



Trois essais en modélisation financière et gestion de risques

Thèse

Adama Sanou

Doctorat en sciences de l'administration
Philosophiæ doctor (Ph. D.)

Québec, Canada

Trois essais en modélisation financière et gestion de risques

Thèse

Adama Sanou

Sous la direction de:

Issouf Soumaré, Directeur de recherche

Résumé

Depuis la crise financière, la modélisation financière et la gestion des risques ont pris une place particulière dans les domaines de la finance et assurance. Cette thèse rentre dans ce cadre et aborde plus spécifiquement trois problématiques en lien avec la modélisation financière, l'évaluation et la couverture des risques. Les trois problématiques se déclinent en trois articles comme suit :

“Optimal choice between CAT bond and debt to cover the risks of natural disasters”. Ce document de recherche analyse le choix entre la dette non contingente et l'obligation catastrophe pour couvrir le risque de tremblements de terre. Un modèle dynamique d'optimisation stochastique avec frictions a été développé et montre sous quelles conditions il peut être avantageux pour un gouvernement d'émettre une obligation catastrophe plutôt qu'une obligation standard non contingente.

“Écart de taux des obligations catastrophes, liquidité et taux d'intérêt ” vise à analyser les déterminants de la liquidité des écarts de taux des obligations catastrophes en prenant en compte l'impact des taux d'intérêt. Ce projet permet d'analyser l'impact prépondérant du taux d'intérêt sur les écarts de taux des obligations catastrophes dans le contexte de taux d'intérêt durablement bas observé ces dernières années.

“Pricing dynamics and solvency in insurance : capital allocation, surplus and insurance cycle”. Cet article propose un modèle de tarification stochastique à plusieurs périodes basé sur la valeur des options de défaut, et qui prend en compte le cycle d'assurance afin d'examiner les interactions entre les prix, l'allocation optimale de capital et la solvabilité d'un assureur multirisque.

Abstract

Since the financial crisis, financial modeling and risk management have taken on a special role in the fields of finance and insurance. This thesis is part of this context and addresses three specific issues related to financial modeling, risk assessment and risk coverage. The three issues are divided into three articles as follows:

“Optimal choice between cat bond and debt to cover the risks of natural disasters ”. This research paper analyzes the choice between non-contingent debt and catastrophe bonds to cover the risk of earthquakes. A dynamic stochastic optimization model with frictions has been developed and shows under which conditions it can be advantageous for a government to issue a catastrophe bond rather than a standard non-contingent bond.

“ Cat bond spreads, liquidity and interest rates ” aims to analyze the determinants of liquidity and CAT bond spreads by taking into account the impact of interest rates. This project allows us to analyze the preponderant impact of interest rates on CAT bond spreads in the context of persistently low interest rates observed in recent years.

“Pricing dynamics and solvency in insurance: capital allocation, surplus and insurance cycle”. This paper proposes a multi-period stochastic pricing model based on the value of default options, and takes into account the insurance cycle, in order to examine the interactions among pricing, optimal capital allocation and solvency of a PC insurer.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	ix
Remerciements	x
Avant-propos	xi
Introduction	1
1 Optimal choice between cat bond and debt to cover the risks of natural disasters	4
1.1 Introduction	6
1.2 Literature Review	8
1.3 Optimal choice between debt and CAT bond in the presence of friction costs	11
1.4 Empirical results	22
1.5 Conclusion	29
1.6 Appendix	30
2 Écart de taux des obligations catastrophes, liquidité et taux d'intérêt.	38
2.1 Introduction	40
2.2 Caractéristiques de l'écart de taux des obligations catastrophes et liquidité .	43
2.3 Méthodologie	47
2.4 Variables et statistiques descriptives	48
2.5 Analyse des résultats	54
2.6 Conclusion	67
2.7 Appendix	70
3 Pricing dynamics and solvency in insurance : capital allocation, surplus and insurance cycle	74
3.1 Introduction	76
3.2 Model	78
3.3 Calibration of the model and empirical results	86

3.4	Accounting for the insurance cycle.	95
3.5	Conclusion	98
	Conclusion	103
	Bibliographie	106

Liste des tableaux

1.1	Estimation of parameters for losses	25
1.2	Goodness-of-fit statistics	25
1.3	Goodness-of-fit criteria	25
1.4	Value of CAT bonds with principal of US\$180 million as a function of time to the maturity T (years) and threshold level D (in \$ millions)	26
1.5	Values of the parameters	27
1.6	Maximum values of the excess returns of CAT bonds of the models with friction and without friction for all maturities and for long-term maturities	28
2.1	Résumé statistique des variables du marché primaire : obligations catastrophes et variables macroéconomiques	52
2.2	Statistiques des variables nominales spécifiques aux obligations catastrophes	52
2.3	Corrélations entre les variables et l'écart de taux des obligations catastrophes sur le marché primaire	53
2.4	Déterminants des écarts de taux avec le Libor comme taux d'intérêt	56
2.5	Déterminants des écarts de taux avec le Tbill comme taux d'intérêt	57
2.6	Test de robustesse sur différentes périodes avec le Libor comme taux d'intérêt	60
2.7	Test de robustesse sur différentes périodes avec le Tbill comme taux d'intérêt	61
2.8	Déterminants des indicateurs de liquidité	65
2.9	Test de robustesse pour le proxy dispersion (DISP)	68
2.10	Test de robustesse pour le proxy volatilité des écarts de taux (VOL)	69
2.11	Modèle avec effet fixe individuel avec le Libor comme taux d'intérêt	71
2.12	Modèle avec effet fixe individuel avec le Tbill comme taux d'intérêt	71
2.13	Déterminants des écarts de taux pour le type multi-péril	72
2.14	Déterminants des écarts de taux pour le type vent	73
3.1	Estimation of the parameters of the distributions	87
3.2	Parameters of the insurer's assets and liabilities	87
3.3	Monthly premium, surplus and default by line and by type of premium over one-year	90
3.4	Premium, surplus and default per unit liability by business line and by maturity of the contract	92
3.5	Default per unit liability by maturity of the contract as a function of the speed (γ) of capitalization	93
3.6	Monthly comparison of default-to-liability ratios for one line and two lines for a 12-month contract	93
3.7	Default-to-liability ratio by maturity as a function of the correlation between business lines' liabilities	94

3.8	Default and premium per unit liability by maturity of the contract	95
3.9	Default and premium by maturity of the contract based on the underwriting strategy adopted during the cycle	99

Liste des figures

1.1	Eastern Canada Seismic Zone (CBI and Worldwide AIR, 2013).	36
1.2	Mean excess loss	36
1.3	Upper bound of excess returns as a function of friction costs associated with indebtedness (ϵ_{bd}) and CAT bond (ϵ_{bc})	37
2.1	Taux Libor et écart de taux annuel des obligations catastrophes	68
3.1	single premium, default and surplus by maturity of the contract	101
3.2	Monthly evolution of the global default of the one-year contract by premium structure	101
3.3	Monthly comparison of default and surplus per line for a one-year contract . .	102

Remerciements

Tout d'abord, ma profonde gratitude à mon directeur de recherche, le Professeur Issouf Soumaré, pour la qualité de son encadrement. La pertinence de ses critiques, sa rigueur, sa générosité et ses conseils judicieux m'ont permis significativement de parfaire ce travail et de développer mes aptitudes de chercheur. J'ai beaucoup appris de ses fréquents retours qu'il m'a faits malgré ses nombreux autres engagements. Je remercie les Professeurs Marie-Claude Beaulieu et Philippe Grégoire pour leur engagement pour que la thèse se déroule dans de meilleures conditions.

Je remercie les membres de mon comité de thèse, Professeur Philippe Grégoire, Professeur Claude Denys Fluet et Professeur Martin Boyer pour l'intérêt porté à mes travaux de recherche et pour leurs recommandations qui ont contribué à les améliorer. Je remercie en particulier le Professeur Claude Denys Fluet pour sa disponibilité, ses remarques et ses suggestions qui m'ont indéniablement aidé.

Mes remerciements au Professeur Miroslav Nastev qui a pris le temps de simuler les données sismiques requises pour ma thèse.

Mes reconnaissances à la Chaire d'assurance et de services financiers l'Industrielle-Alliance, le Fonds de recherche AMF en gestion intégrée des risques des institutions financières, le CRREP (Centre de recherche sur les risques, les enjeux économiques, et les politiques publiques) et la Chaire IG Gestion de patrimoine en planification financière. Leur financement a facilité mon cheminement et m'a permis de progresser facilement dans mes recherches.

Ma gratitude va également à toute ma famille pour leur soutien inconditionnel. Une dédicace particulière à mon père, ma mère et mon frère Ibrahim qui ont toujours encouragé et soutenu tous mes projets d'étude. Je remercie également tous mes proches pour leur solidarité et leur coopération.

Avant-propos

J'ai toujours eu soif de découvrir, de créer, d'innover ou modéliser la réalité cachée. Ce chemin m'a conduit naturellement vers la thèse. Cette thèse est à la croisée des chemins entre la finance, l'assurance et l'actuariat. Ce qui correspond à mon profil et surtout à mon envie de travailler sur des sujets variés.

On pourrait résumer cette thèse en la phrase suivante : « Les choses sont beaucoup plus liées qu'en apparence ».

L'article intitulé “*Optimal choice between cat bond and debt to cover the risks of natural disasters*” a été publié dans la revue « Journal of Fixed Income ». J'ai le rang de premier auteur dans cet article et j'ai pour co-auteurs Professeur Issouf Soumaré et Professeur Claude Denys Fluet. Ces derniers ont aidé à compléter la bibliographie, se positionner par rapport à la littérature, renforcer la structure de l'article et polir la version finale.

L'article intitulé “*Pricing dynamics and solvency in insurance: capital allocation, surplus and insurance cycle*” a été publié dans la revue « Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance ». Mon co-auteur est Professeur Issouf Soumaré. J'ai proposé l'idée sous-jacente à l'article et ai effectué l'ensemble des travaux de recherche et de rédaction, avec des apports de Professeur Issouf Soumaré pour renforcer la structure de l'article et polir la version finale.

Pour ce qui concerne le document de recherche intitulé “*Écart de taux des obligations catastrophes, liquidité et taux d'intérêt*”, j'ai initié le projet et ai effectué l'ensemble des travaux de recherche et de rédaction sous la supervision du Professeur Issouf Soumaré.

Introduction

Cette thèse est organisée en 3 articles abordant des sujets de recherches en lien avec la modélisation financière, l'évaluation des risques et la couverture des risques

La couverture des risques des catastrophes naturelles peut se faire par le biais des obligations catastrophes (CAT bonds), afin de partager le risque avec les investisseurs sur les marchés des capitaux. L'utilisation des obligations catastrophes peut être meilleure que le recours au financement par actions et à la réassurance, car elles impliquent des coûts fiscaux inférieurs à ceux des capitaux propres et présentent moins de risques de crédit que la réassurance traditionnelle. Du point de vue des investisseurs, les obligations catastrophes offrent non seulement une rentabilité élevée, mais peuvent également être utilisées pour diversifier les portefeuilles puisque leurs rendements sont susceptibles d'être largement non corrélés avec d'autres véhicules d'investissement. En dépit de ces avantages, les obligations catastrophes n'ont pas fini par dominer le marché du transfert des risques tel que plébiscité au départ malgré le volume croissant observé ces dernières années.

Une explication plausible concernant l'insuffisance de l'utilisation des obligations catastrophes serait l'avantage des autres alternatives de financement telles que la réassurance et l'endettement classique. Une combinaison de la réassurance et des obligations catastrophes semble être l'option privilégiée plutôt que l'usage d'un seul véhicule de financement. Comparativement à la réassurance, les obligations catastrophes se caractérisent par une garantie totale du transfert du risque sous-jacent et abandonnent donc le principe de réassurance consistant à économiser la garantie par la diversification du transfert du risque. Cette caractéristique limite la pénétration des obligations catastrophes (Lakdawalla and Zanjani, 2012). Cependant, les contraintes contractuelles et les différences de coûts frictionnels du marché de réassurance peuvent toutefois motiver l'utilisation des obligations catastrophes. Ainsi, au lieu de faire usage d'un seul véhicule de financement, une combinaison de réassurance et d'obligations catastrophes peut améliorer les inefficiences dues aux contraintes contractuelles de réassurance. Cette combinaison permet de réduire le coût de la couverture et l'exposition au risque de défaut. (Härdle and Cabrera (2010), Lakdawalla and Zanjani (2012)).

Les pays peuvent aussi s'assurer contre les conséquences des catastrophes naturelles par le biais de l'épargne de précaution à dépenser en cas de catastrophe, l'aide et les secours de

la communauté internationale ainsi que les prêteurs. En particulier, la propension des gouvernements à faire recours au marché de dette ordinaire pourrait également freiner l'utilisation des obligations catastrophes. Partant de là, il importe d'analyser dans quelle mesure l'utilisation des obligations catastrophes peut être bénéfique au gouvernement comparativement à la dette classique. Le premier article aborde ce problème en développant un modèle d'optimisation stochastique dynamique avec frictions pour montrer dans quelle mesure il peut être avantageux pour un gouvernement d'émettre une obligation catastrophe au lieu d'une obligation non contingente standard. Il ressort de cela que les coûts de friction, tels que la prime d'illiquidité associée à l'émission de dette non contingente lorsqu'une catastrophe se produit, augmentent l'opportunité d'émettre des obligations catastrophes.

Par ailleurs, de nombreuses études pointent le coût d'assurance relativement élevé des obligations catastrophes pour que les pays soient disposés à émettre des obligations catastrophes à des fins d'assurance. L'une des raisons évoquées est le fait que les investisseurs valorisent davantage la liquidité en cas de catastrophe. Selon la théorie, la prime de liquidité explique les écarts de taux d'intérêt élevé, car les obligations catastrophes ne sont pas cotées en bourse et se transigent sur des marchés de gré à gré (OTC) (Dieckmann, 2009). Cette problématique d'illiquidité des obligations catastrophes fera l'objet du second article. Si l'illiquidité des obligations catastrophes a largement été théorisée dans la littérature, des preuves empiriques existent à peine. Ainsi, notre analyse sur le marché secondaire met en évidence l'impact de la liquidité sur les écarts de taux des obligations catastrophes ainsi que les facteurs déterminants de cette liquidité. Aussi, dans le contexte des taux d'intérêt durablement bas observés ces dernières années, les obligations catastrophes peuvent constituer une belle alternative d'investissement et de diversification de portefeuille pour plusieurs investisseurs. Ce qui pourrait augmenter la liquidité des obligations catastrophes. Ce constat a permis de pousser plus loin notre analyse en étudiant l'impact du taux d'intérêt sur l'écart de taux et la liquidité des obligations catastrophes. Les résultats des analyses confirment un lien significatif entre le taux d'intérêt et l'écart de taux des obligations catastrophes.

