Cell Methode

Zusammenfassung

Die Kopplung der Particle-in-Cell Methode mit randangepaßten Koordinaten führte in (r,z) -Koordinaten zu einem zweidimensionalen, stationären, selbstkonsistenten Particle-in-Cell-Code. Dadurch wurde die Möglichkeit geschaffen, rotationssymmetrische technische Ionen-Dioden mit gekrümmten inneren und äußeren Rändern selbstkonsistent zu modellieren, ohne die Dioden in ihrer geometrischen Beschaffenheit zu vereinfachen. Durch numerische Simulationen der selbstmagnetisch isolierten B_θ -Diode wurde eine Anoden-Kathodenkonfiguration ermittelt, welche gegenüber einer ursprünglich experimentell verwendeten Anordnung die doppelte Leistungsdichte in der Fokusebene besitzt.

Numerical Simulations of Technical Ion Diodes with the Particle-In-Cell Method

Summary

In order to simulate complex systems such as pulsed power ion diodes relevant for the purposes of physical research, two numerical methods have been coupled: the particle-in-cell method is used to describe the electromagnetic system in a self-consistent manner, and boundary-fitted coordinates are introduced to be able to treat the technical geometries of the diodes. Numerical simulations of the self-magnetically insulated B_θ -Diode were carried out. As a result an anode-cathode shape was found in which the intensity in the focal plane was doubled, compared with an originally experimentally used configuration.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	S. 1
1.1. Einordnung und Ziele der Arbeit	S. 1
1.2. Particle-in-Cell Methode	S. 5
1.3. Randangepaßte Koordinaten	S. 8
2. Kopplung zwischen der Particle-in-Cell Methode und randangepaßten Koordinaten	S. 10
2.1. Interpolation	S. 10
2.2. Lokalisierung	S. 15
3. Physikalische Modelle	S. 18
4. Verifikation des Particle-in-Cell-Codes am Beispiel eines Plattenkondensators	S. 23
5. Simulation einer fokussierenden Pinch-Diode	S. 29
6. Simulation und Optimierung einer selbstmagnetisch isolierten B_θ -Diode	S. 49
6.1. Numerisches Modell der B_θ -Diode	S. 52
6.2. Stromverhalten der B_θ -Diode	S. 55
6.3. Felder in der B_θ -Diode	S. 59
6.4. Ladungsdichten in der B_θ -Diode	S. 63
6.5. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit analytischen Modellen	S. 65
6.6. Fokussierungseigenschaften von Konfiguration I	S. 69
6.7. Fokussierungseigenschaften von Konfiguration II	S. 73
6.8. Einfluß von Spannung und Spaltabstand auf die Fokussierung	S. 78
6.9. Zusammenfassung von Kapitel 6	S. 80

Zusammenfassung	S. 82
Anhang	S. 85
A1. Grundlegende Transformationsgleichungen	S. 85
A2. Numerische Simulation	S. 87
A3. Liste der verwendeten Programme bzw. Unterprogramme	S. 98
Literaturverzeichnis	S. 100
Danksagung	S. 105

1. Einleitung

1.1. Einordnung und Ziele der Arbeit

Neben der Kernspaltung wird in den letzten Jahren die Kernverschmelzung als vielversprechender Weg zur Energiegewinnung gefördert. Diese Art der Energiefreisetzung beruht auf der Verschmelzung (Fusion) von leichten zu schweren Kernen. Bei der Fusionsreaktion entsteht aus einem Deuterium-Ion und einem Tritium-Ion ein Alpha-Teilchen und ein Neutron. Gleichzeitig wird die durch die Fusion freigesetzte Energie von 17,6 MeV als kinetische Energie auf die beiden Reaktionsprodukte verteilt. Um diesen Mechanismus in Gang zu bringen und mehr Energie durch Fusion zu erhalten, als zum Einschluß und Aufheizen eines Plasmas benötigt wird, muß das Lawson-Kriterium [1] erfüllt werden:

Ist T die Temperatur des Plasmas, n die Teilchendichte und τ die Einschlußzeit, so muß das Produkt $n\tau$ größer sein als ein bestimmter Minimalwert, der bei einer Deuterium-Tritium-Reaktion 10^{20} s/m^3 (bei $T \geq 10^7 \text{ K}$) beträgt [2]. Folglich kann kontrollierte Fusion auf zwei Wegen erreicht werden:

- * entweder man schließt Plasmen niedriger Dichte durch Magnetfelder für relativ lange Zeiten ($\tau \approx 1\text{s}$) ein (Magnetfusion),
- * oder man erzeugt für sehr kurze Zeiten ($\tau \approx 10^{-8}\text{s}$) Plasmen hoher Dichte (Trägheitsfusion).

Bei der kontrollierten Kernverschmelzung mittels Trägheitseinschluß wird ein Treiber benutzt, um Energie in kurzer Zeit in einer dünnen Kugelschale (Pellet) zu deponieren, die das Fusionsgemisch einschließt. Die äußere Schicht des Pellets wird mit dem Treiber so intensiv bestrahlt, daß sie explosionsartig verdampft. Aufgrund der Ablation der äußeren Schichten der Kugelschale entsteht ein Rückstoß, der die zurückbleibende Schale nach innen beschleunigt und das Brennstoffgemisch komprimiert. Nach der Schockzündung des Brennstoffs breitet sich ein Fusionsabbrand in dem gesamten Brennstoff aus. Dieser wird anschließend durch seinen thermischen Innendruck nach außen beschleunigt. Um einen hohen Abbrand und Wirkungsgrad zu erzielen, müssen nach gegenwärtigen Vorstellungen ca. 3-5 MJ Energie mit einer Leistungsdichte von mehr als 100 TW/cm^2 in 10-15 nsec in der äußeren Kugelschale deponiert werden [3].

Diese Anforderungen waren Anlaß, 1979 im Kernforschungszentrum Karlsruhe ein neues Arbeitsgebiet zu schaffen: "Physik hochverdichteter Materie". Das Ziel dieses Projektes ist es, extreme Leistungsdichten durch Strahlen leichter Ionen pulsartig zu erzeugen, um extreme Verdichtungen in Materie für technische und physikalische Grundlagenforschung zu erreichen.

Prinzipiell gibt es verschiedene Möglichkeiten, extreme Zustände in Materie zu erzeugen, z.B.: Laserstrahlen, Elektronenstrahlen, Leichtionenstrahlen und Schwerionenstrahlen. Im Kernforschungszentrum entschied man sich für die Leichtionenstrahlen, um ihr Potential z.B. gegenüber Schwerionen- und Laserstrahlen zu untersuchen. Falls es gelingt, intensive Strahlen leichter Ionen gut zu fokussieren, so hätten sie gegenüber Strahlen von schweren Ionen bzw. Laserlicht den großen Vorteil, daß ihre Erzeugung wesentlich billiger ist. Gegenüber Elektronenstrahlen haben Strahlen leichter Ionen den Vorteil, daß der Abbremsweg ohne starke Streuung kürzer ist. Damit erfolgt die Energieabsorption in kleinstem Volumen nahe der größten Eindringtiefe, was zu höchsten Leistungsdichten führt.

Die im Kernforschungszentrum verwendeten Ionenquellen sind Vakuumdioden [4]. Induziert die angelegte Spannung an den Elektroden ein elektrisches Feld im Bereich zwischen 5 - 20 MV/m [3], so kommt es auf sog. Whiskern (mikroskopisch kleinen Spitzen an der Oberfläche) zur Emission von Elektronen (Feldemission). Diese Elektronen treten aus der Kathodenoberfläche in den Anoden-Kathoden-Spalt ein und werden zur Anode hin beschleunigt. Der mit dem Ablöseprozeß verbundene Strom führt zur Ohmschen Aufheizung der Spitzen, so daß Material verdampft und an der Kathode ein Plasma entsteht. Durch die Temperatur des Plasmas und durch das angelegte Feld werden Elektronen aus der Plasmaoberfläche gezogen und im Spalt beschleunigt. Die Elektronen treffen die Anode und heizen sie auf. Es kommt zur Bildung eines Anodenplasmas, das als Ionenquelle dient. Das elektrische Feld beschleunigt die Ionen. So entsteht ein bipolarer Fluß von Elektronen und Ionen.

Die dem System zugeführte elektrische Energie soll durch die Ionen-Dioden in fokussierbare Teilchenstrahlenergie umgewandelt werden. Um eine große Leistungsdichte im Target zu erzielen, müssen die Ionen auf eine minimale Fläche fokussiert werden. Die Fokussierung der Ionen erfolgt dabei primär durch die Anodenform der Diode. Um andererseits auch einen großen Wirkungsgrad (Verhältnis von Ionenstrom zu Gesamtstrom) zu erreichen, müssen die

auftretenden Elektronenströme durch Magnetfelder reduziert werden. Bei selbstmagnetisch isolierten Dioden wird das Magnetfeld nur durch die Bewegung der Teilchen induziert und bei fremdmagnetisch isolierten Dioden zusätzlich durch äußere Magnetfelder. Da auch die Magnetfelder die Fokussierungseigenschaften der Dioden beeinflussen, besteht das Problem bei der Entwicklung der Dioden darin, die geometrische Fokussierung mit der Fokussierung durch die Magnetfelder in Einklang zu bringen.

Die Umsetzung der Variationsmöglichkeiten im experimentellen Aufbau ist aufwendig und teuer. Die bisherigen analytischen Theorien gelten nur für vereinfachte Anordnungen mit idealen Randbedingungen und weiteren einschränkenden Annahmen [5-16]. Es gibt auch einige quantitative Abschätzungen über das Stromverhalten in der Diode [17-21]. Da also eine vollständige analytische Beschreibung der Vorgänge bisher fehlt, werden verstärkt numerische Simulationen herangezogen, um einerseits das Verständnis der Abläufe in der Diode zu vertiefen und andererseits die bisherigen experimentellen Konzepte zu verbessern.

Als geeignete Methode zur numerischen Simulation von elektrisch geladenen Teilchen in elektromagnetischen Feldern erwies sich das auf Buneman [22] und Dawson [23] zurückgehende Konzept der Particle-in-Cell (PIC) Methode. Dieses Konzept ermöglicht im Prinzip eine selbstkonsistente Beschreibung des elektromagnetischen Systems unter Zugrundelegung der vollständigen Maxwellgleichungen. Es wurden ein- bis dreidimensionale PIC-Codes entwickelt, die je nach Problemstellung entweder stationär oder vollelektromagnetisch sind [24-40].

Diese bisher entwickelten PIC-Codes, wie auch der von Kawata et. al. [36] im Kernforschungszentrum erstellte vollelektromagnetische, $2\frac{1}{2}$ -dimensionale PCSKfK PIC-Code, sind jedoch nur in der Lage, Dioden mit achsenparallelen Rändern zu simulieren, was für die meisten technischen Anwendungen nicht zutrifft. Das physikalische Gebiet mit gekrümmten Rändern wird dabei durch ein numerisches Modell mit achsenparallelen Rändern approximiert [41-50]. Durch diese Vereinfachung können die Vorgänge in der Diode nur qualitativ abgeschätzt werden. Die Einflüsse der gekrümmten Randflächen auf das System werden nicht exakt berücksichtigt. Z.B. entstehen an den Kanten unrealistische Feldüberhöhungen mit erhöhten Elektronen- bzw. Ionenstromdichten und Feldverzerrungen. Insbesondere können damit nur eingeschränkte Aussagen über die Fokussierungseigenschaften der Dioden getroffen werden.

Parallel zur PIC Methode wurde die elektrostatische Beschreibung von elektrischen Feldern in technisch relevanten Gebieten durch sog. randangepaßte Koordinaten von Thompson [51] entwickelt. Durch die Anwendung dieser randangepaßten Koordinaten kann man auch bei Gebieten mit nicht achsenparallelen Rändern die statischen Felder berechnen, ohne die Diode in ihrer geometrischen Beschaffenheit zu vereinfachen. Das Konzept der randangepaßten Koordinaten wurde von Halter [52] aufgegriffen und auf Gebiete mit inneren Rändern und unterschiedlichen Dielektrika erweitert. Mit dem von ihm erstellten Programmpaket FCBFC [53] können sowohl randangepaßte Gitter erzeugt, als auch statische Feldberechnungen durchgeführt werden.

Aufbauend auf die Arbeiten von Halter und Kawata sowie Sararu [54], die das Teilchenerzeugungsprogramm von [36] auf randangepaßte Koordinaten übertrug, werden wir in dieser Arbeit die Methode der randangepaßten Koordinaten mit der PIC Methode koppeln und in (r,z) -Zylinderkoordinaten einen 2-dimensionalen stationären PIC-Code entwickeln. Damit sind wir dann in der Lage, auch technisch relevante Dioden mit gekrümmten Rändern selbstkonsistent zu simulieren und das Verhalten von elektrisch geladenen Teilchen für stationäre Vorgänge sowohl in äußeren als auch in selbsterzeugten elektrischen und magnetischen Feldern zu modellieren.

Ziel dieser Arbeit ist es, den PIC-Code auf Ionen-Dioden anzuwenden, um durch rechnerische Simulationen physikalische Phänomene in der Diode im einzelnen aufzuzeigen und damit ein besseres Verständnis für die in der Diode ablaufenden Prozesse zu erhalten. Insbesondere wird die im KfK entwickelte selbstmagnetisch isolierte B_θ -Diode [61] modelliert. Ausgehend von den numerischen Ergebnissen soll erstmals durch den Einsatz von Simulationsrechnungen die Geometrie einer Diode derart verbessert werden, daß durch eine veränderte Formgebung eine bessere Bündelung der Ionenstrahlen erfolgt und somit die Leistungsdichte im Fokus optimiert wird.

Nach einer Einführung in die Particle-in-Cell Methode und in die Methode der randangepaßten Koordinaten, folgt in Kapitel 2 die Beschreibung der Kopplung beider Methoden. Anschließend werden in Kapitel 3 die dem PIC-Code zugrundeliegenden Modelle erläutert und in Kapitel 4 die Ergebnisse des Rechencodes im Spezialfall eines Plattenkondensators mit analytischen Modellen verglichen. In Kapitel 5 wird im Falle einer fokussierenden Pinch-Diode der Einfluß der Eigenfelder auf das elektromagnetische System demonstriert. In Kapitel 6 werden wir Vorgänge in der selbstmagnetisch isolierten B_θ -Diode beschreiben und durch Änderung der Anoden-Kathoden-Form eine besser fokussierende Konfiguration der B_θ -Diode finden, die im Fokus eine um den Faktor 2 größere Leistungsdichte besitzt als die Ausgangskonfiguration.

1.2. Particle-in-Cell Methode

Die in den Ionen-Dioden ablaufenden physikalischen Prozesse werden sowohl von den elektrischen als auch den magnetischen Eigenfeldern stark beeinflusst. Zur numerischen Simulation des elektromagnetischen Systems wählen wir daher ein Teilchenmodell, welches das Verhalten von elektrisch geladenen Teilchen in äußeren und selbsterzeugten elektromagnetischen Feldern berechnet. Die Struktur eines selbstkonsistenten Teilchenmodells ist durch das folgende Schema festgelegt:

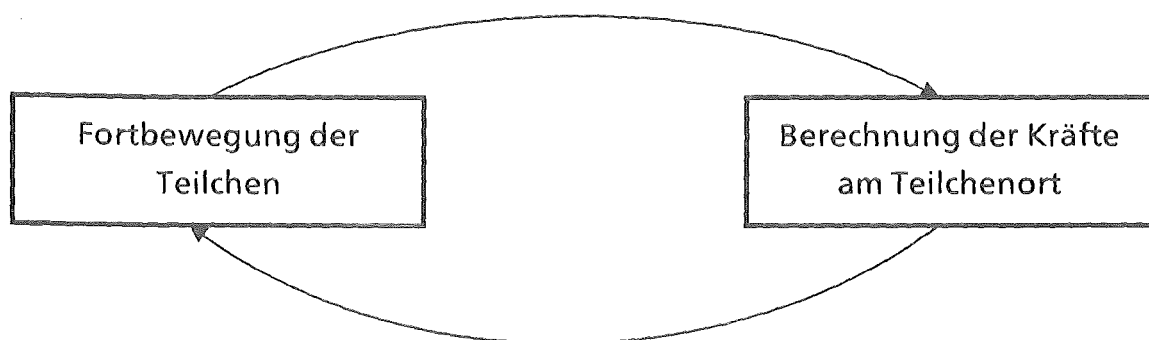


Abb. 1.2.1: Struktur eines selbstkonsistenten Teilchenmodells.

Die Kräfte, die auf die Teilchen wirken, bewegen ein Teilchen während eines Zeitschrittes weiter. Mit den neuen Teilchendaten werden die Wechselwirkungen der Teilchen untereinander bestimmt. Durch die äußeren und selbsterzeugten Kräfte werden anschließend die Teilchen erneut fortbewegt (vgl. Abb. 1.2.1).

Die einfachste Methode, die Wechselwirkungen von elektrisch geladenen Teilchen untereinander zu berechnen, ist durch das Coulombgesetz gegeben. Bei dieser direkten sog. Particle-Particle Methode müssen zur Bestimmung der Gesamtkraft auf ein Teilchen $N-1$ Wechselwirkungen berechnet werden, wenn N die Anzahl der Teilchen ist. Die Gesamtzahl der numerischen Operationen, die zur Berechnung der Kräfte auf alle Teilchen benötigt wird, ist somit proportional zu $N * (N-1)$. Selbst wenn man mehrere Teilchen zu sog. Makroteilchen zusammenfaßt, ist diese Methode aufgrund der zu hohen Rechenzeiten bei der Simulation von großen Systemen mit vielen Teilchen nicht praktikabel.

Ein geeigneteres Verfahren, Simulationen von geladenen Teilchen in elektromagnetischen Feldern durchzuführen, ist die sog. Particle-in-Cell (PIC) Methode. Die Grundidee dieser Methode besteht darin, daß zur Berechnung der Kräfte, die auf die Teilchen wirken, ein diskretes Gitter eingeführt wird, welches das kontinuierliche Berechnungsgebiet in diskrete Zellen unterteilt. Die Berechnung der Wechselwirkung eines Teilchens mit den übrigen und den angelegten Feldern erfolgt nun indirekt über das Gitter in folgender Weise:

Für jedes Teilchen wird die Teilchenladung auf die Eckpunkte der Zelle verteilt, in der es sich befindet. Aus den so resultierenden Ladungsdichten auf den Gitterpunkten wird durch Lösen der Poissongleichung das Potential und durch Differentiation das elektrische Feld an den Gitterpunkten bestimmt. Für jedes Teilchen werden anschließend die Felder von den Eckpunkten der Zelle, in der es sich befindet, auf den Teilchenort interpoliert. Aufgrund der am Teilchenort herrschenden Felder wird nun jedes der Teilchen unabhängig vom räumlichen Gitter fortbewegt (vgl. Abb. 1.2.2).

Um zu vermeiden, daß auf die Simulationsteilchen Selbstkräfte wirken, müssen die Gewichte bei der Verteilung der Ladung auf die Eckpunkte der Zelle die gleichen sein wie bei der Interpolation der Felder auf den Teilchenort.

Der Vorteil der PIC Methode gegenüber der direkten Bestimmung der Kräfte über die Coulomb-Wechselwirkung liegt darin, daß der Rechenaufwand nur proportional zur Anzahl der Teilchen ist. Dem Vorteil der geringen Rechenzeit steht der Nachteil gegenüber, daß durch die Einführung eines räumlichen Gitters Übergänge vom gitterfreien zum diskreten Modell und umgekehrt stattfinden (siehe Kapitel 2).

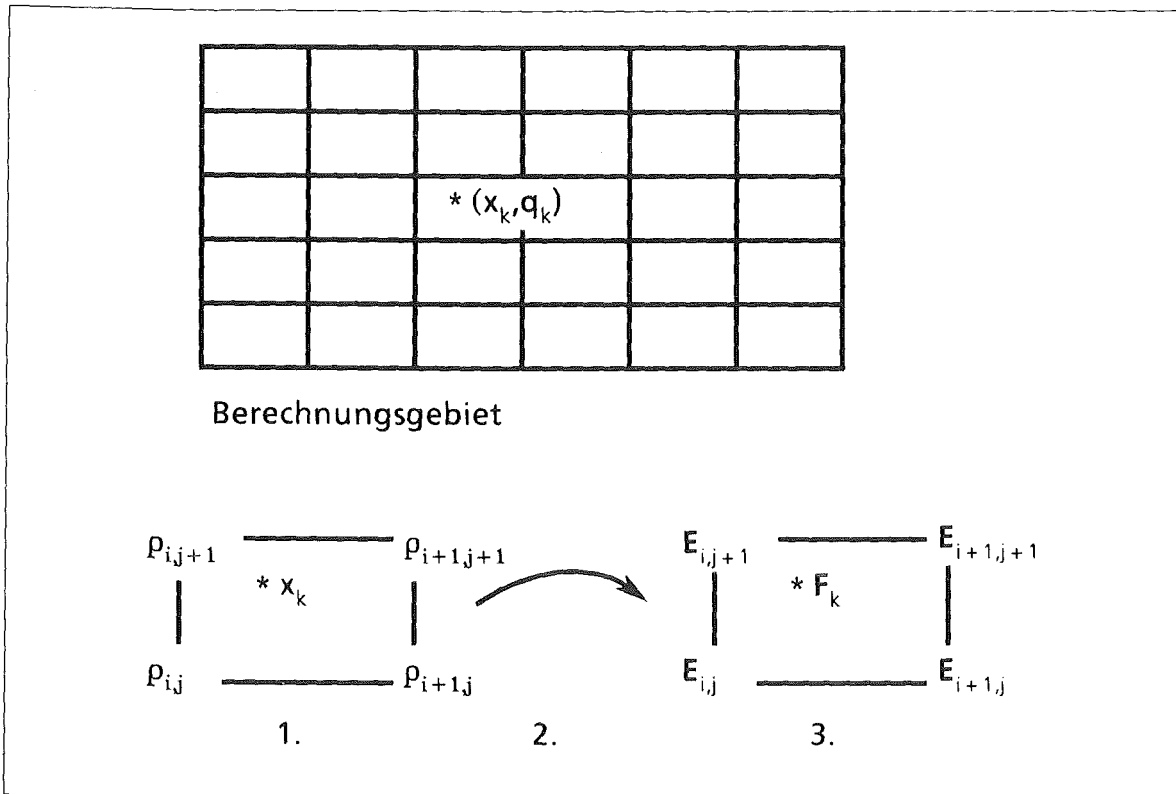


Abb. 1.2.2: Particle-in-Cell Methode. Die Berechnung der Kraft auf das k -te Teilchen wird in drei Schritten indirekt über ein Berechnungsgitter durchgeführt. 1.) Die Ladung wird auf die Eckpunkte der Zelle verteilt: $(x_k, q_k) \rightarrow \rho_{ij}$. 2.) Die Felder werden an den Gitterpunkten berechnet: $\rho_{ij} \rightarrow E_{ij}$. 3.) Die Felder werden auf den Teilchenort interpoliert: $E_{ij} \rightarrow F_k$.

Da die Teilchendichte im Anoden-Kathoden-Spalt gering ist (ca. 10^{12} Teilchen/cm³), beeinflusst das Gesamtsystem die Bewegung eines Teilchens mehr, als die Teilchen aus seiner nächsten Umgebung. Beieinander befindliche, gleichgeladene Plasmateilchen bewegen sich auf ähnlichen Bahnen. Daher muß nicht die Bahn jedes einzelnen Elementarteilchens verfolgt werden, sondern mehrere Elementarteilchen einer Sorte können zu sog. Makroteilchen zusammengefaßt werden. Das Plasmasystem, bestehend z.B. aus Elektronen und Protonen, kann man sich dann durch zwei Sorten von Makroteilchen kleinerer Zahl repräsentiert denken.

Die Sorte eines Makroteilchens ist durch das Verhältnis von Ladung und Masse der Elementarteilchen festgelegt. Da die Bewegung von Elementarteilchen simuliert werden soll, bewegt sich ein Makroteilchen wie ein Elementarteilchen der entsprechenden Sorte. Die Gesamtladung eines Makroteilchens, das in unseren Fällen etwa 10^{10} bis 10^{12} Elektronen bzw. Ionen entspricht, bestimmt sich aus der Summe der Einzelladungen der Plasmateilchen. Somit werden bei der Verteilung der Ladung eines Makroteilchens auf das Gitter alle Einzelladungen der Plasmateilchen berücksichtigt.

Durch die Zusammenfassung mehrerer Plasmateilchen zu einem Makroteilchen und die Fortbewegung der Makroteilchen wie der von Einzelteilchen wird ein Kollektivverhalten der Plasmateilchen simuliert. Insbesondere gibt es keine Stöße bzw. Wechselwirkungen der Einzelteilchen eines Makroteilchens untereinander.

Wir verwenden die oben beschriebene Particle-in-Cell Methode und eine lineare Interpolation der Felder auf den Teilchenort. Die Kraft, die zwischen einem positiv geladenen Makroteilchen und einem negativ geladenen Makroteilchen wirkt, ist dann nicht mehr durch die Coulombkraft gegeben, sondern diese wird stückweise linear approximiert, wobei die Längen der Linearstücke durch das Gitter festgelegt sind [55]. Befinden sich beide Makroteilchen in der gleichen Zelle, ist die Wechselwirkung proportional zum Abstand der Teilchen, und sie können sich ungehindert durchdringen [55]. Durch die Einführung eines diskreten Gitters und der damit verbundenen Interpolation der Kräfte auf den Teilchenort, wird die Singularität der Coulombkraft geglättet. Somit eignet sich die PIC Methode zur Beschreibung von kollisionsfreien Plasmen.

Weitere Anmerkungen zur Anwendbarkeit der PIC Methode auf kollisionsfreie, dünne Plasmen und auf andere Bereiche der Physik werden ausführlich in [39] und [40] diskutiert.

1.3. Randangepaßte Koordinaten

Die zu behandelnden technischen Dioden besitzen nicht nur achsenparallele, sondern i.a. beliebig gekrümmte Ränder mit eventuell einspringenden Ecken. Deshalb verwenden wir räumliche Gitter, die dem Rand angepaßt werden (randangepaßte Koordinaten). Eine Methode, randangepaßte Koordinaten zu erzeugen, wurde von Thompson [51] entwickelt und von Halter [52, 53] für Gebiete mit inneren Rändern und unterschiedlichen Dielektrika verallgemeinert.

Die Grundidee der randangepaßten Koordinaten besteht darin, daß der Rand des physikalischen Gebietes auf den Rand eines Rechtecks abgebildet wird. In diesem Rechteck wird ein äquidistantes Gitter definiert, dessen Urbild dann das randangepaßte Gitter ist.

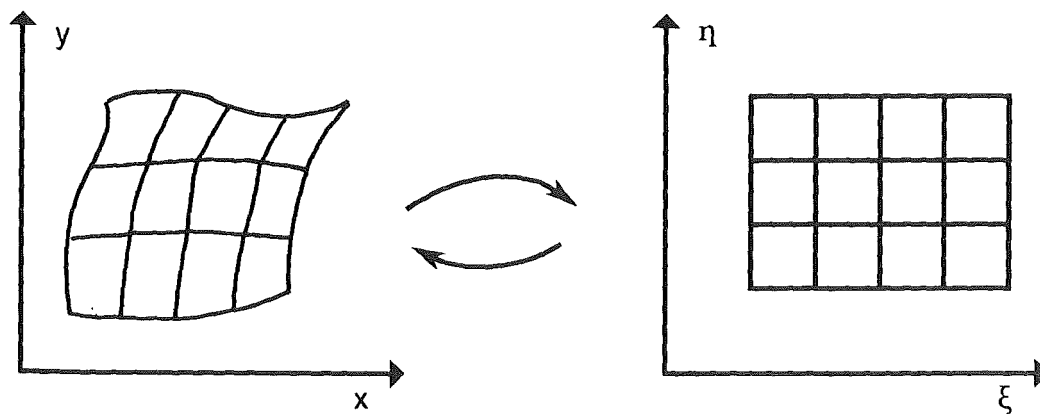


Abb. 1.3.1: Transformation des physikalischen Gebiets auf ein Rechteck in der (ξ, η) -Ebene.

Dadurch wird es ermöglicht, den Rand so zu erfassen, daß keine Interpolation der Randbedingungen auf das Gitter vorgenommen werden muß. Jedem Gitterpunkt wird anschließend ein Punktattribut zugeordnet, so daß die Randbedingungen einfach übertragen werden können. Die aus den randangepaßten Koordinaten entstehenden Zellen sind i.a. nicht achsenparallel, deshalb sind die Formeln der Feldgleichungen zu transformieren (vgl. Anhang A1).

2. Kopplung zwischen der Particle-in-Cell Methode und randangepaßten Koordinaten

Die an den Gitterpunkten berechneten Felder müssen auf den Teilchenort interpoliert werden, damit die Teilchen fortbewegt werden können (Interpolation). Um anschließend die Eigenfelder der Teilchen bei der Feldberechnung zu berücksichtigen, werden sowohl die Ladungs- als auch die Stromdichten der Teilchen an den Gitterpunkten benötigt. Dazu muß für jedes Teilchen die Zelle gefunden werden, in der es sich befindet (Lokalisierung).

Sofern die verwendeten Gitter aus äquidistanten Zellen bestehen, beruhen die für die Interpolation und Lokalisierung erforderlichen Algorithmen auf einfachen Modellen. Bei den aus der Methode der randangepaßten Koordinaten entstehenden nichtäquidistanten, konvexen Viereckzellen sind die bisher verwendeten Algorithmen nicht mehr anwendbar. Im folgenden sollen sowohl für die Interpolation als auch für die Lokalisierung die bisherigen Algorithmen auf nichtäquidistante, konvexe Viereckgitter übertragen werden.

2.1. Interpolation

Die Area-Weighting-Methode

Befindet sich ein Teilchen in einer bestimmten Zelle, so wird zur Berechnung der Kraft am Teilchenort üblicherweise [26-32, 35] nur auf die Information zurückgegriffen, die auf den vier Zellen-Eckpunkten gegeben ist. Die hierbei benutzte Methode zur Interpolation der Funktionswerte f_{00} , f_{10} , f_{11} , f_{01} (vgl. Abb. 2.1.1) auf den Teilchenort $P(\alpha_1, \alpha_2)$ ist die Area-Weighting-Methode [26].

Nehmen wir vereinfachend an, daß die Rechteckzelle ein Einheitsquadrat ist, so ermittelt sich der gesuchte Funktionswert f am Teilchenort (α_1, α_2) als Summe der gewichteten Funktionswerte f_{ij} ($i, j = 0, 1$) durch

$$f = g_{00}f_{00} + g_{10}f_{10} + g_{11}f_{11} + g_{01}f_{01}, \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} g_{00} &= (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) & g_{11} &= \alpha_1\alpha_2 \\ g_{10} &= \alpha_1(1 - \alpha_2) & g_{01} &= (1 - \alpha_1)\alpha_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Die Area-Weighting-Methode kann man in diesen quadratischen Zellen geometrisch interpretieren (vgl. Abb. 2.1.2): Die durch g_{00} , g_{10} , g_{11} , g_{01}

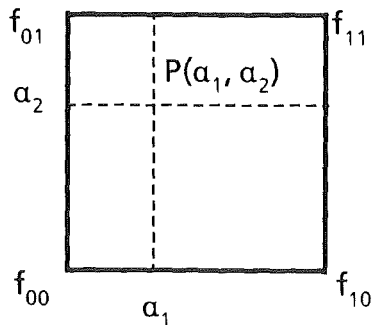


Abb. 2.1.1.

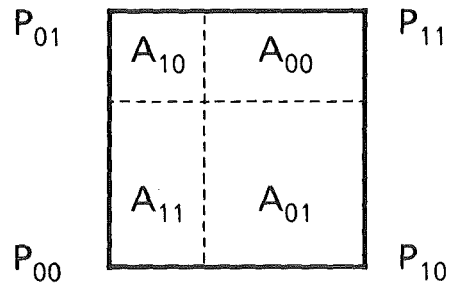


Abb. 2.1.2.

berechneten Gewichte entsprechen den Flächeninhalten A_{00} , A_{10} , A_{11} , A_{01} .

Diese Interpolations-Methode besitzt die folgenden Eigenschaften:

- E1) Liegt der Punkt P auf einer Randstrecke $P_{ij}P_{kl}$ ($i, j, k, l \in \{0, 1\}$, $|i - j| + |k - l| = 1$), so tragen nur g_{ij} und g_{kl} zur Funktionsbestimmung am Orte P bei.
- E2) $0 \leq g_{ij} \leq 1$ ($i, j = 0, 1$) mit $g_{00} + g_{10} + g_{11} + g_{01} = 1$.
Diese Bedingung bedeutet physikalisch, daß bei der Bestimmung der Dichten an den Gitterpunkten genau die Ladung auf die Ecken einer Zelle verteilt wird, die in der Zelle enthalten ist, und damit die Ladung eine Erhaltungsgröße bildet.
- E3) Bilineare Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = ax + by + cxy + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$
 werden in $[0, 1] \times [0, 1]$ exakt approximiert.

Umgekehrt folgt aus den Eigenschaften (E1, E2, E3), daß die Gewichte g_{00} , g_{10} , g_{11} , g_{01} durch die in (1) angegebenen Formeln bestimmt sind.

Notwendige Bedingungen für eine Verallgemeinerung

Es wird eine Funktion F gesucht, welche die randangepaßte Zelle in das Einheitsquadrat I^2 transformiert. Durch diese Abbildung wird jedem Punkt der Zelle ein Paar $(\alpha_1, \alpha_2) \in I^2$ zugeordnet. Über dieses Paar werden anschließend die Interpolationsgewichte g_{00} , g_{10} , g_{11} , g_{01} gemäß den Formeln in (1) berechnet.

Da die Area-Weighting-Methode verallgemeinert werden soll, muß die gesuchte Funktion F , im Spezialfall des Einheitsquadrats, die identische Abbildung sein und die Interpolation mit der Area-Weighting-Methode zusammenfallen. Insbesondere werden damit bilineare Funktionen in Rechteck-Zellen exakt approximiert. Im allgemeinen Fall jedoch muß man sich auf lineare Funktionen beschränken, da beliebige bilineare Funktionen nicht mehr exakt approximiert werden können, wie ein Beispiel in [56] zeigt.

Um einen Ansatz für eine Verallgemeinerung zu finden, fassen wir die Problemstellung folgendermaßen zusammen:

Gegeben sei ein konvexes Viereck G (vgl. Abb. 2.1.3a) mit den Ecken (x_{00}, y_{00}) , (x_{10}, y_{10}) , (x_{11}, y_{11}) und (x_{01}, y_{01}) und das Einheitsquadrat $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$.

Gesucht ist eine Funktion

$$F: G \rightarrow I^2, \quad (x, y) \rightarrow F(x, y) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

mit der Eigenschaft, daß für alle linearen Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x, y) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)f(x_{00}, y_{00}) + \alpha_1(1-\alpha_2)f(x_{10}, y_{10}) + \alpha_1\alpha_2f(x_{11}, y_{11}) + (1-\alpha_1)\alpha_2f(x_{01}, y_{01}) \quad (2)$$

für alle $(x, y) \in G$.

Um notwendige Bedingungen für die gesuchte Funktion F zu finden, setzen wir in Formel (2) eine beliebige Funktion

$$f(x, y) = ax + by + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

ein:

$$ax + by + c = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(ax_{00} + by_{00} + c) + \alpha_1(1-\alpha_2)(ax_{10} + by_{10} + c) + \alpha_1\alpha_2(ax_{11} + by_{11} + c) + (1-\alpha_1)\alpha_2(ax_{01} + by_{01} + c).$$

Wir ordnen die rechte Seite dieser Gleichung nach den Koeffizienten a , b und c und erhalten:

$$ax + by + c = a\{\alpha_1\alpha_2(x_{11}-x_{10}-x_{01}+x_{00}) + \alpha_1(x_{10}-x_{00}) + \alpha_2(x_{01}-x_{00}) + x_{00}\} + b\{\alpha_1\alpha_2(y_{11}-y_{10}-y_{01}+y_{00}) + \alpha_1(y_{10}-y_{00}) + \alpha_2(y_{01}-y_{00}) + y_{00}\} + c.$$

Da diese Gleichung für beliebige lineare Funktionen erfüllt sein soll, muß gelten:

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2(x_{11}-x_{10}-x_{01}+x_{00}) + \alpha_1(x_{10}-x_{00}) + \alpha_2(x_{01}-x_{00}) &= x-x_{00} \\ \alpha_1\alpha_2(y_{11}-y_{10}-y_{01}+y_{00}) + \alpha_1(y_{10}-y_{00}) + \alpha_2(y_{01}-y_{00}) &= y-y_{00} \end{aligned}$$

Wie aus diesem Gleichungssystem ersichtlich wird, sind die Gleichungen invariant bezüglich einer Translation T des Vierecks um den Vektor (x_{00}, y_{00}) . Insbesondere können wir damit o.E.d.A. annehmen, daß $(x_{00}, y_{00}) = (0, 0)$. Das nun zu lösende Gleichungssystem

$$\alpha_1 \alpha_2 \left[\begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{pmatrix} \right] + \alpha_1 \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ist invariant bezüglich der Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix. Führen wir eine Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x^s \\ y^s \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit } A := \begin{pmatrix} x_{10} & x_{01} \\ y_{10} & y_{01} \end{pmatrix}^{-1}$$

durch, erhalten wir für α_1 und α_2 das normierte, nichtlineare Gleichungssystem

$$\alpha_1 \alpha_2 \begin{pmatrix} x_{11}^s - 1 \\ y_{11}^s - 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^s \\ y^s \end{pmatrix}.$$

Geometrisch entspricht diese Transformation einer linearen Abbildung, die das auf den Ursprung verschobene Viereck auf ein Standard-Viereck G^s der Form (2.1.3b) abbildet.