Notons que les risques de catastrophe naturelle comme tous les autres types de risques en assurance non-vie peuvent avoir un impact considérable sur la solvabilité des assureurs. Le dernier article cherche la façon dont l'assureur qui offre plusieurs lignes d'affaires peut optimiser sa tarification en tenant compte de ce risque d'insolvabilité au regard de sa responsabilité limitée. En effet, les assureurs sont tenus d'évaluer, sur une base continue et prospective, les besoins de solvabilité liés à leur profil de risque global et spécifique. La solvabilité est évaluée à l'aide du capital réglementaire et du capital économique. Le capital économique est évalué à l'aide de modèles basés sur le risque. Dans le cas des assurances multi-lignes, la détermination du capital se pose en termes d'allocation du capital pour déterminer la prime d'assurance appropriée et la performance de chaque ligne. Cela nécessite une bonne appréhension du lien entre la tarification, le risque d'insolvabilité et l'allocation de capital. En pratique,

ces interactions relèvent des décisions stratégiques de l'assureur dans une perspective de long terme. Ainsi, le troisième article permet d'établir le lien dynamique entre la tarification, le risque d'insolvabilité et l'allocation de capital dans un cadre multi-périodique. Nous prenons en compte certains aspects temporels tels que la dynamique de la prime, la dynamique de la capitalisation et le cycle d'assurance. Ce travail permet de concilier les objectifs de conception des contrats d'assurance avec la solvabilité de l'assureur et sa prise de décision stratégique dans une perspective de long terme.

Chapitre 1

Optimal choice between cat bond and debt to cover the risks of natural disasters

Résumé

Cet article^a analyse le choix entre les obligations non-contingentes et les obligations catastrophes (CAT bonds) pour couvrir le risque de tremblement de terre. Un modèle d'optimisation stochastique dynamique avec frictions a été développé et montre dans quelles conditions il peut être avantageux pour un gouvernement d'émettre une obligation catastrophe au lieu d'une obligation non-contingente standard. Nous montrons comment les coûts de friction, tels que la prime d'illiquidité associée à l'émission de dette non-contingente lorsqu'une catastrophe se produit, augmentent l'opportunité d'émettre des obligations catastrophes. La calibration du modèle proposé à des données réelles nous permet d'estimer le prix des obligations catastrophes pour s'assurer contre les pertes dues aux tremblements de terre au Québec.

Mots-clés : obligations catastrophes, dette, couverture, coûts de friction, illiquidité, tremblements de terre.

Codes JEL :G19

a. Cet article a été publié dans la revue « Journal of Fixed Income »

Abstract

This work analyses the choice between non-contingent bonds and CAT bonds to cover the risk of earthquakes. A dynamic stochastic optimization model with frictions was developed and shows under which conditions it may be advantageous for a government to issue a CAT bond instead of a standard non-contingent bond. We show how friction costs, such as the illiquidity premium associated with non-contingent debt issuance when a catastrophe occurs, increase the opportunity to issue CAT bonds. The calibration of the proposed model to real data allows us to estimate the price of CAT bonds to insure against earthquake losses in Quebec.

Keywords : CAT bond, debt, catastrophe risk coverage, friction costs, illiquidity, earthquake.

JEL-codes : G19

1.1 Introduction

Earthquakes are among the most devastating natural disasters in the world. Canada, with approximately 4000 earthquakes per year, remains one of the most vulnerable countries to the risk of earthquakes. According to a study by [Worldwide \(2013\)](#) commissioned by the Insurance Bureau of Canada, the level of seismic activity is particularly high in British Columbia and the Ontario-Quebec region. These two areas with high population densities are particularly at risk. Indeed, the probability of a major earthquake occurring in the next 50 years is between 10 to 15 percent for the Quebec City-Montreal-Ottawa corridor, while it is about 30 percent for British Columbia ([Worldwide, 2013](#)). Nevertheless, all else being equal, Quebec seems to be less resilient than British Columbia if an earthquake occurs. The consequences of a major earthquake are expected to be much more drastic for Quebec, given its valuable old buildings and a large amount of aging infrastructure ([Worldwide, 2013](#)).

Given the likelihood of an earthquake and the current limited capacity of the Canadian insurance industry to respond only to claims for losses of up to \$30 billion, the assumption of catastrophic losses above this range could lead to major financing problems ([Le Pan, 2016](#)). These losses, if they occur, would exceed the capacity of the country's insurance industry to protect policyholders who have suffered losses in the event of insurer insolvency. In addition, there is the potential for systemic risk ([Le Pan, 2016](#)). Thus, it is important for the government or the industry, or both, to initiate a safety net mechanism to manage the risk of earthquakes considered uninsurable in general. Indeed, insurability requires there to be a large number of possible risk situations, independent of each other (allowing the law of large numbers to be applied), triggered by specific events with measurable losses. This is not the case for earthquakes that in a specific region would not meet some of these law of large numbers requirements. It is therefore urgent to find alternative means of financing to mitigate the consequences of natural disasters such as earthquakes. This can be achieved through insurance-linked securitization such as catastrophic (CAT) bonds to share the risk with investors in capital markets.

The use of CAT bonds can be better than the use of equity financing and reinsurance, since they involve lower tax costs than equity capital and incur less credit risk than traditional reinsurance. From the investors' viewpoint, CAT bonds not only offer high profitability, but also can be used for portfolio diversification since their returns are likely to be largely uncorrelated with other investment vehicles. Unfortunately, the global stock of CAT bonds in 2015 was relatively low, around US\$25 billion, with annual issuance of US\$8-9 billion ([Artemis, 2016](#)). This small volume of CAT bonds can be explained partly by the fact that many governments prefer to use regular debt markets instead of CAT bonds to finance these disaster risks. Moreover, apart from the fact that CAT bonds are risky (generally of investment grade BB or lower) and have short maturity of three years or less, issuing CAT bonds incurs costs which merit comparison with the costs of other means of financing such as reinsurance or non-contingent bonds.

Many existing studies have pointed out the relatively high insurance cost of CAT bonds, e.g. Froot et al. (1999) and Cummins and Mahul (2009), among others. More recently, Borensztein et al. (2017) compared the choice between non-contingent bonds and CAT bonds issued by a government. According to these existing works, the estimated insurance costs observed in the data are too high for countries to be willing to issue CAT bonds for insurance purposes. This raises the question of why the cost of macro-insurance against natural catastrophes is so high in the real world. One explanation is the fact that investors value liquidity more in the disaster-event state. In addition, the high excess returns are also likely to be due to friction costs that are not taken into account in these earlier models.

The objective of this work is to analyse the choice between non-contingent bonds and CAT bonds issued to finance earthquakes risk. More specifically, we address the following research questions : (1) Under what conditions can the government decide to issue a CAT bond instead of a non-contingent bond? (2) Can the inclusion of friction costs reduce the gap between expected and observed excess returns of CAT bonds documented in the literature? It should be noted that in the literature, most studies have focused on the benefits of issuing a CAT bond compared to traditional reinsurance (e.g.Froot et al. (1999), Finken and Laux (2009), among many others). Some of these authors advocated the combination of CAT bonds with reinsurance (Croson and Kunreuther (2000) ; Lee and Yu (2007) ; Cummins and Weiss (2009) ; Cummins and Trainar (2009) ; Härdle and Cabrera (2010)). To the best of our knowledge, Borensztein et al. (2017) is the only study to look, rather, at the appropriateness of issuing a CAT bond relative to a non-contingent bond for a given country.

Thus, in order to answer our research questions specified above, we propose an extension of the work of Borensztein et al. (2017) by taking into account friction and illiquidity costs that are not included in their model. Borensztein et al. (2017)'s model is a dynamic stochastic optimization model with complete and frictionless asset markets. Unlike these authors, we assume that the cost of borrowing is not fixed and depends on contemporary friction costs, particularly, the illiquidity associated with borrowing when a catastrophe occurs. In that respect, we assume friction costs to be a function of the country's debt ratio. Furthermore, we calibrate our model with data from Earthquake Canada on seismic activities in Quebec from 1663 to 2005. To the best of our knowledge, the hypothetical valuation of a CAT bond issued by the Government of Quebec has not yet been done. The benchmark study on this subject is the one carried out by Härdle and Cabrera (2010) in the case of Mexico. However, this study was carried out ex post the issuance of the CAT bond, which made it possible to use already realized costs of losses. Our situation is slightly different since these realised losses data are not available for Quebec. We therefore simulate the costs of the claims. To calculate the price of a CAT bond in Quebec, we adopt the same theoretical basis as and use a contingent claim valuation model in the absence of arbitrage.

Our contribution to the existing literature is twofold. Firstly, we show under what conditions it

may be advantageous for a government to issue a CAT bond instead of a non-contingent bond when friction costs, such as the illiquidity premium, are accounted for. We show how friction costs can increase the opportunity to issue CAT bonds and reduce the spread between the expected and the observed yields. Taking into account friction costs, in particular illiquidity premiums associated with debt, reveals the higher likelihood of issuing CAT bonds that results from a lower gap between the model-generated yield spreads and market-observed excess returns. Secondly, our calibration exercise using real seismic activities data and simulations provides several relevant results on the price of a CAT bond to cover earthquakes in Quebec.

The rest of the paper is structured as follows. A review of the theoretical literature related to CAT bonds is carried out in section 1.2. In section 1.3, we present our proposed model and show the conditions under which it would be advantageous for the government to issue CAT bonds to finance earthquake risk instead of non-contingent bonds. Section 1.4 applies the theoretical results to the Mexican and Quebec data by calibrating a CAT bond for earthquakes in Quebec. Finally, we conclude in section 1.5.

1.2 Literature Review

1.2.1 Catastrophe Bonds : Design and Pricing

Several innovative financial instruments have emerged in capital markets to cover risks of natural disasters. To date, the most popular of these alternative risk transfer tools is the catastrophe (CAT) bond, a security that pays regular coupons (often a floating rate above LIBOR) to the investor until the designated catastrophic event occurs (trigger condition). When the catastrophic event occurs, it leads to a total or partial loss of principal and/or interest payments. The principal is held in a Special Purpose Vehicle (SPV) in highly rated securities and paid to the insurer to cover losses if the trigger condition (defined in the issue contract) is met. If a catastrophe does not occur, then investors receive their principal plus the promised coupons.

Due to an incomplete market for catastrophe risks and the lack of transparency in the CAT bond market, it is difficult to specify an accurate valuation model for CAT bonds. For the same reason, comparing the issue premium of a particular CAT bond from different models remains a difficult task. Nonetheless, several authors have proposed different types of models to value CAT bonds, including : non-arbitrage contingent claims models, utility-based general equilibrium models and actuarial models. With respect to utility-based models, Young (2004) priced CAT bonds based on the assumption that investors' preferences are characterized by an exponential utility function. Similarly, Egami and Young (2008) priced CAT bonds on the basis of utility function maximization. Cox and Pedersen (2000) derived an approach for valuing CAT bonds in an incomplete market based on intertemporal equilibrium models with separable utility functions. Dieckmann (2008) proposed a dynamic equilibrium model taking

into account external habits. Actuarial models based on market incompleteness have also been developed by Galeotti et al. (2013) and Têtu et al. (2015). Lee and Yu (2002) proposed a no-arbitrage contingent claims valuation model with stochastic interest rates to price CAT bonds. They also analyzed the value of the CAT bond taking into account default risk, moral hazard and basis risk. Still in a no-arbitrage framework, Dassios and Jang (2003) priced catastrophe reinsurance and derivatives using the Cox process with short noise intensity. Vaugirard (2003) evaluated CAT bonds using Monte-Carlo simulation methods with stochastic interest rates. Baryshnikov et al. (2001) presented a no-arbitrage solution to CAT bond pricing by adopting a double stochastic compound Poisson process. Kukla and Burnecki (2003) applied the results of Baryshnikov et al. (2001) to calculate the risk-free prices of CAT bonds. Härdle and Cabrera (2010) followed these previous authors in applying a double stochastic method for calibrating a Mexican government-sponsored earthquake CAT bond. Following Lee and Yu (2002), Ma and Ma (2013) used a contingent claims model to value CAT bonds. In their model the CAT bond price is derived using a stochastic interest rate following a Cox-Ingersoll-Ross (CIR) type model. Catastrophe risk is modelled using a stochastic double Poisson process and the distribution of losses follows a non-homogeneous Poisson process (NHPP). Finally, the authors used a mixed approximation method to find a numerical solution for the price of CAT bonds.

1.2.2 Coverage with CAT bonds

The use of CAT bonds can be more advantageous than the use of equity and standard debt financing from a certain point of view. As a debt instrument, it offers a tax advantage over equity financing, and hence involves lower tax costs than equity. Compared to traditional subordinated debt, it reduces financial distress and agency costs because contingent payments are based on readily observable variables (the occurrence of a disaster) and the payments are agreed ex ante. Also, the proceeds from the catastrophe bond issue are held in a trust fund and invested in safer securities and cannot be used by managers unless the specified disaster occurs. From investors' viewpoint, one key advantage of CAT bonds is that the risk of loss may have a low correlation with losses on equity and bond portfolios as a result of changing economic conditions. Thus, the interest rate charged on CAT bonds should reflect only the expected loss following the catastrophic event, without taking into account the risk premium that would result from a correlation with macroeconomic conditions. Unfortunately, in practice, investors in CAT bonds receive interest rates that far exceed the expected loss that can reasonably be attributed to the referenced catastrophe. At least three explanations have been proposed for the high risk premiums associated with the cost of issuing CAT bonds : risk aversion (investors may lose their entire investment), information asymmetry and uncertainty about future loss estimates (Bantwal and Kunreuther (2000) ; Froot (2001) ; Jaffee and Russell (2013)).

Despite these apparent advantages, disaster bonds currently cover only a small share of the world's disaster risk. Concerns exist about the documentation and the structure of the contrac-

tual obligations. Smack (2016) argues that additional regulation that addresses these contractual issues and financial risks would allow greater use of catastrophe bonds. Although the use of CAT bonds is not widespread, their impact could be much greater than their current use, as they provide competition against traditional catastrophe reinsurance and may thus affect reinsurance prices (Froot, 2001). Indeed, CAT bonds offer some potential advantages over traditional reinsurance as they have less credit risk because the total amount of funds that can be called by the insurer if a catastrophe occurs is held in a relatively secure trust. This is not the case for reinsurers who are at risk of insolvency, since they do not necessarily hold the funds corresponding to their maximum exposure.¹ Some authors even argue that they have complementarity with insurance and reinsurance contracts (Croson and Kunreuther, 2000). For instance, Finken and Laux (2009) studied the link between parametric CAT bonds and reinsurance. They show that parametric CAT bonds offer low-risk insurers an alternative to reinsurance contracts. This leads to less cross-subsidization in the reinsurance market. Lee and Yu (2007) went even further by showing how a reinsurance company can increase the value of a reinsurance contract and reduce its default risk by issuing CAT bonds. CAT bonds as a form of securitization thus in some cases would allow insurers and reinsurers to obtain an optimal combination of diversification and transfer of catastrophe risk to capital markets (Cummins and Weiss (2009); Cummins and Trainar (2009); Härdle and Cabrera (2010)). According to Härdle and Cabrera (2010), a combination of reinsurance and CAT bonds is optimal in the sense that it provides coverage at a lower cost and lower exposure to default than reinsurance itself.