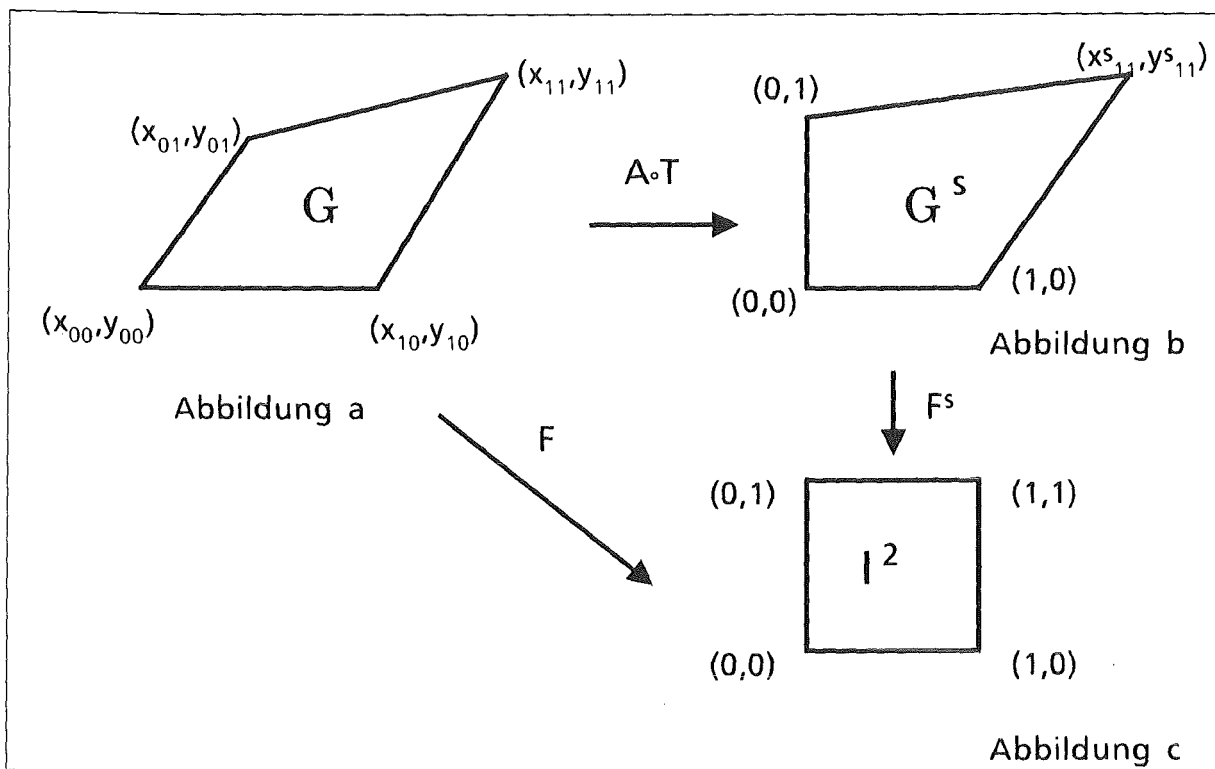


Abb. 2.1.3: Transformation des konvexen Vierecks G auf das Einheitsquadrat I^2 .

Explizite Formeln

Die Lösungen (α_1, α_2) des Gleichungssystems können explizit durch die folgenden Formeln berechnet werden:

$$\alpha_2 = \frac{-p + (p^2 + q)^{1/2}}{(x_{11}^s - 1)} \quad \text{für } x_{11}^s \neq 1$$

$$\alpha_2 = \frac{y^s}{1 + x^s(y_{11}^s - 1)} \quad \text{für } x_{11}^s = 1$$

$$\text{und } \alpha_1 = \frac{x^s}{1 + \alpha_2(x_{11}^s - 1)}$$

mit $p = \frac{1}{2}(1 + x^s(y_{11}^s - 1) - y^s(x_{11}^s - 1))$ und $q = y^s(x_{11}^s - 1)$.

Diskussion

Man kann zeigen, daß für alle $(x, y) \in G$ gilt: $(\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y)) \in I^2$. Die Funktion $F: G \rightarrow I^2$, definiert durch $F(x, y) := (\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y))$, bildet daher das konvexe Viereck G auf das Einheitsquadrat ab. Berechnet man die Gewichte α_1, α_2 nach obiger Formel, so ist Gleichung (2) für beliebige lineare Funktionen für alle $(x, y) \in G$ erfüllt.

Für $x_{11}^s = 1$ ist

$$\alpha_2 = \lim_{x_{11}^s \rightarrow 1} \frac{-p + (p^2 + q)^{1/2}}{(x_{11}^s - 1)} = \frac{y^s}{1 + x^s(y_{11}^s - 1)}, \quad \alpha_1 = x^s,$$

und für $y_{11}^s = 1$ gilt

$$\alpha_2 = y^s, \quad \alpha_1 = \frac{x^s}{1 + y^s(x_{11}^s - 1)}.$$

Für den Fall, daß das Gebiet G das Einheitsquadrat I^2 ist, folgt $\alpha_1 = x$ und $\alpha_2 = y$. Somit ist die Area-Weighting-Methode als Grenzfall enthalten.

Durch die Abbildung F wird also jedem Punkt einer randangepaßten Zelle ein Paar $(\alpha_1, \alpha_2) \in I^2$ zugeordnet. Über dieses Paar werden die Interpolationsgewichte g_{ij} ($i, j = 0, 1$) gemäß den in (1) angegebenen Formeln bestimmt. Damit sind die Eigenschaften E1 und E2 erfüllt und beliebige lineare Funktionen werden exakt approximiert. Da die Area-Weighting-Methode als Grenzfall enthalten ist, haben wir die gesuchte Verallgemeinerung auf beliebige konvexe Vierecke gefunden.

2.2. Lokalisierung

Zur Kennzeichnung von Gitterpunkten im Gitter werden jedem Gitterpunkt die Adressen in x- und y-Richtung als Zahlenpaar (I,J) zugewiesen. Wir betrachten zunächst ein Rechteckgitter (d.h. ein Gitter, in dem die Zellen identische Rechtecke sind). Hier ist die Berechnung der Adressen einfach, denn ein Gitterpunkt (I,J) besitzt die Koordinaten

$$x_{ij} = x_0 + (I-1)\Delta x,$$

$$y_{ij} = y_0 + (J-1)\Delta y,$$

wobei (x_0, y_0) die Koordinaten des linken unteren Eckpunktes des Gitters und Δx und Δy die Maschenweiten in x- bzw. y-Richtung sind.

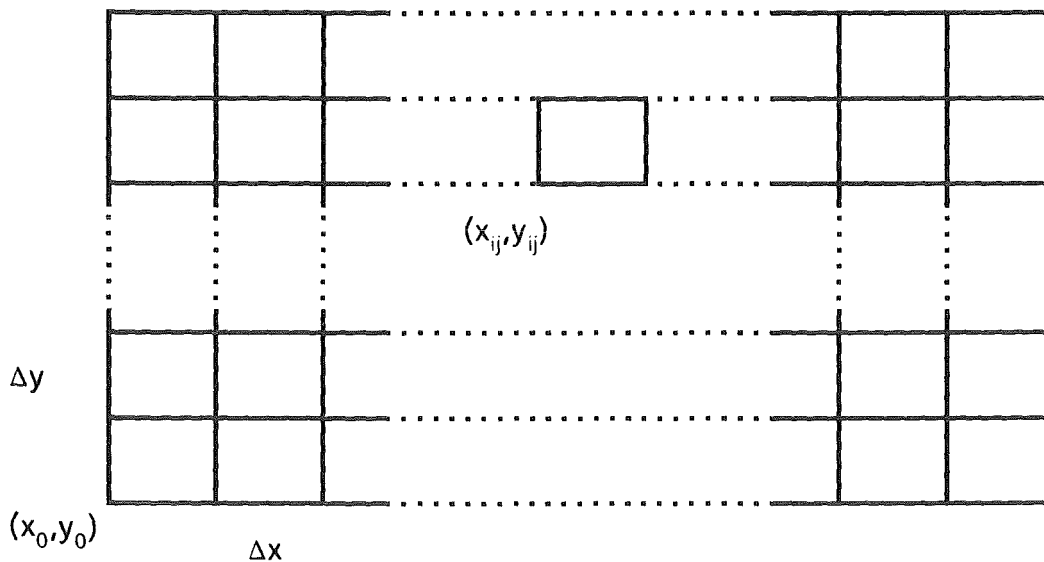


Abb. 2.2.1: Reguläres Rechteckgitter. Maschenweite in x-Richtung Δx und in y-Richtung Δy .

Ordnet man einer Zelle im Gitter die Adresse des linken unteren Eckpunktes der Zelle zu, so ist die Zelladresse bei einem Rechteckgitter durch

$$I = \text{INT}((x_{ij} - x_0)/\Delta x) + 1,$$

$$J = \text{INT}((y_{ij} - y_0)/\Delta y) + 1$$

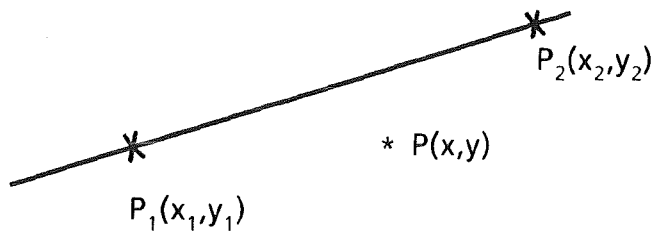
gegeben, wenn $\text{INT}(\cdot)$ der ganzzahlige Anteil einer reellen Zahl bedeutet.

Entsprechend befindet sich ein Teilchen mit den Koordinaten (x,y) in der Zelle mit der Adresse

$$I = \text{INT}((x - x_0)/\Delta x) + 1,$$

$$J = \text{INT}((y - y_0)/\Delta y) + 1.$$

In randangepaßten Gittern ist diese einfache Bestimmung der Zelle, in der sich ein Teilchen befindet, nicht mehr möglich. Hier nützen wir aus, daß die Lage eines Punktes $P(x,y)$ bezüglich einer Geraden P_1P_2 folgendermaßen charakterisiert werden kann:



Der Punkt $P(x,y)$ liegt $\left\{ \begin{array}{l} \text{links} \\ \text{auf} \\ \text{rechts} \end{array} \right\}$ der Geraden, genau dann wenn

$$(x_2 - x_1)(y - y_2) \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} (x - x_2)(y_2 - y_1).$$

Ein Teilchen $P(x,y)$ befindet sich somit in der randangepaßten Zelle (I,J) ,

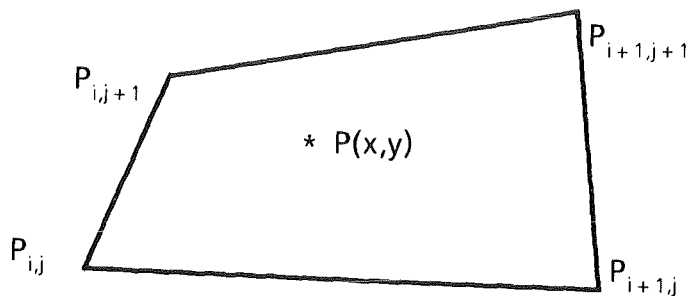


Abb. 2.2.2: Teilchen $P(x,y)$ in der randangepaßten Zelle (I,J) .

wenn es sich

- über der unteren Zellenbegrenzung $P_{i,j} P_{i+1,j}$,
- links von der rechten Zellenbegrenzung $P_{i+1,j} P_{i+1,j+1}$,
- unter der oberen Zellenbegrenzung $P_{i+1,j+1} P_{i,j+1}$ und
- rechts von der linken Zellenbegrenzung $P_{i,j} P_{i,j+1}$

befindet. Dies legt folgenden Suchalgorithmus nahe:

Schritt 1: Starte in Zelle (I,J) (z.B. der Zelle, in dem das Teilchen vorher war).

Schritt 2: Falls das Teilchen unter dem unteren Zellrand: Setze $J = J - 1$, gehe zu 2.

Schritt 3: Falls das Teilchen rechts vom rechten Zellrand: Setze $I = I + 1$, gehe zu 2.

Schritt 4: Falls das Teilchen über dem oberen Zellrand: Setze $J = J + 1$, gehe zu 2.

Schritt 5: Falls das Teilchen links vom linken Zellrand: Setze $I = I - 1$, gehe zu 2.

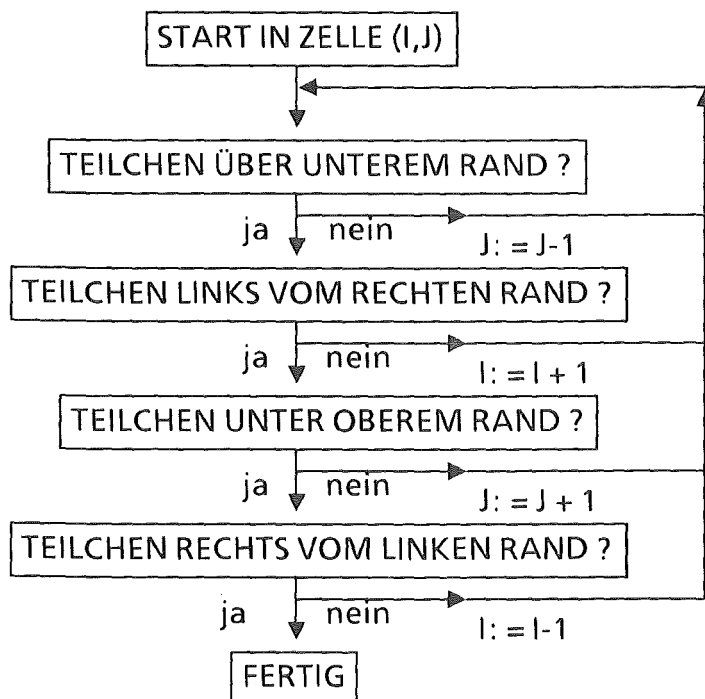


Abb. 2.2.3: Suchalgorithmus zum Finden derjenigen Zelle, in der ein Teilchen sich befindet.

Der Nachteil dieser Methode besteht darin, daß für jedes Teilchen mindestens vier Abfragen notwendig sind, um es in einer Zelle zu lokalisieren. Dies äußert sich in einer sehr hohen Rechenzeit. Ein alternativer Weg zur Lokalisierung von Teilchen in randangepaßten Koordinaten, der in Bezug auf Vektorisierung des Algorithmus entwickelt wurde, wird in [57] beschrieben. Diese Methode der Lokalisierung befindet sich jedoch noch in der Testphase.

3. Physikalische Modelle

Die numerischen Simulationen sollen dazu dienen, die Fokussierungseigenschaften gegebener Diodenkonfigurationen zu bestimmen und sie durch Variation sowohl der Anoden- und Kathodenform als auch des Spaltabstandes zu optimieren. Eine optimale Anoden-Kathoden-Konfiguration ist dann erreicht, wenn die Ionenstrahlen auf eine minimale Fläche fokussiert werden.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß die physikalischen Prozesse in den von uns behandelten Dioden zu jedem Zeitpunkt als stationär angesehen werden können: In etwa 50 ns steigt die Spannung auf Werte zwischen 1,3 MV und 1,8 MV an. Bei einer Diode mit 1 cm Spaltabstand entspricht dies einem elektrischen Feld von mindestens $1,3 \cdot 10^8$ V/m. Wie Simulationsergebnisse zeigen, wird dabei ein magnetisches Feld induziert, das kleiner als 5 T ist. Damit ist

$$|\text{rot } \mathbf{E}| \geq 1,3 \cdot 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \gg 10^8 \frac{\text{T}}{\text{s}} \approx \left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|.$$

Außerdem ist

$$|\mathbf{j}| \geq 10^6 \frac{\text{Cb}}{\text{s m}^2} \gg 2,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Cb}}{\text{s m}^2} \approx \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| = \epsilon_0 \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|.$$

Folglich sind die globalen Vorgänge in der Diode zu jedem Zeitpunkt (insbesondere zum Zeitpunkt der maximalen Spannung) stationär und in den Maxwellgleichungen können die Terme mit den zeitlichen Änderungen sowohl des elektrischen als auch des magnetischen Feldes vernachlässigt werden. Schnell veränderliche Vorgänge im mikroskopischen Bereich lassen sich durch den PIC-Code nicht mehr erfassen. Unter dieser Voraussetzung reduzieren sich die Maxwellgleichungen

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j},$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho,$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0,$$

auf die Feldgleichungen

$$\mathbf{E} = - \operatorname{grad} \Phi ,$$

$$\Delta \Phi = - \frac{\rho}{\varepsilon_0} ,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} ,$$

wenn wir annehmen, daß im Diodeninnern Vakuum existiert, und damit $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ und $\mathbf{H} = 1/\mu_0 \mathbf{B}$ ist.

Wir gehen von der Voraussetzung aus, daß sich sowohl an der Anode als auch an der Kathode ein Plasma gebildet hat. Die Emission der Teilchen erfolgt dann raumladungsbegrenzt, d.h. es werden gerade so viele Teilchen erzeugt, daß auch die Normal- neben der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf der Plasmaoberfläche verschwindet, die als unendlich gut leitfähig angesehen wird.

Aufgrund von thermischen und magnetohydrodynamischen Effekten treiben die Fronten des Plasmas der beiden Elektroden mit einer Geschwindigkeit von $10^6 - 10^7$ cm/s [44, 45] aufeinander zu. Diese entspricht etwa 1/100 der Geschwindigkeit, die die Ionen bei der Beschleunigung durch das elektrische Feld bei 1,3 MV Spannung erfahren. Daher können wir im Verlauf der numerischen Simulation die Bewegung der Plasmafront vernachlässigen.

Wegen der Rotationssymmetrie der hier betrachteten Dioden führen wir Zylinderkoordinaten (r, θ, z) ein. Das äußere elektrische Feld in der leeren Diode besteht dann nur aus den Komponenten E_r und E_z , wobei beide Komponenten nicht vom Winkel θ abhängen.

Das elektrische Feld ist zunächst auch an den emittierenden Elektrodenflächen ungleich Null. Daher werden dort so viele geladene Teilchen erzeugt, bis dieses Feld auf der Oberfläche der Elektroden verschwindet. Die Beschleunigung der Teilchen erfolgt zunächst nur durch das elektrische Feld in der (r,z) -Ebene.

Nimmt man bei der Emission der Teilchen eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung mit einer Temperatur von 5 eV an, so können wir die θ -Komponente der Geschwindigkeit im Vergleich zur elektrischen Beschleunigung von 1,3 MV vernachlässigen.

Ebenfalls wird die Raumladung der Teilchen als vom Winkel θ unabhängig angenommen. Wegen $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ ist folglich auch das vollständige elektrische Feld $\mathbf{E} = (E_r, 0, E_z)$ unabhängig vom Winkel θ . Die durch die Bewegung der Teilchen verursachten Stromdichten $\mathbf{j} = (j_r, 0, j_z)$ liefern ein Magnetfeld \mathbf{B} , das nur eine θ -Komponente besitzt.

Werden nun die Bewegungsgleichungen der Teilchen unter Berücksichtigung der elektrischen und magnetischen Felder gelöst

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

so sind sowohl die Orts- als auch die Geschwindigkeitskomponenten unabhängig vom Winkel θ , und die Bewegung findet nur in der (r,z) -Ebene statt.

Die das elektromagnetische System beschreibenden Größen sind gegeben durch

ρ, j_r, j_z	(Dichten),
ϕ	(Potential),
E_r, E_z, B_θ	(Felder),
r, z, v_r, v_z, q	(Teilchen).

Wenden wir zur Berechnung des Magnetfeldes das Ampèresche Gesetz an, gilt für eine Fläche F mit Randkurve C , Normalen \mathbf{n} und Tangente \mathbf{t}

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, ds = \mu_0 \iint_F \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, df .$$

Das B_θ -Feld am Radius r bestimmt sich aus

$$B_\theta(r,z) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \iint_F \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, df ,$$

wenn F eine um die Rotationsachse symmetrische Fläche ist.

Da die Elektronen in Hochstrom-Dioden Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit erreichen, muß für deren Berechnung der Elektronen-Geschwindigkeiten und Positionen die relativistische Lorentzgleichung

$$\mathbf{F} = \frac{d(m \frac{d\mathbf{x}}{dt})}{dt} = q(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt}(0) = \mathbf{v}_0$$

gelöst werden, wobei

$$m = m_0 \gamma, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\|^2 / c^2}$$

und m_0 die Ruhemasse des Elektrons bedeuten.

Definieren wir

$$\mathbf{p}(t) := \gamma(t) \mathbf{v}(t) := \gamma(t) \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t),$$

so sind Lösungen von

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{m_0} (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 = \gamma(0) \mathbf{v}(0)$$

mit

$$\gamma^2 = 1 + \|\mathbf{p}\|^2 / c^2$$

und

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

gesucht.

Unter der Voraussetzung $\mathbf{B} = (0, B_\theta, 0)$ bzw. $\mathbf{E} = (E_r, 0, E_z)$ und der Annahme, daß $v_\theta(0) = 0$, findet die Bewegung in der zu \mathbf{B} senkrechten (r, z) -Ebene statt und die zu lösenden Gleichungen lauten

$$\frac{dp_r}{dt}(t) = \frac{q}{m_0} \left(E_r(t) - \frac{p_z(t)}{\gamma(t)} B_\theta(t) \right) , \quad p_r(0) = p_{r0} ,$$

$$\frac{dp_z}{dt}(t) = \frac{q}{m_0} \left(E_z(t) + \frac{p_r(t)}{\gamma(t)} B_\theta(t) \right) , \quad p_z(0) = p_{z0} ,$$

$$\frac{dr}{dt}(t) = v_r(t) , \quad r(0) = r_0 ,$$

$$\frac{dz}{dt}(t) = v_z(t) , \quad z(0) = z_0 .$$

Die relativistischen Bewegungsgleichungen können nicht analytisch gelöst werden. Deshalb werden die Differentialgleichungen diskretisiert, wie dies im Anhang A2 beschrieben wird, und die Teilchenkoordinaten mit einem geeigneten numerischen Verfahren berechnet.

Zur Diskretisierung durch das räumliche Gitter, das zur Bestimmung der Feldgrößen eingeführt wird, und der Diskretisierung durch die Makroteilchen kommt nun noch eine Diskretisierung durch ein zeitliches Gitter hinzu. Die numerischen Diskretisierungen erzeugen systematische Fehler, die in ihrem Zusammenwirken nicht über eine numerische Theorie bestimmt werden können. Die Simulationsrechnungen in [58] zeigen, daß sich in der numerischen Rechnung kein stationärer Wert in den Strömen und Feldern einstellt, sondern ein Zustand, der um einen stationären Wert osziliert. Diese zeitlichen Fluktuationen sind ebenfalls auf die numerischen Diskretisierungen zurückzuführen. Um Aussagen über die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse zu erhalten, werden diese zeitlich gemittelt und in Spezialfällen mit vorhandenen analytischen Modellen verglichen.

4. Verifikation des Particle-in-Cell-Codes am Beispiel des Plattenkondensators

Im Spezialfall eines ebenen Plattenkondensators können die Ergebnisse des PIC-Codes mit exakten Ergebnissen bzw. analytischen Modellen verglichen werden.

Falls wir das Eigenmagnetfeld der Teilchen vernachlässigen und annehmen, daß die Teilchenemission raumladungsbegrenzt erfolgt, können wir im Plattenkondensator über das Child-Langmuir-Gesetz [5,6] die Ströme analytisch berechnen. Für den nichtrelativistischen, monopolen Stromfluß gilt für die Stromdichte j

$$j = 4/9 \varepsilon_0 \left(\frac{2Ze}{m} \right)^{1/2} \frac{V_0^{3/2}}{d^2},$$

wenn e/m das Ladungs-zu-Masse Verhältnis der Teilchen, V_0 die Potentialdifferenz und d der Abstand zwischen Anode und Kathode ist.

Die Verallgemeinerung auf relativistische Teilchen und bipolaren Stromfluß wurde u.a. von Jory und Trivelpiece [8] und von Antonsen und Ott [13] abgeleitet. Für das Verhältnis zwischen Ionenstrom I_i und Elektronenstrom I_e gilt die Beziehung

$$\frac{I_i}{I_e} = \left(\frac{2\alpha + 1}{2\beta + 1} \right)^{1/2},$$

mit

$$\alpha = \frac{m_e c^2}{e V_0} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{m_i c^2}{Z e V_0}.$$

Das Einstellen eines stationären Zustandes im Plattenkondensator (Radius $R = 0,1$ m, Plattenabstand $D = 0,01$ m) wurde sowohl beim monopolen als auch beim bipolaren Fluß in [58] bereits ausführlich geschildert. Es sollen hier nur die Ergebnisse zusammenfassend diskutiert werden.

Im monopolen Fall (Abb. 4.1) als auch im bipolaren Fall (Abb. 4.2) wurden die Ströme als Funktion der angelegten Spannung sowohl analytisch als auch numerisch berechnet. Da bei der numerischen Rechnung insbesondere beim

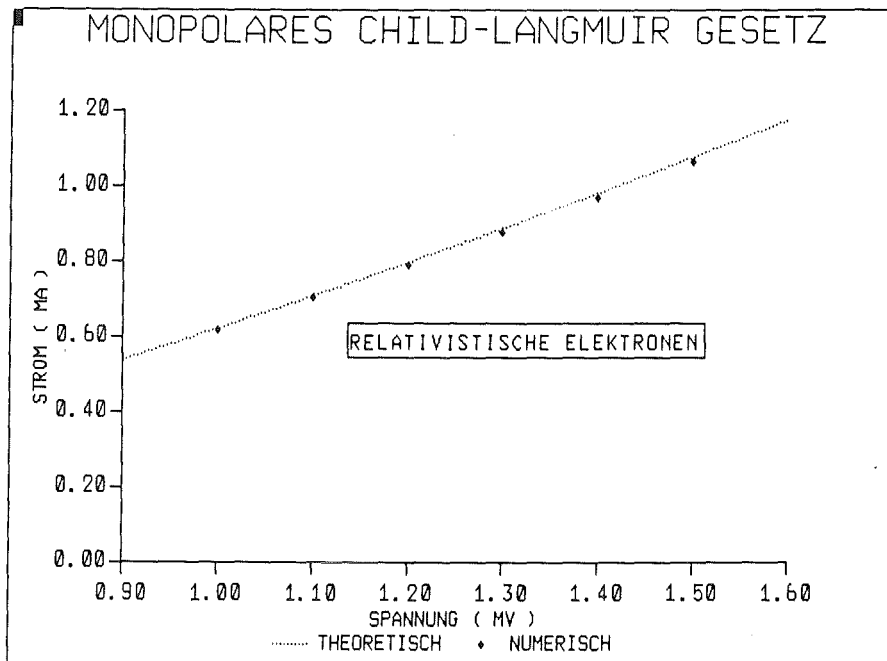


Abb. 4.1: Monopolarer Fluß von Elektronen im Plattenkondensator ohne Berücksichtigung der Eigenmagnetfelder der Teilchen.

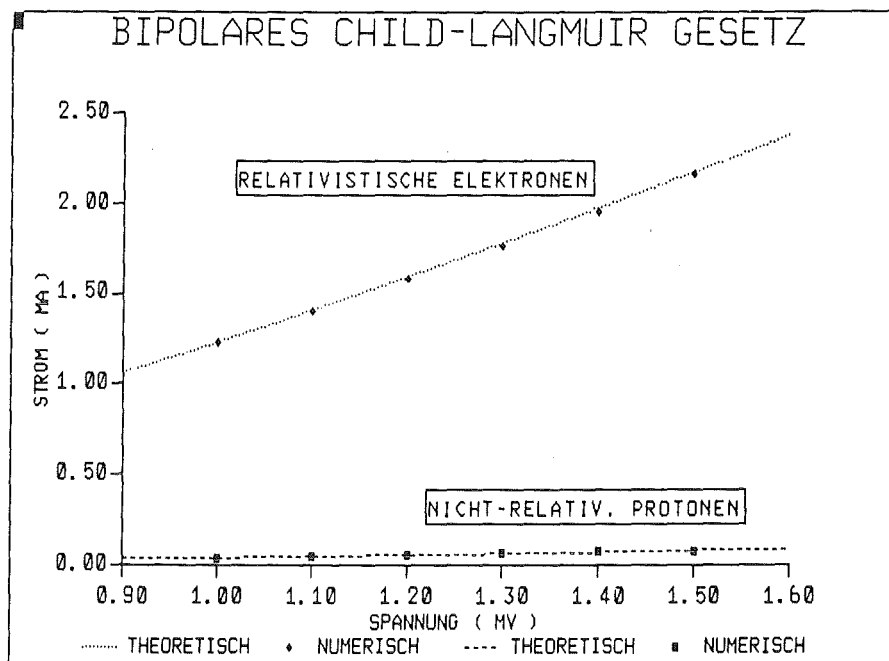


Abb. 4.2: Bipolarer Fluß von Elektronen und Protonen im Plattenkondensator ohne Berücksichtigung der Eigenmagnetfelder der Teilchen.

bipolaren Fall zeitliche Oszillationen um einen stationären Wert des Stromes auftraten, wurden die Stöme über die letzten 100 Zeitschritte gemittelt. Die gestrichelten Kurven entsprechen den analytischen Daten und die Punkte auf den Kurven den numerisch berechneten stationären Stromwerten. Als Ionen wurden Protonen gewählt und die Simulationen mit dem wahren Elektronen-zu-Protonen Massenverhältnis durchgeführt. Die Abweichung zwischen numerischer Rechnung und analytischen Werten ist in allen Fällen - nach der erwähnten Mittelung über 100 Zeitschritte - unterhalb von 2%.

Unter Berücksichtigung der Eigenmagnetfelder der Teilchen konnten Goldstein et. al. [17] für $R \gg D$ bei geeigneten Einschränkungen zeigen, daß bei einem monopolen Elektronenfluß der Gesamtstrom durch

$$I = 8500 \frac{R}{D} \gamma^{1/2} \ln(\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}) \quad [A]$$

mit

$$\gamma = 1 + \frac{eV_0}{m_e c^2}$$

gegeben ist (GDSL-Theorie).

In Abb. 4.3 haben wir für verschiedene Spannungen im Plattenkondensator die theoretische Lösung mit den numerisch ermittelten Strömen verglichen. Im Bereich zwischen 1,0 MV und 1,5 MV erhalten wir systematische Abweichungen unterhalb von 5%.

Für den bipolaren Fluß von Elektronen und Ionen kann für $R \gg D$ bei geeigneten Einschränkungen das Verhältnis von Ionenstrom zu Elektronenstrom durch

$$\frac{I_i}{I_e} > \frac{1}{2} \frac{R}{D} \left(2 \frac{eV_0}{m_i c^2} \right)^{1/2}$$

abgeschätzt werden [18].

Für Spannungen im Bereich zwischen 1,0 MV und 1,5 MV wurde das Stromverhältnis berechnet. Die numerischen Ergebnisse sind zusammen mit den theoretischen Werten für die untere Schranke in Tab. 4.1 angegeben. Es stellen sich in der numerischen Rechnung Werte ein, die um 10% um diese untere Schranke streuen.

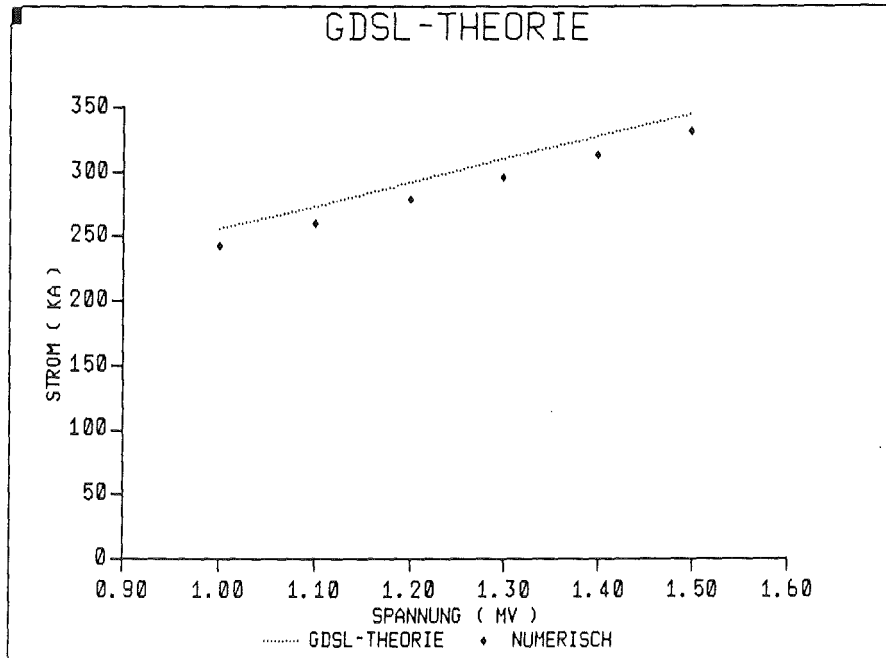


Abb. 4.3: Monopolarer Fluß von Elektronen im Plattenkondensator mit Berücksichtigung des Eigenmagnetfeldes der Teilchen.

angelegte Spannung	numerisches Stromverhältnis	theoretisches Stromverhältnis
1,0 MV	0,229	0,231
1,1 MV	0,265	0,242
1,2 MV	0,272	0,253
1,3 MV	0,260	0,263
1,4 MV	0,286	0,273
1,5 MV	0,283	0,283

Tab. 4.1: Vergleich der numerisch berechneten Verhältnisse von Ionenstrom zu Elektronenstrom mit den theoretischen Werten für verschiedene Spannungen.

In Tabelle 4.2 werden für zwei verschiedene Spannungswerte die Ströme verglichen, die sich ohne bzw. mit Berücksichtigung des Eigenmagnetfeldes ergeben. Durch das Einwirken des Magnetfeldes sinkt der Elektronenstrom, während der Ionenstrom ansteigt. Die Abnahme des Elektronenstromes rührt daher, daß durch das Magnetfeld die Aufenthaltsdauer der Elektronen im Spalt zunimmt und damit der Elektronenstrom abfällt. Insbesondere steigt auch die Elektronenladung im Spalt. Da wir annehmen, daß die Teilchen an den Elektrodenflächen raumladungsbegrenzt emittiert werden, folgt durch Anwendung des Gaußschen Gesetzes, daß im Spalt Ladungsneutralität herrscht. Damit werden entsprechend mehr Ionen an der Anode erzeugt und folglich steigt der Ionenstrom.

angelegte Spannung	I_e	I_i	η
1,0 MV	1234 kA	40 kA	0,031
	(253 kA)	(58 kA)	(0,186)
1,5 MV	2173 kA	80 kA	0,036
	(344 kA)	(97 kA)	(0,220)

Tab. 4.2: Ströme und Wirkungsgrad im Plattenkondensator für zwei verschiedene Spannungen ohne bzw. mit (Werte in Klammern) Berücksichtigung des Eigenmagnetfeldes.

Aus Tabelle 4.2 kann man entnehmen, daß das Verhältnis η von Ionen- zu Elektronenstrom wächst, wenn man das Eigenmagnetfeld bei diesen hohen Strömen berücksichtigt. Betrachtet man den Plattenkondensator als grobes Beispiel für eine Ionen-Diode, so zeigt die Rechnung, daß sich der Wirkungsgrad der Diode mit wachsendem Strom als Folge des Einflusses des Eigenmagnetfeldes erhöht. In unseren Beispielen entspricht die Steigerung des Wirkungsgrades etwa dem Faktor 6.

Die Rechnungen im Spezialfall eines ebenen Plattenkondensators zeigen, daß die numerischen Ergebnisse bei Berücksichtigung des elektrischen Eigenfeldes bis auf 2% mit dem relativistischen Child-Langmuir-Gesetz übereinstimmen. Unter Berücksichtigung sowohl der elektrischen als auch der magnetischen Eigenfelder erhalten wir gegenüber analytischen Modellen systematische Abweichungen von 5 bzw. 10%. Somit können wir den PIC-Code nicht nur zur qualitativen Beschreibung der physikalischen Prozesse in den Dioden einsetzen, sondern durch numerische Rechnungen auch quantitative Aussagen über physikalische Größen wie z.B. Ströme erhalten, die innerhalb der Ungenauigkeiten der zu vergleichenden experimentellen Werte liegen.

5. Simulation einer fokussierenden Pinch-Diode

In diesem Kapitel wird der PIC-Code auf ein konkretes Beispiel einer fokussierenden Pinch-Diode angewendet. Anhand dieser technischen, rotations-symmetrischen Vakuumdiode werden wir den Einfluß sowohl der elektrischen als auch der magnetischen Eigenfelder auf die Bewegung der Teilchen und rückwirkend auf das gesamte System noch einmal ausführlicher demonstrieren.

In einer ersten Simulation berechnen wir die Bewegung von Elektronen unter dem Einfluß sowohl des äußeren als auch des selbsterzeugten elektrischen Feldes. Anschließend berücksichtigen wir zusätzlich das Eigenmagnetfeld der Elektronen und vergleichen beide Ergebnisse miteinander. In einer weiteren Rechnung simulieren wir einen bipolaren Fluß von Elektronen und Protonen. Erst im bipolaren Fall gyrieren die Elektronen zur Rotationsachse. Dabei treffen 77 % der Elektronen die Anode im achsennahen Bereich und schließen mit der Flächennormalen der Anode einen Winkel kleiner als 45° ein.

Dieser Effekt wurde von Maron [60] ebenfalls in einer Pinch-Diode beobachtet und von Turnbull et. al. [50] durch Simulationsrechnungen in einer vereinfachten Diodenkonfiguration beschrieben. Aus unseren numerischen Simulationen können wir entnehmen, daß dieser Effekt bei der fokussierenden Pinch-Diode bei höheren Spannungen und kleineren Abmessungen der Diode ebenfalls auftritt.

Weiterführend als Turnbull werden in unseren Rechnungen jedoch die sphärischen Krümmungen der Anode bzw. Kathode berücksichtigt. Dadurch sind wir in der Lage, die Auswirkungen dieses Effektes auf die Fokussierungseigenschaften zu beschreiben. Wie die Simulationsrechnungen ergaben, sind die Ursachen dieses Effekts dafür verantwortlich, daß die aus dem unteren Bereich der Anode emittierten Ionen nicht fokussiert werden.

Die geometrischen Dimensionierungen der Pinch-Diode entsprechen der im KfK verwendeten, fokussierenden Pinchreflex-Diode mit axialem Anoden-Kathoden-Spalt [59]. Die Pinchreflex-Diode besitzt im Gegensatz zur Pinch-Diode zusätzlich

eine "Reflex-Anode", welche die Elektronen mit gewissem Energieverlust passieren läßt. Da wir in diesem Kapitel die Einflüsse der Eigenfelder im Falle einer einfachen, fokussierenden Ionen-Diode qualitativ bestimmen wollen, gehen wir nicht näher auf die speziellen Eigenschaften der Pinchreflex-Diode ein.

Abb. 5.1 zeigt eine schematische Skizze der rotationssymmetrischen, fokussierenden Pinch-Diode. Die Vakuumdiode besteht aus einer massiven Anodenplatte und einem Kathodenring. Eine Mylarfolie am Kathodenring schließt die Vakuumdiode zum gasgefüllten Driftraum hin ab. Je nach der zu erzeugenden Ionensorte werden Teile der Anodenplatte mit einem entsprechenden Material beschichtet. Diese Teile wurden in der schematischen Darstellung der Diode gestrichelt eingezeichnet. Elektronen entstehen sowohl am Kathodenring als auch an der Mylarfolie, die nach Anlegen des Hochspannungsimpulses verdampft und ein Kathodenplasma bildet.

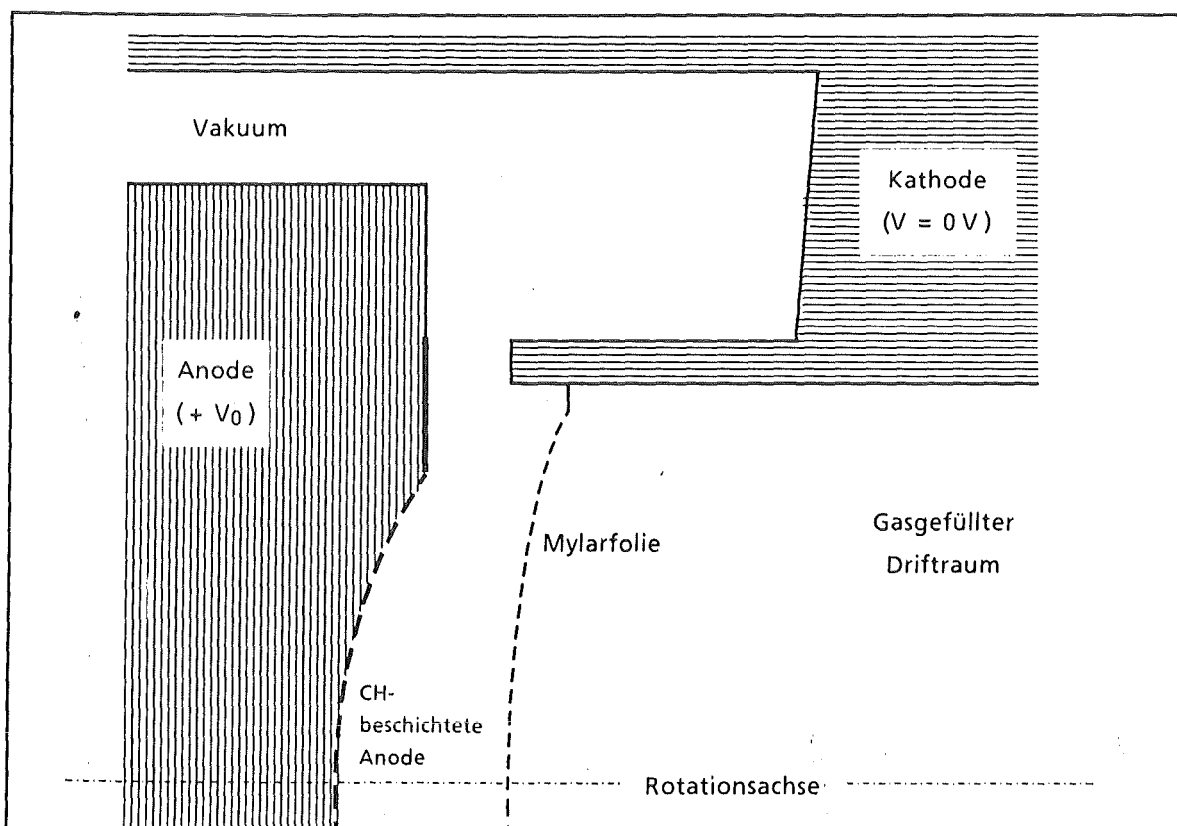


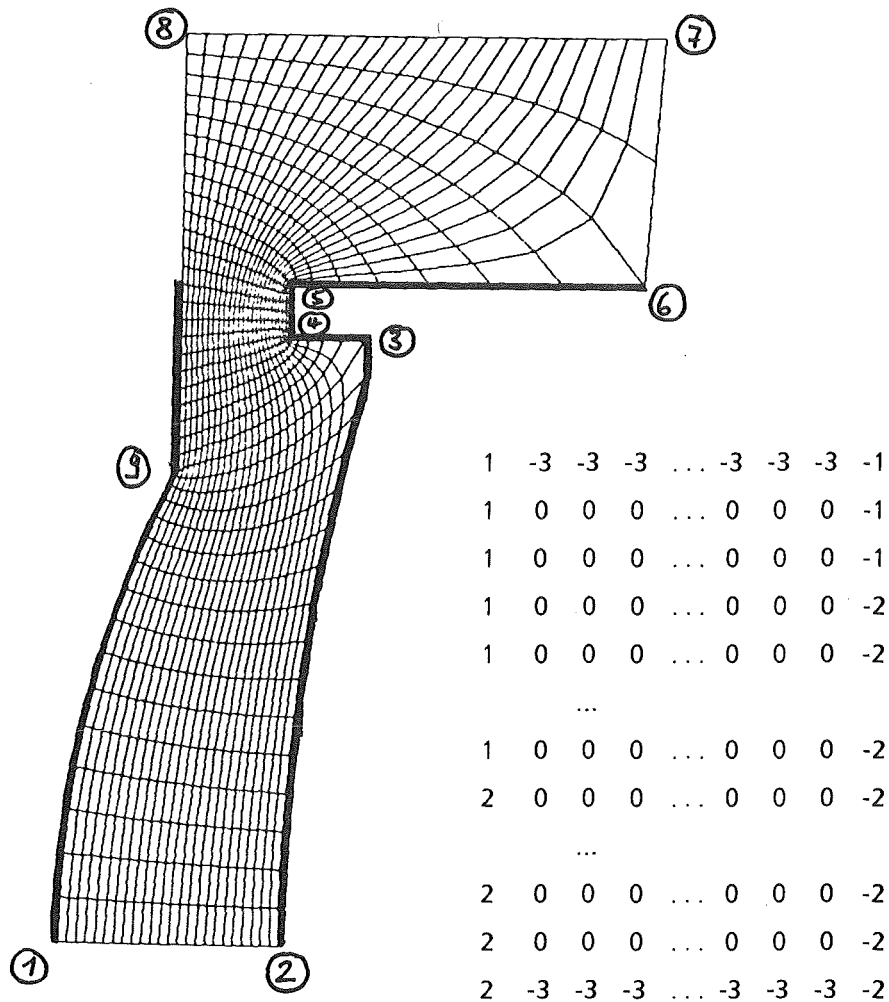
Abb. 5.1: Schematische Darstellung einer fokussierenden Pinch-Diode.

Simulationsrechnungen zeigen, daß der Bereich gegenüber dem Kathodenring stark von Elektronen getroffen wird. Daher müssen wir annehmen, daß nicht nur die beschichteten Anodenteile ein Plasma bilden, sondern daß im Bereich gegenüber dem Kathodenring ebenfalls Plasma existiert. Die Ionen, welche die Diode durch das Kathodenplasma verlassen, bewegen sich im Driftraum raumladungs- und stromneutralisiert kräftefrei weiter.

Ein Simulationsmodell der Pinch-Diode zusammen mit einem randangepaßten Gitter ist in Abb. 5.2 angegeben. Das randangepaßte Gitter besteht aus 25x41 Gitterpunkten (Gittererzeugung: M. Alef [71]). Die einspringenden Ecken des Kathodenringes sind numerisch schwierig zu behandeln. Dort treten auch die größten Diskretisierungsfehler durch die Einführung eines räumlichen Gitters bei der Berechnung des Potentials auf. Deshalb wurde das Gitter im Bereich des Kathodenringes besonders fein gewählt. Jeder Gitterpunkt wird mit einem Punktattribut identifiziert. Über diese Punktattribute werden den Gitterpunkten auf einfache Weise Randbedingungen zugeordnet. Die emittierenden Elektrodenflächen wurden in Abb. 5.2 durch eine stärkere Linienführung am Rand hervorgehoben und zur übersichtlicheren Darstellung der Ergebnisse wurden charakteristische Stellen der Diode markiert.

Der Abstand von Kathode zu Anode beträgt beim Kathodenring 5,7 mm und an der Achse 11,6 mm. Der Kathodenring hat eine Breite von 3 mm und der Abstand zur Rotationsachse beträgt 32 mm. Die Diode hat eine Gesamthöhe von 48 mm. Der Krümmungsradius an der Anode beträgt 56 mm und an der Kathode 114,5 mm. An der Anode wurde eine Spannung von 1,5 MV und an der Kathode von 0 V angenommen. Der Verlauf der Äquipotentiallinien in der leeren Diode ist in Abb. 5.3a dargestellt, und in Abb. 5.3b wurde an einigen Gitterpunkten das zugehörige elektrische Feld angegeben.

Während sich die Felder im unteren Bereich der Diode homogen verhalten und Werte um 10^8 V/m annehmen, macht sich im oberen Bereich der Einfluß des Kathodenrings bemerkbar. An den Ecken des Ringes kommt es zu großen Feldüberhöhungen. An der oberen Ecke der Kathode herrscht eine Feldstärke von 10^9 V/m, im mittleren Bereich des Kathodenringes $4 \cdot 10^8$ V/m und an der unteren Ecke 10^9 V/m. Die maximale Feldstärke wird an der oberen und unteren Ecke der Kathode angenommen.



Punktattribut	Bedeutung
-3	Äußerer Rand bzw. Rotationsachse (Normalenableitung des Potentials wird 0 gesetzt)
-2	Emittierende Kathodenfläche (Potentialwert: 0 V)
-1	Nichtemittierende Kathodenfläche (Potentialwert: 0V)
0	Feldpunkt
1	Nichtemittierende Anodenfläche (Potentialwert: 1,5 MV)
2	Emittierende Anodenfläche (Potentialwert: 1,5 MV)

Abb. 5.2: Modell einer Pinch-Diode mit randangepaßtem Gitter (aus [71]), bestehend aus 25x41 Gitterpunkten. Das zugehörige logische Gebiet entspricht dem Zahlenrechteck. Den Gitterpunkten werden Punktattribute zugeordnet, über welche die Randbedingungen übertragen werden. Charakteristische Stellen der Diode wurden gekennzeichnet.

In einer ersten Simulation werden nur Elektronen an der Kathode erzeugt, wobei wir zunächst zwar das elektrische, nicht aber das magnetische Eigenfeld der Elektronen berücksichtigen. Durch den Einfluß der Raumladung der Elektronen verschieben sich die Feldlinien von der Kathode weg. Die zum stationären Zustand gehörenden Äquipotentiallinien sind in Abb. 5.4a angegeben. Insbesondere verschwinden die Feldüberhöhungen an den Ecken der Kathode. Die Feldstärken betragen jetzt an der oberen Kathodenkante $1,3 \cdot 10^8$ V/m, im mittleren Bereich $0,6 \cdot 10^8$ V/m und an der unteren Ecke $1,8 \cdot 10^8$ V/m. Das elektrische Feld an der Anode steigt um den Faktor 1,5 bis 2, und die maximale Feldstärke in der Diode liegt am Anodenknick und beträgt diesmal $4 \cdot 10^8$ V/m. Die elektrischen Felder sind für einige Gitterpunkte in Abb. 5.4b gezeichnet.

Die Elektronen folgen in ihrer Bewegung den elektrischen Feldlinien und erreichen die gesamte Anodenoberfläche. In Abb. 5.5a ist jedes zweite der ca. 3000 Makroelektronen eingezeichnet. In Abb. 5.5b sind einige typische Einzelbahnen von Elektronen berechnet, die an verschiedenen Stellen der Kathode emittiert wurden.

Bei der numerischen Simulation wurde ein Zeitschritt von $\Delta T = 3,92 \cdot 10^{-12}$ s gewählt. Wie in [70] gezeigt wurde, ergibt sich bei der numerischen Berechnung der Phasenraumkoordinaten der Teilchen eine Einschränkung an den Zeitschritt ΔT , die durch $\omega \Delta T \leq 0,2$ gegeben ist, wenn ω die Zyklotronkreisfrequenz ist. Diese Einschränkung ist für Elektronen und Ionen gemäß ihrem Massenverhältnis unterschiedlich. Setzen wir jedoch die Subzeitskala für die Elektronen (vgl. Anhang A2) auf $\Delta T_{\text{E}} = \Delta T/20$, so ist obige Einschränkung sowohl für die Elektronen als auch für die Ionen erfüllt, wenn wir von einem zu erwartenden Magnetfeld von maximal 5 T ausgehen. Der stationäre Endzustand eines monopolen Elektronenflusses stellte sich nach ca. 200 Zeitschritten ein.

In einer nächsten Simulation berücksichtigen wir zusätzlich das magnetische Eigenfeld der Elektronen. Bei gleichen Zeitschritten wie oben erhalten wir ebenfalls nach ca. 200 Zeitschritten einen stationären Zustand. Durch den Einfluß des selbsterzeugten Magnetfeldes folgen die Elektronen nicht mehr nur dem elektrischen Feld, sondern sie werden durch die Lorentz-Kraft zur Achse hin abgelenkt. Durch den Einfluß des Magnetfeldes ist die Aufenthaltsdauer der Elektronen im Anoden-Kathodenspalt größer und der Gesamtelektronenstrom nimmt ab (vgl. Tab. 5.2). Aus Abb. 5.6a erkennt man, daß die Elektronen unter dem Einfluß des Eigenmagnetfeldes das obere Drittel der Anode nicht mehr erreichen.

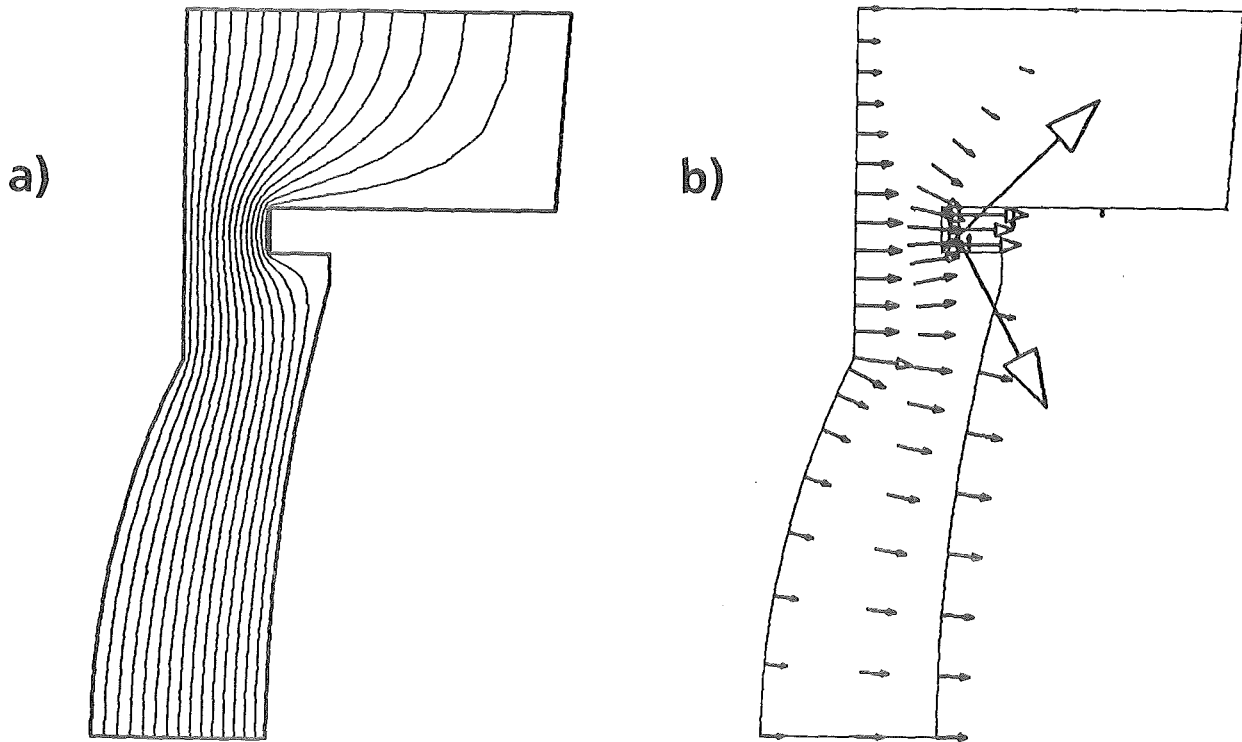


Abb. 5.3: Potential und elektrisches Feld in der leeren Pinch-Diode bei einer angelegten Spannung von 1,5 MV. Abb. 5.3a zeigt die Äquipotentiallinien zu den Werten 100kV, 200kV, ... , 1400kV. In Abb. 5.3b wurde an einigen Gitterpunkten das zugehörige elektrische Feld eingezeichnet. Die Länge des Pfeiles \rightarrow entspricht 100 MV/m.

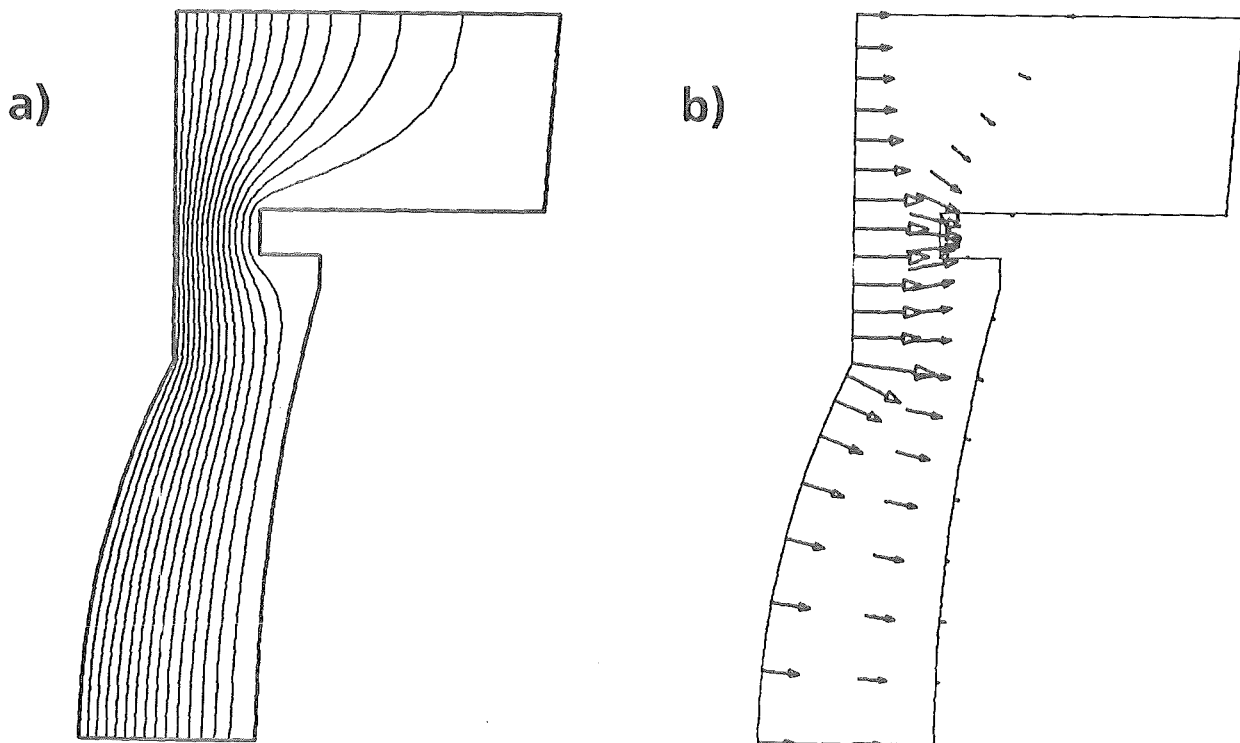


Abb. 5.4: Potential und elektrisches Feld in der Pinch-Diode bei einer angelegten Spannung von 1,5 MV und monopolarer Elektronenfluß unter Vernachlässigung des Magnetfeldes. Abb. 5.4a zeigt die Äquipotentiallinien zu den Werten 100kV, 200kV, ... , 1400kV und Abb. 5.4b das zugehörige elektrische Feld bei gleicher Skalierung wie in Abb. 5.4b.

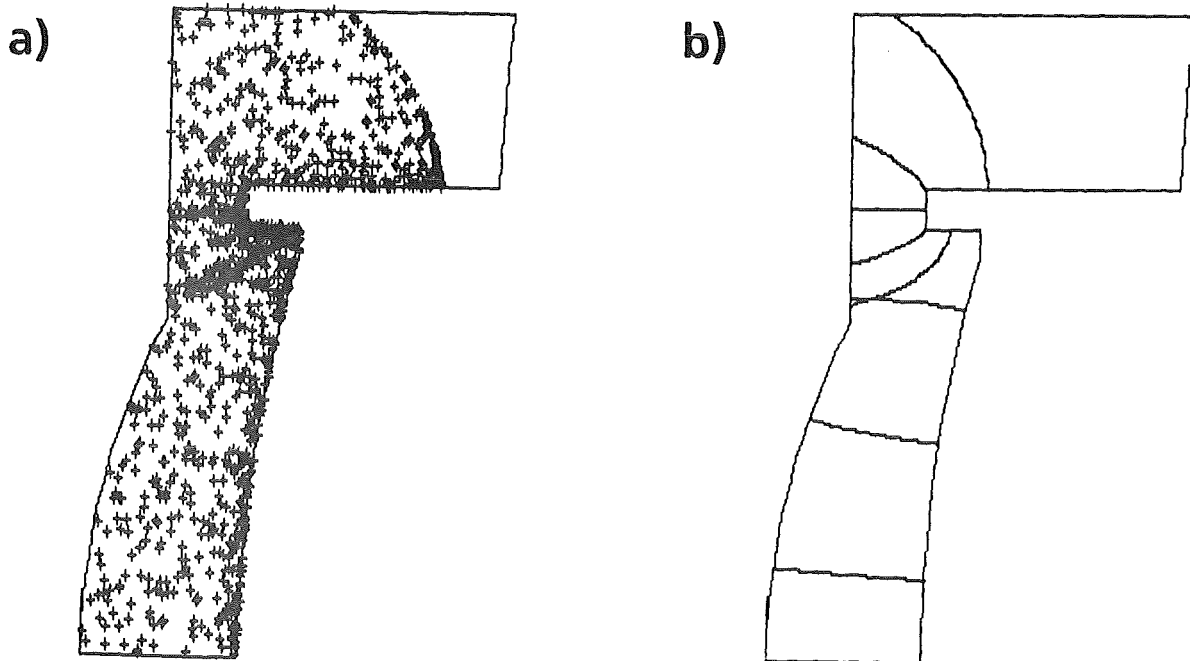


Abb. 5.5: a) Teilchenplot in der Diode bei einem monopolen Elektronenfluß unter Vernachlässigung des Magnetfeldes. Jedes zweite der ca. 3000 Makroelektronen wurde gezeichnet. b) Einzelbahnen von Elektronen, die an der Kathode emittiert wurden.

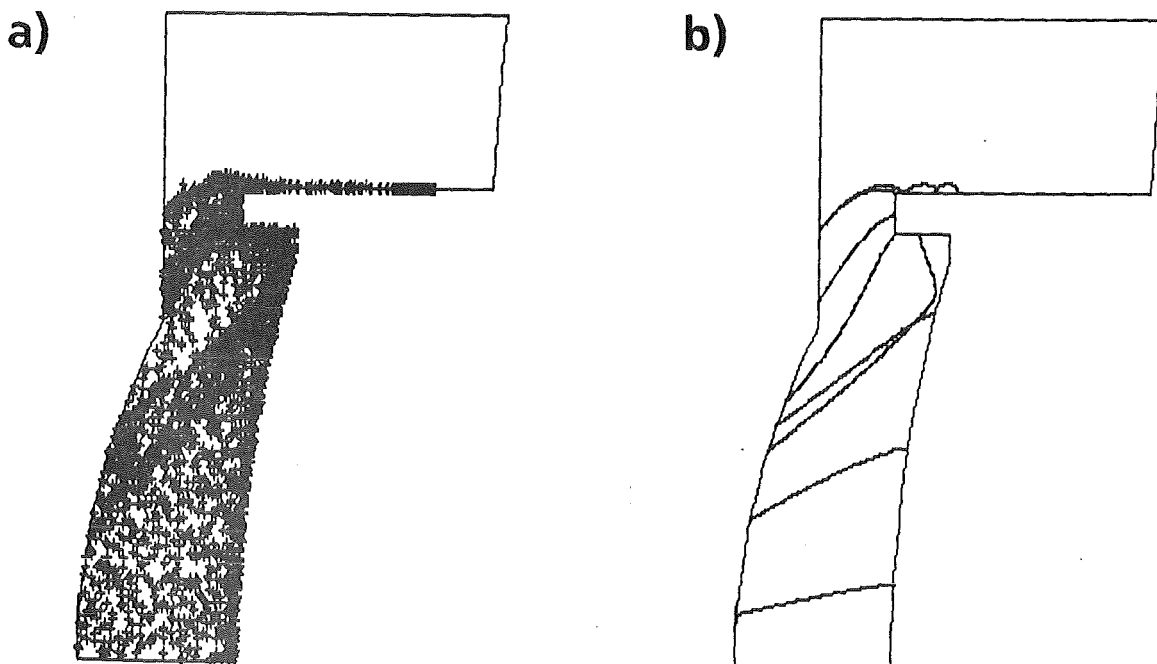


Abb. 5.6: a) Teilchenplot in der Diode bei einem monopolen Elektronenfluß unter Berücksichtigung des Eigenmagnetfeldes. Jedes zweite der ca. 3000 Makroelektronen wurde gezeichnet. b) Einzelbahnen von Elektronen, die an den gleichen Emissionspunkten erzeugt wurden wie in Abb. 5.5b.

Zum Vergleich mit der Simulation ohne Eigenmagnetfeld werden die Einzelbahnen von Elektronen verfolgt, die an den gleichen Stellen wie vorher erzeugt wurden (vgl. Abb. 5.6b). Teilchen, die an den Ecken des Kathodenringes emittiert wurden, beginnen leicht zu gyrieren. Elektronen, die oberhalb des Ringes emittiert wurden, gyrieren an der Kathode entlang, bis sie die Spitze der Kathode erreichen und sich anschließend wie Teilchen verhalten, die an dieser Spitze erzeugt wurden. Die an der Unterseite des Kathodenringes emittierten Elektronen werden aufgrund der Lorentzkraft zunächst zur Kathodenfront zurück beschleunigt, ehe sie sich danach zur Anode bewegen. Dadurch entsteht eine Struktur im Elektronenfluß, die sich in Abb. 5.6a andeutet, jedoch an den Ladungsdichten (vgl. Tab. 5.1) besser erkennbar ist.

Eine Konsequenz hiervon ist, daß die Anodenfläche von keinem homogenen Elektronenfluß getroffen wird, sich dadurch unterschiedlich stark erhitzt und sich ein inhomogenes Anodenplasma ausbildet.

Die Ladungsdichten der Elektronen sind in Tab. 5.1 angegeben. Die Werte wurden der Übersichtlichkeit wegen mit dem Faktor $1000/\max(\rho_{ij})$ normiert. Damit ist die größte Ladungsdichte beim numerischen Wert -1000 an der oberen Kathodenecke gegeben. Dies entspricht einer Elektronenladungsdichte von $18,2 \text{ Cb/m}^3$. Da der Rand des physikalischen Gebietes auf den Rand eines Rechtecks abgebildet wird, sind die Ecken des Kathodenringes nicht gut erkennbar. Zur Verdeutlichung der Ecken wurden die Ladungsdichten an den Kathodenecken umkreist, die Kanten des Ringes durch Striche gekennzeichnet und die Markierungen aus Abb. 5.2 in die Tabelle aufgenommen.

Die Emission an den Plasmaelektroden erfolgt raumladungsbegrenzt bei einer Temperatur von 5 eV. Die Geschwindigkeiten der Teilchen sind dadurch bei der Erzeugung gering im Vergleich zur Beschleunigung im Spalt, deshalb ist die Ladungsdichte der Elektronen an der Kathode am größten und nimmt zur Anode hin ab.

Betrachtet man die zum stationären Zustand gehörenden Äquipotentiallinien (Abb. 5.7a), erkennt man deutlich das Einwirken der Raumladung der Elektronen auf das System. Die Feldlinien verdichten sich an der Anode, und im Bereich gegenüber dem Kathodenring sind die Felder verstärkt. Die maximale Feldstärke beträgt an der Anode $4,3 \cdot 10^8$ V/m. Auch hier sind die Stromdichten der Elektronen an der Anode am größten und betragen $10^8 - 2 \cdot 10^8$ A/m². Dies bedeutet, daß die meisten Elektronen auf die Anode im Bereich gegenüber dem Kathodenring prallen und die Aufheizung der Anode im oberen Bereich am größten ist.

Diese Situation ist typisch für die Anfangsphase in der Diode, bei der die in der Diode anliegende Spannung schon Werte um 1 MV annimmt, jedoch noch kein Ionenstrom fließt [4, Fig. 4]. Durch den fehlenden Ionenstrom ist das Magnetfeld noch nicht so ausgeprägt, daß es zum Zusammenschnüren des Elektronenflusses kommt. Die hohen Stromdichten der Elektronen und eine Feldstärke von etwa $4 \cdot 10^8$ V/m gegenüber dem Kathodenring führen dazu, daß die Zündung des Anodenplasmas bei großen Radien stattfindet, wie dies auch Goldstein und Lee [18] in ihrem Modell angenommen haben.

In einer weiteren Rechnung wird als Konsequenz der hohen elektrischen Felder an der Anode die Emission der Protonen berücksichtigt. Wählen wir wieder einen Zeitschritt von $\Delta T = 3,92 \cdot 10^{-12}$ s und die Elektronen-Subzeitskala $DTE = \Delta T/20$, erhalten wir nach ca. 10000 Zeitschritten einen stationären Zustand eines bipolaren Elektronen- und Protonenflusses mit ca. 5000 positiv geladenen Makroteilchen und 9000 negativ geladenen Makroteilchen. Es wurde das Massenverhältnis von Elektronen zu Protonen von 1/1836 berücksichtigt.

Das Magnetfeld wird nun sowohl durch die Bewegung der Elektronen als auch der Ionen erzeugt. Da das durch die Ionen erzeugte Magnetfeld das gleiche Vorzeichen besitzt wie das der Elektronen, wird das Magnetfeld verstärkt. Außerdem erhöht sich durch den Einfluß der Raumladung der Ionen der Elektronenstrom (vgl. Tab. 5.2), was ebenfalls zur Vergrößerung des Magnetfeldes beiträgt. Das Magnetfeld lenkt die Elektronen nun so stark ab, daß sie zur Rotationsachse gyrieren und die Anode lediglich nahe der Achse erreichen (vgl. Abb. 5.8).

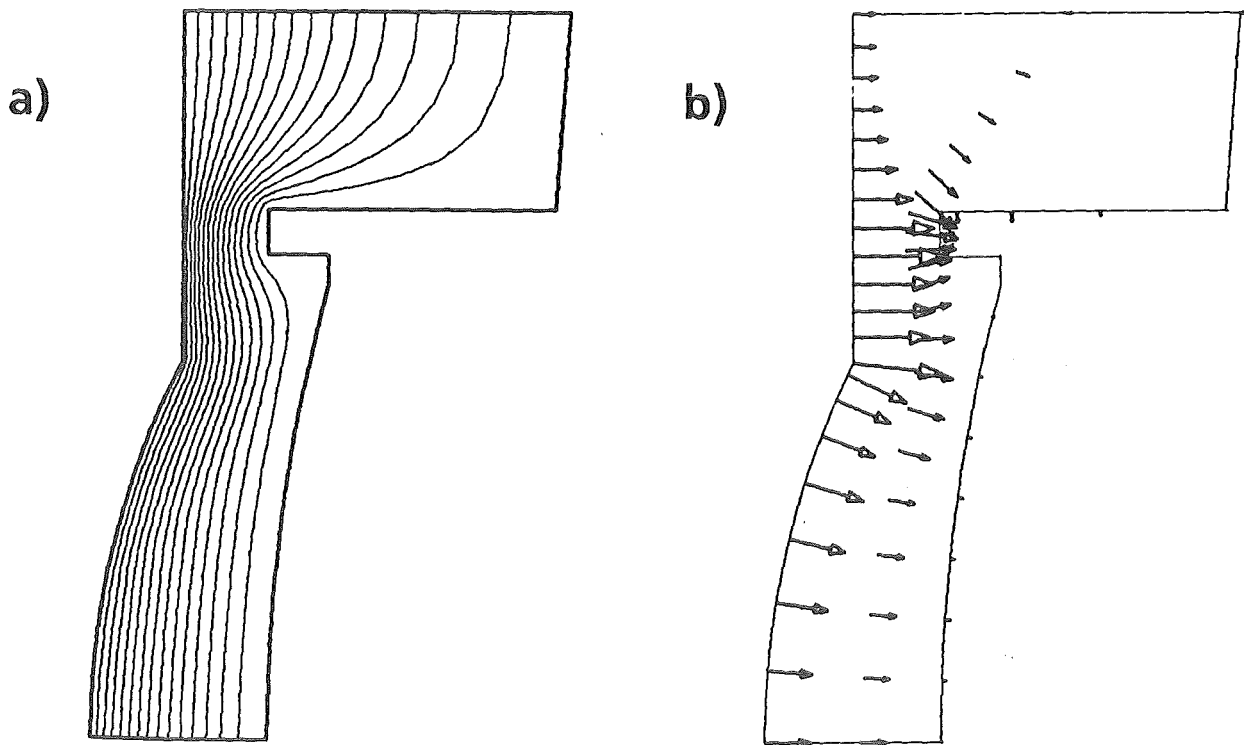


Abb. 5.7: Potential a) und elektrisches Feld b) beim monopolen Elektronenfluß unter Berücksichtigung des Eigenmagnetfeldes. Die Länge des Pfeiles \rightarrow entspricht 100 MV/m.