Notwithstanding the above advantages associated with the use of CAT bonds, their use remains limited with respect to the huge financing needs of the insurance market. According to Barriau and Loubergé (2009), risk aversion and ambiguity may have contributed to the limited success of CAT bonds; therefore, they propose replacing simple CAT bonds with hybrid CAT bonds, providing catastrophe risk transfer together with protection against a stock market crash to complement the market. The limited use of CAT bonds may also be due to the lower costs of the other means of financing such as debt or savings. At the government level, financing through a non-contingent bond could prove less expensive. Borensztein et al. (2017) use a dynamic optimization model in which a country has two options to finance disaster risks by either issuing a non-contingent bond alone, or by issuing a CAT bond alongside non-contingent debt. They find that countries most vulnerable to these risks would find it more optimal to use CAT bonds for insurance purposes if the costs of issuing such bonds were significantly lower than a given threshold. In other words, there is an upper insurance cost limit below which the country may find it optimal to issue a CAT bond. The estimated costs based on data show that the actual costs are too high for countries to be willing to issue

1. However, if holding capital in trust is costly, insurers' direct recourse to CAT bonds may not be that effective. In addition, as mentioned above, CAT bonds can involve substantial transaction costs due to the reasons cited above.

CAT bonds for insurance purposes. This may be one reason why there is little issuance of CAT bonds. As we mentioned in the introduction, we extend the model of Borensztein et al. (2017), by taking into account friction costs, mainly illiquidity premiums associated with debt financing when a catastrophe occurs.

1.3 Optimal choice between debt and CAT bond in the presence of friction costs

1.3.1 Proposed model

Assumptions

We extend the model of Borensztein et al. (2017). This model is a dynamic stochastic optimization model of a small open economy. We have an economic agent represented by a representative consumer with an infinite lifespan who seeks to maximize his intertemporal utility. There is a homogeneous good that is consumed at home and abroad. The utility function therefore depends on consumption C_t . There are two assets in the economy : a non-contingent bond B_t and a catastrophe (CAT) bond B_t^c . The consumer has two options : either invest in the available assets or issue them. It is assumed that there are two states in the economy : the economy is in normal times (state $s = n$) or is affected by a natural disaster (state $s = d$). The probability that the economy will be in state s in the next period is constant and denoted by π_s with $\pi_n + \pi_d = 1$. The growth rate denoted by G_t is equal to G_n in normal times and G_d in the event of a natural disaster. We have $G_d < G_n$ since we assume that the growth rate will be negatively impacted by the occurrence of a natural disaster. We assume that the growth rate of production follows a stochastic Markov process : $G_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$, where Y_t is the country's production at time t and represents the stochastic endowment received by the representative consumer. Domestic production increases at a constant rate in normal times when there is no disaster.

Equilibrium

The representative consumer invests in or issues two types of bonds in any given period : a non-contingent bond and a CAT bond. Its utility function is :

$$U_t = E_t \sum_{i=0}^{+\infty} \beta^i \frac{C_{t+i}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (1.1)$$

At equilibrium, the representative agent will maximize his utility subject to the country's resource constraint as follows :

$$Max U_t \quad (1.2)$$

under :

$$C_t + q(f_t)B_t + q^c(f_t^c)B_t^c = Y_t + B_{t-1} + 1_{\{s_t=n\}}B_{t-1}^c \quad (1.3)$$

$$q(f_t) = k - f_t(-b_t) \quad (1.4)$$

$$q^c(f_t^c) = k^c - f_t^c(-b_t^c) \quad (1.5)$$

B_t and B_t^c are respectively the country's investments in the non-contingent bond and the CAT bond. Note that B_t is negative when the country has external debt. A positive value of B_t can be interpreted as the country's international reserves, i.e. the country holds a non-contingent bond. Similarly, the value of B_t^c is negative when the country wants to insure itself against the risk of catastrophe by issuing a CAT bond. Thus, the debt ratios are respectively $-b_t = \frac{-B_t}{Y_t}$ and $-b^c = \frac{-B_t^c}{Y_t}$.

The indicator variable $1_{\{s_t=n\}}$ captures the fact that the CAT bond is only repaid in the absence of catastrophes, i.e. in normal times. The variables q and q^c are the respective prices of the plain vanilla bond and the CAT bond. Note that these prices are assumed constant in Borensztein et al. (2017), whereas in our model, they are function of f_t and f_t^c . f_t represents the friction costs related to the non-contingent bond (or debt) and f_t^c the friction costs related to the CAT bond. The constants k and k^c are respectively the prices of the non-contingent bond and the CAT bond in the absence of friction costs.

Unlike Borensztein et al. (2017), we consider asset prices to be endogenous and dependent on friction costs. This gives respectively the prices of the ordinary non-contingent bond and the CAT bond, $q(f_t)$ and $q^c(f_t^c)$. For the moment, we are not going to give an explicit form to the friction costs. We assume that friction costs increase with the debt ratio, i.e. :

$$\frac{\partial f_t}{\partial(-b_t)} > 0 \text{ and } \frac{\partial f_t^c}{\partial(-b_t^c)} > 0 \quad (1.6)$$

Similarly, we assume that the prices of both bonds decline when friction costs increase. The presence of friction costs implies an additional premium in excess of the discount rate. Hence, prices fall. We therefore have :

$$\frac{\partial q_t}{\partial f_t} < 0 \text{ and } \frac{\partial q_t^c}{\partial f_t^c} < 0 \quad (1.7)$$

Combining equations (1.6) and (1.7) yields :

$$\frac{\partial q_t}{\partial(-b_t)} = \left(\frac{\partial q_t}{\partial f_t}\right)\left(\frac{\partial f_t}{\partial(-b_t)}\right) < 0 \text{ and } \frac{\partial q_t^c}{\partial(-b_t^c)} = \left(\frac{\partial q_t^c}{\partial f_t^c}\right)\left(\frac{\partial f_t^c}{\partial(-b_t^c)}\right) < 0 \quad (1.8)$$

1.3.2 Arrow-Debreu type economy

We have two assets and two states of nature, so we can build a complete market. This allows us to migrate into an Arrow-Debreu world using Arrow-Debreu securities contingent on the states of nature. The expression of the model in the Arrow-Debreu world is useful here to characterize the equilibrium and its main properties.

Indeed, the representative agent holds B_t in non-contingent bonds and B_t^c in CAT bonds. The same allocation can be obtained by holding Arrow-Debreu securities B_d and B_n contingent on states. This equivalence is justified since in the event of a catastrophe ($s = d$), the representative agent loses its investment in CAT bonds; its payoff is the non-contingent bond B_t . Otherwise, when no catastrophe occurs ($s = n$), the CAT bond is repaid and its payoff in this state is therefore $B_t + B_t^c$. This results in the following relationship :

$$B_n = B_t + B_t^c \quad (1.9)$$

$$B_d = B_t \quad (1.10)$$

On the basis of this allocation, the budgetary constraints in the two economies will have to be equivalent in order to be able to express the model in the Arrow-Debreu world. This requires additional conditions arising from the equivalence of the budgetary constraints in the two economies.

Budget constraints

The budget constraint in an Arrow-Debreu world can be written as follows :

$$C_t + \sum_{s=n,d} \pi_s m_s B_{s,t} = Y_t + B_{s,t-1} \quad (1.11)$$

with m_d and m_n , the stochastic discount factors associated with each state of nature. $B_{s,t-1}$ is the payoff of the contingent asset to the state at date t. Using equations (1.10) and (1.8), the budget constraint equation (1.11) becomes :

$$\begin{aligned} C_t + \sum_{s=n,d} \pi_s m_s B_{s,t} &= Y_t + B_{s,t-1} \\ C_t + \pi_n m_n B_{n,t} + \pi_d m_d B_{d,t} &= Y_t + B_{t-1} + 1_{s_t=n} B_{t-1}^c \\ C_t + \pi_n m_n (B_t + B_t^c) + \pi_d m_d B_{d,t} &= Y_t + B_{t-1} + 1_{s_t=n} B_{t-1}^c \\ C_t + (\pi_n m_n + \pi_d m_d) B_t + \pi_n m_n B_t^c &= Y_t + B_{t-1} + 1_{s_t=n} B_{t-1}^c \end{aligned}$$

As in Proposition 1 of Borensztein et al. (2017), this budget constraint in the Arrow-Debreu world is equivalent to the budget constraint of the initial allocation in equation (1.3) if and only if

$$\begin{aligned} q^c &= \pi_n m_n \\ q &= \pi_n m_n + \pi_d m_d \end{aligned}$$

Or equivalently :

$$m_d = \frac{q - q^c}{\pi_d} \quad (1.12)$$

$$m_n = \frac{q^c}{\pi_n} \quad (1.13)$$

Cost of insurance (or excess return)

According to Borensztein et al. (2017), the cost of catastrophe insurance can be measured as the expected excess return that the country pays on its CAT bond. This return is expressed as follows :

$$rx = \frac{\pi_n}{q^c} - \frac{1}{q} \quad (1.14)$$

The excess return is positive and is equal to zero only in the borderline case where foreign investors are risk neutral. The expression of the return as a function of the stochastic discount factors is as follows :

$$rx = \frac{\pi_d \left(\frac{m_d}{m_n} - 1 \right)}{q} \quad (1.15)$$

The condition $rx \geq 0$ is equivalent to assuming that $m_d \geq m_n$. This implies that foreign investors value cash more in disaster states than in non-disaster states.

Loan constraint

Let ρ be the maximum share of domestic production that can be pledged as reimbursement to foreign creditors. It is assumed that consumption C_t is at least equal to disposable income after repayment of the guaranteed foreign debt, i.e. $C_t \geq (1 - \rho)Y_t$. This constraint could limit the smoothing of domestic consumption in order to repay foreign investors. On this basis, Borensztein et al. (2017) (in Proposition 2) show that there is a maximum debt ratio level \underline{b}_s such that :

$$\forall t, \underline{b}_s Y_t \leq B_{s,t}$$

with :

$$\underline{b}_s = -\frac{\rho G_s}{1 - \phi} \quad (1.16)$$

where $\phi = \pi_n m_n G_n + \pi_d m_d G_d \leq 1$. This condition is necessary for the representative consumer to have a well-defined intertemporal budget constraint. ϕ is similar to an average growth rate and must be lower than the interest rate.

Equilibrium

We have a dynamic optimization model. It is therefore appropriate to use the Bellman approach to derive the equilibrium. Before deriving the equilibrium, the consumer problem is made stationary by normalizing all variables to the output Y_t .

$$X_t = Y_t + B_{s_t,t-1}$$

X_t is therefore equal to the current income of the representative consumer plus his assets at the beginning of the period. We can normalize X_t as follows :

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{X_t}{Y_t} \\ x_t &= 1 + \frac{B_{s_t,t-1}}{Y_t} \\ x_t &= 1 + \frac{B_{s_t,t-1}}{Y_{t-1}} \frac{Y_{t-1}}{Y_t} \\ x_t &= 1 + \frac{b_{s_t,t-1}}{G_t}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

x_t is therefore the normalized value of X_t . Analogously to the case of X_t , we normalize all other variables. Thus, $c(x)$, $b_n(x)$ and $b_d(x)$ represent the normalized values of consumption and portfolio assets based on current resources, respectively.

Based on the normalized variables, the budget constraint (11) and the loan constraint (16) can be rewritten as follows :

$$c_t + \sum_{s=n,d} \pi_s m_s b_{s,t} = x_t \tag{1.18}$$

$$\forall s, \underline{b}_s \leq b_s \tag{1.19}$$

Note that the problem of the representative consumer consists in maximizing his utility under the budget constraint (18) and the loan constraint (19). The standardized Bellman problem for the consumer can then be written as follows :

$$v(x_t) = \max_{c_t, b_n, b_d} [U(c_t) + \beta \sum_{s=n,d} \pi_s v(x_{t+1}) + \sum_{s=n,d} \pi_s \lambda_s (b_s - \underline{b}_s)] \tag{1.20}$$

With the Power utility function assumed in equation (1.1), this ultimately results in :

$$v(x) = \max_{b_n, b_d} \left[\sum_{s=n,d} \frac{(x - \sum_{s=n,d} \pi_s m_s b_s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta \sum_{s=n,d} \pi_s G_s^{1-\alpha} v(x') + \sum_{s=n,d} \pi_s \lambda_s (b_s - \underline{b}_s) \right] \quad (1.21)$$

where $v(x)$ represents the maximum utility in terms of the optimal consumption plan. \underline{b}_s is the minimum debt ratio with λ_s being the co-state variables related to the borrowing constraint. The transition equation for current resources is given by : $x' = 1 + bs/Gs$, where x' characterizes future resources. β is the consumer intertemporal discount rate.