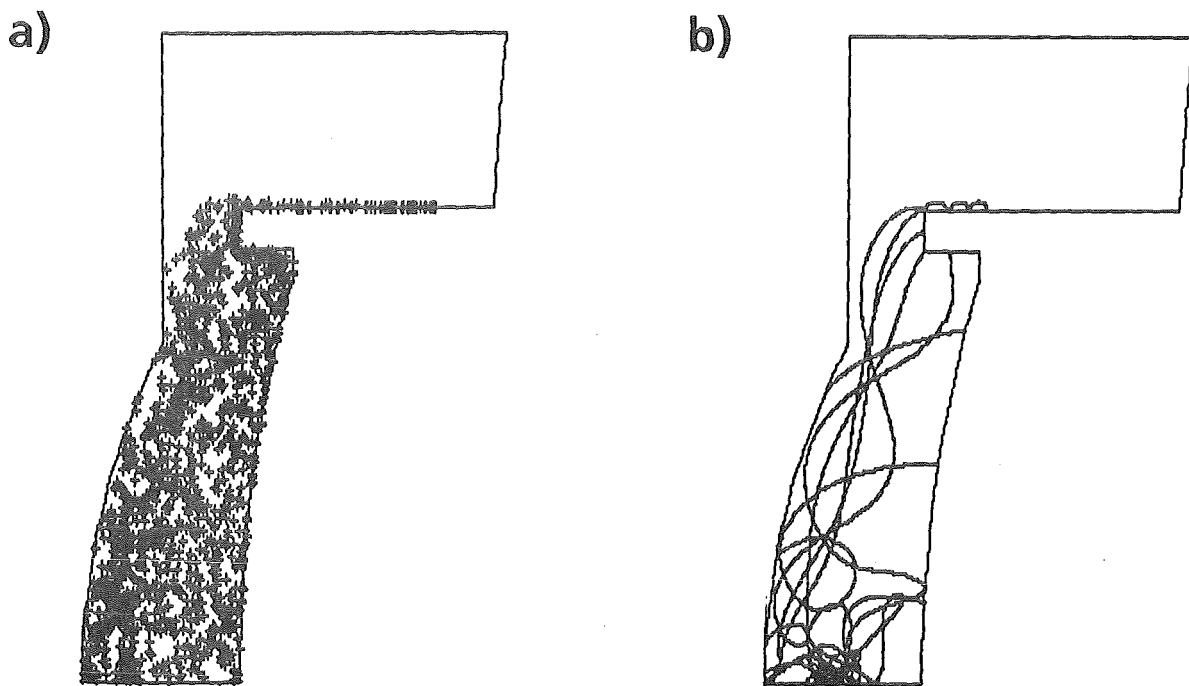


Abb. 5.8: Teilchenplot der Elektronen beim bipolaren Fluß von Elektronen und Protonen. a) Jedes 3. der 9000 Makroelektronen wurde gezeichnet. b) Einzelbahnen von Elektronen, die an den gleichen Emissionspunkten erzeugt wurden wie in Abb. 5.5b bzw. 5.6b.

	Nur Elektronen ohne Magnetfeld	Nur Elektronen mit Magnetfeld	Elektronen und Protonen in der Diode
$I_{\text{Elektronen}}$	347 kA	253 kA	357 kA
I_{Ionen}	-	-	86 kA

Tab. 5.2: Ströme in der Pinch-Diode bei einer angelegten Spannung von 1,5 MV.

Die zu den Elektronenbahnen gehörenden Stromdichten sind in Abb. 5.9a eingezeichnet. Hieraus ist die Pinchbewegung der Elektronen ebenfalls gut erkennbar. Während die Stromdichten der Ionen (vgl. Abb. 5.9b) nahezu nur eine z-Komponente besitzen, sind die Stromdichten der Elektronen im Bereich zwischen Anode und Kathode nur in r-Richtung gerichtet.

Auffallend ist, daß sich die Auftreffwinkel der Elektronen im achsennahen Bereich stark von den Winkeln bei größeren Radien unterscheiden. Während im Bereich oberhalb $r = 2,4$ mm der Winkel zwischen der Flächennormalen der Anode und der Stromdichte etwa $60^\circ - 70^\circ$ beträgt, ist er für Radien zwischen 1,2 mm und 2,4 mm etwa 45° und nimmt unterhalb von 1,2 mm Werte zwischen 15° und 30° an. (Der Radius 2,4 mm entspricht dem Abstand der zweiten Gitterlinie von der Rotationsachse, wobei die erste Gitterlinie auf der Rotationsachse liegt. Die zweite und dritte Gitterlinie wurden in Abb. 5.9a eingezeichnet.) Insgesamt treffen beim stationären Zustand unter Berücksichtigung der Eigenfelder und der Ionenströme 77% der Elektronen bei Radien unterhalb von 2,4 mm auf die Anode.

Dieser Effekt wurde von Maron [60] bei einer größeren Diode und einer kleineren Spannung ($V_0 = 380$ kV) experimentell nachgewiesen und von Turnbull et. al. [50] rechnerisch mit einem vereinfachten Modell der Diode mit achsenparallelen Rändern bestätigt.

Zur Erklärung dieses Effektes ziehen wir wie Turnbull den Verlauf der Potentiallinien heran. In Abb. 5.10 wurden Linien konstanten Potentials beim stationären Fluß von Elektronen und Protonen angegeben. Das Potential an der Anode fällt im achsennahen Bereich innerhalb eines Millimeters von 1,5 MV auf Werte um 0 V ab, und es bildet sich ein Potentialwall, dessen Maximum bei 800 kV liegt.

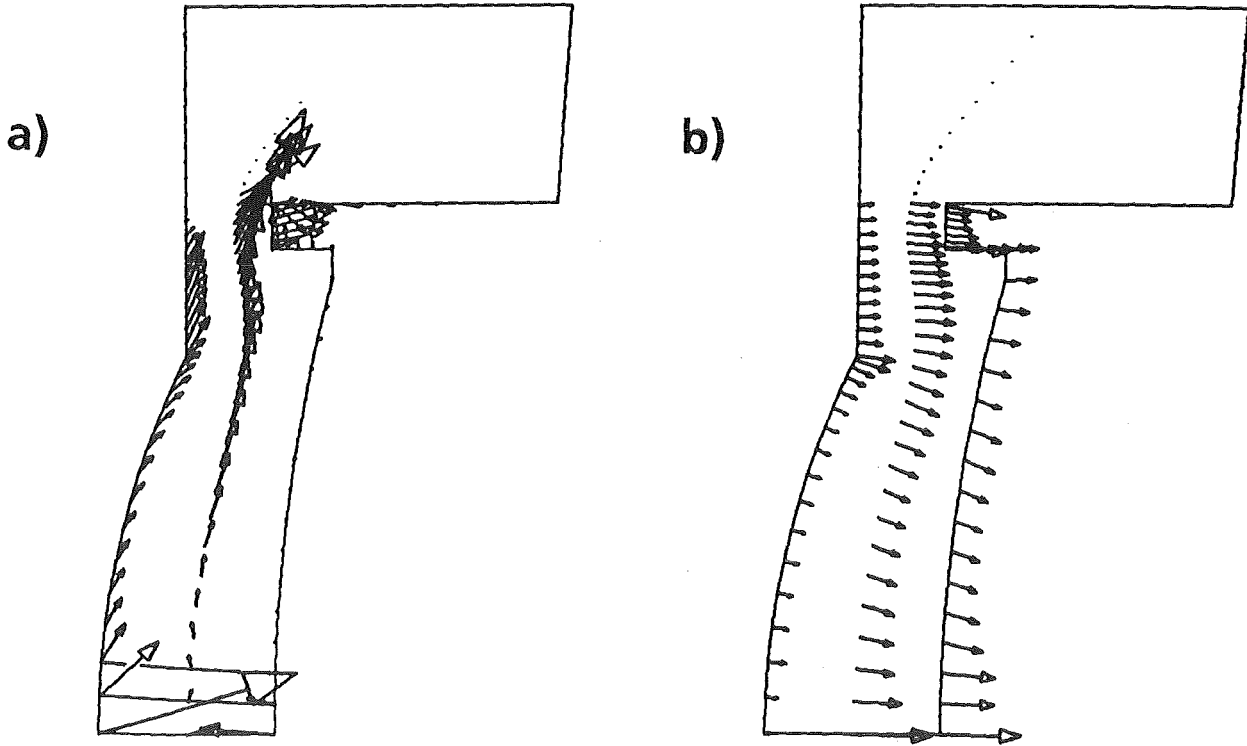


Abb. 5.9: a) Stromdichte mal Radius der Elektronen. Die Länge des Pfeiles \rightarrow entspricht $1,5 \cdot 10^6$ A/m. b) Stromdichte mal Radius der Ionen. Die Länge des Pfeiles \rightarrow entspricht hier $1,5 \cdot 10^5$ A/m.

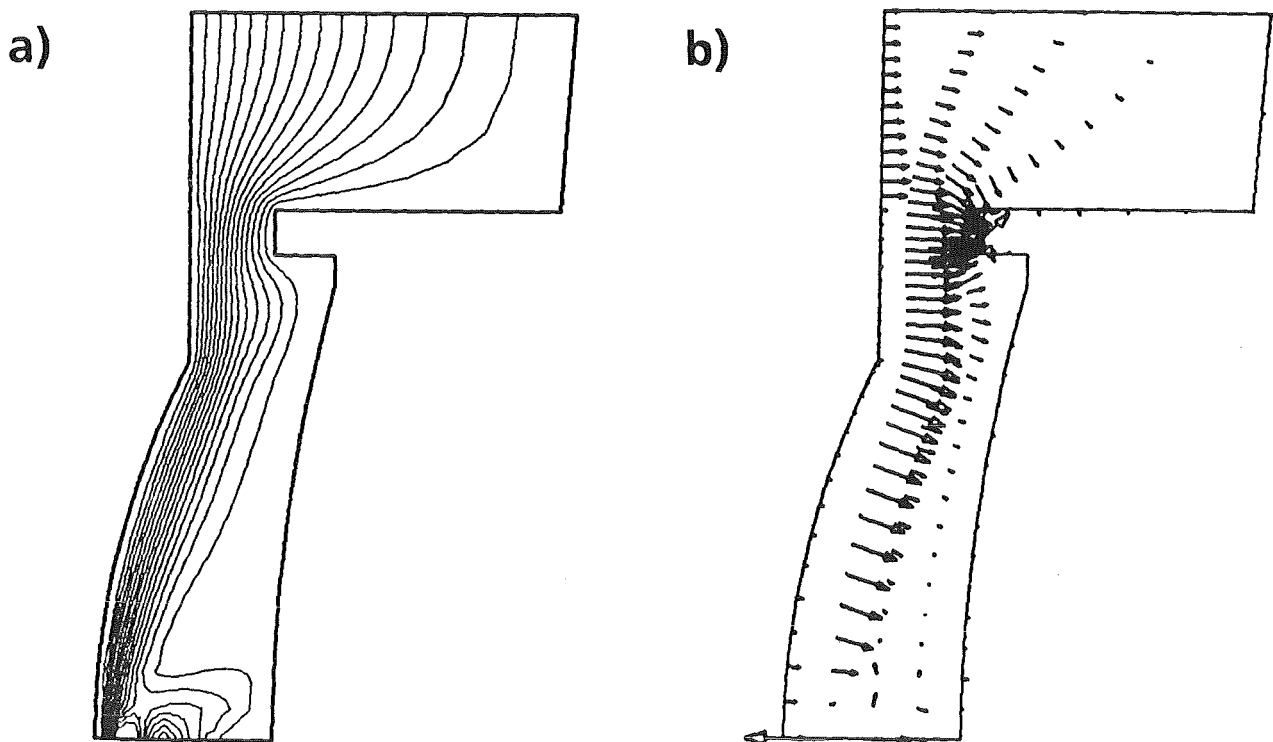


Abb. 5.10: Potential a) und elektrisches Feld b) beim bipolaren Elektronen- und Protonenfluß. Es bildet sich ein Potentialhügel, dessen Maximum bei 800 kV liegt. Die Länge des Pfeiles \rightarrow entspricht 150 MV/m.

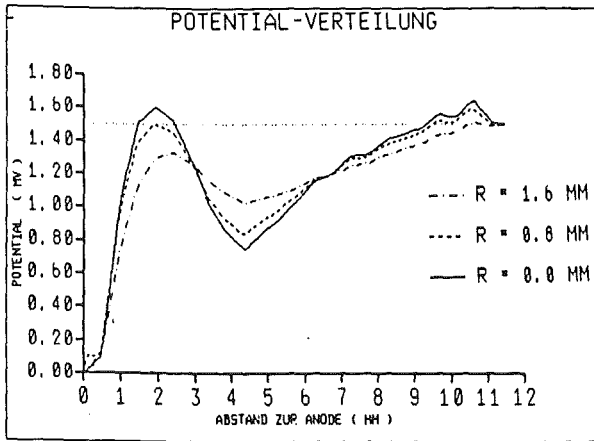
Zur besseren quantitativen Verfolgung des Potentialverlaufs tragen wir $\Phi_0 - \Phi(z)$ für konstante Achsenabstände auf, wobei Φ_0 die maximal angelegte Spannung von 1,5 MV ist. In Abb. 5.11a wurden die Abstände $r = 0$ mm, $r = 0,8$ mm und $r = 1,6$ mm gewählt und in Abb. 5.11b $r = 2,4$ mm, $r = 3,2$ mm und $r = 4,0$ mm. (Diese Radien liegen noch unterhalb der dritten Gitterlinie.) Aus den beiden Diagrammen ist ersichtlich, daß der Potentialwall bei $r = 0$ mm am ausgeprägtesten ist und für wachsende Radien (vgl. Abb. 5.11c und 5.11d) verschwindet.

Durch die Bildung eines Potentialhügels an der Achse erhält das elektrische Feld eine große radiale Komponente. Somit werden Elektronen aus dem oberen Bereich der Diode zur Achse hin abgebremst, und sie verlieren einen Großteil ihrer kinetischen Energie, bis sie an der Achse angelangt sind. Durch den Potentialabfall an der Anode innerhalb eines Millimeters werden die Elektronen durch ein elektrisches Feld, das nur eine z-Komponente besitzt, zur Anode beschleunigt. Das Maximum des Feldes ist bei $1,5 \cdot 10^9$ V/m und ist etwa 10 mal so groß wie das entsprechende Feld beim monopolen Elektronenfluß.

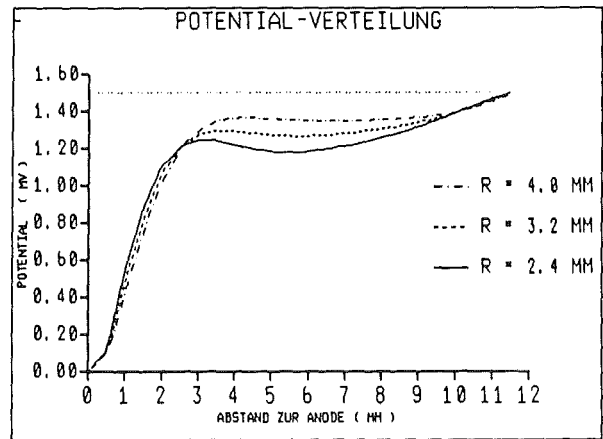
Als Folge der großen radialen elektrischen Felder an der Rotationsachse werden die Ionen aus dem unteren Bereich der Diode nicht zur Achse hin, sondern von der Achse weg beschleunigt. Somit wirken diese radialen Felder der Fokussierung der Ionen entgegen, und die Ionen aus dem achsennahen Bereich werden defokussiert.

Um diesen Effekt zu verdeutlichen, berechnen wir die Bahnen von Protonen in den stationären, selbstkonsistenten elektromagnetischen Feldern. Nachdem sie von der Anode zur Kathode beschleunigt wurden, bewegen sich die Teilchen nach Verlassen der Diode kräftefrei im Driftraum weiter. Aufgrund der Geschwindigkeit und der Position an der Kathode berechnen wir den Schnittpunkt der Protonenbahnen mit der Rotationsachse. Diese Bewegung wurde in Abb. 5.12 eingezeichnet. Hieraus ist erkennbar, daß die Protonen aus dem unteren Bereich der Diode defokussiert werden.

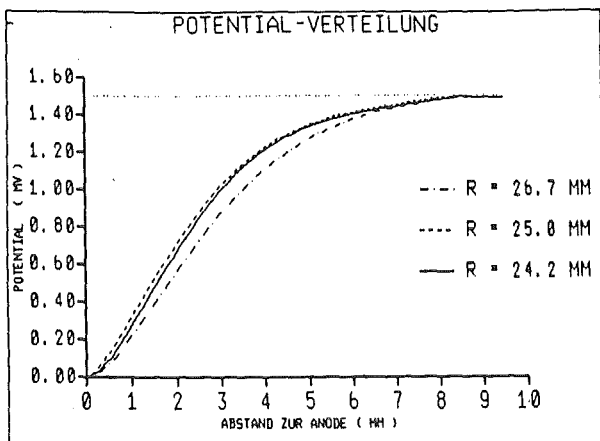
a)



b)



c)



d)

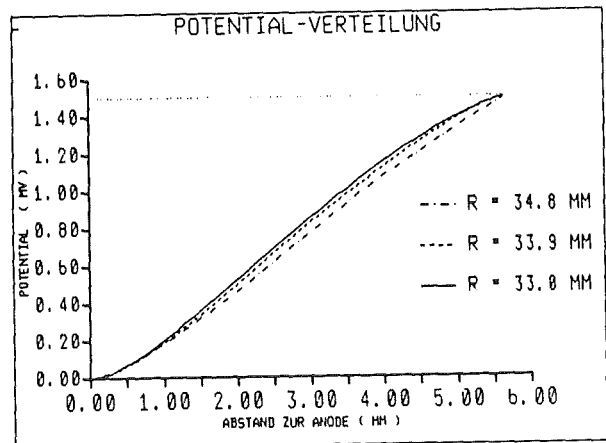


Abb. 5.11: Für verschiedene Abstände zur Achse wird der Verlauf des Potentials $\Phi_0 - \Phi(z)$ angegeben. Die Radien zu den Bildern a) und b) sind noch unterhalb der dritten Gitterlinie und betragen $r = 0$ mm, $r = 0.8$ mm, $r = 1.6$ mm bzw. $r = 2.4$ mm, $r = 3.2$ mm, $r = 4.0$ mm. Bild c) zeigt den Verlauf des Potentials am Anodenknick bei $r = 24.2$ mm, $r = 25.0$ mm, $r = 26.7$ mm und Bild d) am Kathodenring bei $r = 33.0$ mm, $r = 33.9$ mm und $r = 34.8$ mm.

Das Zusammenschnüren der Elektronen (der Pinch) verursacht im achsennahen Bereich große Ladungsdichten, die durch das extrem große elektrische Feld stark beschleunigt werden. Die daraus resultierenden Stromdichten liegen bei den Elektronen bei $1.4 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$ und bei den Ionen bei $5.3 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$. Bei der graphischen Darstellung der Stromdichten (Abb. 5.9) wurden die Dichten mit dem Abstand zur Achse multipliziert. Auffallend an den Stromdichten der Elektronen ist, daß im unteren Bereich der Kathode die Stromdichten in negative z-Richtung zeigen, d.h. daß in diesem Bereich mehr Elektronen in das Kathodenplasma zurückkehren als emittiert werden.

Um die radiale Abhängigkeit der Ionenstromdichte deutlich zu machen, wurde in Abb. 5.13 $j \cdot r$ an der Kathode als Funktion vom Radius berechnet. Es zeigt sich, daß die Funktion $j \cdot r$ im mittleren Bereich nahezu konstante Werte annimmt.

In Tab. 5.3 ist das von den Stromdichten der Elektronen induzierte Magnetfeld und in Tab. 5.4 das von den Stromdichten der Protonen induzierte Magnetfeld angegeben. Der Übersichtlichkeit wegen wurden die Magnetfelder mit dem Faktor $1000/\max(B_{ij})$ normiert. Da die Ionenbewegung relativ gering vom Magnetfeld beeinflußt wird, entsteht durch die Ionen ein nahezu homogenes Magnetfeld, das sein Maximum bei 0,32 T annimmt. Im Gegensatz dazu ist das Magnetfeld der Elektronen, das im Maximum etwa 10 mal so groß ist wie das der Ionen, r- und z-abhängig. Da im unteren Bereich der Kathode mehr Elektronen zurückkehren als erzeugt werden, kommt es in diesem Bereich zur Umkehrung des Vorzeichens des Magnetfeldes.

Abschließend sollen die Effekte der Eigenfelder zusammengefaßt werden:

Die durch die Bewegung der Teilchen selbsterzeugten elektrischen und magnetischen Felder haben einen großen Einfluß auf das Verhalten des elektromagnetischen Systems. Sie führen dazu, daß

- * sich die Potentiallinien an der Anode verdichten,
- * die Elektronen zur Achse gyrieren und 77% der Elektronen die Anode unterhalb von 2,4 mm erreichen,
- * sich eine radiale Abhängigkeit der Ionenstromdichte ergibt und
- * sich der Ionenwirkungsgrad (das Verhältnis von Ionenstrom zu Gesamtstrom) erhöht.

Durch den Einfluß der Eigenfelder bildet sich im achsennahen Bereich ein Potentialhügel. Das elektrische Feld erhält dadurch eine große radiale Komponente. Dieses radiale Feld bremst die Elektronen ab, und sie verlieren einen Großteil ihrer kinetischen Energie. Anschließend werden sie nahezu senkrecht zur Anode beschleunigt, und für Radien unterhalb von 1,2 mm erhält man für den Winkel zwischen der Anodennormalen und den Stromdichten der Elektronen Werte zwischen 15° und 30° . Außerdem hat der Potentialhügel zur Folge, daß die aus dem unteren Bereich emittierten Ionen nicht fokussiert werden.

Die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse sollten den Einfluß der elektrischen und magnetischen Eigenfelder demonstrieren. Da diese Diode nicht weiterentwickelt wird, werden wir sie bezüglich ihrer Fokussierungseigenschaften nicht verbessern, sondern die Optimierung im Falle der selbstmagnetisch isolierten B_θ -Diode vornehmen.

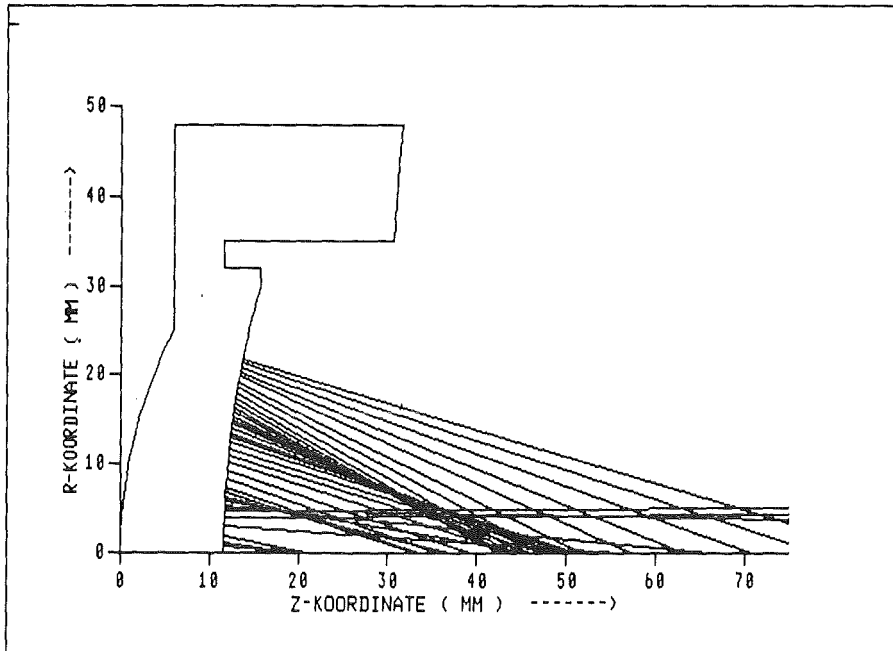


Abb. 5.12: Kräftefreie Fortbewegung der Protonen nach Verlassen des Spaltes.

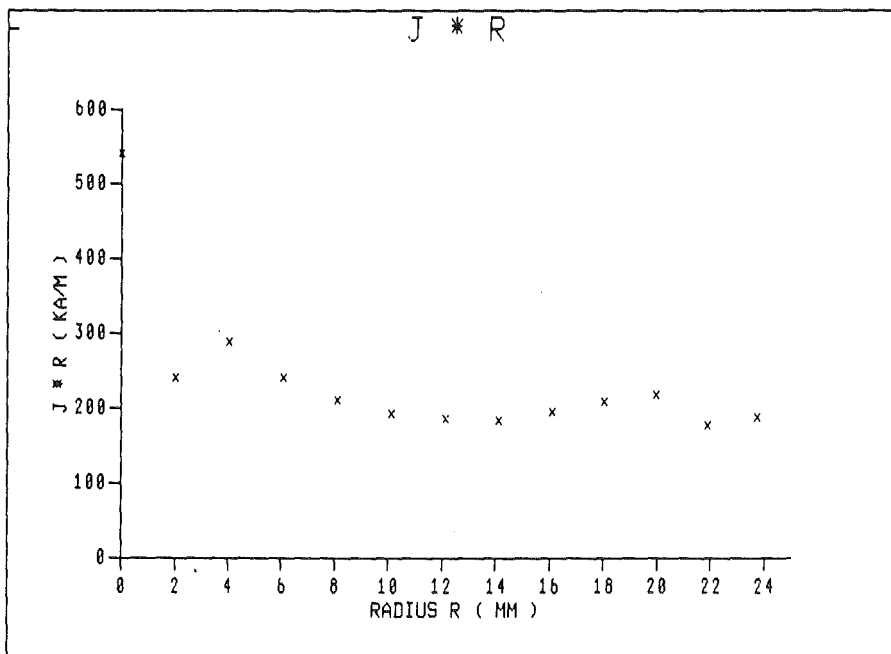


Abb. 5.13: Produkt aus Ionenstromdichte mal Radius an der Kathode als Funktion vom Abstandes zur Rotationsachse.

8	94	81	73	70	68	65	57	57	52	52	46	55	6	7
	96	83	75	72	70	67	59	60	55	56	50	61	7	
	99	85	77	74	72	69	62	62	58	59	53	66	9	
	101	87	79	76	74	71	64	64	60	61	56	69	8	6
	103	89	81	78	76	73	65	66	62	63	57	71	8	
	106	92	83	80	78	75	67	68	63	65	59	72	8	
	109	94	85	82	80	77	69	70	65	66	60	73	7	
	111	96	88	84	82	79	71	71	66	67	60	73	6	
	114	99	90	86	84	81	72	73	67	68	61	71	3	
	117	101	92	88	86	83	74	74	69	69	59	65	0	
	120	104	94	90	88	85	75	75	67	64	49	55	-1	5
	123	107	97	92	90	86	75	72	60	56	40	48	-1	
	127	109	99	95	92	86	73	63	54	50	36	42	-1	
	130	112	101	96	92	81	69	56	51	47	31	38	-4	
	133	115	103	96	89	77	65	53	47	42	27	33	-8	
	136	117	103	95	85	74	62	49	42	36	24	28	-13	
	139	117	102	93	83	72	58	45	36	31	21	23	-17	
	141	118	102	91	81	69	53	39	29	24	16	19	-20	
	143	118	101	90	79	64	47	32	22	18	11	14	-20	4
	145	119	100	88	75	59	40	25	17	13	9	8	-20	
	147	119	99	85	71	53	34	21	13	9	8	5	-22	
	149	120	98	83	67	49	30	18	10	7	6	2	-24	
	150	121	97	81	64	46	28	16	8	6	4	0	-26	
	152	122	98	80	64	45	27	14	7	5	2	0	-27	
	154	123	99	81	64	45	26	13	6	3	1	-1	-29	3
9	154	125	101	82	65	45	26	11	3	0	-1	-3	-31	
	156	127	103	84	65	45	25	9	0	-2	-4	-5	-34	
	159	129	105	86	66	45	23	7	-2	-6	-7	-8	-38	
	164	132	107	88	68	45	23	6	-4	-7	-8	-10	-43	
	169	136	110	89	68	46	23	5	-4	-8	-10	-11	-47	
	177	141	112	91	69	46	23	5	-5	-9	-11	-13	-53	
	187	148	116	92	70	47	23	4	-6	-11	-13	-15	-59	
	201	158	122	95	71	47	23	3	-8	-13	-15	-17	-67	
	220	171	130	99	73	48	23	2	-10	-15	-17	-20	-76	
	247	190	141	105	77	51	23	1	-13	-18	-20	-23	-89	
	284	217	156	114	83	56	26	1	-15	-21	-24	-28	-106	
	340	255	179	128	95	66	32	2	-17	-25	-29	-34	-131	
	432	316	216	156	122	89	46	7	-19	-30	-36	-44	-171	
	604	427	287	219	180	137	76	20	-19	-37	-48	-61	-246	
	1000	668	455	373	322	254	150	54	-12	-39	-56	-85	-392	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1														2

Tab. 5.3: Das Magnetfeld der Elektronen bei einem bipolaren Fluß von Elektronen und Protonen. Das Magnetfeld wurde mit dem Faktor $1000/\max(B_{ij})$ mit $\max(B_{ij}) = 3,24$ T normiert.

⑧	135	273	274	275	277	279	279	280	280	280	280	281	280	⑦
	139	280	281	283	286	289	291	294	296	300	304	312	323	
	142	286	288	291	295	299	302	306	310	316	324	338	383	
	145	293	296	299	304	308	312	317	322	329	339	355	383	⑥
	149	301	303	307	312	317	321	326	332	339	349	364	383	
	152	308	311	315	320	325	330	335	341	348	357	369	383	
	156	316	319	323	328	333	338	343	348	355	363	373	383	
	160	324	327	331	337	341	346	351	356	361	368	376	383	
	164	332	335	339	345	349	353	358	362	367	372	379	383	
	168	340	343	347	353	357	361	365	368	372	376	381	383	
	172	349	352	356	361	365	368	371	374	377	380	383	383	⑤
	177	358	360	364	369	372	375	377	379	380	382	384	383	
	181	366	368	371	374	377	379	380	381	382	383	385	384	
	184	371	372	374	377	380	381	382	383	384	385	387	386	
	184	373	374	376	379	382	383	384	385	386	387	389	388	
	184	374	375	378	381	383	384	385	386	387	388	390	390	
	184	375	376	378	382	384	385	386	387	387	388	390	390	
	184	375	376	379	382	385	386	387	387	388	388	390	389	
	183	375	376	379	383	385	386	387	387	388	388	389	387	④
	182	375	376	379	383	385	386	387	387	388	388	389	386	
	181	374	376	379	383	386	387	388	388	388	388	388	386	
	179	373	375	379	383	386	387	388	388	388	388	389	386	
	177	372	374	378	383	386	388	389	389	389	389	389	385	
	175	369	372	377	382	386	388	390	390	391	391	390	385	
	169	365	370	375	381	386	389	391	392	393	393	393	384	③
②	163	359	365	373	380	386	390	393	394	396	397	398	399	
	161	355	362	371	380	386	391	395	397	399	401	403	404	
	159	354	361	370	379	387	393	398	401	404	406	409	409	
	158	354	361	370	380	389	396	402	407	411	414	416	417	
	156	356	363	373	383	392	399	406	411	417	422	426	428	
	156	360	368	378	389	398	405	412	417	423	429	435	439	
	156	366	374	385	397	407	414	421	427	433	439	446	451	
	156	375	384	396	408	419	428	435	442	448	455	461	467	
	157	387	397	410	424	436	446	455	462	469	476	484	491	
	158	403	414	429	445	459	470	480	489	497	506	515	523	
	158	425	438	455	473	490	502	514	524	534	544	555	565	
	158	456	471	490	513	532	547	561	573	585	596	609	622	
	154	500	518	543	571	595	613	629	642	655	668	683	697	
	138	575	599	635	674	705	726	741	752	761	770	780	792	
	111	723	760	822	892	944	969	983	986	987	987	991	1000	
①	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	②

Tab. 5.4: Das Magnetfeld der Protonen bei einem bipolaren Fluß von Elektronen und Protonen. Das Magnetfeld wurde mit dem Faktor $1000/\max(B_{ij})$ mit $\max(B_{ij}) = 0.32$ T normiert.

6. Simulation und Optimierung einer selbstmagnetisch isolierten B_θ -Diode

In diesem Kapitel werden wir eine ursprünglich von Zieher [61] experimentell entwickelte, selbstmagnetisch isolierte B_θ -Diode modellieren. Durch numerische Simulationen in dieser Diode wollen wir physikalische Vorgänge in der Diode beschreiben, um ein besseres Verständnis für die in der Diode ablaufenden Prozesse zu gewinnen. Es sollen dabei auch Fragen bezüglich des Stromflusses beantwortet werden, die experimentell nicht geklärt werden können. Vergleiche von Rechnung und Experiment führen zu quantitativen Aussagen über physikalische Effekte wie z.B. Plasmadicke und Plasmabewegung. Aufgrund der numerischen Ergebnisse werden wir einen Vorschlag zur Verbesserung der Fokussierungseigenschaften der Diode unterbreiten.

Abb. 6.1 zeigt einen Querschnitt der selbstmagnetisch isolierten B_θ -Diode in der (r,z) -Ebene [62]. Der Elektronenstrom I_{DA} folgt dem Außenleiter des KALIF-Generators zum Kathodenbereich (K) und über die Rückseite der Diode zur Feldemissionskante (FEK). Durch die an dieser Stelle auftretende Feldüberhöhung kommt es an dieser Kante zur Emission von Elektronen. Durch den Einfluß des Magnetfeldes umkreisen die Elektronen zunächst die Anode, ehe sie auf die Anode treffen.

Der Stromkreis wird durch 9 Stifte (S) geschlossen, die an der Rückseite der Anode angebracht sind. Über diese Stifte, welche die Anode auch halten, wird der Stromschluß zum Innenleiter des KALIF-Generators gewährleistet.

An der Vorderseite der Anode ist eine Plastikplatte eingesetzt. Sie hat eine sphärische Krümmung, die durch zwei Radien gegeben ist: 275 mm an der oberen und 255 mm an der unteren Hälfte. Das für die Ionenerzeugung notwendige Anodenplasma bildet sich nur an der Vorderseite der Anode. Nachdem die Ionen im Spalt beschleunigt werden, verlassen sie die Diode durch die Kathode, die aus 120 Lamellen besteht. Die Kathodenfläche ist parallel zur Anode und besitzt eine sphärische Krümmung mit ebenfalls zwei Radien (260,8 mm und 240,8 mm). Beim Durchqueren des Kathodenplasmas werden die Ionen zu 98 - 99% stromneutralisiert [63, 64].