1.3.3 Optimal conditions for issuing CAT bonds

Economy without frictions (Borensztein et al. (2017))

According to definition 3 of Borensztein et al. (2017), the country will only issue CAT bonds in period t if it reduces the debt ratio. This implies :

$$b_t^c < 0 \quad (1.22)$$

$$\text{and } b_t^c < \left[\frac{G_n}{G_d} - 1 \right] b_t \quad (1.23)$$

The second condition comes from the fact that if the country issues non-contingent debt ($b_t < 0$), then it must also issue an amount of disaster bonds that is high enough to reduce the debt ratio in the event of a disaster. This requirement of the model can be written as follows :

$$-b_t/G_d < -(b_t + b_t^c)/G_n \quad (1.24)$$

From this definition, Borensztein et al. (2017) show that the country uses CAT bonds for insurance in any period t if the excess return on a CAT bond is lower than a threshold (see Proposition 4 in Borensztein et al. (2017)) :

$$rx < \frac{\pi_d}{q} \left(\frac{G_n^\alpha}{G_d^\alpha} - 1 \right) = r_x^* \quad (1.25)$$

Observe that the above condition is necessary for using CAT bonds but not sufficient. So Borensztein et al. (2017) derived another condition that is both necessary and sufficient. This condition, however, is only valid in the long run. Indeed, the country will issue CAT bonds in the long run if the probability that it will issue CAT bonds to cover itself in the future is not zero over an infinite time horizon, i.e. :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_r \left(b_t^c < 0 \text{ et } b_t^c < \left[\frac{G_n}{G_d} - 1 \right] b_t \right) \neq 0 \quad (1.26)$$

This leads to Proposition 5 in Borensztein et al. (2017), i.e., the country uses a CAT bond issue for insurance in the long run if and only if the excess return on the CAT bond is lower than a threshold :

$$r_x < \min \left(\frac{\pi_n}{q - \beta \pi_d G_d^{-\alpha}}, \frac{G_n^\alpha}{\beta} \right) - \frac{1}{q} = r_x^{**} \quad (1.27)$$

The difference between conditions (1.25) and (1.27) depends on the discount factor β , which should be neither too high nor too low :

$$m_d G_d^\alpha < \beta < m_n G_n^\alpha \quad (1.28)$$

Economy with friction costs (our model)

In this sub-section, we look at how financial frictions will affect the decision to issue a CAT bond. Let r_x , ϵ_{bd} and ϵ_{cb} represent the excess return of the CAT bond, the intensity of the non-contingent debt frictions and the intensity of the CAT bond frictions, respectively, with :

$$\epsilon_{bd} = \frac{\partial q}{\partial b_d} \quad (1.29)$$

$$\epsilon_{cb} = \frac{\partial q^c}{\partial b_n} \quad (1.30)$$

Proposition 1 :

The country will issue a CAT bond in any given period t if the excess return on the CAT bond is lower than a threshold :

$$r_x < \frac{\pi_d}{q} \left[\frac{G_n^\alpha}{G_d^\alpha} \left(\frac{\beta C (1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{\epsilon_{bd} b_d C(x)^{-\alpha} G_d^\alpha}{\pi_d}}{\beta C (1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{\epsilon_{cb} b_n C(x)^{-\alpha} G_n^\alpha}{\pi_n}} \right) - 1 \right] = r_{fr}^* \quad (1.31)$$

Proof of Proposition 1 :

Let's define $m'_d = \frac{\partial m_d}{\partial b_d}$, $m'_n = \frac{\partial m_n}{\partial b_n}$, $q'_{bd} = \frac{\partial q}{\partial b_d}$, $q'_{bd}{}^c = \frac{\partial q^c}{\partial b_d}$, $q'_{bn}{}^c = \frac{\partial q^c}{\partial b_n}$

We have :

$$q'_{bd} = \frac{\partial q}{\partial b_d} > 0$$

$$q'_{bn}{}^c = \frac{\partial q^c}{\partial b_n} > 0$$

Indeed, as b_d increases, friction costs decrease and consequently the bond price increases. Similarly, when b_n increases, friction costs decrease and therefore the price of the bond increases.

Let's reconsider the Bellman equilibrium for the representative consumer. The first-order condition of the equilibrium is written as :

$$(m'_d b_d + m_d)C(x)^{-\alpha} = \beta G_d^{-\alpha} C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} + \lambda_d$$

$$(m'_n b_n + m_n)C(x)^{-\alpha} = \beta G_n^{-\alpha} C(1 + \frac{b_n}{G_n})^{-\alpha} + \lambda_n$$

We have :

$$\frac{m_d G_d^\alpha}{m_n G_n^\alpha} = \frac{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} + \lambda_d G_d^\alpha - (m'_d b_d)C(x)^{-\alpha} G_d^\alpha}{\beta C(1 + \frac{b_n}{G_n})^{-\alpha} + \lambda_n G_n^\alpha - (m'_n b_n)C(x)^{-\alpha} G_n^\alpha} \quad (1.32)$$

It follows from the condition for issuing CAT bonds(1.24) that $\frac{b_d}{G_d} > b_n G_n$. Thus, $b_d > \underline{b}_d$, that is to say that the credit constraint in the catastrophe state is null ($\lambda_d = 0$). Furthermore, this condition implies that $C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} < C(1 + \frac{b_n}{G_n})^{-\alpha}$.

So

$$\begin{aligned} \frac{m_d G_d^\alpha}{m_n G_n^\alpha} &= \frac{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - (m'_d b_d)C(x)^{-\alpha} G_d^\alpha}{\beta C(1 + \frac{b_n}{G_n})^{-\alpha} + \lambda_n G_n^\alpha - (m'_n b_n)C(x)^{-\alpha} G_n^\alpha} \\ &< \frac{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - (m'_d b_d)C(x)^{-\alpha} G_d^\alpha}{\beta C(1 + \frac{b_n}{G_n})^{-\alpha} - (m'_n b_n)C(x)^{-\alpha} G_n^\alpha} \\ &< \frac{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{(q'_{bd} - q'_{bd^c})}{\pi_d} b_d C(x)^{-\alpha} G_d^\alpha}{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - (\frac{q'_{bn}}{\pi_n}) b_n C(x)^{-\alpha} G_n^\alpha} \\ &< \frac{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{q'_{bd}}{\pi_d} b_d C(x)^{-\alpha} G_d^\alpha}{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - (\frac{q'_{bn}}{\pi_n}) b_n C(x)^{-\alpha} G_n^\alpha} \end{aligned}$$

The last inequality is true because it is assumed that the cost of the CAT bond is independent of the debt ratio b_t . This implies that $\frac{\partial q^c}{\partial b_d} = \frac{\partial q^c}{\partial b_t} = 0$

Reconsider the expression of excess return as a function of the stochastic discount factor, i.e. :

$$rx = \frac{\pi_d (\frac{m_d}{m_n} - 1)}{q}$$

By replacing $\frac{m_d}{m_n}$ with its expression found in equation (1.32), we obtain :

$$rx < \frac{\pi_d}{q} \left[\frac{G_n^\alpha}{G_d^\alpha} \left(\frac{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{q'_{bd}}{\pi_d} b_d C(x)^{-\alpha} G_d^\alpha}{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{q'_{bn}}{\pi_n} b_n C(x)^{-\alpha} G_n^\alpha} \right) - 1 \right] = r_{fr}^*$$

Proposition 2 :

The inclusion of friction costs will encourage the issuance of CAT bonds in any period t if the friction cost intensity of the non-contingent debt is sufficiently high compared to the friction cost intensity of the CAT bond :

$$\epsilon_{bd} > \epsilon_{cb} \frac{\pi_d G_n^\alpha(-b_n)}{\pi_n G_d^\alpha(-b_d)} \quad (1.33)$$

Proof of Proposition 2 :

According to Borensztein et al. (2017), the condition for issuing a CAT bond is :

$$rx < \frac{\pi_d}{q} \left(\frac{G_n^\alpha}{G_d^\alpha} - 1 \right) = r_x^*$$

According to our model with frictions, the condition for issuing a CAT bond is :

$$rx < \frac{\pi_d}{q} \left[\frac{G_n^\alpha}{G_d^\alpha} \left(\frac{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{\epsilon_{bd}}{\pi_d} b_d C(x)^{-\alpha} G_d^\alpha}{\beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{\epsilon_{cb}}{\pi_n} b_n C(x)^{-\alpha} G_n^\alpha} \right) - 1 \right] = r_{fr}^*$$

Comparing the bounds of the two models, we observe that $r_{fr}^* \leq r_x^*$ implies that :

$$\begin{aligned} \beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{\epsilon_{bd}}{\pi_d} b_d C(x)^{-\alpha} G_d^\alpha &\leq \beta C(1 + \frac{b_d}{G_d})^{-\alpha} - \frac{\epsilon_{cb}}{\pi_n} b_n C(x)^{-\alpha} G_n^\alpha \\ \Rightarrow \epsilon_{bd} > \epsilon_{cb} \frac{\pi_d G_n^\alpha(-b_n)}{\pi_n G_d^\alpha(-b_d)} \end{aligned}$$

The implication of Proposition 2 can be summarized as :

$$\text{if } \epsilon_{bd} > \epsilon_{cb} \frac{\pi_d G_n^\alpha(-b_n)}{\pi_n G_d^\alpha(-b_d)} \text{ then } r_{fr}^* > r_x^*.$$

This means that the boundary of the friction model is higher than the boundary of the non-friction model. Otherwise stated,

$$\text{if } \epsilon_{bd} \leq \epsilon_{cb} \frac{\pi_d G_n^\alpha(-b_n)}{\pi_n G_d^\alpha(-b_d)} \text{ then } r_{fr}^* \leq r_x^*$$

On the basis of these findings, it can be concluded that taking into account friction costs will increase prospects for issuing a CAT bond if the intensity of financial friction linked to the non-contingent debt is sufficiently high compared to the intensity of friction costs in relation to the CAT bond, i.e. if $\epsilon_{bd} > \epsilon_{cb} \frac{\pi_d G_n^\alpha (-b_n)}{\pi_n G_d^\alpha (-b_d)}$.

Note that friction costs associated with CAT bonds can be, for example, the costs associated with establishing and maintaining the risk transfer system including taxes, agency costs and information asymmetry. Debt friction costs can also result from the expenses associated with the issuance of bonds, including taxes, incomplete information on the debt market, and liquidity problems related to the mobilisation of debt during natural disasters. Our result thus makes it possible to show the importance of these friction costs in explaining the excess return observed in the CAT bond market.

Proposition 3 :

Let $m'_n = \frac{\partial m_n}{\partial b_n}$ and $m'_d = \frac{\partial m_d}{\partial b_d}$. The country will issue a CAT bond in the long run if and only if the excess return on the CAT bond is lower than a threshold :

$$(m'_d b_d + m_d) G_d^\alpha < \beta < (m'_n b_n + m_n) G_n^\alpha \quad (1.34)$$

$$(m'_n b_n + m_n) \leq (m'_d b_d + m_d) \quad (1.35)$$

$$\text{and } r_x < \min \left(\frac{\pi_n}{q - \beta \pi_d G_d^{-\alpha} + \epsilon_{bd} b_d}, \frac{G_n^\alpha}{\beta - \frac{\epsilon_{cb} b_n G_n^\alpha}{\pi_n}} \right) - \frac{1}{q} = r_{fr}^{**} \quad (1.36)$$

Proof : See Appendix 1.

According to Borensztein et al. (2017), in a frictionless economy, the condition for issuing a CAT bond in the long run is :

$$r_x < \min \left(\frac{\pi_n}{q - \beta \pi_d G_d^{-\alpha}}, \frac{G_n^\alpha}{\beta} \right) - \frac{1}{q} = r_x^{**}$$

Equation (1.36) is the issuance condition for issuing a CAT bond in the long run in our model with frictions. The issuance of the CAT bond will be favourable if the financial friction cost intensity associated with the non-contingent debt is sufficiently high compared to the friction cost intensity associated with the CAT bond. The comparison of the two bounds r_x^{**} and r_{fr}^{**} shows that the difference with the model of Borensztein et al. (2017) lies in the friction cost terms.

What is the impact of debt-related illiquidity costs ?

In this part we isolate illiquidity costs from friction costs, as they are specific to debt mobilization at the time of disasters. They can be thought of as the illiquidity premium associated

with the difficulties of mobilizing non-contingent debt in the event of a disaster. We ignore the effect of other types of frictions. This restriction implies that only the price of the normal non-contingent bond q decreases with the illiquidity costs l_t . Since the price of the CAT bond q^c is independent of the illiquidity costs of debt, it is assumed to be constant. Hence, we have :

$$\frac{\partial q_t}{\partial l_t} < 0 \quad (1.37)$$

q^c being constant

$$\Rightarrow \frac{\partial q^c}{\partial b_s} = 0, \quad s = n, d \quad (1.38)$$

As per equation (1.6), we assume that illiquidity costs increase with the leverage ratio, i.e. :

$$\frac{\partial l_t}{\partial (-b_t)} > 0 \quad (1.39)$$

Proposition 4 :

Under the above assumptions, the terms and conditions for the issuance of CAT bonds in any period t are as follows :

$$rx < \frac{\pi_d}{q} \left(\frac{G_n^\alpha}{G_d^\alpha} - 1 \right) - \frac{\epsilon_{bd}}{q} \frac{G_n^\alpha}{G_d^\alpha} \frac{b_d C(x)^\alpha}{\beta C(x')^\alpha} = r_{fl}^* \quad (1.40)$$

Proof : see Appendix 2

Let's consider the bound of the frictionless model r_x^* (equation. (1.25)). From equation (1.40), we can write r_{fl}^* according to the bound of the frictionless model as follows :

$$r_{fl}^* = r_x^* - \frac{\epsilon_{bd}}{q} \frac{G_n^\alpha}{G_d^\alpha} \frac{b_d C(x)^\alpha}{\beta C(x')^\alpha}$$

Since b_d is negative, we do have r_{fl}^* greater than r_x^* . Of course, the maximum excess return r_{fl}^* increases with the illiquidity costs characterized by ϵ_{bd} . Thus, if we take into account illiquidity costs, we see that the new bound obtained becomes higher than the bound obtained by Borensztein et al. (2017), i.e. $r_{fl}^* > r_x^*$. Hence, the possibility of issuing a CAT bond is higher, and increases even more with the illiquidity costs.

Proposition 5

Taking into account illiquidity costs, the country will issue a CAT bond in the long run if and only if :

$$r_x < \min \left(\frac{\pi_n}{q - \beta \pi_d G_d^{-\alpha} + \epsilon_{bd} b_d}, \frac{G_n^\alpha}{\beta} \right) - \frac{1}{q} = r_{fl}^{**} \quad (1.41)$$

Proof : see Appendix 3

Recall that r_x^{**} is the long-term upper bound of Borensztein et al. (2017). r_{fl}^{**} is the new long-term bound emanating from our model. We have $r_x^{**} \leq r_{fl}^{**}$, in other words, the upper bound is higher when we take into account the illiquidity costs associated with indebtedness. This increases the prospects of issuing CAT bonds in the long run.

1.4 Empirical results

This section applies the theoretical results to the Mexican and Quebec data by calibrating a CAT bond for earthquakes in Quebec. We estimate the price that could be observed in the market if Quebec decides to issue a CAT bond. This will give us an idea of the excess return observed on the market. This excess return observed in the market will be compared to the excess return derived from the theoretical model developed in the previous section. Indeed, the excess return $r_x = \text{CAT bond spread} - \text{expected annual loss (EL)}$. The expected loss of the CAT bond is defined as : $EL = \frac{E[L]}{P}$, L is the loss and P is the principal of the CAT bond.

To estimate the excess return on the Quebec CAT bond, we must estimate the expected annual loss, the occurrence of the natural disaster, the principal P and the spread of the CAT bond. Therefore, it is necessary to calibrate a CAT-bond for Quebec.

1.4.1 Method of estimating CAT bond price for Quebec

In this part, we estimate the price that could be observed in the market if Quebec decides to issue a CAT bond.

To determine the price of the CAT bond, we will take the following steps : (1) model the aggregated loss, (2) describe the structure of the CAT bond, and finally, (3) value the CAT bond.

Aggregate loss modeling and triggering process

We assume that the loss process follows a compound Poisson distribution. This method has also been adopted by Baryshnikov et al. (2001), Kukla and Burnecki (2003), Härdle and Cabrera (2010) and Ma and Ma (2013), among others. Thus, the aggregate loss at date t is expressed as follows :

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} x_i \tag{1.42}$$

where N_t is the frequency of loss and follows a Poisson process with an intensity of λ_t , $t \in [0, T]$. The variables $x_{i(i \geq 1)}$ designate the severity of the losses. They are independent and identically distributed. N_t and x_i are also assumed to be independent.