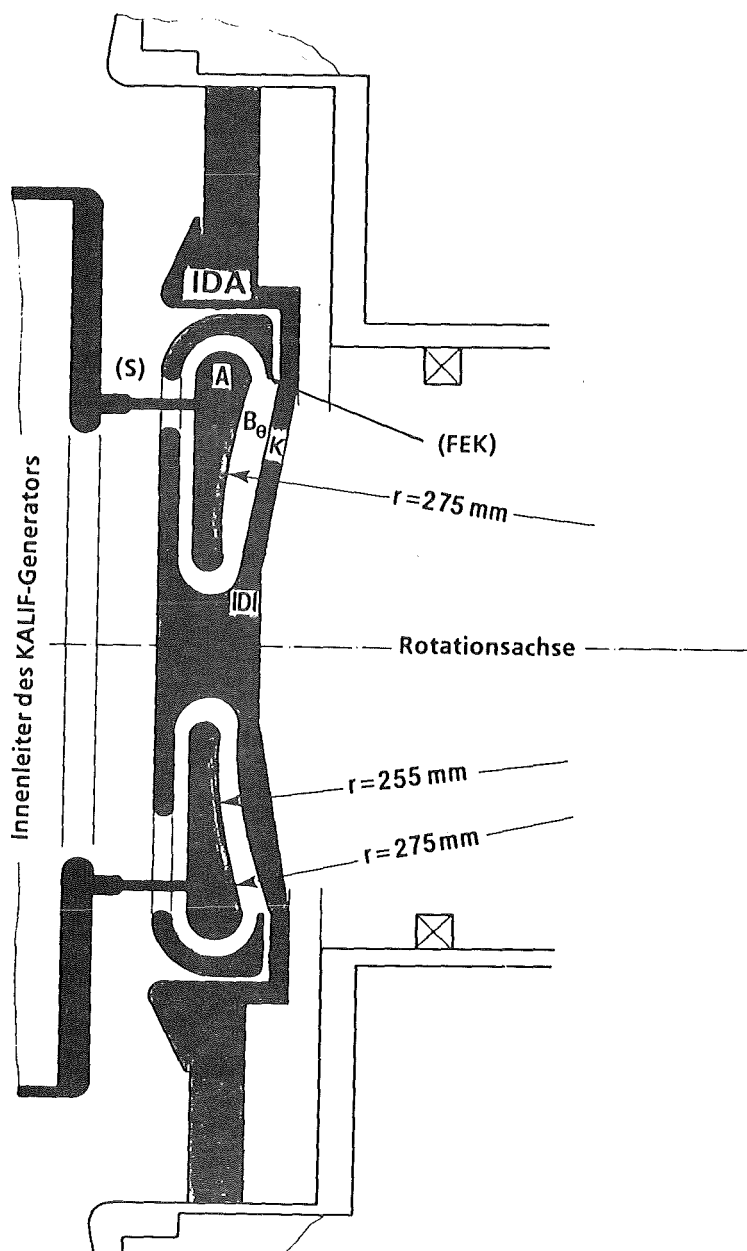


Abb. 6.1: Querschnitt in der (r,z) -Ebene durch die selbstmagnetisch isolierte B_0 -Diode. Oben: Anodenform mit einem Krümmungsradius. Unten: Anodenform mit zwei Krümmungsradien.

Die charakteristische Eigenschaft dieser Diode besteht darin, daß die magnetische Isolation nur mit Hilfe der magnetischen Eigenfelder erreicht werden soll. Diese Eigenfelder bestehen aus zwei Komponenten: Zum einen wird, wie bei der Pinch-Diode, durch die Bewegung der Teilchen im Anoden-Kathoden-Spalt ein Magnetfeld induziert. Zum anderen produzieren die emittierten Elektronen einen Strom auf der Kathodenwand, der ebenfalls ein Magnetfeld im Diodeninnern erzeugt.

Ziel der Diodenentwicklung ist es, Ionenstrahlen zu erzeugen, die am Target eine größtmögliche Leistungsdichte besitzen. Die Leistungsdichte des Ionenstrahles ist gegeben durch das Produkt von Ionenstrom und Spannung dividiert durch die Fokusfläche im Target. Folglich ist das Ziel der numerischen Simulation, eine Anoden-Kathoden-Konfiguration der B_θ -Diode zu finden, bei der die Ionenstrahlen auf eine minimale Fläche fokussiert werden.

Die an der Diode anliegende Spannung ist durch den KALIF-Generator nach oben beschränkt. Zwar kann durch Verkleinerung des Spaltabstandes eine Vergrößerung des Ionenstromes erzielt werden, doch muß, um einen Kurzschluß in der Diode zu vermeiden, der Spaltabstand mindestens 4 - 5 mm betragen. Es bleibt also bei vorgegebener Spannung die Fokusfläche durch die Gestaltung der Anodenoberfläche als zu optimierende Größe übrig.

In der oben beschriebenen Anordnung der selbstmagnetisch isolierten B_θ -Diode (im folgenden als Konfiguration I bezeichnet) werden wir die in der Diode ablaufenden physikalischen Prozesse numerisch beschreiben. Die rechnerisch erhaltenen Resultate über das Stromverhalten werden mit den experimentellen verglichen und daraus Schlußfolgerungen über Plasmadicke und Plasma-bewegung gezogen. Um Aussagen über die magnetische Isolation der Diode zu erhalten, wird die Verteilung der Ladungsdichten im Anoden-Kathoden-Spalt diskutiert. Zum besseren Verständnis der Prozesse werden das Potential und die Stromdichten der Ionen mit analytischen Modellen verglichen. Anschließend werden die Fokussierungseigenschaften von Konfiguration I bestimmt.

Diese Ergebnisse dienen als Grundlage für weitere numerische Simulationen zur Optimierung der Fokussierungseigenschaften der Diode. Dabei wird eine Anordnung gewählt, bei der die Anode nur einen Krümmungsradius besitzt ($r = 275$ mm), und der Innenradius der Lamellen $r = 260,8$ mm ist (Konfiguration II). Abschließend werden in Konfiguration II die Einflüsse von Spaltabstand und Spannung auf die Fokussierungseigenschaften der Diode diskutiert.

6.1. Numerisches Modell der B_θ -Diode

Der Rand des Berechnungsgebietes für die selbstmagnetisch isolierte B_θ -Diode ist in Abb. 6.2a dargestellt. Über ein logisches Gebiet wird im Anoden-Kathoden-Spalt ein Berechnungsgitter erzeugt (vgl. Abb. 6.2b). Es wurde ein Spaltabstand von 8 mm angenommen. (Der Stromrückfluß wurde gestrichelt angedeutet.)

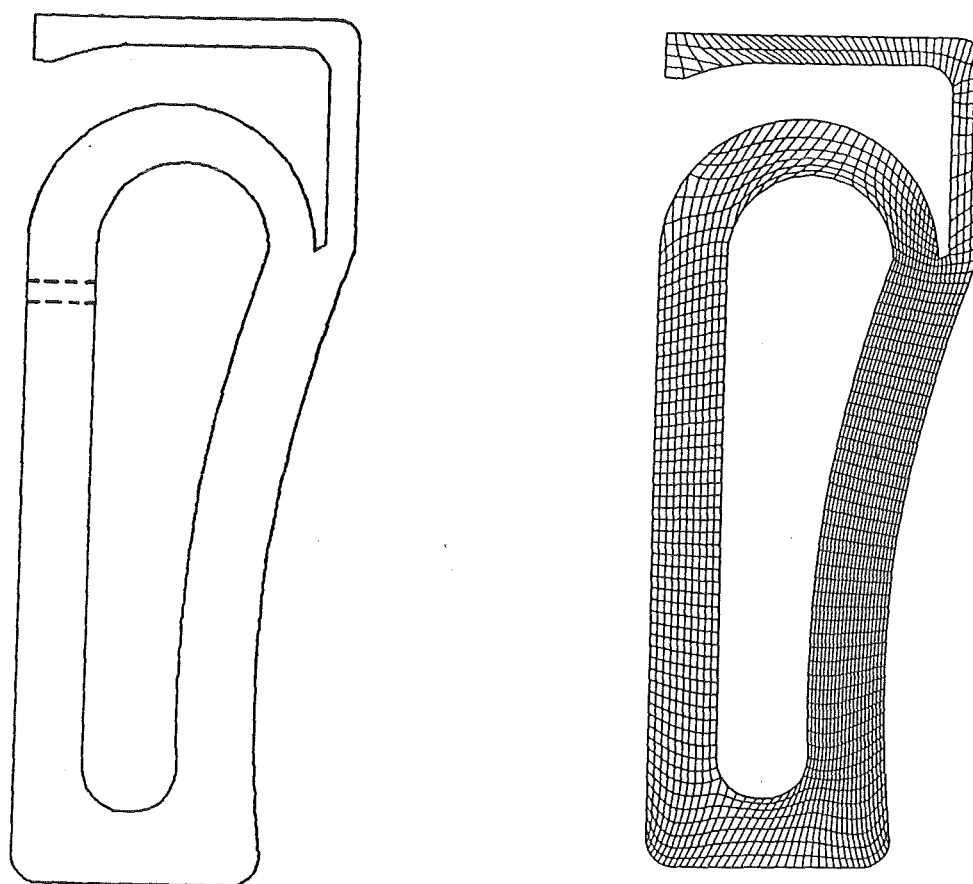


Abb. 6.2: a) Rand des Berechnungsgebietes. b) Randangepaßtes Gitter im Anoden-Kathoden-Spalt, bestehend aus 41x65 Gitterpunkten.

Bei der numerischen Modellierung der B_θ -Diode wird nicht näher auf die spezielle Struktur der Lamellen eingegangen: Durch die Feldüberhöhung und den Beschuß durch die Ionen bildet sich um die Lamellen ein Plasma aus. Da die Ionen, welche die Diode durch die Lamellen verlassen, außerdem zu 98 - 99% stromneutralisiert sind, besitzt dieses Lamellenplasma keine Lücken. Es ist also über die gesamte Lamellenfront ausgebreitet. Folglich können wir bei der numerischen Simulation die Lamellenfront als rotationssymmetrische, emittierende Kathodenfläche ansehen.

Die Stifte auf der Rückseite der Anode verletzen die zweidimensionale Geometrie. Sie haben aber keinen Einfluß auf die Fokussierung der Ionen auf der Vorderseite der Diode, so daß sie bei der Berechnung des elektrischen Feldes nicht berücksichtigt werden. Bei einer angelegten Spannung von 1,3 MV ergibt sich ein Potential und elektrisches Feld für die leere Diode, wie dies in den Abb. 6.3a und 6.3b wiedergegeben ist.

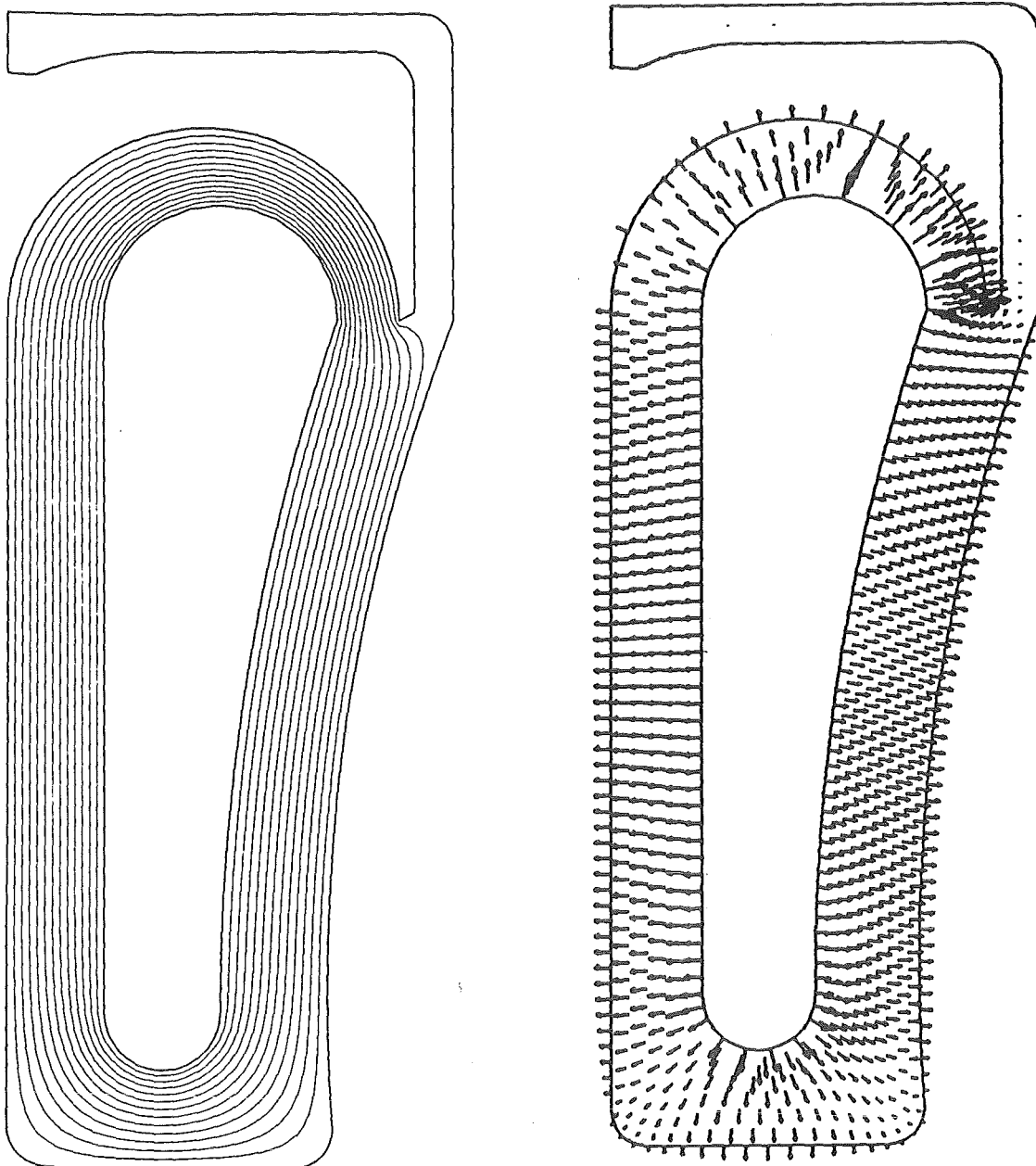


Abb. 6.3: Potential und elektrisches Feld in der leeren B_0 -Diode ohne Teilchenemission. Angelegte Spannung 1,3 MV. Abb. 6.3a) zeigt die Äquipotentiallinien zu den Werten 100 kV, 200 kV, ..., 1200 kV. In Abb. 6.3b) wurde zu einigen Gitterpunkten das elektrische Feld angegeben. Die Länge des Pfeiles \rightarrow entspricht 150 MV/m.

Die elektrostatische Berechnung des elektrischen Feldes in der leeren Diode zeigt, daß die Feldstärke an der gesamten Kathodenfront bis zur Feldemissionskante größer als 100 MV/m ist. Daraus schließt man, daß sich an der gesamten Kathodenoberfläche ein Plasma bildet, und überall Elektronen von diesem Plasma in den Spalt emittiert werden.

Zwar werden die Stifte auf der Rückseite der Anode bei der Berechnung der elektrischen Felder nicht berücksichtigt, dennoch müssen die Aussparungen der Bohrungen an der Rückseite der Kathode zur Durchführung der Stifte beachtet werden. Sie reduzieren die effektive Kathodenfläche dort um 20%. Bei der Rechnung werden an den entsprechenden Stellen keine Elektronen emittiert. Ionen werden nur an der Frontseite der Anode erzeugt, so daß deren Emission nicht korrigiert werden muß.

Die numerische Simulation wird mit einem Zeitschritt $DT = 1,82 \cdot 10^{-12}$ s und $DTE = DT/20$ durchgeführt (vgl. Anhang A2). Mit Protonen als Ionen wird die Simulation mit dem wahren Massenverhältnis von Protonen und Elektronen ausgeführt. Nach ca. 10000 Zeitschritten, das entspricht auf einer Siemens 7890M einer Rechenzeit von ungefähr 10 Stunden, erhalten wir einen stationären Zustand eines bipolaren Elektronen- und Protonenflusses.

6.2. Stromverhalten der B_{θ} -Diode

Vergleichswerte zwischen Experiment und Simulation liefert die Strommessung. Die numerische Rechnung bestimmt den Innenstrom IDI (vgl. Abb. 6.1), den Lamellenstrom IDL und den Ionenstrom I_{ion} . Der Gesamtstrom IDA errechnet sich als Summe $IDI + I_{ion} + IDL$. Dabei ist IDL derjenige Strom, der durch die an den Lamellen in den Anoden-Kathoden-Spalt emittierte Ladung erzeugt wird, abzüglich des Wertes, der durch die in das Lamellenplasma zurückfließenden Elektronen entsteht. Die numerische Bestimmung des Innenstromes erfolgt durch Aufsummierung der pro Zeitschritt zwischen Feldemissionskante und Innenwand der Kathode emittierten Ladung. Der Ionenstrom I_{ion} ist durch die Summe der pro Zeitschritt an der Anode erzeugten Ladung gegeben.

Experimentell wird der Gesamtstrom IDA und der Strom an der Innenwand der Kathode IDI gemessen. Da die Ionen die Diode zu 98-99% stromneutralisiert verlassen, werden, dem Ionenstrom entsprechend, Elektronen vom Lamellenplasma zur Neutralisation abgezogen. Der experimentelle Wert des Ionenstromes wird als Differenz $IDA-IDI$ angegeben.

Es ist experimentell nicht möglich, den Lamellenstrom zu messen. Deshalb ist die experimentelle Bestimmung des Ionenstromes aus der Differenz von Gesamtstrom und Innenstrom mit der Unsicherheit verbunden, inwieweit der Lamellenstrom zum Ionenstrom hinzugerechnet wird. Die numerische Simulation soll im Rahmen der oben beschriebenen Modellierung der Lamellen Hinweise geben, wie groß der Lamellenstrom im Vergleich zum Ionenstrom ist und damit welcher Anteil des experimentell ermittelten Ionenstromes vom Lamellenstrom herrührt.

Experimentell werden sowohl die Spannung als auch die Ströme IDA und IDI als Funktionen der Zeit ermittelt. Um die numerischen Ergebnisse für eine feste Spannung von 1,3 MV mit experimentellen Werten zu vergleichen, muß im zeitlichen Verlauf der Spannungskurve der Zeitpunkt bei ansteigendem bzw. abfallendem Impuls gefunden werden, bei dem an der Diode 1,3 MV anliegen. Anschließend werden die zu diesem Zeitpunkt gehörenden Ströme ermittelt. Deshalb müssen bei den experimentellen Angaben über die Ströme neben Meßungenauigkeiten zusätzlich systematische Fehler berücksichtigt werden.

Als weitere Unsicherheiten beim Vergleich zwischen experimentellen und numerischen Daten kommen die Verluste an den Stiften und der unbekannte, effektive Spaltabstand hinzu. Die neun Stifte auf der Rückseite der Anode sind durch Elektroneneinschläge stark beschädigt. Es kommt somit an diesen Stiften lokal zu Verlusten, die in der Simulation nicht berücksichtigt werden.

Sowohl das Anoden- als auch das Kathodenplasma breitet sich mit einer endlichen Geschwindigkeit aus. Somit liegt im zeitlichen Verlauf des Experiments im Prinzip zu jedem Zeitpunkt ein anderer effektiver Spaltabstand vor. Insbesondere ist dieser Spaltabstand kleiner als durch den geometrischen Spaltabstand angenommen wird. Diese zeitliche Bewegung der Plasmafronten kann durch unsere stationäre, numerische Beschreibung der Diode nicht modelliert werden.

Um dennoch bei maximaler Spannung eine Abschätzung für die Plasmadicke an der Anode zu erhalten, werden numerische Simulationen für verschiedene Spaltabstände (8 mm, 7 mm, 6 mm) durchgeführt und die Ergebnisse mit den bei 8 mm experimentell gemessenen Strömen verglichen.

In Tabelle 6.1 sind die experimentell ermittelten Werte [65] in der ersten Spalte und die numerisch berechneten in den weiteren angegeben.

	experimentell (8 mm Spalt)	numerisch (8 mm Spalt)	numerisch (7 mm Spalt)	numerisch (6 mm Spalt)
IDA [kA]	620 ± 10%	511	564	680
IDI [kA]	340 ± 10%	341	364	420
I_{ion} [kA]	280	170	200	260

Tabelle 6.1: Vergleich der experimentell bei 8 mm ermittelten Ströme mit den numerisch berechneten bei einer angelegten Spannung von 1,3 MV.

Der numerisch berechnete Wandstrom bei 8 mm Spaltabstand stimmt gut mit dem experimentell gemessenen überein, nicht jedoch der Ionenstrom, der bei diesem Spaltabstand geringer ist. Um einen Spaltabstand von 6 bzw. 7 mm zu simulieren, wurde der Anodenkörper gegenüber der Feldemissionskante

verschoben. Damit stimmt die Simulationsanordnung auf der Rückseite der Anode nicht mehr mit der experimentellen überein. Die numerischen Wandströme weichen deshalb auch stark von den experimentellen ab. Jedoch der numerische Wert für den Ionenstrom ist bei einem Spaltabstand von 6 mm in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen.

Dieses Ergebnis läßt sich nun folgendermaßen interpretieren: Nach der Erzeugung des Anoden- und Kathodenplasmas breiten sich die Plasmaoberflächen aus und besitzen beim maximalen Spannungswert eine endliche Breite. D.h. die Emissionsfläche der Ionen fällt nicht mehr mit der geometrischen Anode zusammen, und der Spaltabstand verkleinert sich. Die Ionen führen folglich einen größeren Strom als bei der numerischen Simulation beim geometrischen Spaltabstand berechnet wurde.

Da die Ionenströme bei einer Simulationsanordnung von 6 mm Spaltabstand den experimentellen Ionenströmen von 8 mm Spaltabstand entsprechen, ergibt sich eine Verkleinerung des Spaltabstandes von 2 mm und eine Anodenplasmadicke von etwa 1 - 2 mm.

Berücksichtigt man außerdem die Zeit für den Spannungsanstieg auf 1,3 MV, so erhält man eine Abschätzung für eine maximale Plasmageschwindigkeit in der Anstiegsphase des Impulses. Aus [64, Fig. 3] wird die Anstiegszeit der Spannung bis zum maximalen Wert von 50 ns entnommen. Damit ist in der Anstiegsphase des Spannungsimpulses eine Abschätzung für die maximale Geschwindigkeit des Anodenplasmas durch $4 \text{ cm}/\mu\text{s}$ gegeben. Diese Geschwindigkeit liegt innerhalb den von Johnson experimentell bestimmten von $1,5 \text{ cm}/\mu\text{s}$ bei 800 kV [44] und $10 \text{ cm}/\mu\text{s}$ bei 1,5 MV [45].

Aus der numerischen Rechnung zeigt sich auch, daß der Lamellenstrom IDL nur etwa 1 % des Ionenstromes beträgt, d.h. daß - im Rahmen der numerischen Modellierung - IDL bei der experimentellen Bestimmung des Ionenstromes vernachlässigt werden kann. Damit ist die experimentelle Bestimmung des Ionenstromes als Differenz von Gesamtstrom und Innenstrom gerechtfertigt.

Bei der numerischen Berechnung des Lamellenstromes wurde sowohl der Strom berücksichtigt, der durch die in den Spalt emittierten Elektronen entsteht, als auch der Strom, der durch die in das Lamellenplasma zurückfließenden Elektronen erzeugt wird. Da der Lamellenstrom vernachlässigbar klein ist,

werden folglich im zeitlichen Mittel etwa genau so viele Elektronen von den Lamellen in den Anoden-Kathoden-Spalt emittiert, wie Elektronen aus dem Spalt in die Lamellen zurückfließen.

Aus den Werten für einen Spaltabstand von 8 mm ergibt sich eine Impedanz der Diode von $2,5 \Omega$. Berücksichtigen wir jedoch eine Dicke des Anodenplasmas von ca. 2 mm und korrigieren den Ionenstrom entsprechend Tabelle 6.1, ergibt sich eine Impedanz der Diode von $2,1 \Omega$. Dieser Wert liegt im Bereich der experimentell ermittelten Werte von $1,8-2,2 \Omega$.

6.3. Felder in der B_θ -Diode

Die zum stationären Zustand gehörenden Äquipotentiallinien wurden in Abb. 6.4a dargestellt. Als Folge der Raumladung der Elektronen in der Diode verdichten sich die Potentiallinien an der Anode. Es bildet sich eine virtuelle Kathode, die sich an die Anode anschmiegt, was aus den Abb. 6.4 deutlich hervorgeht. In Abb. 6.4b wurde zusätzlich die Äquipotentiallinie zu 10 kV angegeben.

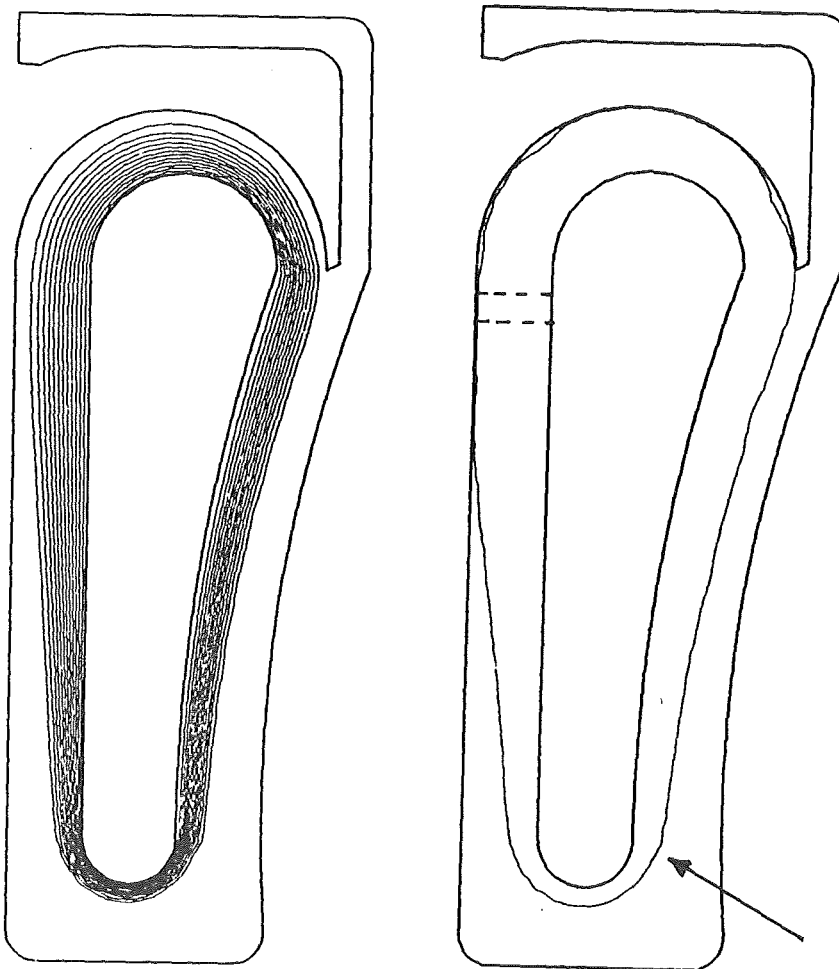


Abb. 6.4: Potential in der B_θ -Diode bei bipolarem Fluß von Elektronen und Protonen. Abb. 6.4a) zeigt die Äquipotentiallinien zu den Werten 100 kV, 200 kV, ..., 1200 kV und Abb. 6.4b) zum Wert 10 kV.

Es deutet sich in Abb. 6.4b an, daß die Form der geometrischen Kathode keinen Einfluß auf den Verlauf der Feldlinien besitzt. Diese Vermutung wird durch Simulationsrechnungen bestätigt, bei denen die Lamellenform nicht parallel zur Anode verlief, sondern geradlinig angenommen wurde.

Aus Abb. 6.4b ist weiter zu entnehmen, daß im Übergangsbereich von emittierender zu nichtemittierender Anodenfläche (siehe Pfeil) ein deutlicher Sprung im Verlauf der 10 kV-Linie auftritt. In diesem Bereich ist die Raumladung der Ionen durch die numerische Modellierung unstetig. Experimentell ist jedoch zu erwarten, daß die Potentiallinien in diesem Übergangsbereich glatter verlaufen.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß der Verlauf der virtuellen Kathode im vorderen Bereich der Diode durch die an der Feldemissionskante erzeugten Elektronen bestimmt wird und die virtuelle Kathode mit abnehmendem Abstand zur Achse sich der Anode nähert:

In den stationären, selbstkonsistenten elektromagnetischen Feldern wurde die Bahn eines an der Feldemissionskante emittierten Elektrons berechnet (Abb. 6.5). Das Teilchen folgt durch die (\mathbf{ExB}) -Drift den Äquipotentiallinien und umkreist die Anode, bis es schließlich nach weiteren Umkreisungen auf die Anode prallt. Da das Magnetfeld zur Achse hin zunimmt, wird der Gyrationradius ($r = mv/(qB)$) des Teilchens bei der Annäherung an die Achse geringer, während sich auf der Rückseite der Anode der Gyrationradius vergrößert, da das Magnetfeld nach oben hin abnimmt. Der Gyrationradius verkleinert sich im Bereich oberhalb der Anode wieder, da sich hier der Strom durch den Rückfluß der Elektronen zum Innenleiter des KALIF-Generators bemerkbar macht.

Durch die Zunahme des Magnetfeldes zur Achse hin, wirkt neben der (\mathbf{ExB}) -Kraft eine $(\mathbf{B} \times \text{grad } B)$ -Kraft, die die Elektronen zur Anode hin ablenkt. Für einige Elektronen ist die Ablenkung groß genug, so daß sie bei kleinen Radien auf die Anodenfläche prallen. D.h. der untere Bereich der Anode ist nicht mehr vollständig isoliert (vgl. Abb. 6.6a), was dadurch bestätigt wird, daß die Anodenplatte im unteren Bereich beschädigt ist.

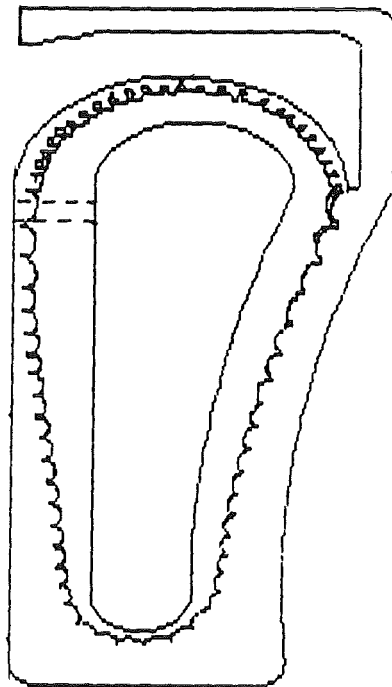


Abb. 6.5: Teilchenbahn eines Makro-Elektrons, das an der Feldemissionskante erzeugt wurde.

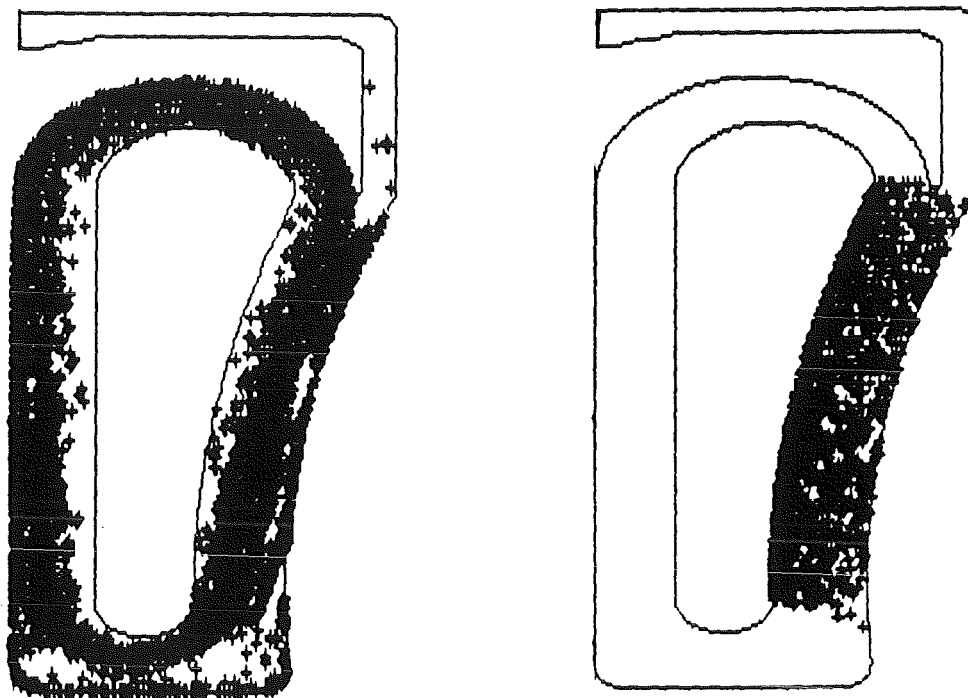
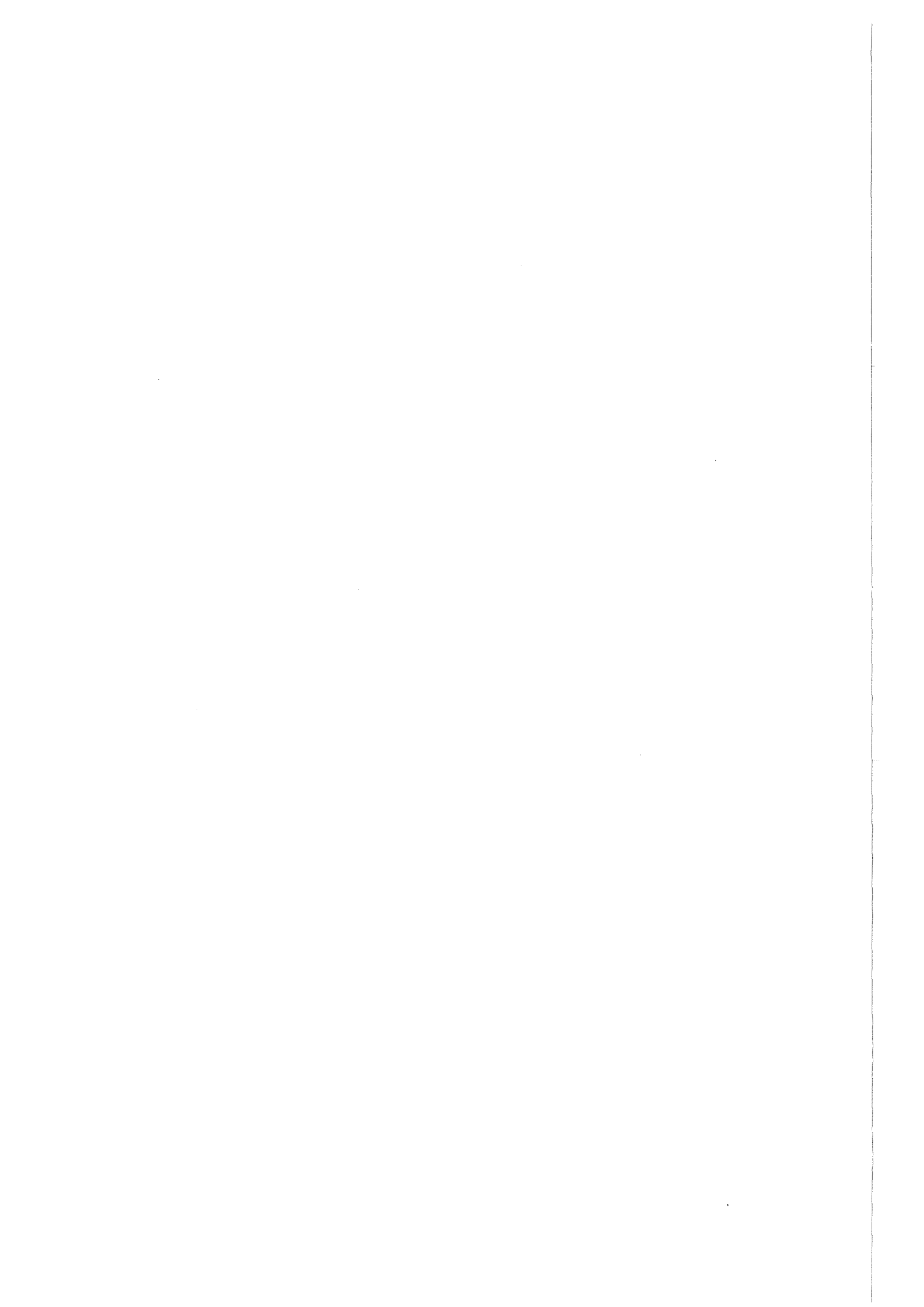


Abb. 6.6: Teilchenmomentaufnahme am Ende eines selbstkonsistenten Simulationslaufs. Jedes 5. der 10000 Makro-Elektronen wurde in Abb. 6.6a) und jedes 10. der 22000 Makro-Ionen wurde in Abb. 6.6b) gezeichnet.



6.4. Ladungsdichten in der B_0 -Diode

In Abb. 6.7 wurden die Ladungsdichten der Elektronen und der Ionen für den Bereich zwischen Anodenplatte und Lamellen für verschiedene Radien dargestellt. Im Bereich zwischen Anode und virtueller Kathode werden die Ionen zur Kathode beschleunigt und die Ionenladungsdichte nimmt mit wachsendem Abstand zur Anode ab. Nachdem die Ionen die Potentialdifferenz von 1,3 MV durchlaufen haben, bewegen sie sich zwischen virtueller Kathode und Lamellen gleichförmig fort. In diesem Bereich ist die Ionenladungsdichte konstant.

Die Elektronenladungsdichte weist hingegen ein Maximum im Bereich der Feldemissionskante auf. Sie nimmt zur Anode hin auf Null ab und steigt lediglich im Bereich der Lamellen an, da hier ebenfalls Elektronen emittiert werden. Das Maximum der Elektronenladungsdichte nähert sich mit abnehmendem Radius der Anode. Bei R_0 ist der Abstand zwischen der Anode und dem Maximum 8 mm (dies ist gerade der Spaltabstand) und bei r_0 liegt der Abstand bei 4,0 mm. Damit nähert sich das Maximum der Elektronenladungsdichte der Anode um 4,0 mm. Insbesondere zeigt sich aus den Abb 6.7a) und b), daß der obere und mittlere Teil der Anode magnetisch isoliert ist, während im unteren Bereich (Abb. 6.7c)) Elektronen auf die Anode treffen.

Die Zunahme des Magnetfeldes zur Achse hin verursacht eine geringere Driftgeschwindigkeit $v_d = E/B$ und damit eine größere Aufenthaltsdauer im unteren Bereich als im oberen. Es kommt im unteren Bereich der Diode zu einer Anhäufung von Elektronenladung. Die Teilchen induzieren auf den Gitterpunkten eine Ladungsdichte, die proportional zu $1/r$ ist. D.h. gyriert ein Teilchen von der Feldemissionskante zum achsennahen Bereich der Diode, wird die induzierte Ladungsdichte bis zu einem Faktor 3 erhöht. Insgesamt führt dies zu einer großen Elektronenladungsdichte im unteren Bereich der Diode.

Zusammenfassend können wir folgern, daß die an der Feldemissionskante erzeugten Teilchen eine negative Raumladung induzieren, die zur Bildung einer virtuellen Kathode führt. Dies hat zur Folge, daß sich die Potentiallinien an der Anode verdichten und die elektrischen Felder verstärken. Das Maximum der Elektronenladungsdichte nähert sich mit abnehmendem Abstand zur Rotationsachse der Anode und induziert dadurch die größten Feldstärken im unteren Bereich der Anode.

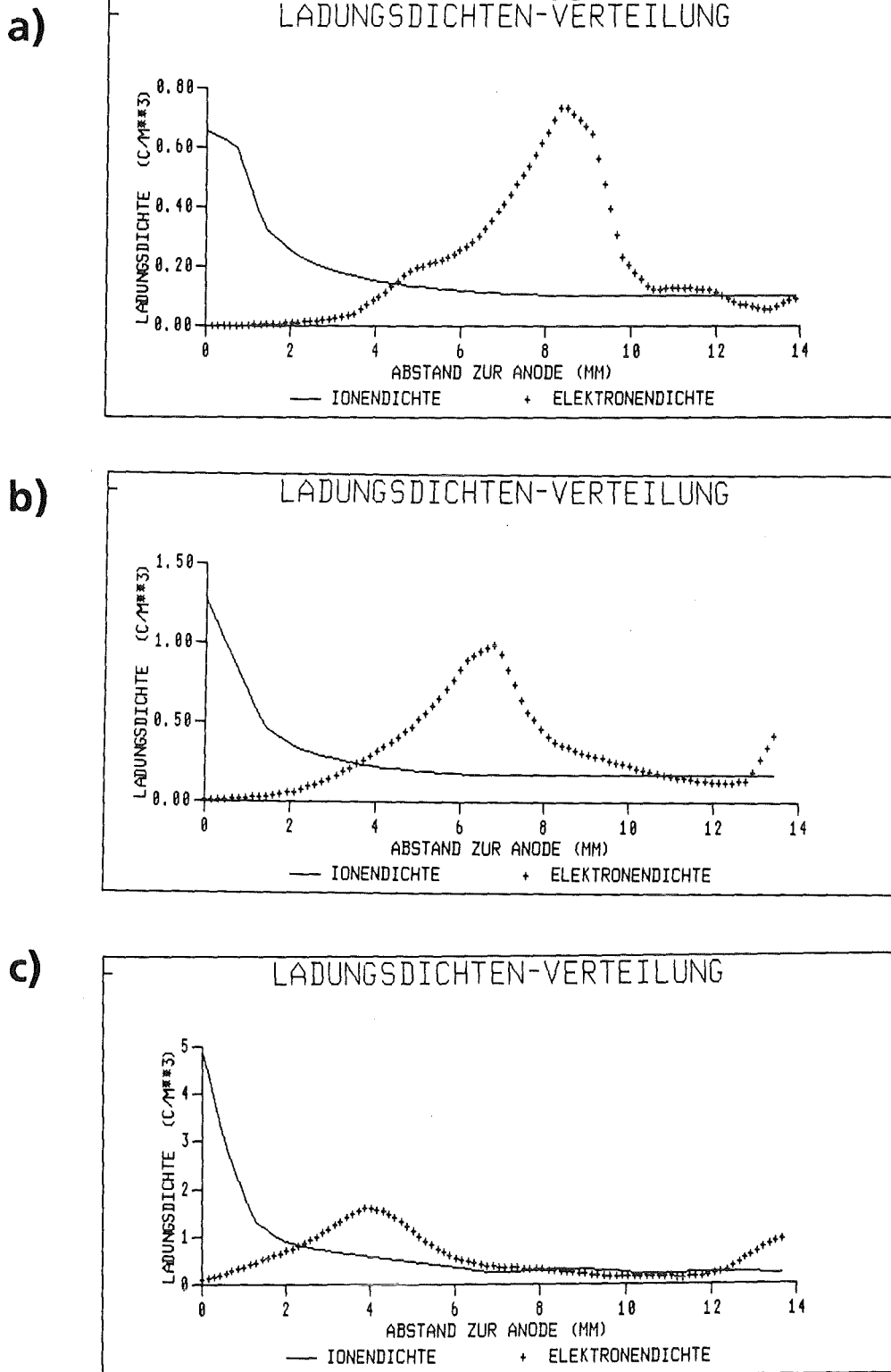


Abb. 6.7: Ladungsdichten für Elektronen und Protonen zwischen Anode und Lamellen für verschiedene Radien a) 150 mm, b) 100 mm, c) 60 mm als Funktion vom Abstand zur Anode.

6.5. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit analytischen Modellen

Um den Verlauf der Äquipotentiallinien quantitativ zu beschreiben, tragen wir aus dem mittleren Bereich der Diode ($r = 100 \text{ mm}$) das Potential als Funktion vom Abstand zur Anode auf (Abb. 6.8). Zum Vergleich mit eindimensionalen analytischen Modellen fügen wir in das Diagramm die Potentialverteilung für einen monopolen Child-Langmuir Strom ein,

$$V(x) = V_0 \left(1 - \left(\frac{x}{d} \right)^{4/3} \right),$$

wobei V_0 die angelegte Spannung, x der Abstand zur Anode und d eine angepaßte Spaltbreite ist.

Aus Abb. 6.8 ergibt sich, daß die Anordnung der Feldlinien nahe der Anode durch die Ionen bestimmt wird und als monopoles Child-Langmuir Gesetz mit einer effektiven Spaltbreite d_{eff} interpretiert werden kann. Die Abweichung der Verteilung unterhalb von 400 kV läßt sich dadurch erklären, daß sich in diesem Bereich der Einfluß der Elektronen bemerkbar macht.

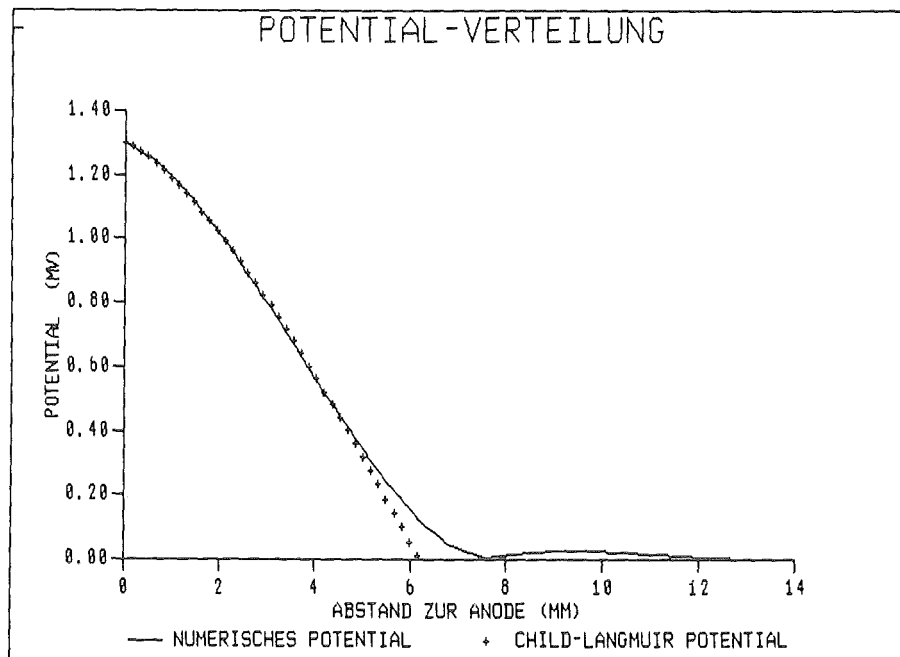


Abb. 6.8: Potentialverteilung in der B_0 -Diode als Funktion vom Abstand zur Anode beim Radius $r = 100 \text{ mm}$.

Zur Bestimmung des effektiven Spaltabstandes d_{eff} als Funktion vom Abstand zur Achse werden die Ionenstromdichten benutzt. In Abb. 6.9 wurden die Ionenstromdichten für jeden Gitterpunkt im Anoden-Kathoden-Spalt gezeichnet und in Abb. 6.10 sind die Werte $j \cdot r^{7/4}$ an der Kathode als Funktion vom Abstand r zur Achse aufgetragen. (Es zeigt sich, daß dabei der Abstand zur Anode keine Rolle spielt, d.h. die Ionenstromdichten $j(r,z)$ sind bei festem Radius eine konstante Funktion in z .) Im mittleren Bereich der Kathode verhält sich $j \cdot r^{7/4}$ nahezu konstant, d.h. $j(r) \sim 1/r^{7/4}$.

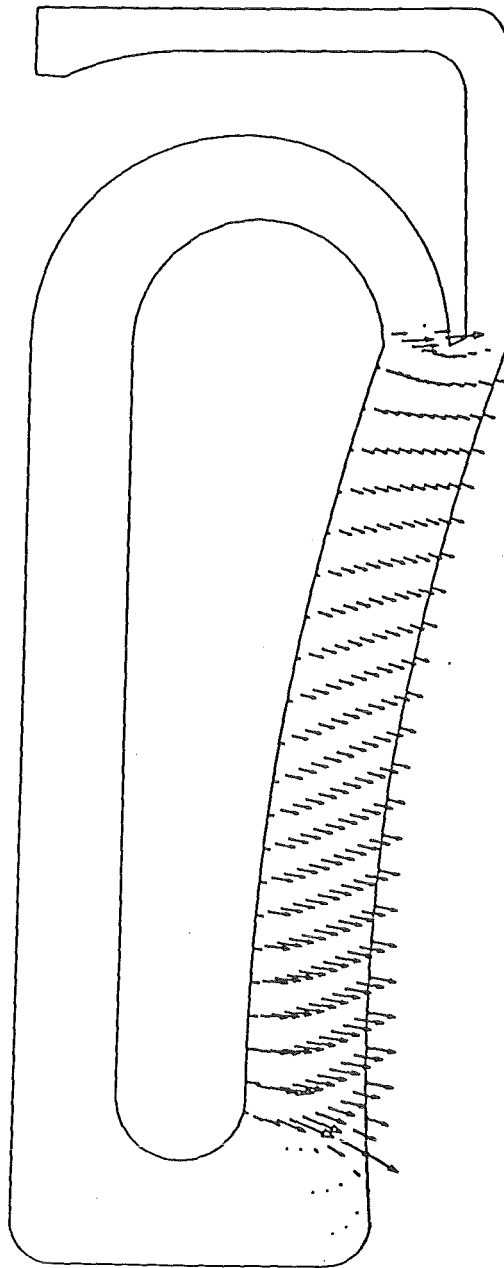


Abb. 6.9: Stromdichten der Ionen an den Gitterpunkten. Die Länge des Pfeiles \rightarrow entspricht $4,5 \text{ MA/m}^2$.

Wir nehmen im folgenden an, daß das eindimensionale Modell für das Potential $V(x)$ und die zugehörige Stromdichte von Ionen der Masse M und Ladung Z ,

$$j = 4/9 \varepsilon_0 \left(\frac{2 Z e}{M} \right)^{1/2} \frac{V_0^{3/2}}{d^2},$$

lokal für jeden Radius r angewendet werden kann, wobei der Parameter

$$d = d_{\text{eff}}(r)$$

als von r abhängige Größe eingeführt wird.

Für den effektiven Spaltabstand $d_{\text{eff}}(r)$ in Abhängigkeit vom Radius (Abb. 6.11) erhalten wir dann im Bereich zwischen $60 \text{ mm} \leq r \leq 150 \text{ mm}$

$$d_{\text{eff}}(r) = d_0 \left(\frac{r}{R_0} \right)^{7/8},$$

wenn $d_0 = 8 \text{ mm}$ der Spaltabstand zwischen Feldemissionskante und Anode und $R_0 = 150 \text{ mm}$ ist.

Durch die radiale Abhängigkeit des effektiven Spaltabstandes ist auch der Verstärkungsfaktor der Ionenstromdichte j_i r -abhängig. Er ergibt sich zu

$$\frac{j_i(r)}{j_{cl}} = \left(\frac{d_0}{d_{\text{eff}}(r)} \right)^2 = \left(\frac{R_0}{r} \right)^{7/4}.$$

Die Verstärkung beträgt an der oberen Kante der Anode bei $R_0 = 150 \text{ mm}$: 1 und an der unteren bei $r_0 = 60 \text{ mm}$: 4,9. Folglich ist der Verstärkungsfaktor der Ionenstromdichte an der inneren Ecke der Anode am größten. Dies wurde auch bei experimentellen Messungen an ähnlichen Dioden beobachtet [66-68].

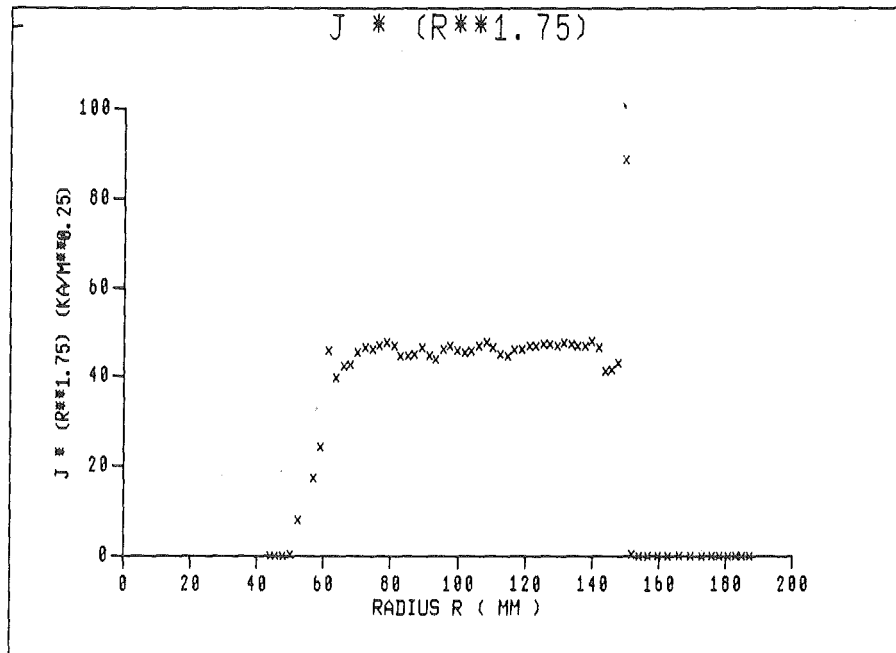


Abb. 6.10: Produkt aus Stromdichte und Radius hoch 1.75 an der Kathode als Funktion vom Abstand zur Rotationsachse.

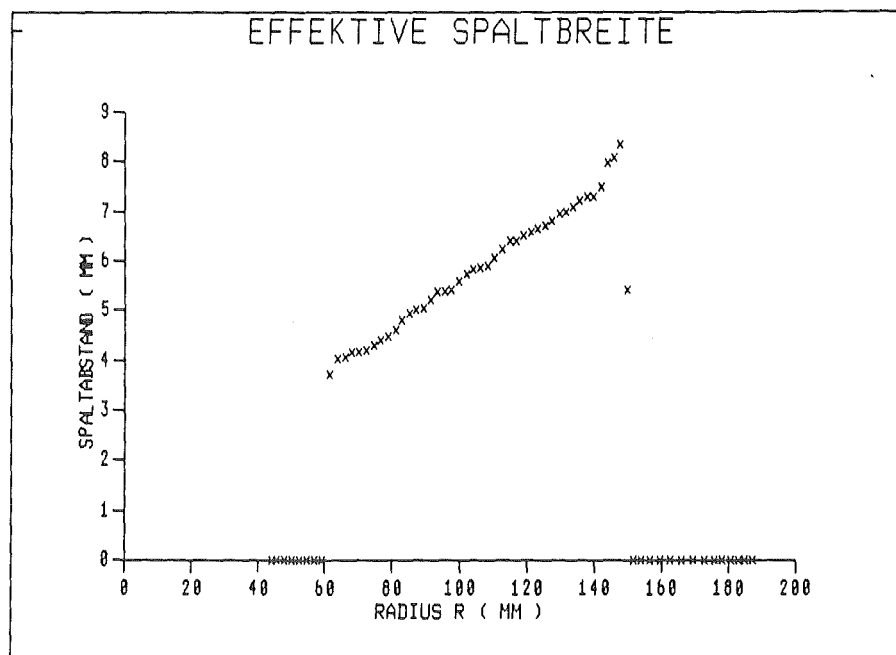


Abb. 6.11: Die effektive Spaltbreite als Funktion vom Abstand zur Rotationsachse.

6.6. Fokussierungseigenschaften von Konfiguration I

Im weiteren ist die Bewegung der Ionen in den selbstkonsistenten Feldern die Grundlage, um den Fokus der Ionenstrahlen zu bestimmen. Die Ionen werden an der Anode erzeugt und zur Kathode beschleunigt. Wenn sie die Diode durch das Kathodenplasma verlassen, ist die vollständige Information bezüglich des Ortes, der Geschwindigkeit und der Ladung der Ionen bekannt. Im Rahmen einer stationären Beschreibung des Systems haben alle Ionen, welche die Diode durch die Kathode verlassen, die Energie 1,3 MeV. Die Ungenauigkeiten in der numerischen Rechnung rufen einen Fehler von ca. 1,6% hervor, so daß die Energie der Simulationsteilchen zwischen 1,28 MeV und 1,32 MeV variiert.

Unter der Voraussetzung einer kräftefreien Bewegung der Ionen im Driftraum der Diode, lassen sich aus den Teilchendaten die Schnittpunkte mit der Rotationsachse berechnen. Aus Abb. 6.12 entnimmt man, daß die Ionenstrahlen, die bei unterschiedlichen Krümmungsradien emittiert wurden, auch unterschiedlich fokussiert werden. Die Ionenstrahlen aus dem oberen Bereich besitzen einen Fokus bei 40 cm, die Strahlen aus dem unteren Bereich dagegen bei 46 cm. Dadurch kommt es zum Überschneiden der beiden Strahlenbündel, und es bildet sich ein Ringfokus oberhalb der Achse bei 30 cm.

Aus den Teilchenbahnen im Driftraum ergibt sich der z-Wert der Fokusebene und die zugehörige Intensitätsverteilung in dieser Ebene. Als Fokusebene wird durch Variation von z diejenige Ebene in der (r,θ) -Geometrie gesucht, bei der an der Achse die größte Intensität herrscht. Anschließend wird die so ermittelte Fokusebene in konzentrische Kreise unterteilt, und die auf die jeweiligen Flächenstücke auftreffenden Ionenstrahlen gezählt. Abb. 6.13 stellt die Abhängigkeit der Anzahl der Teilchen in der Fokusebene (bei $z = 46$ cm) vom Abstand zur Rotationsachse dar. Die unterschiedliche Fokussierung der Ionenstrahlen aus den beiden Bereichen spiegelt sich in den zwei ausgeprägten Maxima der Teilchenverteilung wider. Nur 40% der Ionenstrahlen treffen in den Bereich des Hauptmaximums auf eine Kreisfläche mit einem Durchmesser von 7 mm.

Aus der Teilchenverteilung erhält man nach der Normierung mit den entsprechenden Ringflächen die Leistungsdichte als Funktion vom Radius, wie sie in Abb. 6.14a angegeben ist. Bei einer angelegten Spannung von 1,3 MV und einem Ionenstrom von 260 kA liegt das Maximum der Leistungsdichte bei $2,7 \text{ TW/cm}^2$, wobei dieser Wert innerhalb einer Toleranz von 10% liegt. Der Durchmesser der Halbwertsbreite beträgt 1,7 mm und die mittlere Leistungsdichte ist $1,35 \text{ TW/cm}^2$. Berücksichtigt man noch, daß der experimentelle Anteil der Protonen 40% im Ionenstrahl beträgt [62], reduziert sich die mittlere Leistungsdichte auf $0,5 \text{ TW/cm}^2$. Hierbei ist der Einfluß der Mikrodivergenz nicht berücksichtigt.

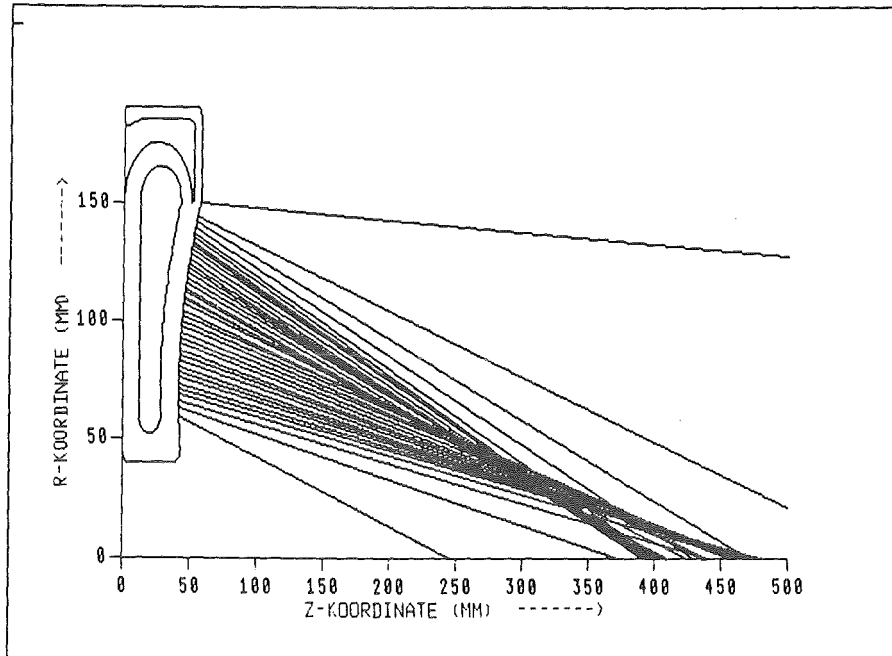


Abb. 6.12: Kräftefreie Fortbewegung der Protonen nach Verlassen des Spaltes zur Bestimmung des Fokus bei Konfiguration I.

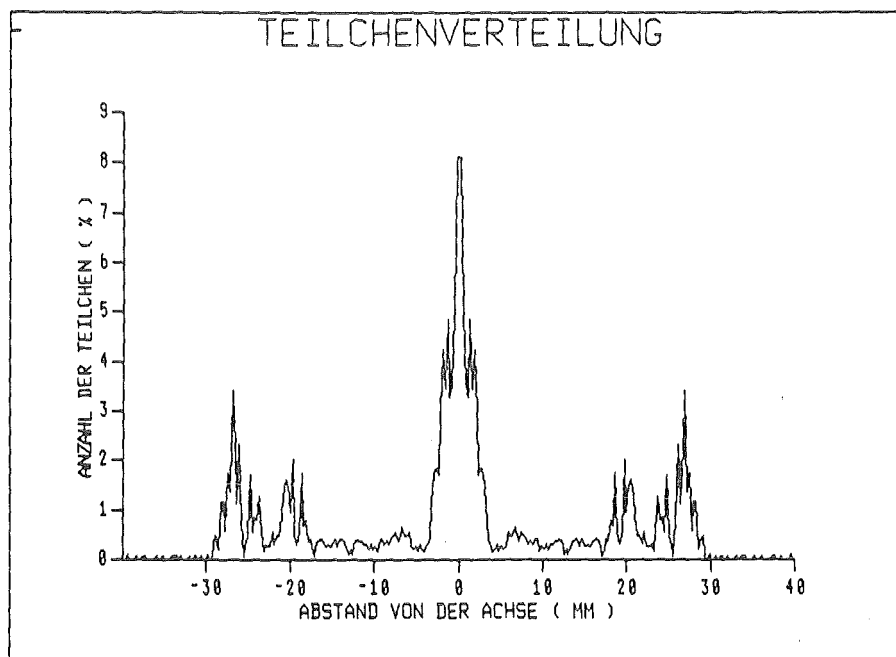


Abb. 6.13: Teilchenverteilung in der Protonenfokusebene ($z = 46 \text{ cm}$) bei Konfiguration I.

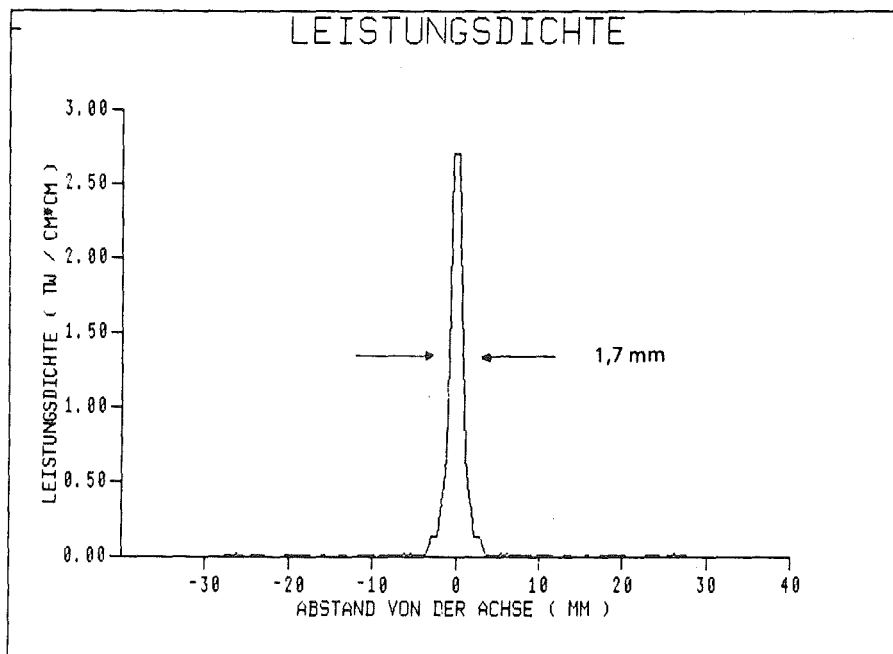


Abb. 6.14a: Leistungsdichte in der Protonenfokusebene ($z = 46$ cm) bei Konfiguration I.

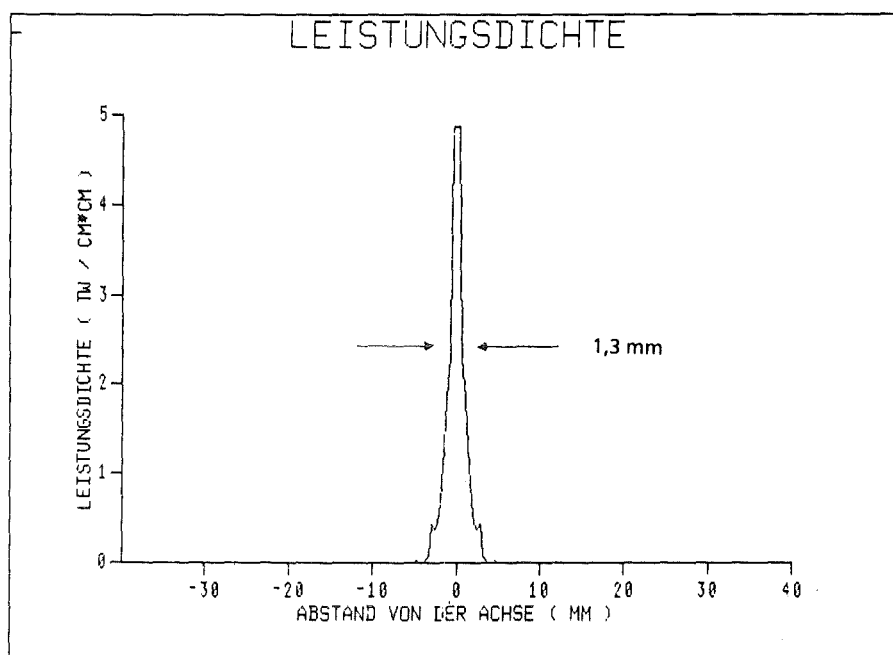


Abb. 6.14b: Leistungsdichte in der Protonenfokusebene ($z = 39,2$ cm) bei Konfiguration II.

6.7. Fokussierungseigenschaften von Konfiguration II

Die im vorigen Kapitel beschriebenen Ergebnisse für eine experimentelle Anordnung, wie sie ursprünglich eingesetzt wurde, ist der Ausgangspunkt für numerischen Simulationen zur Optimierung der Anoden-Kathoden-Konfiguration. Als nächstes wählen wir eine Anordnung, bei der die Anode nur einen einzigen Radius ($r = 275$ mm) hat. Der Innenradius für die Lamellen sei $r = 260,8$ mm (Konfiguration II). Mit dem gleichen Vorgehen wie bei der ersten Konfiguration und mit der gleichen Spannung $V = 1,3$ MV berechnet man den stationären Zustand und bestimmt den Fokus der Ionenstrahlen (vgl. Abb. 6.15 und Abb. 6.16).

Obwohl die maximalen Längenänderungen durch die unterschiedlichen Krümmungen nur 1 mm für die Anode und 1,6 mm für die Kathode betragen, ist der Einfluß auf die Fokussierungseigenschaften groß. Aus der Simulation in der zweiten Konfiguration ergibt sich, daß nun 85% der Ionenstrahlen auf eine Kreisfläche mit einem Durchmesser von 7 mm treffen. Die maximale Leistungsdichte bei Konfiguration II beträgt $4,9$ TW/cm² (vgl. Abb. 6.14b). Der Durchmesser in der Halbwertsbreite der Verteilung ist 1,3 mm. Bei der angelegten Spannung von 1,3 MV und einem Ionenstrom von 260 kA entspricht dies einer mittleren Leistungsdichte von $2,45$ TW/cm², ohne den Einfluß der Mikrodivergenz. Berücksichtigt man wieder nur den Anteil der Protonen im Ionenstrahl, reduziert sich die Leistungsdichte auf $1,0$ TW/cm². Da im Experiment durch die Mikrodivergenz der Fokusdurchmesser 10 mm beträgt, wird bei einer Spannung von 1,7 MV und einem Ionenstrom von 400 kA nur eine Leistungsdichte von $0,35$ TW/cm² erreicht [62].

Diese durch die numerische Simulation gefundene Anodengeometrie wurde anschließend im Experiment getestet. Die folgende Diskussion zeigt, daß die numerischen Ergebnisse in den wesentlichen Punkten durch das Experiment bestätigt werden. In Abb. 6.17 wurden die experimentell ermittelten Strahlenverläufe außerhalb der Diode aus [65] wiedergegeben. Wie bei der numerischen Rechnung zeigt sich auch im Experiment bei der ersten Konfiguration ein Ringfokus oberhalb der Achse. Bei der zweiten Konfiguration entfällt dieser.

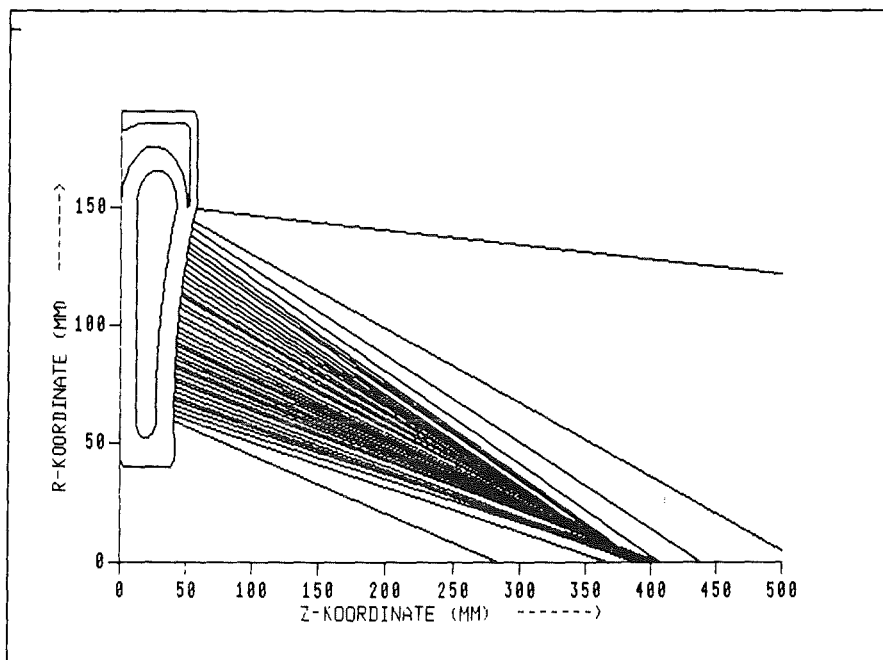


Abb. 6.15: Kräftefreie Fortbewegung der Protonen nach Verlassen des Spaltes zur Bestimmung des Fokus für Konfiguration II.

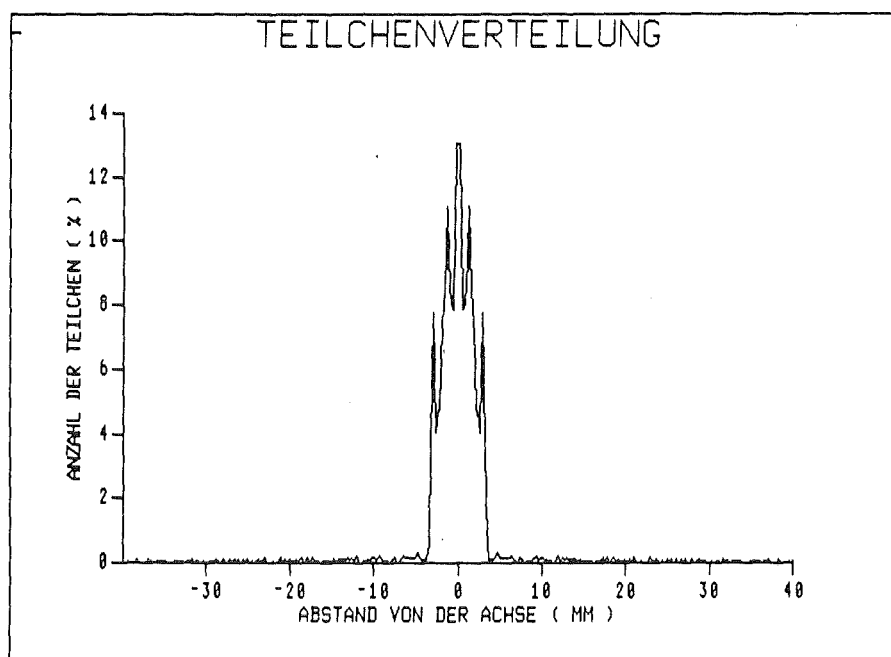


Abb. 6.16: Teilchenverteilung in der Protonenfokusebene ($z = 39,2$ cm) für Konfiguration II.

Die bessere Fokussierung der Ionenstrahlen durch die numerisch gefundene Konfiguration II wird durch das Experiment bestätigt, wie man aus Abb. 6.17b entnehmen kann. Die Lage der Fokusebene bei $z = 39,2$ cm entspricht dem experimentellen Wert $z = 39$ mm [62]. (Beim Vergleich der beiden Werte ist zu beachten, daß die Lage der Fokusebene in [62] relativ zur Kathode angegeben wird, während der numerische Wert sich auf den Koordinatenursprung bezieht.)