The CAT bond is an index-linked bond. We assume that it is triggered when the aggregate loss exceeds a certain threshold. In other words, it triggers at a point in time $\tau = \inf(t, L_t > D)$, where D is the trigger threshold.

Structure of the CAT bond

There are several payment structures for CAT bonds. For our purposes, we opt for the following configuration. We consider a bond that in the event of a catastrophe only redeems the coupons. The principal will be forfeited in the event of a catastrophe, i.e. immediately when $\tau \leq T$ and $L_\tau > D$, i.e. if $\tau = \inf(t, L_t > D)$. The structure of the payments is given by :

$$CB_{(\tau)} = \begin{cases} P + C & \text{if } L_\tau \leq D \\ C & \text{if } L_\tau > D \end{cases} \quad (1.43)$$

where D is the threshold value. $CB_{(\tau)}$ is the total receivables at time τ .

CAT bond price

In a market without arbitrage, the price of the CAT bond is equal to the present value of its payoff under risk-neutral probability. Let $r(t)$ be the interest rate at date t . Following Ma and Ma (2013) and Cox and Pedersen (2000), we assume that the characteristics of the aggregate loss distribution do not change when we move from physical probability to risk-neutral probability². Thus, the price of the CAT bond whose structure was previously defined is given by :

$$\begin{aligned} Vcb_t &= E^Q \left[CB_{(T)} \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) \mid F_t \right] \\ &= \exp(-R(t, T)) E^P \left[CB_{(T)} \mid F_t \right] \\ &= \exp(-R(t, T)) [(P + C)Pr(L_T \leq D) + C.Pr(L_T > D)] \\ &= \exp(-R(t, T)) [(P + C)Pr(L_T \leq D) + C.(1 - Pr(L_T \leq D))] \\ &= \exp(-R(t, T)) [(C + P.Pr(L_T \leq D))] \\ &= \exp(-R(t, T)) \left[C + P \sum_{n=0}^{+\infty} (\exp(-\lambda_t(T-t)T) \frac{(\lambda_t(T-t))^n}{fact(n)}) F^n(D) \right] \end{aligned} \quad (1.44)$$

where $fact(n)$ is the factorial of n . $F^n(D) = Pr(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq D)$ is the n th convolution

2. For more details, see Cox and Pedersen (2000).

of F .

To determine the price of the bond, the problem resides in the calculation of the F^n convolution because its distribution is not known. We will therefore proceed by numerical simulations to determine the price of the bond.

1.4.2 Data and simulation of CAT bond price

Data

The data required for model calibration are from "Earthquakes Canada"³. They are mainly seismic data from Eastern Canada (Figure 1), including the history of earthquakes, their magnitude and depth from 1663 to 2005 in Canada. The data that we have selected are for earthquakes greater than 4.5 MW⁴ that occurred in the seismic zones of Eastern Canada during the reference period.

The loss amounts associated with these historical claims are estimates of economic losses made by Earthquakes Canada (ER2-Earthquake)⁵. These economic losses relate only to infrastructure, mainly buildings. This underestimates the total losses resulting from an earthquake.

Loss modeling

We estimate the precise loss distribution corresponding to the loss data by first comparing the forms of the theoretical mean excess function ($e(x)$) with the empirical one ($e_n(x)$) :

$$e(x) = E[X - x | X > x] = \frac{\int_x^{+\infty} 1 - F(u) du}{1 - F(x)} \text{ and } e_n(x) = \frac{\sum_{x_i > x} x_i}{x_i > x} - x \quad (1.45)$$

Figure 2 represents the mean excess function versus loss function. The upward slope in the graph shows that the loss distribution has large tails. This indicates that the loss distribution can be modeled by Log-normal and Pareto distributions. However, since the excess function is not strictly increasing, we are led to test other distributions such as Gamma and Weibull. In sum, we retain as candidates the Log-normal, Pareto, Gamma and Weibull distributions.

We use the selected distributions to estimate the parameters of the distribution of the losses by maximum likelihood. The results of parameter estimation are presented in Table 1.1. To check the quality of the fit, we apply the Kolmogorov-Smirnov statistical test, the Von-Cramer test and the Anderson-Darling statistical test. We also use Akaike's Information Criterion and the Bayesian Information Criterion to inform the selection of the correct models (tables 1.2 and 1.1). The results of the goodness of fit tests show that the Log-normal distribution is better from the perspective of all the goodness-of-fit statistics. We will therefore choose it as our main distribution for pricing the CAT bond.

3. see <http://www.seismescanada.rncan.gc.ca/index-fr.php>

4. The moment magnitude scale

5. For more details about the methodology, see El Ezz et al. (2019)

TABLE 1.1 – Estimation of parameters for losses

Distribution	Log-normal	Pareto	Weibul	Gamma
parameters	$\mu = 2.671138$	$\alpha = 0.6190575$	$\alpha = 0.5117097$	$\alpha = 224.3259727$
	$\sigma = 2.041049$	$\beta = 5.7835205$	$\beta = 40.6052529$	$\beta = 0.3764378$

TABLE 1.2 – Goodness-of-fit statistics

Distribution	Log-normal	Pareto	Weibul	Gamma
Kolmogorov-Smirnov statistic	0.13004994	0.1578717	0.1738405	0.13952454
Cramer-von Mises statistic	0.08364848	0.1027739	0.1847869	0.08689284
Anderson-Darling statistic	0.61321436	0.7172144	1.1123274	0.64253949

TABLE 1.3 – Goodness-of-fit criteria

Distribution	Pareto	Gamma	Weibul	Log-normal
Akaike’s Information Criterion	265.9010	270.6993	266.9573	263.3912
Bayesian Information Criterion	268.4927	273.2910	269.5490	265.9829

Frequency modelling

In this section, we choose a Poisson distribution for the earthquake arrival process N_t . Indeed, the Poisson process has been widely used in many previous works to describe the frequency of catastrophic events (Cummins and Geman (1995), 1995; Kukla and Burnecki (2003); Härdle and Cabrera (2010); Ma and Ma (2013); etc.). Thus, we assume that the frequency of earthquakes follows a homogeneous Poisson process of intensity λ . The estimation results based on the frequency data give $\lambda = 0.09322$.

It should be noted that out of the 33 disasters, there were 5 major disasters with a magnitude greater than 6 MW. The probability of suffering a major disaster is therefore $\pi = 0.09322 * (5/33) = 1\%$.

Simulation of the CAT bond price

We assume that maturity T ranges from 0 to 5 years and threshold D ranges from \$100 million to \$200 million. The nominal value $P = \$180$ million for three years at time $t = 0$. This value gives about 30 billion over 500 years. This corresponds to the capacity of the current industry. The yield of the 1-year Treasury bond as of January 2020 is equal to 1.65%. Thus, the annual continuous discount rate $r = \log(1.0165) = 1.64\%$. The 1-year corporate bond rate in Canada is about 2% (Bloomberg). The spread over the risk-free rate is therefore equal to $2\% - 1.65\% = 0.35\%$, i.e. 35 basis points (bp). According to Helfenstein and Holzheu (2006), the spread of a corporate bond is about 2%-3% lower than the spread of a comparable catastrophe bond. This corresponds to a spread that varies between 2.35% ($=2\% + 35\text{bp}$) and 3.35% ($=3\% +$

35bp). We therefore use the CAT bond spread of 285 bp on average by taking the average of the two spreads. The coupon rate is therefore $t_c = 1.65\% + 285\text{bp} = 4.5\%$. This gives a quarterly coupon $C = (4.5\% \times \$180 \text{ million})/4 = \2.03 million .

The expected annual loss for Quebec is $EL = \pi * \log(\mu + \sigma^2/2)/P = 0,64\%$.

Finally, we use Monte Carlo simulations to evaluate the prices of CAT bonds with quarterly coupons using equation (1.44) given above. Table 1.4 shows the prices of CAT bonds as a function of the threshold and the time to maturity. In line with the literature, it can be seen that CAT bond prices increase as the threshold level rises and decreases with maturity.

TABLE 1.4 – Value of CAT bonds with principal of US\$180 million as a function of time to the maturity T (years) and threshold level D (in \$ millions)

Time to maturity(T)	Threshold(D)				
	100	125	150	175	200
0.5	179.35	179.53	179.63	179.76	179.83
1	176.03	176.54	176.88	177.21	177.41
1.5	172.76	173.48	174.08	174.52	174.82
2	170.20	170.95	171.72	172.22	172.74
2.5	168.34	169.42	169.99	170.50	170.90
3	165.77	166.80	167.78	168.44	169.04
3.5	161.53	163.02	164.47	165.39	166.08
4	159.84	161.10	162.40	163.36	164.03
4.5	157.18	159.02	160.29	161.21	161.94
5	154.92	156.67	158.03	159.19	160.16

1.4.3 Model simulation

In this section, we use data specific to Quebec to illustrate our model. We simulate the case of friction costs related to illiquidity associated with debt in the event of a disaster. We then compare the excess return emanating from our model with that of the frictionless model for the case of Quebec.

Computing the excess returns of Cat bonds

In order to determine the excess return relative to the theoretical model, it is important to estimate the parameters of the model. Table 1.5 provides the estimate of the main parameters. The growth rate in Canada in normal times is 2% and drops to minus 2% in the event of a natural disaster. The value of risk aversion, $\alpha = 2$, is standard in the literature (see for instance Borensztein et al. (2017)). Following Borensztein et al. (2017), we assume that the country cannot commit more than 2% (ρ) of its income in repayment to foreign creditors. The probability of an earthquake occurrence is roughly equal to 1% per year and the risk-free interest rate is 1.65% as explained in the previous section. We assume that the consumer discount rate is equal to 1% (because $\beta > q$).

TABLE 1.5 – Values of the parameters

	π_d	π_n	G_n	G_d	q	α	β	ρ	b_t	ϵ_{bd}
Quebec	0.01	0.99	1.02	0.98	1.0165^{-1}	2	1.01^{-1}	0.02	-0.50	0.1
Mexico	0.02	0.98	1.03	0.99	1.0187^{-1}	2	1.01^{-1}	0.02	-0.53	0.1

We assume the cost of illiquidity friction to be a linear function of the debt ratio as follows : $f(-b_t) = -\epsilon_{bd} * (-b_t)$. Hence, from equation (1.4), the cost of debt becomes :

$$q = \epsilon_{bd} * b_t + k \tag{1.46}$$

with $\epsilon_{bd} = 0.1$, the intensity of friction costs. k represents the price of the non-contingent bond in the absence of friction. The average debt ratio in Quebec is $-b_t = 0.50$. We deduct $k = 1.0165^{-1} - 0.1 * (-0.5) = 1.042$.

With respect to the parameters for Mexico, the growth rate in normal times is 3% and drops to minus 1% in the event of a natural disaster. The probability of an earthquake occurrence in Mexico is roughly equal to 2.4% per year (Härdle and Cabrera (2010)). We consider the annual compounded discount interest rate of 1.87% to be equal to LIBOR in January 2020. The average debt ratio in Mexico is $-b_t = 0.53$

Table 1.6 gives the maximum excess returns with both friction and frictionless models for all maturities and for long-term maturities. Not surprisingly, the model with friction has a higher excess return.

TABLE 1.6 – Maximum values of the excess returns of CAT bonds of the models with friction and without friction for all maturities and for long-term maturities

Models		frictionless	with friction
Quebec	All maturities	0.08%	5.64%
Quebec	Long-term maturities	0.06%	3.43%
Mexico	All maturities	0.19%	6.10%
Mexico	Long-term maturities	0.07%	5.28%

Is it optimal to issue a CAT bond ?

The CAT bond pricing gave us an idea of the spreads that could be observed in the market if Quebec were to decide to issue a CAT bond to cover its earthquake risk. Indeed, it appears from the calibration that the CAT bond spread in Quebec varies between 2.35% and 3.35% and the expected annual loss is 0.64%. So the maximum excess return for Quebec is between 1.35% ($= 2.35\% - 0.64\%$) and 2.35% ($= 3.35\% - 0.64\%$). Compared with the values given in Table 1.6, we can see that the minimum excess return observed in the market (1.71%) is higher than the upper bound of what is obtained with the frictionless model for all maturities. In view of this result, it does not seem optimal to issue CAT bonds in Quebec. Conversely, using the model with frictions, it appears that the excess return on the market is lower than the upper bound emanating from the model. In that case, it is optimal to issue CAT bonds. All in all, taking into account friction costs, in particular the illiquidity costs associated with debt, it appears optimal for Quebec to issue a CAT bond. As shown in Figure 3, the excess return bound r_{x*1} curve grows as a function of debt friction costs embodied in ϵ_{bd} . This means that the likelihood of CAT bond issuance increases with the debt friction costs.

We come to the same conclusion for the Mexican CAT-bond. The CAT bond issued by the Mexican government has an expected annual loss of 0.96 percent and a spread over LIBOR of 235 basis points (Hardle and Cabrera, 2010). This implies an excess return of 1.39% ($= 2.35\% - 0.96\%$). thus, this excess return observed in the market is higher than the upper bound of what is obtained with the frictionless model and is lower than the upper bound emanating from the friction model in Table 1.6.

Furthermore, the decision to issue the CAT bond will also depend on the friction costs associated with CAT bonds. These frictions act in the opposite direction by lowering the upper bound of excess returns. This has the effect of discouraging the issuance of CAT bonds. Figure 3 illustrates this observation well. We can see that the excess return curve decreases with the friction costs associated with CAT bonds. Ultimately, a trade-off between the two types of frictions is necessary in the choice of the hedge financing method. Proposition 2 provides elements that may better inform this decision.

1.5 Conclusion

This work has contributed to the existing literature in two respects. First, we show under what conditions it may be advantageous for a government to issue a catastrophe bond instead of a non-contingent bond. Taking into account friction costs, in particular illiquidity premiums associated with debt, reveals the higher likelihood of issuing CAT bonds that results from a lower gap between the model-generated yield spreads and market-observed excess returns. Second, the calibration provided several relevant results on the price of a CAT bond to cover earthquakes in Quebec. It appears that it may be advantageous for Mexico and the Quebec government to issue a CAT bond to shield against potential earthquakes losses. This could make it possible to reduce the debt ratio of the province and thus lower financing costs.

Nevertheless, it should be noted that the effect of friction costs associated with debt is countered by the friction costs associated with the CAT bond. The decision to issue a CAT bond will therefore depend on the relative magnitude of the two types of frictions. Our model makes it possible to establish the optimal level of intensity favourable to the issuance of CAT bonds. In other words, the model confirms the importance of friction costs in explaining excess returns observed in the CAT bonds market.

1.6 Appendix

Appendix 1 : Proposition 3

Proof

Let's assume C_{st+1} is the future consumption related to state s.