Der numerisch gefundene Fokusedurchmesser von 7 mm liegt innerhalb des Bereichs einer Verschmierung durch eine Mikrodivergenz, die im günstigsten Fall $1,7^\circ$ beträgt [62]. Durch diese Mikrodivergenz ist bei der B_θ -Diode ein Fokusedurchmesser von mindestens 12 mm gegeben.

Aus den Teilchenbahnen außerhalb der Diode ermittelt man die Ablenkwinkel der Teilchen an der Kathode als Funktion vom Radius (Abb. 6.18a) und vergleicht diese mit den experimentell rekonstruierten Winkeln (Abb. 6.18b) aus [62]. Es zeigt sich durch Vergleich beider Diagramme eine quantitative Übereinstimmung im Bereich von $70 \text{ mm} < r < 135 \text{ mm}$. Außerhalb dieses Bereichs treten Feldverzerrungen auf, die im Experiment deutlicher hervortreten als im numerischen Modell.

Der Vergleich der experimentell ermittelten Ablenkwinkel mit den numerischen zeigt, daß die Oberfläche des Anodenplasmas homogen ist und die Krümmungseigenschaften der geometrischen Anode übernimmt: Angenommen, die Plasmaoberfläche besitzt eine von der geometrischen Anode unterschiedliche Krümmung, dann passen sich die Äquipotentiallinien dieser Krümmung an. Die Ionen werden nun so beschleunigt, daß ihre Fokussierung durch die Plasmaoberfläche bestimmt wird. Damit ändern sich die Ablenkwinkel der Ionen beim Verlassen der Diode gegenüber denen bei der Fokussierung durch die geometrische Anode. Da wir bei der numerischen Modellierung die geometrische Anode als Emissionsfläche gewählt haben und die experimentell gefundenen Ablenkwinkel denen der Rechnung entsprechen, kann die Oberfläche des Anodenplasmas nicht stark von der geometrischen Anodenform abweichen. Folglich übernimmt die Plasmaoberfläche die Krümmungseigenschaften der geometrischen Anode und das Plasma ist an der Vorderseite der Anode homogen verteilt.

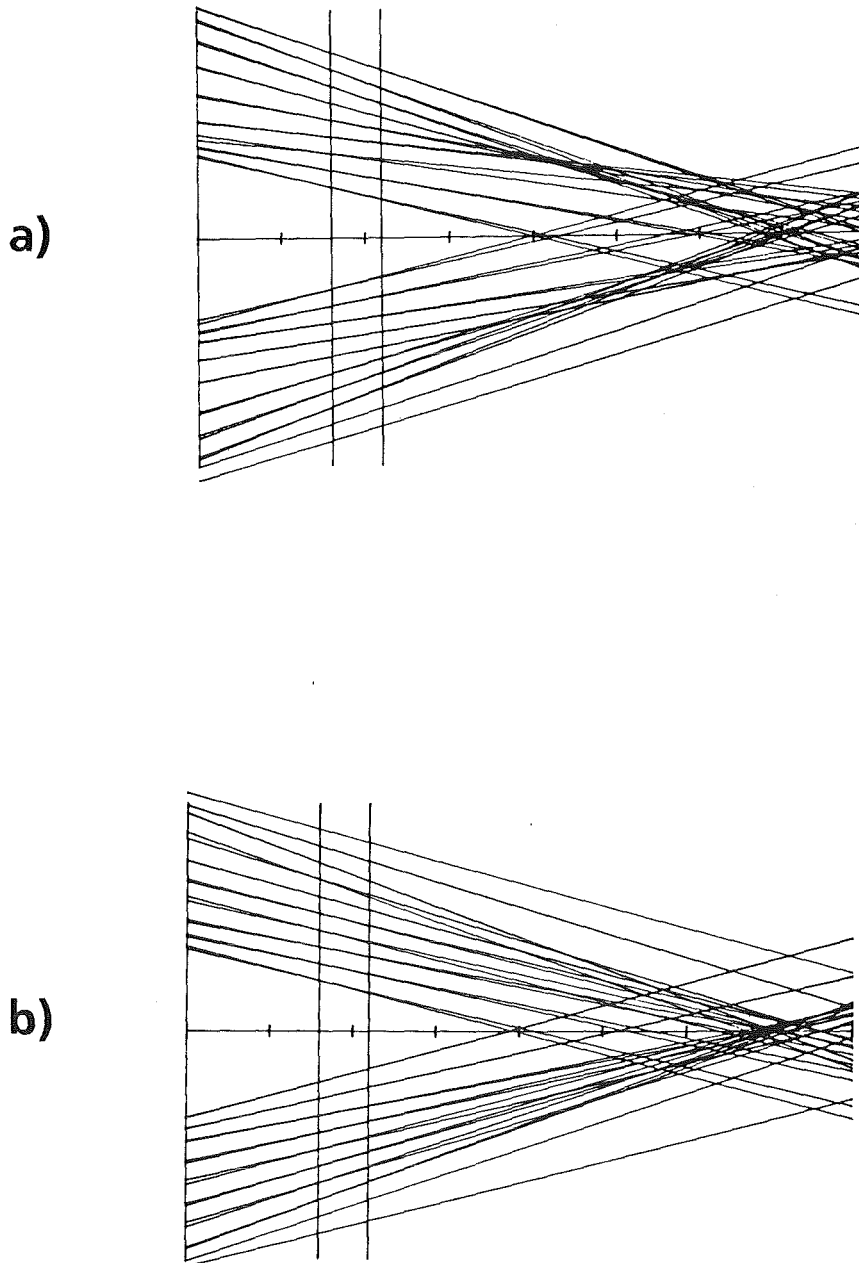
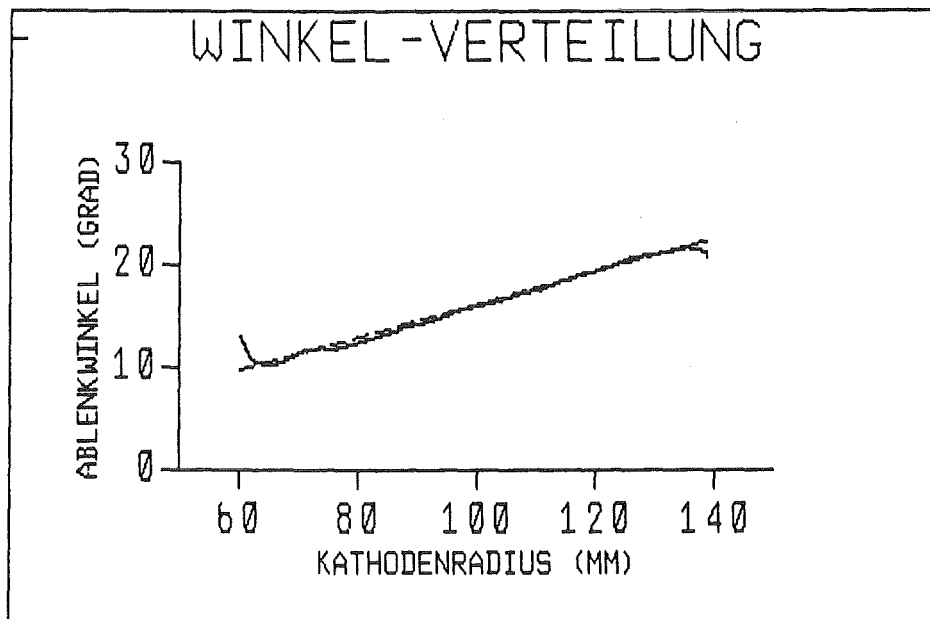


Abb. 6.17: Experimentell [62] rekonstruierte Strahlenverläufe der Protonen nach Verlassen des Spaltes. a) Konfiguration I. b) Konfiguration II.

a)



b)

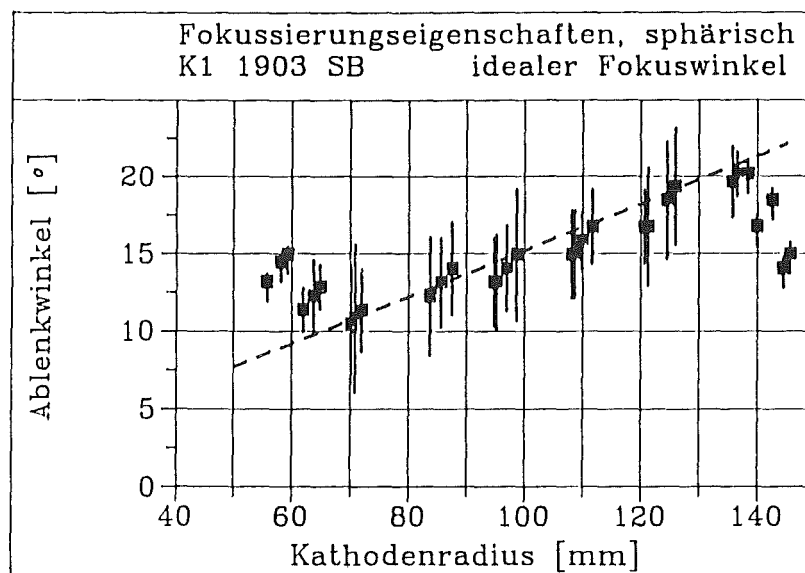


Abb. 6.18: Ablenkwinkel der Protonen an der Kathode als Funktion vom Radius, a) numerisch, b) experimentell ermittelt. Die beiden gestrichelten Kurven entsprechen den idealen Ablenkwinkeln der Ionen an der Kathode. Es sind in beiden Diagrammen dieselben Kurven.

6.8. Einfluß von Spannung und Spaltabstand auf die Fokussierung

Um den Einfluß der Spaltbreite auf den Fokusdurchmesser zu ermitteln, führen wir Simulationen mit verschiedenen Spaltabständen (6,0 mm, 7,0 mm, 8,0 mm) durch. Dabei wurde der Anodenkörper gegenüber der Feldemissionskante verschoben. Insbesondere vergrößert sich dadurch der Abstand von Anode und Kathode auf der Rückseite der Diode.

Spaltbreite	Fokusdurchmesser
6,0 mm	8 mm
7,0 mm	10 mm
8,0 mm	7 mm

Tabelle 6.2: Einfluß des Spaltabstandes auf den Fokusdurchmesser bei einer angelegten Spannung von 1,3 MV.

In Tabelle 6.2 sind die Ergebnisse der Simulationen für die o.g. Spaltabstände bei einer angelegten Spannung von 1,3 MV angegeben. Die beste Fokussierung (Fokusdurchmesser 7 mm) ergibt sich für den Spaltabstand 8,0 mm.

Aber nicht nur der Spaltabstand beeinflusst die Fokussierungseigenschaften der Diode, sondern auch die angelegte Spannung. In Tabelle 6.3 wird die Abhängigkeit der Lage der Fokusebene von der angelegten Spannung demonstriert. Als Spaltabstand wählen wir 8,0 mm und lassen die Spannung von 1,0 MV auf 1,5 MV ansteigen.

Durch das Anwachsen der Spannung steigen die Ströme (vgl. Tab. 6.4) und somit auch die induzierten Magnetfelder an. Dadurch kommt es bei höheren Spannungen zu einer stärkeren Ablenkung der Ionen im Anoden-Kathoden-Spalt, und der Abstand zwischen Fokusebene und Diode verringert sich. Die Fokusebene wandert daher zu kleineren z-Werten, nämlich von $z = 40,0$ cm zu $z = 35,9$ cm.

Spannung	z-Wert des Fokus
1,5 MV	35,9 cm
1,3 MV	39,2 cm
1,0 MV	40,0 cm

Tabelle 6.3: Lage der Fokusebene in Abhängigkeit von der angelegten Spannung bei einem Spaltabstand von 8 mm.

Da in der experimentellen Anordnung die Spannung nicht konstant ist, sondern gemäß dem Spannungsimpuls als Funktion der Zeit an- bzw. abfällt, ist die Lage der Fokusebene ebenfalls eine Funktion von der Zeit. Nach obiger Tabelle ist zu erwarten, daß diese Lage in einem Bereich von $\Delta z = 5 \text{ cm}$ variiert.

Spannung [MV]	1,0	1,3	1,5
IDA [kA]	458	511	616
IDI [kA]	333	341	426
I_{ion} [kA]	114	170	190

Tabelle 6.4: Einfluß der angelegten Spannung auf die Ströme in der Diode.

6.9. Zusammenfassung von Kapitel 6

Im folgenden werden die numerischen Ergebnisse über die selbstmagnetisch isolierte B_θ -Diode zusammengefaßt:

Im Rahmen der numerischen Modellierung der Lamellen wurde gezeigt, daß der Lamellenstrom gegenüber dem Ionenstrom vernachlässigbar ist. Somit ist die experimentelle Bestimmung des Ionenstromes als Differenz von Gesamtstrom und Innenstrom gerechtfertigt. Aus dem Vergleich von Rechnung und Experiment ergab sich eine quantitative Aussage über die Dicke des Anodenplasmas von ca. 1 - 2 mm und eine Abschätzung für die maximale Geschwindigkeit des Anodenplasmas in der Anstiegsphase des Spannungsimpulses von 4 cm/ μ s.

Neben diesen globalen Aussagen über das Stromverhalten der B_θ -Diode konnten dynamische Effekte, wie z.B. die Lage der virtuellen Kathode, aufgezeigt werden:

Der Verlauf der virtuellen Kathode wird durch die an der Feldemissionskante emittierten Elektronen bestimmt. Die virtuelle Kathode nähert sich mit abnehmendem Radius der Anode. Die Unstetigkeit in den Stromdichten im Übergangsbereich von emittierender zu nichtemittierender Anode bewirken eine weitere Annäherung der virtuellen Kathode zur Anode hin. Insgesamt führt dies im unteren Bereich der Anode zum Verlust der magnetischen Isolation.

Der Verlauf der Feldlinien vor der emittierenden Anode wird durch ein monopoles Child-Langmuir Gesetz für die Ionen beschrieben, wobei eine effektive Spaltbreite in Abhängigkeit vom Radius eingeführt wurde.

Die Ionenstromdichte ist als Funktion vom Radius proportional zu $1/r^{1,75}$.

Die Bewegung der Ionen wurde zur Bestimmung der Fokussierungseigenschaften herangezogen:

Bei Konfiguration I (zwei Krümmungsradien für die Anodenoberfläche) werden die Ionenstrahlen aus den beiden Bereichen der Anode unterschiedlich fokussiert. Es kommt zum Überschneiden der beiden Strahlenbündel und zur Ausbildung eines Ringfokusses oberhalb der Rotationsachse.

Für weitere Simulationen diente eine Anordnung, bei der die Anodenform nur durch einen einzigen Radius bestimmt ist (Konfiguration II). Bei dieser Konfiguration verschwindet der Ringfokus oberhalb der Achse und 85% der Ionenstrahlen werden auf eine Kreisfläche mit einem Durchmesser von 7 mm gebündelt. Bei einer Spannung von 1,3 MV, einem Ionenstrom von 260 kA und einem Protonenanteil im Ionenstrom von 40 % entspricht dies einer mittleren Leistungsdichte von etwa $1,0 \text{ TW/cm}^2$, ohne Berücksichtigung der Mikrodivergenz. Damit wurde die Leistungsdichte gegenüber Konfiguration I verdoppelt.

Die Lage der Fokusebene wurde abschließend als Funktion von der Spannung diskutiert. Durch die Änderung der Spannung von 1,0 MV auf 1,5 MV variiert die Lage der Fokusebene um 4 cm.

Zusammenfassung

Die Kopplung von randangepaßten Koordinaten und der Particle-in-Cell Methode führte in (r,z) -Koordinaten zu einem zweidimensionalen, stationären, selbstkonsistenten Particle-in-Cell-Code. Dadurch wurde die Möglichkeit geschaffen, rotationssymmetrische technische Ionen-Dioden mit gekrümmten inneren und äußeren Rändern selbstkonsistent zu modellieren, ohne die Dioden in ihrer geometrischen Beschaffenheit zu vereinfachen. Die Bewegung von elektrisch geladenen Teilchen wird damit für stationäre Vorgänge sowohl in äußeren als auch in selbsterzeugten elektromagnetischen Feldern simuliert und somit die Effekte der Eigenfelder berücksichtigt.

Im Spezialfall eines ebenen Plattenkondensators wurden zunächst unter Vernachlässigung der magnetischen Eigenfelder die numerischen Ergebnisse sowohl mit dem monopolen als auch mit dem bipolaren relativistischen Child-Langmuir-Gesetz verglichen. Die numerischen Werte stimmen bis auf 2% mit den theoretischen überein. Unter Berücksichtigung auch der magnetischen Eigenfelder erhält man gegenüber analytischen Modellen systematische Abweichungen von 5% bei einem monopolen Fluß von Elektronen und 10% bei einem bipolaren Fluß von Elektronen und Protonen. Schon in diesem einfachsten Beispiel einer Ionen-Diode zeigt sich, daß sich der Wirkungsgrad der Diode mit wachsendem Strom als Folge des Einflusses vom Eigenmagnetfeld erhöht.

Die Einflüsse sowohl der elektrischen als auch der magnetischen Eigenfelder auf die Bewegung der Teilchen und rückwirkend auf das gesamte System wurde am Beispiel einer fokussierenden Pinch-Diode demonstriert. Als Folge der Eigenfelder verdichten sich die Potentiallinien an der Anode und die Elektronen gyrieren zur Rotationsachse. Von den Elektronen erreichen 77% die Anode im achsennahen Bereich, und es ergibt sich eine radiale Abhängigkeit der Ionenstromdichte. Als weiterer Effekt der Eigenfelder bildet sich im achsennahen Bereich ein Potentialhügel aus. Das damit verbundene radiale elektrische Feld bremst die Elektronen zur Achse hin ab. Anschließend werden

sie nahezu senkrecht zur Anode beschleunigt. Für kleine Radien ergeben sich Winkel von 15° bis 30° zwischen Anodennormalen und den Stromdichten der Elektronen. Dieser Potentialhügel hat auch zur Folge, daß die Ionenstrahlen aus dem unteren Bereich nicht fokussiert werden.

Durch den Einsatz des auf randangepaßten Koordinaten basierenden Particle-in-Cell-Codes konnte erstmals die im KfK entwickelte, selbstmagnetisch isolierte B_θ -Diode selbstkonsistent modelliert werden. Vergleiche zwischen experimentellen und numerischen Werten der Ströme führen zu einer quantitativen Aussage über die Dicke des Anodenplasmas von 1 - 2 mm und einer Abschätzung für die maximale Geschwindigkeit des Anodenplasmas in der Anstiegsphase des Spannungsimpulses von $4 \text{ cm}/\mu\text{s}$.

Neben diesen globalen Aussagen wurden dynamische Vorgänge, wie die Lage der virtuellen Kathode, aufgezeigt und physikalisch interpretiert. Die virtuelle Kathode nähert sich mit abnehmendem Radius der Anode. Die Unstetigkeit in den Stromdichten im Übergangsbereich von emittierender zu nicht-emittierender Anode führt zu einer weiteren Annäherung der virtuellen Kathode zur Anode hin. Einige der Elektronen erreichen im unteren Bereich der Diode die Anode, und es kommt dort teilweise zum Verlust der magnetischen Isolation.

Durch die Bestimmung der Fokussierungseigenschaften der ursprünglich experimentell verwendeten Anordnung mit zwei Krümmungsradien für die Anode konnte gezeigt werden, daß die Ionenstrahlen aus den beiden Bereichen der Anode unterschiedlich fokussiert werden. Es kommt zum Überschneiden der beiden Strahlenbündel und zur Ausbildung eines Ringfokusses.

Für die weiteren Simulationen wurde eine Anordnung gewählt, bei der die Anodenform nur durch einen einzigen Radius bestimmt ist. Bei dieser Konfiguration verschwindet der Ringfokus und 85% der Ionenstrahlen werden auf eine Fläche mit einem Durchmesser von 7 mm gebündelt. Bei einer Spannung von 1,3 MV, einem Ionenstrom von 260 kA und einem Protonenanteil im Ionenstrom von 40 %, entspricht dies einer mittleren Leistungsdichte von $1,0 \text{ TW}/\text{cm}^2$, ohne Berücksichtigung der Mikrodivergenz. Die Leistungsdichte wurde damit gegenüber der ersten Konfiguration verdoppelt.

Durch rechnerische Simulationen an der selbstmagnetisch isolierten B_θ -Diode konnten Vorgänge in der Diode aufgezeigt und physikalisch interpretiert werden. Damit wurde ein besseres Verständnis für die Abläufe in der Diode gewonnen. Fragestellungen, die experimentell nicht geklärt werden konnten, wurden durch die numerischen Simulationen beantwortet.

Es gelang erstmals durch den Einsatz eines Particle-in-Cell-Codes die Geometrie einer Ionen-Diode zu verbessern. Durch die numerischen Simulationen mit veränderten Anoden- und Kathodenkonfigurationen bei der selbstmagnetisch isolierten B_θ -Diode wurde eine Anordnung gefunden, die zur Verdoppelung der Intensität im Fokus führte. Die rechnerisch ermittelte Diodenform wurde experimentell getestet und die rechnerischen Voraussagen bestätigt.

Anhang A1: Grundlegende Transformationsgleichungen

Bei der Particle-in-Cell Methode werden die Feldgrößen auf dem räumlichen Gitter berechnet. Die aus der Methode der randangepaßten Koordinaten entstehenden Gitterzellen sind i.a. nicht achsenparallel. Deshalb sind die Formeln der Feldgleichungen zu transformieren. Im folgenden werden die für unsere Zwecke benötigten Transformationsgleichungen angegeben. Eine Herleitung der Formeln ist z.B. bei Thompson [51] zu finden.

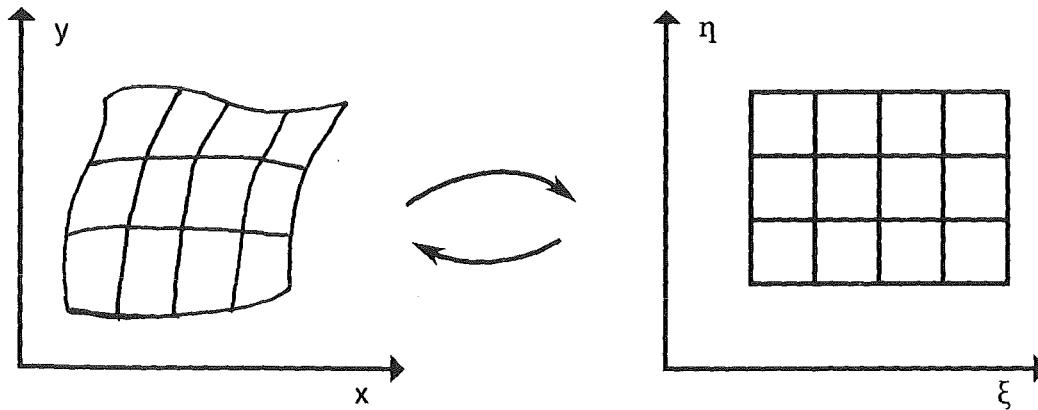


Abb. A1: Transformation des physikalischen Gebiets auf ein Rechteck in der (ξ, η) -Ebene.

Sei $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ die Abbildung des physikalischen (x, y) -Gebietes auf das Rechteck in der (ξ, η) -Ebene. Die inverse Abbildung $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ ermöglicht die Berechnung der partiellen Ableitungen f_x , f_y einer beliebigen Funktion $f(x, y)$, falls die partiellen Ableitungen f_ξ , f_η in der (ξ, η) -Ebene bekannt sind. Sie ergeben sich durch die Transformation

$$f_x = (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta) / J, \quad f_y = (-x_\eta f_\xi + x_\xi f_\eta) / J$$

mit

$$J = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta.$$

Die zur Berechnung der Poissongleichung benötigten Randbedingungen sind entweder Dirichlet-Bedingungen (d.h. das Potential wird am Rande vorgegeben) oder Neumann-Bedingungen (d.h. die Normalenableitung des Potentials wird

am Rande vorgegeben). Im Falle von Neumann-Bedingungen werden die Normalenableitungen durch

$$f_n = (\alpha f_\xi - \beta f_\eta) / (J\sqrt{\alpha}) \quad \text{auf Linien mit konstantem } \xi = \xi_0,$$

$$f_n = (\gamma f_\eta - \beta f_\xi) / (J\sqrt{\gamma}) \quad \text{auf Linien mit konstantem } \eta = \eta_0$$

berechnet, wenn

$$\alpha := x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta := x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma := x_\xi^2 + y_\xi^2.$$

Ebenso transformiert sich ein Integral über eine vektorwertige Funktion $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ auf einfache Weise, wenn die Integration auf Linienstücken mit konstantem ξ oder η ausgeführt werden kann:

$$\int_C F n^{(\xi)} ds_\xi = \int_{\eta_1}^{\eta_2} (y_\eta F_1 - x_\eta F_2) d\eta \quad \text{auf Kurven } C \text{ mit konstantem } \xi = \xi_0,$$

$$\int_C F n^{(\eta)} ds_\eta = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (x_\xi F_2 - y_\xi F_1) d\xi \quad \text{auf Kurven } C \text{ mit konstantem } \eta = \eta_0.$$

Anhang A2: Numerische Simulation

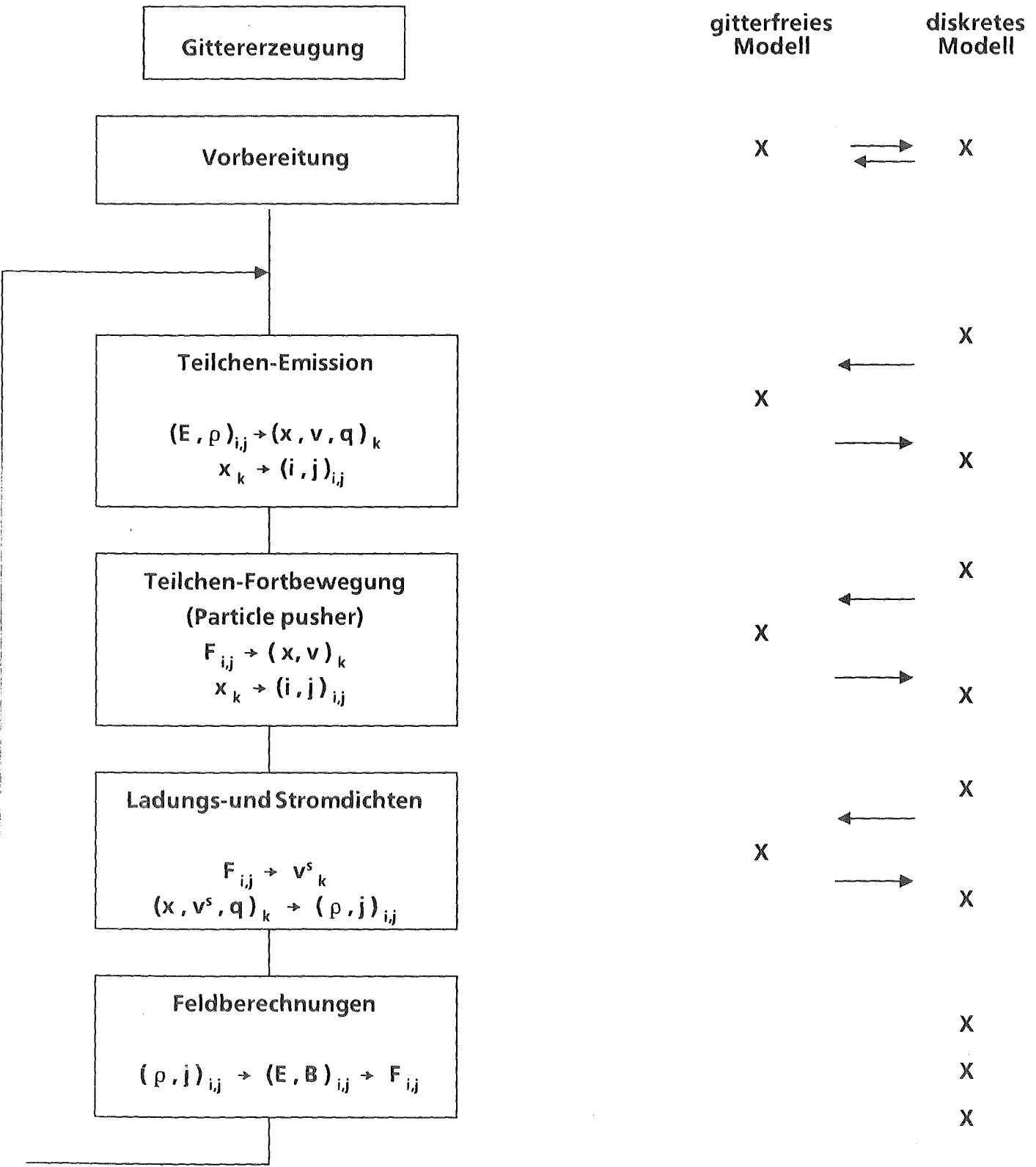
Im folgenden wird der Programmaufbau des selbstkonsistenten, stationären, zweidimensionalen Particle-in-Cell-Codes beschrieben und anschließend die Funktion und die Struktur der Unterprogramme erläutert (vgl. [58,73,74]).

Nachdem die Felder in der leeren Diode am Ende einer Initialisierungs- und Vorbereitungsphase berechnet wurden, beginnt die Zeitschleife (vgl. Abb. A.2.1) mit der Teilchen-Emission. Falls die elektrischen Felder in den Randzellen der Elektroden größer als 10 MV/m sind, werden Teilchen an den Elektroden emittiert. Es werden somit emittierende und nichtemittierende Flächen unterschieden. Sind die neuen Teilchen erzeugt, werden die Koordinaten und damit ihre Positionen im Gitter festgelegt. Nach der Berechnung der Kräfte, die auf die Teilchen am Teilchenort wirken, werden alle Teilchen fortbewegt (Particle Pusher). Anschließend bestimmen wir aus den neuen Teilchenkoordinaten die Ladungs- und Stromdichten an den Gitterknotenpunkten. Über diese Ladungs- und Stromdichten werden die elektrischen und magnetischen Felder an den Gitterknotenpunkten berechnet (Feldberechnungen).

Sind die Felder gegeben, beginnt die Zeitschleife von neuem, d.h. es können wieder neue Teilchen erzeugt, alle Teilchen fortbewegt und die Felder neu errechnet werden u.s.w. Die Zeitschleife muß so lange durchlaufen werden, bis sich ein stationärer Endzustand einstellt.

Wichtig ist darauf hinzuweisen, daß die Feldgrößen E_r , E_z , B_ϕ , das Potential ϕ , und Dichten ρ , j_r , j_z nur auf den Gitterknotenpunkten berechnet werden. Die Bewegung der Teilchen, d.h. die Teilchenkoordinaten r , z , v_r , v_z , wird dagegen im physikalischen Raum berechnet. So entsteht ein Pendeln zwischen gitterfreiem Modell für die Bewegung der Teilchen und diskretem Modell für die Berechnung der Felder. In der Programmübersicht (Abb. A.2.1) ist dies in der zweiten Spalte schematisch dargestellt.

Im folgenden wird die Struktur der numerischen Simulation sowie der einzelnen Unterprogramme erläutert, wie sie durch die Wahl des expliziten, zeitzentrierten Particle Pushers festgelegt sind.



i, j Gitterindizes, k Teilchenindex

Abbildung A.2.1: Übersicht über die Zeitschleife bei der numerischen Simulation.

Particle Pusher [Ref. 69]

Voraussetzung für die Teilchenfortbewegung (Abb. A.2.2) ist, daß die Felder an den Gitterknotenpunkten zum Zeitpunkt $T = n * dt$ gegeben sind. Durch eine Interpolation erhalten wir aus den Feldern an den Gitterknoten die Kräfte, die auf die Teilchen am Teilchenort wirken.

Zur numerischen Diskretisierung der relativistischen Lorentzgleichung verwenden wir das sog. Leapfrog-Schema:

$$\frac{\mathbf{p}^{n+1/2} - \mathbf{p}^{n-1/2}}{dt} = \frac{\mathbf{F}^n}{m_0} \quad (1)$$

$$\frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{dt} = \mathbf{v}^{n+1/2}, \quad (2)$$

wobei dt die Zeitschrittweite und n das Zeitlevel ist. Die erste Gleichung ist um $n * dt$ zentriert und die zweite um $(n + 1/2) * dt$. Außerdem gilt $\mathbf{p} = \gamma * \mathbf{v}$.

Aus den Gleichungen (1) und (2) ist ersichtlich, daß zur Neubestimmung der Phasenraum-Koordinaten der Ort \mathbf{x} zur Zeit $n * dt$ und die Geschwindigkeit \mathbf{v} zur Zeit $(n-1/2) * dt$ erforderlich sind. D.h. ist $\mathbf{v}^{n-1/2}$ und \mathbf{x}^n gegeben, erhalten wir nach einem Zeitschritt dt : \mathbf{v} zur Zeit $(n + 1/2) * dt$ und über diese neue Geschwindigkeit den Ort \mathbf{x} zur Zeit $(n + 1) * dt$ (vgl. Abb. A.2.2).

Der Vorteil dieser Diskretisierung der Bewegungsgleichung besteht darin, daß sie zeitzentriert und damit zeitreversibel ist (vgl. [70]). Der Nachteil ist, daß der Ort \mathbf{x} und die Geschwindigkeit \mathbf{v} nicht zum selben Zeitpunkt bekannt sind.

Das Lösen der Gleichung (1) erfolgt je nach Teilchensorte mit einem relativistischen oder nichtrelativistischen Particle Pusher, der mittels des Buneman-Algorithmus [69, 70] programmiert wurde.

Nachdem die Teilchen fortbewegt und die Zeit aktualisiert wurde, erfolgt eine Lokalisierung der Teilchen innerhalb des Gitters. Jedem Teilchen wird die Gitterzelle, in der es sich befindet, zugeordnet. Teilchen, die außerhalb des Berechnungsgebietes liegen, werden für diagnostische Zwecke gekennzeichnet.

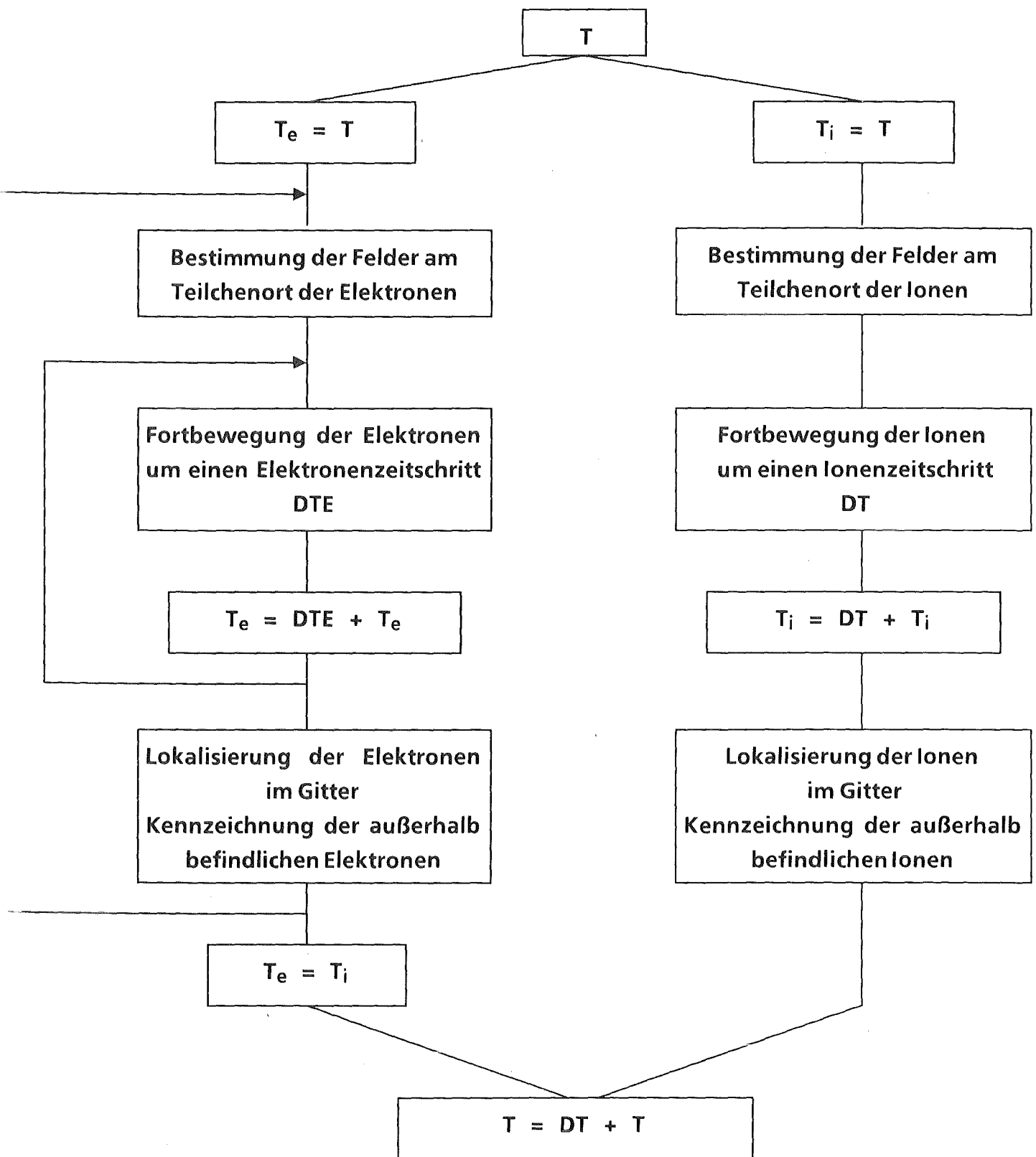
Fortbewegung der ElektronenFortbewegung der Ionen

Abbildung A.2.2: Schematische Darstellung der Teilchen-Fortbewegung. Bevor die Teilchen um einen Zeitschritt DT bewegt werden können, müssen zuvor die Felder, die an den Gitterpunkten berechnet wurden, auf den Teilchenort interpoliert werden. Nach der Fortbewegung erfolgt die Lokalisierung der Teilchen im Gitter.