The Euler condition relating to the first-order conditions thus gives :

$$(m'_d b_d + m_d) C_t^{-\alpha} = \beta G_d^{-\alpha} C_{dt+1}^{-\alpha} + \lambda_{dt} \quad (1.47)$$

$$(m'_n b_n + m_n) C_t^{-\alpha} = \beta G_n^{-\alpha} C_{nt+1}^{-\alpha} + \lambda_{nt} \quad (1.48)$$

First, we will show that if the long-term issuance condition of the CAT bond is verified, then $(m'_d b_d + m_d) G_d^\alpha < \beta < (m'_n b_n + m_n) G_n^\alpha$

Suppose $\beta \geq (m'_n b_n + m_n) G_n^\alpha > (m'_d b_d + m_d) G_d^\alpha$

So we have :

$$\begin{aligned} (m'_n b_n + m_n) C_t^{-\alpha} &= \beta G_n^{-\alpha} C_{nt+1}^{-\alpha} + \lambda_{nt} \\ (m'_n b_n + m_n) C_t^{-\alpha} &\geq (m'_n b_n + m_n) C_{nt+1}^{-\alpha} + \lambda_{nt}, (\lambda_{nt} \geq 0) \\ (m'_n b_n + m_n) C_t^{-\alpha} &\geq (m'_n b_n + m_n) C_{nt+1}^{-\alpha} \\ &\Rightarrow C_{nt+1} \geq C_t \end{aligned}$$

Likewise :

$$\begin{aligned} (m'_d b_d + m_d) C_t^{-\alpha} &= \beta G_d^{-\alpha} C_{dt+1}^{-\alpha} + \lambda_{dt} \\ &\Rightarrow (m'_d b_d + m_d) C_t^{-\alpha} \geq \beta G_d^{-\alpha} C_{dt+1}^{-\alpha} \\ \Rightarrow (m'_d b_d + m_d) C_t^{-\alpha} &\geq (m'_d b_d + m_d) C_{dt+1}^{-\alpha}, (\text{car } \beta \geq (m'_d b_d + m_d) G_d^\alpha) \\ &\Rightarrow C_{dt+1} \geq C_t \end{aligned}$$

We see that consumption increases over time, which means that the constraints will not have an effect at any given time. Therefore $\lambda_{nt} = \lambda_{dt} = 0$. Thus, Euler's condition becomes :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{(m'_d b_d + m_d) G_d^\alpha} C \left(1 + \frac{b_{dt}}{G_d}\right)^{-\alpha} &= \frac{\beta}{(m'_n b_n + m_n) G_n^\alpha} C \left(1 + \frac{b_{nt}}{G_n}\right)^{-\alpha} \\ \Rightarrow \frac{C \left(1 + \frac{b_{dt}}{G_d}\right)^\alpha}{C \left(1 + \frac{b_{nt}}{G_n}\right)^\alpha} &= \frac{G_n}{G_d} \left(\frac{(m'_n b_n + m_n)}{(m'_d b_d + m_d)} \right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C(1 + \frac{b_{dt}}{G_d})^\alpha}{C(1 + \frac{b_{nt}}{G_n})^\alpha} = \frac{G_n}{G_d} \left(\frac{m'_n b_n + m_n}{m'_d b_d + m_d} \right)^{1/\alpha}$$

Since there is no constraint on consumption, it can be assumed that consumption grows linearly. We have :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C(1 + \frac{b_{dt}}{G_d})^\alpha}{C(1 + \frac{b_{nt}}{G_n})^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_0 + c_1(1 + \frac{b_{dt}}{G_d})}{c_0 + c_1(1 + \frac{b_{nt}}{G_n})} = \frac{G_n}{G_d} \left(\frac{m'_n b_n + m_n}{m'_d b_d + m_d} \right)^{1/\alpha} \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b_{dt}}{b_{nt}} = \left(\frac{m'_n b_n + m_n}{m'_d b_d + m_d} \right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

$$b^c = b_n - b_d$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b_t^c}{b_t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b_{nt}}{b_{dt}} - 1 = \left(\frac{m'_d b_d + m_d}{m'_n b_n + m_n} \right)^{1/\alpha} - 1 \geq 0$$

It can be noted that the value of the CAT bond is positive in the long run. The condition for issuing a CAT bond in the long run is therefore not met. Thus if $\beta \geq (m'_n b_n + m_n)G_n^\alpha > (m'_d b_d + m_d)G_d^\alpha$ then the country will not issue a CAT bond.

Now let's assume that $\beta \leq (m'_d b_d + m_d)G_d^\alpha$

From Euler's condition, it can be seen that consumption is declining in the long term. The minimum criteria for the credit constraint have therefore been satisfied. Thus, $b_{st} \geq \underline{b}_s \Rightarrow b_t^c = (\frac{G_n}{G_d} - 1)b_t$. This result violates the second condition for the long-term issuance of CAT bonds. If the country issues a long-term CAT bond then the condition $(m'_d b_d + m_d)G_d^\alpha < \beta$ is satisfied.

So we've just shown that if the condition for issuing CAT bonds is met, then $(m'_d b_d + m_d)G_d^\alpha < \beta < (m'_n b_n + m_n)G_n^\alpha$. Now let's assume $(m'_d b_d + m_d)G_d^\alpha < \beta < (m'_n b_n + m_n)G_n^\alpha$ and show that, in this case, the country will issue a CAT bond.

Let $c_{min} = (1 - \frac{\eta}{1-\phi})$, the minimum normalized consumption. If the credit constraint is valid, i.e. $\lambda_{dt} > 0$, then we have $b_{dt} = \underline{b}_d \Rightarrow c_{dt+1} = c_{min}$.

Euler's equation becomes :

$$\begin{aligned} (m'_d b_d + m_d)C_t^{-\alpha} &= \beta G_d^{-\alpha} c_{min}^{-\alpha} + \lambda_{dt} \\ &\Rightarrow (m'_d b_d + m_d)C_t^{-\alpha} > \beta G_d^{-\alpha} c_{min}^{-\alpha} \end{aligned}$$

as $\beta > (m'_d b_d + m_d)G_d^\alpha$, we get $c_t < c_{min}$. That is impossible. So, we necessarily have $\lambda_{dt} = 0$. Similarly we can show that $\lambda_{nt} = 0$.

$\lambda_{nt} = \lambda_{dt} = 0$ implies :

$$\frac{\beta G_d^{-\alpha}}{(m'_d b_d + m_d)} C(1 + \frac{b_{dt}}{G_d})^{-\alpha} = \frac{\beta G_n^{-\alpha}}{(m'_n b_n + m_n)} C(1 + \frac{b_{nt}}{G_n})^{-\alpha}$$

As $(m'_n b_n + m_n)G_n^\alpha > (m'_d b_d + m_d)G_d^\alpha$, then $C(1 + \frac{b_{dt}}{G_d}) > C(1 + \frac{b_{nt}}{G_n})$, $\Rightarrow \frac{b_{dt}}{G_d} > \frac{b_{nt}}{G_n}$.

This implies $b_t^c < (\frac{G_n}{G_d} - 1)b_t$. The second condition for issuing CAT bonds in the long term is therefore satisfied. Furthermore, we have $b^c = b_n - b_d < (1 - \frac{G_d}{G_n})b_n$. So, b^c is the same sign as b_n . Consumption decreases as does b_{nt} in a way that the probability that b_{nt} will be negative in the future is non-zero. Therefore, the same is true for b^c . Thus, the two conditions for issuing a CAT bond in the long term are met. It can be concluded that Proposition 3 is necessary and sufficient to issue the CAT bond.

Based on the above, it remains for us to explicitly express Proposition 3 in terms of excess return.

From (8),(9),(12) and (13), we have : $m_n = \frac{q}{1+qrx}$ et $m_d = \frac{q}{\pi_d} \left(1 - \frac{\pi_n}{1+qrx}\right)$ then

$$\begin{aligned} & (m'_n b_n + m_n)G_n^\alpha > \beta \\ & \Rightarrow m_n > \beta G_n^{-\alpha} - m'_n b_n \\ & \Rightarrow \frac{q}{1+qrx} > \beta G_n^{-\alpha} - m'_n b_n \\ & \Rightarrow r_x < \frac{G_n^\alpha}{\beta - m'_n b_n G_n^\alpha} - \frac{1}{q} \end{aligned}$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} & (m'_d b_d + m_d)G_d^\alpha < \beta \Rightarrow m_d < \beta G_d^{-\alpha} - m'_d b_d \\ & \Rightarrow \frac{q}{\pi_d} \left(1 - \frac{\pi_n}{1+qrx}\right) < \beta G_d^{-\alpha} - m'_d b_d \\ & \Rightarrow r_x < \frac{\pi_n}{q - \beta \pi_d G_d^{-\alpha} + \pi_d m'_d b_d} - \frac{1}{q} \end{aligned}$$

In sum, we have :

$$r_x < \min \left(\frac{\pi_n}{q - \beta\pi_d G_d^{-\alpha} + \pi_d m'_d b_d}, \frac{G_n^\alpha}{\beta - m'_n b_n G_n^\alpha} \right) - \frac{1}{q} \quad (1.49)$$

$$\Rightarrow r_x < r_{x1}^{**} = \min \left(\frac{\pi_n}{q - \beta\pi_d G_d^{-\alpha} + \epsilon_{bd} b_d}, \frac{G_n^\alpha}{\beta - \frac{\epsilon_{cb}}{\pi_n} b_n G_n^\alpha} \right) - \frac{1}{q} \quad (1.50)$$

Appendix 2 : Proposition 4

Proof

The first-order condition of equilibrium is written :

$$(m'_d b_d + m_d) C(x)^{-\alpha} = \beta G_n^{-\alpha} C \left(1 + \frac{b_d}{G_d} \right)^{-\alpha} + \lambda_d \quad (1.51)$$

$$(m'_n b_n + m_n) C(x)^{-\alpha} = \beta G_d^{-\alpha} C \left(1 + \frac{b_n}{G_n} \right)^{-\alpha} + \lambda_n \quad (1.52)$$

We have :

$$\begin{aligned} \frac{m_n G_n^\alpha}{m_d G_d^\alpha} &= \frac{\beta C \left(1 + \frac{b_n}{G_n} \right)^{-\alpha} + \lambda_n G_n^\alpha - (m'_n b_n) C(x)^{-\alpha}}{\beta C \left(1 + \frac{b_d}{G_d} \right)^{-\alpha} + \lambda_d G_d^\alpha - (m'_d b_d) C(x)^{-\alpha}} \\ &= \frac{\beta C \left(1 + \frac{b_n}{G_n} \right)^{-\alpha} + \lambda_n G_n^\alpha}{\beta C \left(1 + \frac{b_d}{G_d} \right)^{-\alpha} - \left(\frac{q'_{bd}}{\pi_d} \right) b_d C(x)^{-\alpha}} \end{aligned}$$

Since we do not take into account the friction costs related to the CAT bond, $m'_n = \frac{\partial m_n}{\partial b_n} = 0$.

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{m_d G_d^\alpha}{m_n G_n^\alpha} &= \frac{\beta C \left(1 + \frac{b_d}{G_d} \right)^{-\alpha} - \left(\frac{q'_{bd}}{\pi_d} \right) b_d C(x)^{-\alpha}}{\beta C \left(1 + \frac{b_n}{G_n} \right)^{-\alpha} + \lambda_n G_n^{-\alpha}} \\ &< \frac{\beta C \left(1 + \frac{b_d}{G_d} \right)^{-\alpha} - \left(\frac{q'_{bd}}{\pi_d} \right) b_d C(x)^{-\alpha}}{\beta C \left(1 + \frac{b_n}{G_n} \right)^{-\alpha}} \\ &< \frac{C \left(1 + \frac{b_d}{G_d} \right)^{-\alpha}}{C \left(1 + \frac{b_n}{G_n} \right)^{-\alpha}} - b_d C(x)^{-\alpha} \frac{q'_{bd}}{\pi_d \beta} C \left(1 + \frac{b_n}{G_n} \right)^\alpha \\ &< 1 - \frac{q'_{bd} b_d C(x)^{-\alpha}}{\pi_d \beta C(x)^{-\alpha}} \end{aligned}$$

According to Borensztein et al. (2017), the expression of returns as a function of the stochastic discount factor is as follows :

$$rx = \frac{\pi_d \left(\frac{m_d}{m_n} - 1 \right)}{q}$$

We can rewrite that as :

$$rx < \frac{\pi_d \left(\frac{G_n^\alpha \left(1 - \frac{q'_d b_d C(x)^{-\alpha}}{\pi_d \beta C(x')^{-\alpha}} \right)}{G_d^\alpha} - 1 \right)}{q}$$

Hence

$$rx < \frac{\pi_d}{q} \left(\frac{G_n^\alpha}{G_d^\alpha} - 1 \right) - \frac{\epsilon_{bd} G_n^\alpha b_d C(x)^\alpha}{q G_d^\alpha \beta C(x')^\alpha}$$

Appendix 3 : Proposition 5

Proof

The demonstration of proposition 2 remains valid here. The condition for issuing the CAT bond in the long run should then be expressed in terms of the excess return.

On the one hand, we have $m_n = \frac{q}{1+qrx}$ and $m_d = \frac{q}{\pi_d} \left(1 - \frac{\pi_n}{1+qrx} \right)$, and so

$$\begin{aligned} & (m'_n b_n + m_n) G_n^\alpha > \beta \\ \Rightarrow & m_n > \beta G_n^{-\alpha} - m'_n b_n \\ \Rightarrow & \frac{q}{1+qrx} > \beta G_n^{-\alpha} - m'_n b_n \\ \Rightarrow & r_x < \frac{G_n^\alpha}{\beta - m'_n b_n G_n^\alpha} - \frac{1}{q} \\ \Rightarrow & r_x \leq \frac{G_n^\alpha}{\beta} - \frac{1}{q} \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} & (m'_d b_d + m_d) G_d^\alpha < \beta \Rightarrow m_d < \beta G_d^{-\alpha} - m'_d b_d \\ \Rightarrow & \frac{q}{\pi_d} \left(1 - \frac{\pi_n}{1+qrx} \right) < \beta G_d^{-\alpha} - m'_d b_d \\ \Rightarrow & r_x < \frac{\pi_n}{q - \beta \pi_d G_d^{-\alpha} + \pi_d m'_d b_d} - \frac{1}{q} \end{aligned}$$

Thus

$$r_x < \min \left(\frac{\pi_n}{q - \beta \pi_d G_d^{-\alpha} + \pi_d m'_d b_d}, \frac{G_n^\alpha}{\beta} \right) - \frac{1}{q}$$

We have $b_d < 0$ and $m'_d = \frac{q'_{bd}}{\pi_d} > 0 \Rightarrow \frac{\pi_n}{q - \beta\pi_d G_d^{-\alpha} + \pi_d m'_d b_d} > \frac{\pi_n}{q - \beta\pi_d G_d^{-\alpha}}$

Therefore : $r_x < r_x^{**} = \min\left(\frac{\pi_n}{q - \beta\pi_d G_d^{-\alpha}}, \frac{G_n^\alpha}{\beta}\right) - \frac{1}{q} < r_{x2}^{**} = \min\left(\frac{\pi_n}{q - \beta\pi_d G_d^{-\alpha} + \pi_d m'_d b_d}, \frac{G_n^\alpha}{\beta}\right) - \frac{1}{q}$

FIGURE 1.1 – Eastern Canada Seismic Zone (CBI and Worldwide AIR, 2013).

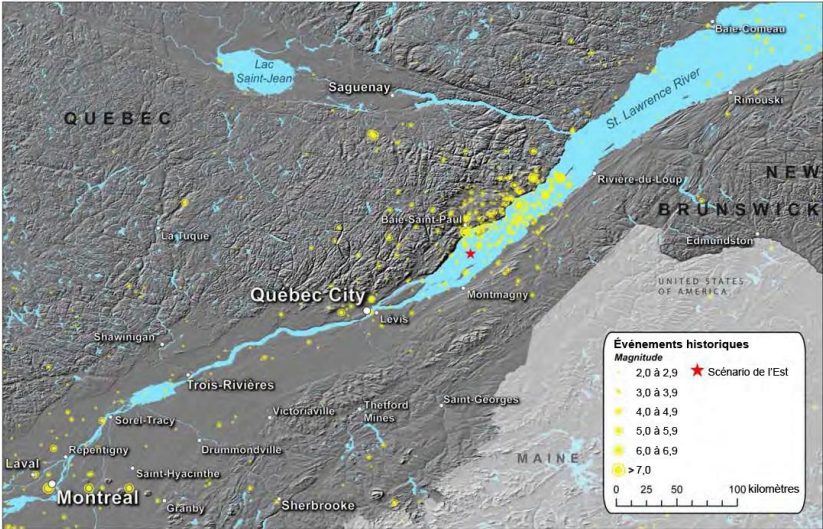


FIGURE 1.2 – Mean excess loss

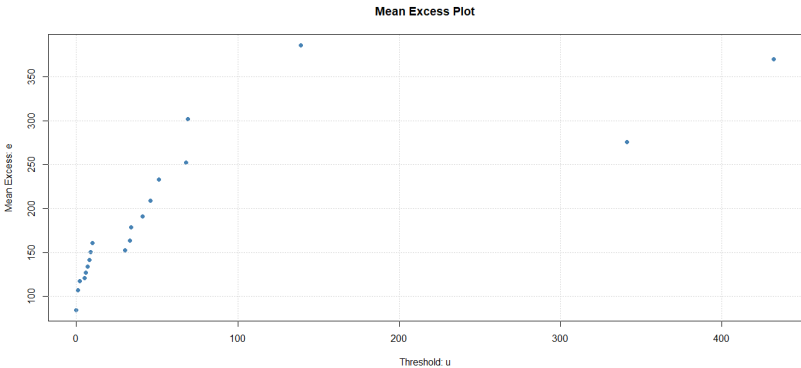
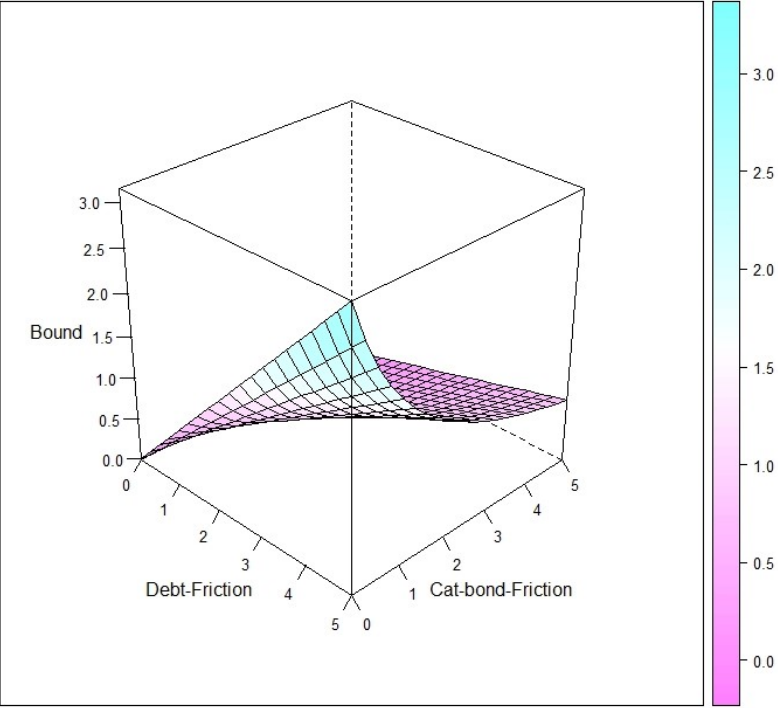


FIGURE 1.3 – Upper bound of excess returns as a function of friction costs associated with indebtedness (ϵ_{bd}) and CAT bond (ϵ_{bc})



Chapitre 2

Écart de taux des obligations catastrophes, liquidité et taux d'intérêt.

Résumé

Ce travail analyse les déterminants des écarts de taux des obligations catastrophes et la liquidité en prenant en compte l'impact du taux d'intérêt. L'analyse des écarts de taux des obligations catastrophes à la lumière des données plus récentes a montré l'impact prépondérant du taux d'intérêt sur les écarts de taux des obligations catastrophes. En période normale, une baisse du taux d'intérêt est associée à une baisse des écarts de taux. Ce qui est contraire en période de stress. La manipulation du Libor n'a pas eu d'impact significatif sur l'écart de taux et la liquidité des obligations catastrophes. En particulier, depuis la crise de 2007-2008, le taux d'intérêt est devenu la variable la plus significative dans l'explication des écarts de taux après la perte espérée. La baisse des taux d'intérêt a pour conséquence une baisse des écarts de taux permettant ainsi d'augmenter la liquidité des obligations catastrophes. Cela étant, une analyse des déterminants des écarts de taux des obligations catastrophes est effectuée à travers des indicateurs de liquidité, tels que la volatilité des écarts de taux des obligations catastrophes et la dispersion par rapport au marché secondaire. Parmi les déterminants de la liquidité, la perte espérée, le temps restant jusqu'à maturité, le rendement de la réassurance et le Libor se révèlent comme les plus importants. En particulier, si le taux d'intérêt apparaît comme une variable clé des écarts de taux du marché secondaire, sa relation avec les deux indicateurs de liquidité apparaît seulement évidente en période de stress.

Mots-clés : obligation catastrophe, écart de taux, liquidité, taux d'intérêt.

Codes JEL :G22

Abstract

This work analyzes the determinants of CAT bond spreads and liquidity by taking into account the impact of interest rate. The analysis of CAT bond spreads in light of more recent data showed the preponderant impact of the interest rate on CAT bond spreads. In normal times, a decrease in interest rates is associated with a decrease in spreads. This is the opposite in times of stress. Libor manipulation has not had a significant impact on the spread and liquidity of CAT bonds. Since the crisis of 2007-2008, the interest rate has become the most significant variable in explaining spreads after the expected loss. Lower interest rates result in lower spreads, thus boosting the liquidity of CAT bonds. This being the case, an analysis of the determinants of CAT bonds is carried out using liquidity proxies, such as the volatility of CAT bond spreads and the dispersion in relation to the secondary market. Among the determinants of liquidity, expected loss, time to maturity, reinsurance yield and Libor emerge as the most important. In particular, while the interest rate appears to be a key variable in secondary market spreads, its relationship with the two liquidity proxies is only evident during periods of stress.

Keywords : CAT bond, écart de taux, liquidity, interest rate.

JEL-codes : G22

2.1 Introduction

Les obligations catastrophes sont des instruments financiers à haut rendement par rapport aux obligations d'entreprises ayant une notation similaire. En 2005, l'écart de taux moyen des obligations catastrophes était environ deux fois plus important que l'écart de taux d'une obligation d'entreprise (Dieckmann (2009) ; Zhao and Yu (2019)). Parmi les explications possibles qui ont été avancées dans la littérature, on peut citer la liquidité relativement faible et la complexité des obligations catastrophes, ainsi qu'une majoration pour la nature du risque (Helfenstein and Holzheu (2006) ; Braun (2016)).

La théorie stipule que l'écart de taux élevé des obligations catastrophes est dû à leur prime de liquidité, car les obligations catastrophes ne sont pas cotées en bourse et se transigent sur des marchés de gré à gré (OTC) (Dieckmann, 2009). Cependant, peu de recherches empiriques sont parvenues à prouver l'existence d'une prime de liquidité dans les écarts de taux des obligations catastrophes. Braun (2016), Gürtler et al. (2016) et Dieckmann (2019) n'ont trouvé aucune preuve de la relation entre la liquidité et les écarts de taux des obligations catastrophes. Cependant, une des rares études à prouver que la liquidité est effectivement prise en compte dans les écarts de taux des obligations catastrophes est celle effectuée par Zhao et Yu (2019). Ces auteurs abondent dans le même sens que la théorie et trouvent que la valeur moyenne de la prime de liquidité représente 9,42 % de l'écart de taux des obligations catastrophes sur le marché secondaire.

Si l'illiquidité a été enfin prouvée de façon empirique, force est de constater que les études précédentes ne permettent pas de dégager un consensus concernant le proxy à utiliser pour capter la liquidité. Ce qui pose la question des déterminants de la liquidité sur le marché des obligations catastrophes. Aussi, on peut constater qu'en dépit de leur illiquidité, les obligations catastrophes ont connu un essor considérable ces dernières années malgré un risque important de catastrophes naturelles. D'après le site Artémis, la capacité du marché des obligations catastrophes a plus que doublé en 10 ans, passant de 15 milliards en 2007 à 37,2 milliards en 2018. Cet essor qui intervient dans un contexte de taux d'intérêt durablement bas laisse entrevoir un possible lien entre les deux événements. Les variables de stress et en particulier, les taux d'intérêt pourraient être des facteurs déterminants de la liquidité du marché des obligations catastrophes. À notre connaissance, il n'existe pas d'étude sur le lien entre la liquidité des obligations catastrophes et le taux d'intérêt ainsi que l'impact du taux d'intérêt sur l'écart de taux. En effet, dans la littérature sur la politique monétaire et les prix des actifs, il est largement admis que la politique monétaire a un impact significatif sur les prix des actifs (Lobo (2000) ; Hotchkiss and Jostova (2017)). Les keynésiens soutiennent que la baisse des taux d'intérêt découlant des politiques monétaires expansionnistes rendrait les obligations moins attrayantes que les actions, ce qui entraîne une hausse du prix des actions (Mishkin (1996) ; Zare and Azali (2015)). Le même phénomène pourrait également rendre les obligations classiques moins attrayants que les obligations catastrophes. Une telle étude

pourrait être d'autant plus intéressante dans un contexte de taux d'intérêt durablement bas observés ces dernières années, où les investisseurs sont enclins à investir dans des actifs à haut rendement tels que les obligations catastrophes. Les obligations catastrophes pourraient donc constituer une belle alternative d'investissement et de diversification de portefeuille pour plusieurs investisseurs. En effet, du point de vue des investisseurs, les obligations catastrophes peuvent non seulement être utilisées pour la diversification des portefeuilles, mais également sont d'une grande profitabilité, car leurs rendements sont élevés.

Ainsi, l'objectif assigné à ce travail est de déterminer l'impact du taux d'intérêt sur l'écart de taux et la liquidité des obligations catastrophes. Plus spécifiquement, nous abordons les questions de recherche suivantes :

- Quel est l'impact du taux d'intérêt sur l'écart de taux des obligations catastrophes ?
- Quels sont les déterminants de la liquidité du marché des obligations catastrophes ?
- Le taux d'intérêt a-t-il un impact sur cette liquidité ?

Pour répondre aux questions posées, nous optons pour une analyse de plusieurs modèles de régression groupée et de modèles à effet fixe sur la base des données de panel. À ce titre, après avoir testé plusieurs indicateurs de liquidité émanant de la littérature (Hong and Warga (2000) ; Houweling et al. (2005) ; Braun (2016) ; Gürtler et al. (2016) ; Dieckmann (2019) ; Zhao and Yu (2019)), nous retiendrons comme indicateurs de liquidité la volatilité et la dispersion des écarts de taux par rapport au marché primaire. En effet, l'étude empirique effectuée par Zhao et Yu (2019) a montré que le délai avant l'échéance, la volatilité des rendements et la dispersion des rendements sur le marché primaire sont les trois indicateurs de liquidité les plus efficaces sur le marché des obligations catastrophes.

Le Libor 3 mois US et le T-bill 3 mois US seront considérés comme les références des taux d'intérêt. Les variables spécifiques aux obligations catastrophes interviendront comme variables explicatives dans les différents modèles. Nous pouvons citer entre autres la perte espérée (Papachristou (2011) ; Galeotti et al. (2013) ; Zhao et Yu (2019) etc.), la taille à l'émission, la maturité, le temps restant jusqu'à maturité, le déclencheur, le type de péril, le territoire couvert, etc. Enfin, nous contrôlons les modèles avec les variables macro-économiques telles que le rendement du marché boursier (SP 500) (Gürtler et al. (2016) ; Zhao et Yu (2019)), les écarts de taux des obligations d'entreprises (BBspread), le sponsor et la variation de l'indice Guy Carpenter ROL (Cummins and Trainar (2009) ; Finken and Laux (2009) ; Gürtler et al. (2016)) pour mesurer l'impact du cycle de réassurance. Des tests de robustesse seront effectués sur des échantillons différents.

L'ensemble de données retenues se compose de 629 obligations catastrophes concernant à la fois les marchés primaire et secondaire des obligations catastrophes sur la période allant de 2002 à 2018. Cette période plus longue est intéressante puisqu'elle renferme une crise financière majeure et permet de capter plusieurs périodes de stress. Les données proviennent

essentiellement de Lane Financial LLC¹ et de Artémis Deal Directory².

Ainsi, nous contribuons à la littérature en revisitant les déterminants des écarts de taux des obligations catastrophes à la lumière des données plus récentes et exhaustives sur le marché primaire et secondaire. Ensuite, nous mesurons l'impact spécifique du taux d'intérêt sur les écarts de taux et la liquidité des obligations catastrophes. Enfin, nous mettons en exergues les déterminants de la liquidité sur le marché des obligations catastrophes.

Les résultats des analyses montrent l'impact prépondérant du taux d'intérêt sur l'écart de taux des obligations catastrophes. Depuis la crise des subprimes, le taux d'intérêt est apparu comme la variable la plus influente après la perte espérée. En période normale, une baisse du taux d'intérêt est associée à une baisse des écarts de taux. Le phénomène contraire est observé en période de stress où le taux d'intérêt et l'écart de taux varient en sens inverse. Ceci pourrait être lié à l'aspect systémique de la crise entraînant une baisse de la liquidité des obligations catastrophes. En particulier, depuis la crise de 2007-2009, la baisse du taux d'intérêt a pour conséquence une baisse des écarts de taux permettant ainsi d'augmenter la liquidité des obligations catastrophes. La baisse du taux d'intérêt encouragerait les investissements dans les obligations catastrophes.