Da sich die relativistischen Elektronen viel schneller fortbewegen als die nicht-relativistischen Ionen, können wir die Elektronen aus numerischen Gründen [70] nicht mit dem gleichen großen Zeitschritt DT fortbewegen wie die Ionen. Deshalb führen wir eine Subzeitskala $DTE = DT/k$, $k \in \mathbb{N}$, ein.

Die Subzeitskala DTE ist lediglich dafür zuständig, die Elektronen um mehrere kleine Zeitschritte DTE fortzubewegen (vgl. Abb. A.2.2). Diese Skala DTE der Elektronen wird so gewählt, daß zu einem gemeinsamen Zeitpunkt $T_e = T_i$ die Zeit

$$T_{\text{neu}} = DT + T = k * DTE + T$$

festgesetzt wird und damit die Fortbewegung beendet ist. (In der Praxis hat sich der Wert $k = 20$ bewährt.)

In [70] wurde gezeigt, daß sich bei der numerischen Berechnung der Phasenraumkoordinaten eine Einschränkung an den Zeitschritt ergibt, die durch $\omega DT \leq 0,2$ gegeben ist, wenn ω die Zyklotronkreisfrequenz ist. Über diese Einschränkung ist eine obere Grenze für DTE gegeben.

Zur Veranschaulichung wurde in Abb. A.2.3 der Elektronenzeitschritt gleich $1/3$ des Ionenzeitschrittes gewählt, d.h. die Elektronen werden dreimal mit dem Zeitschritt DTE fortbewegt bis die neue Position zum Zeitpunkt $(n + 1) * DT$ gegeben ist und die Geschwindigkeit einen halben Elektronenzeitschritt zuvor.

Ladungs- und Stromdichten, Feldberechnungen

Bevor aus den Geschwindigkeitskomponenten der Teilchen die Stromdichten an den Gitterknotenpunkten berechnet werden können, müssen die Geschwindigkeitskomponenten jedes der Teilchen je nach Sorte um $DT/2$ bzw. $DTE/2$ extrapoliert werden. Andernfalls würden wir das Magnetfeld zu unterschiedlichen und falschen Zeitpunkten berechnen (vgl. Abb. A.2.4a)).

Ausgangspunkt für die Extrapolation sind wie bei der Teilchen-Fortbewegung die Felder an den Gitterknoten zur Zeit $T_{\text{alt}} = n DT$. Über eine Interpolation bestimmt man die Kräfte am Teilchenort x_{neu} und die Extrapolation der Ionen-Geschwindigkeitskomponente um $DT/2$ bzw. der Elektronen-Geschwindigkeitskomponente um $DTE/2$ liefert die Geschwindigkeiten zur Zeit $(n + 1) * DT$. Mit

diesen extrapolierten Geschwindigkeiten werden die Stromdichten $\mathbf{j} = (j_r, j_z)$ zum Zeitpunkt $(n + 1) \cdot \Delta T$ an den Gitterknotenpunkten berechnet (vgl. Abb. A.2.4b).

Das B_θ -Feld wird mit dem Ampereschen Gesetz durch Integration über die Stromdichten $\mathbf{j} = (j_r, j_z)$ bestimmt. Berücksichtigt man, daß die Felder in der logischen (ξ, η) -Ebene berechnet werden, ergibt sich gemäß den Formeln aus Anhang A1 das Magnetfeld beim Radius r zu

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0}{r} \int_0^{\eta(r)} (r_\eta j_z - z_\eta j_r) r d\eta.$$

Aus den neuen Ortskoordinaten berechnen wir die Ladungsdichte ρ an den Gitterknotenpunkten (Abb. A.2.4b)). Transformieren wir die Poissongleichung $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon$ von der (z, r) -Ebene gemäß den in Anhang A1 angegebenen Formeln in die logische (ξ, η) -Ebene, ist die zu lösende Gleichung durch den folgenden Ausdruck gegeben

$$\alpha \Phi_{\xi\xi} - 2\beta \Phi_{\xi\eta} + \gamma \Phi_{\eta\eta} + (\tau - z_\eta J/r) \Phi_\xi + (\sigma + z_\xi J/r) \Phi_\eta = -J^2 \rho/\epsilon_0,$$

wobei

$$\sigma := (r_\xi Dz - z_\xi Dr)/J, \quad \tau := (z_\eta Dr - r_\eta Dz)/J$$

und

$$Dz := \alpha z_{\xi\xi} - 2\beta z_{\xi\eta} + \gamma z_{\eta\eta}, \quad Dr := \alpha r_{\xi\xi} - 2\beta r_{\xi\eta} + \gamma r_{\eta\eta},$$

$$\alpha := z_\eta^2 + r_\eta^2, \quad \beta := z_\xi z_\eta + r_\xi r_\eta, \quad \gamma := z_\xi^2 + r_\xi^2.$$

Mit einem iterativen SOR- [52] oder Mehrgitterverfahren [71, 72] wird das Potential Φ numerisch berechnet, und durch numerische Differentiation über zentrale Differenzen ergibt sich daraus das elektrische Feld $\mathbf{E} = (E_r, E_z)$ an den Gitterknotenpunkten.

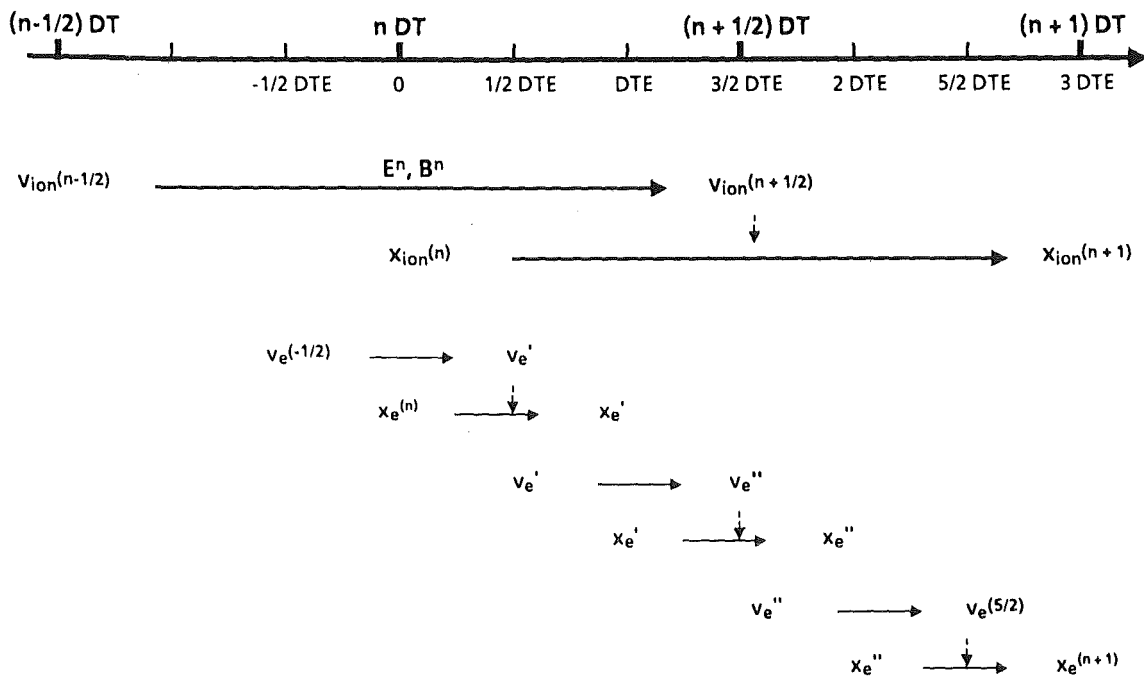


Abbildung A.2.3: Schematische Darstellung des Leapfrog-Algorithmus. Ist v zur Zeit $(n-1/2)DT$ und x zur Zeit nDT gegeben, erhalten wir nach einem Zeitschritt DT : v zur Zeit $(n+1/2)DT$ und x zur Zeit $(n+1)DT$. Eine Subzeitskala für die relativistischen Elektronen wird eingeführt, um die Elektronen mehrere kleine Zeitschritte DTE fortzubewegen. In diesem Beispiel wurde $DTE = DT/3$ gewählt.

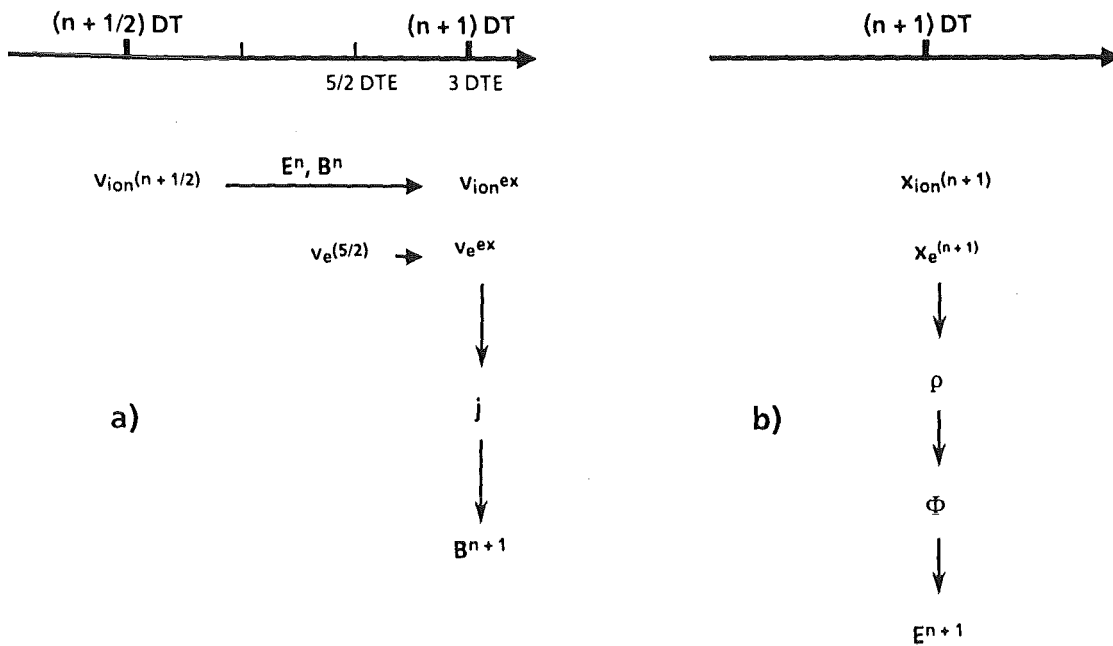


Abbildung A.2.4: Schematische Darstellung der Extrapolation. Um die Stromdichten j zum Zeitpunkt $(n+1)DT$ zu erhalten, werden die Geschwindigkeiten v_{ion} und v_e um $DT/2$ bzw. $DTE/2$ extrapoliert (hier: $DTE = DT/3$). a) Über die Stromdichten berechnet sich das Magnetfeld B^{n+1} und b) über die Ladungsdichten das elektrische Feld E^{n+1} zum Zeitpunkt $(n+1)DT$.

Teilchenerzeugung

Bei jedem Zeitschritt müssen an den emittierenden Elektrodenflächen so viele neue Teilchen erzeugt werden, daß das elektrische Feld auf der Elektrodenoberfläche verschwindet (raumladungsbegrenzte Emission). Dazu wird zunächst die Ladung Q_{alt} berechnet, die sich in jeder Elektroden-Halbzelle befindet. In jeder dieser Halbzellen wenden wir das Gaußsche Gesetz

$$\int \int_F (\mathbf{E}, \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

an.

Bei der Berechnung der Integrale setzen wir dann das elektrische Feld auf der Elektrodenfläche gleich Null (Child-Langmuir-Bedingung). Damit erhalten wir für jede Elektroden-Zelle eine Bedingung für die neu zu erzeugende Ladung Q_{neu} durch

$$Q_{neu} = 2\pi \epsilon_0 \int_{\eta_1}^{\eta_2} (r_\eta E_z - z_\eta E_r) r \, d\eta - Q_{alt} \text{ auf Linien mit konstantem } \xi = \xi_0,$$

$$Q_{neu} = 2\pi \epsilon_0 \int_{\xi_1}^{\xi_2} (z_\xi E_r - r_\xi E_z) r \, d\xi - Q_{alt} \text{ auf Linien mit konstantem } \eta = \eta_0.$$

Die neue Ladung pro Zelle wird auf eine gewünschte Anzahl von Teilchen n_{neu} verteilt, und die Ladung q des Makroteilchens ist dann durch $q = Q_{neu}/n_{neu}$ gegeben. Die Geschwindigkeit des Teilchens bestimmt sich aus einer Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung zu einer Temperatur von 5 eV und die Position wird statistisch auf der Elektrodenfläche vorgegeben.

Anhang A3: Liste der verwendeten Programme bzw. Unterprogramme

Im folgenden werden die im Hauptprogramm des selbstkonsistenten, zwei-dimensionalen, stationären Particle-in-Cell Codes aufgerufenen Unterprogramme (UP), eine Kurzbeschreibung sowie die Autoren (A) aufgeführt. Außerdem werden die zusätzlich verwendeten Programmpakete angegeben.

- BFCPIC:** Hauptprogramm des selbstkonsistenten, zwei-dimensionalen, stationären Particle-in-Cell Codes zur Simulation von technisch relevanten Ionen-Dioden. Steuert die unten aufgeführten Unterprogramme.
A: T. Westermann
- AIRAND:** UP zur Berechnung der Randströme. Der Randstrom ergibt sich durch Summation über die pro Zeitschritt neu erzeugte Ladung an den in INRAND eingelesenen Randpunkten.
A: T. Westermann
- BFELD:** UP zur Berechnung der durch die Stromdichten induzierten Eigenmagnetfelder durch Integration über die Stromdichten mit dem Ampereschen Gesetz.
A: T. Westermann
- BRDSTR:** UP zur Berechnung der durch die Randströme induzierten Magnetfelder mit dem Ampereschen Gesetz.
A: T. Westermann
- EFELD:** UP zur Berechnung zur Bestimmung des elektrischen Feldes durch numerische Differentiation des Potentials. An den Rändern kann wahlweise eine Drei-Punkte- oder Zwei-Punkte-Formel für die Differentiation gewählt werden.
A: T. Westermann

- ENERGY: UP zur Berechnung der Energie der Teilchen, nachdem sie den Anoden-Kathoden-Spalt verlassen haben.
A: T. Westermann
- EPOTZR: UP zur Bestimmung des Potentials durch Lösen der Poissongleichung mittels eines Mehrgitter-Algorithmus (alternativ zu SOR).
A: M. Alef, [71].
- FOKUS: UP zur Berechnung der Schnittpunkte der Ionenbahnen mit der Rotationsachse, nachdem die Ionen die Diode verlassen haben.
A: T. Westermann
- INPUT: UP zum Einlesen der Steuerparameter für das BFCPIC-Hauptprogramm, Einlesen des Gitters und der Teilchendaten.
A: T. Westermann
- INRAND: UP zum Einlesen der Koordinaten der stromdurchflossenen Ränder der Diode.
A: T. Westermann
- IPAK: UP zur Bestimmung der emittierenden Anoden- und Kathodenzellen.
A: G. Geisert, E. Halter, T. Westermann
- IPE: UP zur Bestimmung der Punktattribute von Anode und Kathode.
A: G. Geisert, E. Halter
- IPEIZ: Unterprogramm zur Bestimmung der Elektroden-Insel-Zellen. (Elektroden-Insel-Zellen sind Gitterzellen, die sich im Innern von Anode bzw. Kathode befinden.)
A: T. Westermann
- LGSSD: UP zur Bestimmung der Ladungs- und Stromdichten auf den Gitterpunkten. Die Verteilung der Ladung auf die Gitterpunkte erfolgt mit den gleichen Gewichten wie bei der Interpolation der Felder von den Gitterpunkten auf den Teilchenort.
A: T. Westermann
- ORBIT: UP zur Berechnung von Einzelteilchenbahnen in den stationären, selbstkonsistenten elektromagnetischen Felder.
A: T. Westermann

- PAPLT: UP zum Herausschreiben von Teilchendaten auf einen Graphik-File. Diese Daten werden für diagnostische Zwecke benötigt.
A: T. Westermann
- PEINST: UP zum Einsortieren der neuen Teilchen in die Teilchenkoordinatenmatrix. Außerhalb des Berechnungsgebietes befindliche Teilchen werden überspeichert.
A: T. Westermann
- PEPOLN: UP zur Extrapolation der Geschwindigkeiten um einen halben Zeitschritt für nichtrelativistische Teilchen mit dem Buneman-Algorithmus.
A: T. Westermann
- PEPOLR: UP zur Extrapolation der Geschwindigkeiten um einen halben Zeitschritt für relativistische Teilchen mit dem Buneman-Algorithmus.
A: T. Westermann
- PGEN: UP zur Erzeugung neuer Teilchen an den emittierenden Elektrodenzellen durch Anwenden des Gaußschen Gesetzes und der Child-Langmuir-Bedingung.
A: M. Sararu, [54].
Modifikation: T. Westermann
- PIPOL: UP zur Interpolation der Felder an den Gitterpunkten auf den Teilchenort mit der verallgemeinerten Area-Weighting Methode.
A: T. Westermann
- PLOCC: UP zum Lokalisieren der Teilchen in einem randangepaßten Gitter. Außerhalb des Berechnungsgebietes befindliche Teilchen werden gekennzeichnet. Den innerhalb befindlichen Teilchen werden die Adressen der linken unteren Ecke im logischen Gitter zugeordnet. Außerdem werden die Gewichte für die Interpolation berechnet.
A: T. Westermann
- PPUSHN: UP zur Berechnung der neuen Phasenraumkoordinaten der nichtrelativistischen Ionen mit dem nichtrelativistischen Buneman-Algorithmus. Die elektromagnetischen Felder müssen am Teilchenort zur Zeit $n * DT$ gegeben sein.
A: T. Westermann

- PPUSHR: UP zur Berechnung der neuen Phasenraumkoordinaten der relativistischen Elektronen mit dem relativistischen Buneman-Algorithmus. Die elektromagnetischen Felder müssen am Teilchenort zur Zeit $n * DT$ gegeben sein.
A: T. Westermann
- PSORT: UP zum Umsortieren der Teilchen. Das Programm komprimiert die Teilchenkoordinatenmatrix, indem Teilchen, die das Berechnungsgebiet verlassen haben, überspeichert werden. Beim Rücksprung in das rufende Programm liegen die Elemente der Matrix dicht.
A: T. Westermann
- QIEZ: UP zur Ermittlung der Ladung in den emittierenden Elektrodenzellen.
A: T. Westermann
- SOR: UP zur Bestimmung des Potentials durch Lösen der Poissongleichung mittels des SOR-Algorithmus (alternativ zu MGEPO).
A: E. Halter, [53].
- STROM: UP zur Bestimmung der Ströme durch Integration über die Stromdichten.
A: T. Westermann
- TIME: UP zur Bestimmung der verbrauchten CPU-Rechenzeit. Stoppt das Hauptprogramm, falls die Rechenzeit einen vorgegebenen Wert übersteigt.
A: T. Westermann
- VOL: UP zur Berechnung der Volumina der Gitterzellen und zur Bestimmung der Anzahl der einem Gitterpunkt anliegenden Feldzellen.
A: T. Westermann

Weitere verwendete Programme:

- FCBFC: Programmpaket zur Erzeugung von randangepaßten Gittern und zur Berechnung der statischen, elektrischen Felder.
A: E. Halter, [53].
- DIAG: Sammlung verschiedener Programme zur numerischen Verarbeitung der Ergebnisse.
A: T. Westermann
- DIAGPLT: Programmpaket zur graphischen Darstellung der Ergebnisse.
A: T. Westermann

Literaturverzeichnis

- [1] J.D. Lawson
Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor, Proc. Phys. Soc. (London), B70, 6-11, 1957.
- [2] L. Frey, R. Sauerbrey
Intensiv gepulste Ionenstrahlen, Physik in unserer Zeit, 2/82, 34-41, 1982.
- [3] H. Bluhm, H.U. Karow, D. Rusch, K.W. Zieher
Gepulste Leichtionenstrahlen sehr hoher Leistungsdichte für Anwendungen in der Fusions- und Materieforschung: Erzeugung und Diagnostik, KfK-Nachr. 14, 2/82, 89-98, 1982.
- [4] W. Bauer, H. Bluhm, K. Boehnel, A. Brandelik, P. Hoppé, H.U. Karow, W. Kühn, E. Maucher, W. Ratajczak, D. Rusch, W. Schmidt, D. Schultheiss
Recent Results of the Light Ion Beam Program at the Kernforschungszentrum Karlsruhe, Laser Int. Rel. Plasma Phenom. 7, 673-687, 1986.
- [5] C. D. Child
Discharge from Hot CaO, Phys Rev. 32, 492-511, 1911.
- [6] I. Langmuir
The Effekt of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum, Phys. Rev. 2, 450-486, 1913.
- [7] E.W.V. Acton
The Space-Charge Limited Flow of Charged Particles in Planar, Cylindrical and Spherical Diodes at Relativistic Velocities, J. Electronics and Control 3, 203-210, 1957.
- [8] H.R. Jory, A.W. Trivelpiece
Exact Relativistic Solution for the One-Dimensional Diode, J. Appl. Phys. 40, 3924-3926, 1969.
- [9] A. Ron, A.A. Mondelli, N. Rostoker
Equilibria for Magnetic Insulation, IEEE Trans. Plasma Sci. PS1, 85-93, 1973.
- [10] R.N. Sudan, R.V. Lovelace
Generation of Intense Ion Beams in Pulsed Diodes, Phys. Rev. Lett. 31, 1174-1177, 1973.
- [11] R.V. Lovelace, E. Ott
Theory of Magnetic Insulation, Phys. Fluids 17, 1263-1268, 1974.
- [12] E. Ott, R.V. Lovelace
Magnetic Insulation and Microwave Generation, Appl. Phys. Lett. 27, 378-380, 1975.
- [13] T.M. Antonsen, Jr., E. Ott
Theory of Intense Ion Beam Acceleration, Phys. Fluids 19, 52-59, 1976.
- [14] K.D. Bergeron
Two-Species Flow in Relativistic Diodes near the Critical Field for Magnetic Insulation, Appl. Phys. Lett. 28, 306-308, 1976.

- [15] K.D. Bergeron
One- and Two-Species Equilibria for Magnetic Insulation in Coaxial Geometry, *Phys. Fluids* 20, 688-697, 1977.
- [16] C.W. Mendel, Jr.
Planar One-Dimensional Magnetically Insulated Electron Flow for Arbitrary Canonical-Momentum Distribution, *J. Appl. Phys* 50, 3830-3837, 1979.
- [17] S.A. Goldstein, R.C. Davidson, J.G. Siambis, R. Lee
Focused-Flow Model of Relativistic Diodes, *Phys. Rev. Lett.* 33, 1471-1474, 1974.
- [18] S.A. Goldstein, R. Lee
Ion-Induced Pinch and the Enhancement of Ion Current by Pinched Electron Flow in Relativistic Diodes, *Phys. Rev. Lett.* 35, 1079-1082, 1975.
- [19] R.J. Adler
Conservation of Axial Momentum in Intense Ion Beam Systems, *J. Appl. Phys.* 52, 3099-3105, 1981.
- [20] C.W. Mendel, Jr., J.P. Quintenz
Efficiency of Magnetically Insulated Ion Diodes, *Com. Plasma Phys. Controlled Fusion* 8, 43-55, 1983.
- [21] K.W. Zieher
Necessary Condition for Current Neutralization of an Ion Beam Propagating into Vacuum from a Self-Magnetically B_θ -insulated Ion Diode, *Nucl. Instr. Meth.* A228, 169-173, 1984.
- [22] O. Buneman
Dissipation of Currents in Ionized Media, *Phys. Rev.* 115, 503-517, 1959.
- [23] J. Dawson
One-Dimensional Plasma Model, *Phys. Fluids* 5, 445-459, 1962.
- [24] J.P. Boris
Relativistic Plasma Simulation - Optimization of a Hybrid Code, *Proc. 4. Conf. on Num. Sim. of Plasmas*, 3-67, Washington, 1970.
- [25] I. Haber, C.E. Wagner, J.P. Boris, J.M. Dawson
A Self-Consistent Electromagnetic Particle Code, *Proc. 4. Conf. on Num. Sim. of Plasmas*, 126-152, Washington, 1970.
- [26] R.L. Morse, C.W. Nielson
Numerical Simulation of the Weibel Instability in One and Two Dimensions, *Phys. Fluids* 14, 830-840, 1971.
- [27] J.W. Poukey
Ion Effects in Relativistic Diodes, *J. Appl. Phys.* 26, 145-146, 1975.
- [28] B. Langdon, B.F. Lasinski
Electromagnetic and Relativistic Plasma Simulation Models, *Meth. in Comp. Phys.* 16, 327-366, 1976.
- [29] J. P. Quintenz
Nonuniform Mesh Diode Simulation Code, *J. Appl. Phys* 49, 4377-4382, 1978.
- [30] B. Goplen, R. Clark, S. Flint
Geometrical Effects in Magnetically-Insulated Power Transmission Lines, *Miss. Res. Corporation*, 5503 Cherokee Avenue, Virginia 22312, MRC/WDC-R-001, 1979.

- [31] J. Denavit, W.L. Kruer
How to Get Started in Particle Simulation, Com. Plasma Phys. Controlled Fusion 6, 35-44, 1980.
- [32] R.J. Barker, A.T. Drobot, R. Lee, S.A. Goldstein
Numerical Modeling and Simulation of Electron and Ion Flow in Pulsed Power Diodes, Proc. 9. Conf. on Num. Sim. of Plasmas, Evanston, Illinois, 1980.
- [33] B. Goplen, R. Clark, J. McDonald, W. Bollen
User's Manual for Magic/ Version Sep. 83, Miss. Res. Corporation, 5503 Cherokee Avenue, Virginia 22312, MRC/WDC-R-068, 1983.
- [34] R.J. Barker, B. Goplen, R. Clark, J. McDonald, R. Jackson
Fact Sheet on the 3-D Electromagnetic PIC Code SOS, Miss. Res. Corporation, 5503 Cherokee Avenue, Virginia 22312, MRC/WDC-R-059, 1983.
- [35] J. Dawson
Particle Simulation of Plasmas, Rev. of Modern Phys. 55, 403-447, 1983.
- [36] S. Kawata, E. Halter, E. Gabowitsch, S. Sararu, T. Westermann
User's Manual for PCSKfK, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Unveröffentlichter Bericht, 1986.
- [37] R.J. Mason, C.W. Cranfill
Hybrid Two-Dimensional Electron Transport in Self-Consistent Electromagnetic Fields, IEEE Trans. on Plasma Science PS14, 45-52, 1986.
- [38] R.J. Mason
An Electromagnetic Field Algorithm for 2D Implicit Plasma Simulation, J. Comp. Phys. 71, 429-473, 1987.
- [39] R.W. Hockney, J.W. Eastwood
Computer Simulation Using Particles, McGraw-Hill, 1981.
- [40] C.K. Birdsall, A.B. Langdon
Plasma Physics via Computer Simulations, McGraw-Hill, 1985.
- [41] J.P. Quintenz, J.W. Poukey
Ion Current Reduction in Pinched Electron Beam Diodes, J. Appl. Phys. 48, 2287-2293, 1977.
- [42] A.T. Drobot, A. Palevsky, R.J. Barker, S.A. Goldstein, G. Creig, D. Mosher
Electromagnetic and Quasi-Static Simulations of Ion Diodes, 4. Conf. on High-Power Electron and Ion-Beam Research and Technology, Palaiseau, 363-370, 1981.
- [43] J.P. VanDevender, J.P. Quintenz, R.J. Leeper, D.J. Johnson, J.T. Crow
Self-Magnetically Insulated Ion Diodes, J. Appl. Phys 52, 4-12, 1981.
- [44] D.J. Johnson, E.J.T. Burns, J.P. Quintenz, K.W. Bieg, A.V. Farnsworth, Jr., L.P. Mix, M.A. Palmer
Anode Plasma Behavior in Magnetically Insulated Ion Diodes, J. Appl. Phys. 52, 168-174, 1981.
- [45] D.J. Johnson, P.L. Dreike, S.A. Slutz, R.J. Leeper, E.J.T. Burns, J.R. Freeman, T.A. Mehlhorn, J.P. Quintenz
Applied-B Ion Diode Studies at 3.5 TW, J. Appl. Phys. 54, 2230-2241, 1983.
- [46] D.B. Seidel, J.N. Olsen, S.E. Rosenthal
Electromagnetic Simulations of Self-Magnetic-Field-Enhanced Ion Diodes, J. Appl. Phys. 55, 1267-1273, 1984.

- [47] D.J. Johnson, J.P. Quintenz, M.A. Sweeney
Electron and Ion Kinematics and Anode Plasma Formation in two Applied B_r Field Diodes, J. Appl. Phys. 57, 794-805, 1985.
- [48] D.J. Johnson, R.J. Leeper, W.A. Stygar, R.S. Coats, T.A. Mehlhorn, J.P. Quintenz, S. Slutz, M.A. Sweeney
Time-Resolved Proton Focus of a High-Power Ion Diode, J. Appl. Phys. 58, 12-27, 1985.
- [49] S.A. Slutz, D.B. Seidel, R.S. Coats
Electromagnetic Particle-In-Cell Simulations of Applied-B Proton Diodes, J. Appl. Phys. 59, 11-18, 1986.
- [50] A.D. Turnbull, Y. Maron, J.P. Quintenz
Particle Trajectories from Simulation of a Relativistic Electron Pinch Diode, J. Appl. Phys. 59, 3036-3072, 1986.
- [51] J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi
Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations - A Review, J. Comp. Phys. 47, 1-108, 1982.
- [52] E. Halter
Die Berechnung elektrostatischer Felder in Pulsleistungsanlagen, Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, KfK 4072, Karlsruhe 1986.
- [53] E. Halter
Programmdokumentation FCBFC, Stand 30.4.1985, Benutzerhandbuch, Unveröffentlichter Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe 1985.
- [54] M. Sararu
Private Mitteilung.
- [55] C.K. Birdsall, D. Fuss
Cloud-in-Cell Computer Experiments in two and three Dimensions, Proc. Conf. on Num. Sim. of Plasmas, D1, Los Alamos, 1968.
- [56] D. Seldner, T. Westermann
Numerische Algorithmen für zweidimensionale Teilchen-Simulationsmodelle in technisch relevanten Geometrien, Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, KfK 4282, Karlsruhe 1987.
- [57] D. Seldner, T. Westermann
Algorithms for Interpolation and Localization in Irregular 2D Meshes, J. Comp. Phys. 79, 1-11, 1988.
- [58] T. Westermann
A Particle-In-Cell Method as a Tool for Diode Simulations, Nucl. Instr. Meth. A263, 271-279, 1988.
- [59] H. Bluhm, K. Böhnel, H.U. Karow, D. Rusch, J. Singer, H. Schülken
Interner Statusbericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe Dezember 1984.
- [60] Y. Maron
Angular Distribution of Electrons in the Pinch Region of Relativistic-Electron-Beam Diodes, Phys. Rev. Lett. 45, 1849-1852, 1980.
- [61] K.W. Zieher
Investigation of a Pulsed Self-Magnetically B_θ-Insulated Ion Diode, Nucl. Instr. Meth. A228, 161-168, 1984.
- [62] A. Citron, W. Schimassek, O. Stoltz
Development and Investigation of the Self-Magnetically B_θ-Insulated Ion Diode, 7. Int. Conf. on High-Power Particle Beams, Karlsruhe, 1988.

- [63] A. Citron, W. Kühn, A. Rogner, W. Schimassek, O. Stoltz
Investigation of a Self-Magnetically Insulated B_{θ} -Diode, 6. Int. Conf. on High-Power Particle Beams, Kobe, 1986.
- [64] W. Bauer, A. Citron, W. Kühn, A. Rogner, W. Schimassek, O. Stoltz
Investigation of a Self-Magnetically Insulated B_{θ} -Diode, 6. IEEE Pulsed Power Conf., Arlington, 1987.
- [65] W. Schimassek
Private Mitteilung.
- [66] M.A. Greenspan, R. Pal, D.A. Hammer, S. Humphries, Jr.
An Applied- B_{θ} Magnetically Insulated Ion Diode, Appl. Phys. Lett. 37, 248-250, 1980.
- [67] R. Pal, D.A. Hammer, M.A. Greenspan
Study of an "Applied- B_{θ} " Magnetically Insulated Ion Diode, J. Appl. Phys. 53, 6655-6662, 1982.
- [68] T.J. Renk, D.A. Hammer
Microwave and Ion Beam Studies of an Applied- B_{θ} Diode, J. Appl. Phys 62, 1655-1670, 1987.
- [69] O. Buneman
Time-Reversible Difference Procedures, J. Comp. Phys. 1, 517-535, 1967.
- [70] T. Westermann
Teilchenfortbewegung in elektro-magnetischen Feldern, Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH, KfK 4325, Karlsruhe 1988.
- [71] M. Alef
Programmbeschreibung MGFELD/E, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Unveröffentlichter Bericht, 14.04.01P57A, 1988.
- [72] M. Alef, D. Seldner, T. Westermann
Numerische Algorithmen für elektro-dynamische Modelle und ihre Implementierung auf Supercomputern, Informatik Fachberichte 150, 298-305, 1987.
- [73] T. Westermann
The Concept of a PIC Code Based on Boundary-Fitted Coordinates, IEEE Conf. on Plasma Science, Seattle, 5D7, 1988.
- [73] T. Westermann
Modelling and Simulation of a Diode Relevant for Physical Research, Proc. 12th. IMACS World Congress on Scientific Computing, Paris, 241-243, 1988.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich besonders herzlich bedanken bei Prof. Dr. Anselm Citron für das fortwährende Interesse und die Betreuung meiner Arbeit sowie bei Prof. Dr. Winfried Schmidt für die vielen Anregungen besonders in der Schlußphase der Arbeit.

Prof. Dr. Heinz Trauboth und Dr. Eugen Gabowitsch danke ich dafür, daß ich die Arbeit im Rahmen eines Promotionsstipendiums im Kernforschungszentrum Karlsruhe im Institut für Datenverarbeitung in der Technik anfertigen konnte sowie für die Möglichkeit, die technischen sowie die rechnerischen Einrichtungen zu nutzen.

Mein besonderer Dank gilt auch Prof. Dr. Eberhard Halter für die Bereitschaft zur Zusammenarbeit und die Hilfe bei der Einarbeitung in die Thematik der Arbeit.

Den Herren Dipl.-Math. Manfred Alef und David Seldner danke ich für die gute Zusammenarbeit, zahlreiche Diskussionen über den PIC-Code und für die angenehme Atmosphäre in der Arbeitsgruppe.

Recht herzlichen Dank auch an Dipl.-Phys. Walter Schimassek für die Diskussionen über die B_{θ} -Diode und für seine Bereitschaft, Versuche an der Diode zum Vergleich von Simulation und Experiment durchzuführen.

Dr. Klaus Nagel und Dipl.-Math. David Seldner sei gedankt für die gründliche Durchsicht des Manuskripts.