Parmi les déterminants des deux indicateurs de liquidité, la perte espérée, le temps restant jusqu'à maturité, l'indice de réassurance et le Libor se révèlent comme les plus importants tandis qu'aucune prime de liquidité n'a été observée pour ce qui concerne le montant à l'émission et le sponsor. Si le Libor apparaît comme une variable clé des écarts de taux du marché secondaire, sa relation avec les deux indicateurs de liquidité apparaît seulement évidente en période de stress.

Il importe de noter qu'en utilisant le T-Bill comme taux d'intérêt, nous aboutissons aux mêmes conclusions observées pour le Libor. Ce qui pourrait signifier que la manipulation du Libor n'a pas eu d'impact significatif sur l'écart de taux et la liquidité des obligations catastrophes. Aussi, il ressort de l'analyse que les obligations catastrophes se comportent comme des zéros beta depuis la crise des subprimes. Les obligations catastrophes sont donc devenues plus propices à la diversification ces dernières années. Ceci encouragerait aussi leur liquidité.

Le reste du travail est structuré comme suit. La section 2.2 présente les hypothèses du modèle. La section 2.3 est consacrée à la méthodologie. La section 2.4 présente les variables et statistiques descriptives. Dans la section 2.5, nous analysons et discutons les résultats. La section 2.6 conclut.

1. <http://lanefinancialllc.com/>

2. <https://fred.stlouisfed.org>

2.2 Caractéristiques de l'écart de taux des obligations catastrophes et liquidité

Dans cette partie, nous faisons une description des liens entre certaines caractéristiques des écarts de taux et la liquidité des obligations catastrophes.

2.2.1 La perte espérée

La perte espérée est définie comme la probabilité de perte multipliée par la perte espérée conditionnelle. Des études antérieures (Papachristou (2011); Galeotti et al. (2013); Zhao et Yu (2019) etc.) ont déjà confirmé que la perte espérée est un facteur essentiel de l'écart de taux des obligations catastrophes. La perte espérée apparaît comme la variable la plus importante de l'écart de taux des obligations catastrophes (Galeotti et al. (2013); Braun (2016); Görtler et al. (2016)). Par conséquent, on pourrait s'attendre à une influence importante de la perte espérée sur la liquidité des obligations catastrophes. Les investisseurs exigent un écart de taux plus élevé sur une obligation catastrophe qui a une perte espérée plus élevée. Ce qui implique une liquidité plus faible.

2.2.2 La maturité

Les obligations catastrophes avec une échéance plus courte ont une plus grande liquidité et, par conséquent, des écarts de taux plus faibles. Selon Braun (2016), si l'hypothèse de la préférence pour la liquidité ou de la segmentation du marché se vérifie, l'écart de taux des obligations catastrophes devrait augmenter avec l'échéance du titre. Les obligations d'entreprises à échéance plus courte ont des coûts de transaction plus faibles que les autres obligations (Edwards et al., 2007). Des coûts de transaction plus faibles entraînent une plus grande liquidité et, par conséquent, une baisse des écarts de taux des obligations. Cependant, sur le plan empirique, ni Braun (2016) ni Görtler et al. (2016) n'ont pu identifier une quelconque influence de la durée à l'échéance sur les écarts de taux des obligations catastrophes respectivement sur les marchés primaire et secondaire. Sur le marché primaire, Braun (2016) utilise l'échéance des obligations comme mesure de la liquidité et trouve que la maturité des obligations n'a pas d'influence significative sur les écarts de taux des obligations catastrophes. Dans la même veine, Dieckmann (2019) a également trouvé que la période de maturité des obligations (MAT) n'a pas d'influence significative sur les écarts de taux des obligations catastrophes.

2.2.3 La durée restante avant l'échéance

Les obligations catastrophes dont la durée restante avant l'échéance est courte sont plus liquides avec un écart de taux plus faible. Zhao et Yu (2019) ont montré que les obligations catastrophes avec une durée restante jusqu'à échéance plus courte ont des écarts de taux plus faibles. Ainsi, les obligations catastrophes deviennent plus liquides lorsque le délai restant

jusqu'à l'échéance baisse. En effet, selon la littérature, les obligations d'entreprises proches de l'échéance ont des coûts de transaction plus faibles (Edwards et al. (2007)), ce qui entraîne une plus grande liquidité et une prime obligataire plus faible. Cependant, d'autres auteurs ont rejeté cette hypothèse dont Gürtler et al. (2016) et Dieckmann (2019). Ces derniers ont conclu que la durée restante jusqu'à maturité n'a pas d'impact sur le niveau des écarts de taux des obligations catastrophes.

Notons que l'hypothèse contraire est également soutenue par d'autres études selon lesquelles les obligations s'échangent moins vite à mesure qu'elles vieillissent (Warga (1992); Kamara (1994); Chakravarty and Sarkar (1999); Schultz (1998); Alexander et al. (2000)). Après l'émission, les investisseurs achètent les obligations et souvent avec l'intention de les conserver jusqu'à l'échéance dans leurs portefeuilles. Au fil du temps, les portefeuilles inactifs absorbent une part de plus en plus importante du flottant initial, laissant une plus petite partie disponible pour la négociation. Avec une plus petite partie disponible pour la gestion des stocks, les courtiers exigeront un écart plus élevé et le marché de l'obligation deviendra moins liquide. Par conséquent, à mesure qu'une obligation vieillit, elle devient moins liquide. Néanmoins, selon l'étude récente de Zhao et Yu (2019) sur les marchés des obligations catastrophes, le temps restant jusqu'à maturité apparaît comme la variable de liquidité la plus fiable sur le marché secondaire. Sur la base des analyses précédentes et compte tenu de la place de la perte espérée et le temps restant à maturité sur le marché secondaire, nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 : Parmi les variables spécifiques aux obligations catastrophes, la perte espérée et le temps restant jusqu'à maturité sont les facteurs les plus déterminants de la liquidité des obligations catastrophes.

2.2.4 Le montant à l'émission

Les grandes émissions sont plus liquides. Des études antérieures ont montré que la taille d'une émission d'obligations est un facteur déterminant de la liquidité d'une obligation (Fisher (1959); Crabbe and Turner (1995); Alexander et al. (2000); Hotchkiss and Jostova (2017)). En effet, l'une des explications serait que les obligations de tailles importantes ont un coût d'information plus faible (Edwards et al. (2007); Li et al. (2019)). En outre, les obligations avec de faibles montants émis ont une liquidité moindre, car elles ont tendance à être plus facilement bloquées dans des portefeuilles d'achat et de conservation (Sarig and Warga (1989) et Amihud and Mendelson (1991)). Sur le marché des obligations catastrophes, il n'y a pas d'études spécifiques sur l'impact de la taille à l'émission sur la liquidité des obligations catastrophes. Les études en la matière ont plutôt concerné son impact sur l'écart de taux des obligations catastrophes. Par exemple, Braun (2016) a trouvé que les grandes émissions d'obligations ont un impact faible sur les écarts de taux en utilisant les données du marché primaire des obligations catastrophes tandis que Dieckmann (2019) ne trouve pas de preuves à l'appui.

Sur le marché secondaire des obligations catastrophes, Gürtler et al. (2016) notent qu'un montant émis plus important entraîne des écarts de taux obligataires plus élevés, ce qui est contraire à l'hypothèse de liquidité. Ces résultats contradictoires posent la question à savoir si au préalable le montant à l'émission a un impact sur la liquidité des obligations catastrophes.

2.2.5 Le sponsor

Les obligations catastrophes dont les sponsors sont respectés sont plus liquides. Les sponsors respectés divulguent toujours plus d'informations sur la situation financière et offrent aux investisseurs une meilleure perception du risque de crédit. Ce qui implique un coût de transaction plus faible (Alexander et al. (2000) ; Li et al. (2019)). Par conséquent, les investisseurs exigent des sponsors respectés, des écarts de taux plus bas sur les obligations catastrophes (Zhao et Yu, 2019).

2.2.6 Le déclencheur

Les investisseurs exigent des primes de risque plus élevées pour les obligations catastrophes avec un déclencheur d'indemnisation. Il existe deux principaux types de déclencheurs qui déterminent les réductions de paiements des obligations catastrophes : l'indemnisation et la non-indemnisation. Les déclencheurs d'indemnisation sont basés sur la perte catastrophique réelle subie par l'émetteur. Ce qui expose les investisseurs à un risque d'aléa moral compte tenu des asymétries d'information possibles entre les partenaires de la transaction (Doherty (2000) ; Dubinsky and Laster (2003) ; Lee and Yu (2002) ; Cummins and Weiss (2009)). Les déclencheurs non liés à l'indemnisation peuvent réduire et éliminer l'aléa moral, mais ils peuvent également entraîner un risque de base pour les promoteurs puisqu'il n'y a pas de corrélation parfaite entre les pertes catastrophiques réelles et de référence (Cummins et al. (2004)).

2.2.7 Le rating

Les investisseurs exigent des écarts de taux plus élevés pour les obligations catastrophes avec des notations inférieures. La notation d'une obligation est un indicateur de fiabilité des activités de négociation des obligations et a un effet significatif sur son écart de taux (Bao et al. (2011) ; Braun (2016) ; Gürtler et al. (2016) ; Zhao et Yu (2019)).

2.2.8 L'écart de taux des obligations d'entreprise (BBspread)

Il existe un lien positif entre les écarts de taux des obligations d'entreprises et ceux des obligations catastrophes. Braun (2016) et Gürtler et al. (2016) ont trouvé une relation positive entre les écarts de taux des obligations d'entreprises et les écarts de taux des obligations catastrophes. D'après Zhao et Yu (2019), les investisseurs perçoivent toujours que les obligations

catastrophes et les obligations d'entreprises ayant la même notation présentent un risque similaire. Ces auteurs trouvent que les primes de liquidité des obligations d'entreprises et celles des obligations catastrophes ont augmenté dans la même proportion (123 bps) pendant la période de crise financière de 2007- 2009.

2.2.9 Les taux d'intérêt

Dans la littérature sur la politique monétaire et les prix des actions, il est largement admis que la politique monétaire a un impact significatif sur les prix des actifs. Selon la théorie classique des prix des actifs, le prix d'un actif est égal à la valeur actuelle des revenus attendus de cet actif. Ainsi, pour une entreprise, le prix des actions représente la valeur actualisée de ses flux de trésorerie futurs. Par conséquent, les décisions de politique monétaire, étroitement associées aux variations des différents taux d'intérêt à court terme, devraient affecter les prix des actions en ajustant le taux d'actualisation (Zare and Azali, 2015). La variation du taux d'intérêt peut également affecter les prix des actifs en modifiant les attentes des flux de trésorerie futurs en raison de l'évolution des attentes concernant l'inflation future dans une économie (Lobo, 2000).

Du point de vue keynésien expliqué par Mishkin (1996), la politique monétaire peut influencer les prix des actifs. Par exemple, les keynésiens soutiennent que la baisse des taux d'intérêt découlant des politiques monétaires expansionnistes rend les obligations moins attrayantes que les actions, ce qui entraîne une hausse du prix des actions (Zare and Azali, 2015).

Par ailleurs, l'impact des taux d'intérêt sur la liquidité a été prouvé sur le marché obligataire par Hotchkiss et Jostova (2017) qui ont trouvé que la hausse des taux d'intérêt à long terme diminue les échanges d'obligations à courte échéance, mais augmentent les échanges d'obligations à longue échéance. Sur la base des théories précédentes, nous pouvons noter que dans un contexte de taux d'intérêt bas où les investisseurs sont enclins à investir dans des actifs à haut rendement tels que les obligations catastrophes, la baisse des taux d'intérêt, notamment du Libor pourrait favoriser les investissements dans les obligations catastrophes. Ce qui pourrait entraîner une baisse de l'écart de taux des obligations catastrophes. Le fait stylisé mis en évidence dans le graphique 2.1 semble abonder dans ce sens. Nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2 : Les taux d'intérêt ont un impact significatif sur les écarts de taux des obligations catastrophes et les obligations catastrophes deviennent de plus en plus liquides avec la baisse des taux d'intérêt.

2.2.10 Indice de réassurance

Le marché des obligations catastrophes est vu comme une alternative à la réassurance (Hotchkiss and Jostova (2017) ; Froot (2001) ; Finken and Laux (2009) ; Härdle and Cabrera (2010)).

Un recours actif à la réassurance pourrait réduire l'utilisation des obligations catastrophes et entraîner une hausse des écarts de taux (Braun (2016); Görtler et al. (2016)). Ce qui implique une baisse de la liquidité. En effet, l'assureur, le gouvernement ou le réassureur peuvent faire recours à la réassurance traditionnelle pour couvrir le risque de catastrophes naturelles lorsqu'elle est moins coûteuse comparativement à l'émission des obligations catastrophes.

Hypothèse 3 : La liquidité des obligations catastrophes baisse avec la hausse des rendements sur le marché de la réassurance.

2.2.11 Le rendement des actions

Görtler et al. (2016) ont trouvé des preuves que les obligations catastrophes ne sont pas des titres à zéro beta. Ils mettent en exergue une corrélation significativement négative entre le rendement trimestriel du S&P500 et l'écart de taux de l'obligation catastrophe. Les conditions des marchés financiers influencent les obligataires, car les investisseurs optimisent et rééquilibrent leurs portefeuilles à la lumière de nouvelles informations (Hotchkiss et Jostova, 2017). Hotchkiss et Jostova (2017) ont trouvé que les chocs sur le marché des actions diminuent de manière significative les échanges d'obligations. Bao et al. (2011) ont mis en évidence un lien entre la liquidité et le rendement décalé des actions. Ainsi, nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4 : La hausse du rendement des actions est associée à une baisse des écarts de taux et une hausse de la liquidité des obligations catastrophes.

2.3 Méthodologie

Des recherches antérieures ont montré qu'une régression linéaire sur données de panel est bien adaptée pour expliquer les écarts de taux des obligations catastrophes sur le marché secondaire (Görtler et al. (2016); Zhao et Yu (2019)). Ainsi, nous adoptons deux types de modèles de régressions : les régressions groupées (pooled) pour tenir compte des différences entre les obligations et les modèles avec effet fixe (LSDV) pour expliquer les changements au sein d'une même obligation et tenir compte des caractéristiques non observées des obligations. Pour chaque spécification de modèle considéré, nous avons inclus les résultats du test de Ficher et le R² ajusté comme mesures de la qualité du modèle. Le test de Breusch-Pagan permettra d'effectuer le diagnostic de l'hétéroscédasticité. Des tests de robustesse sur différents échantillons seront effectués en tenant compte des périodes de stress et différents types de périls.

L'analyse des déterminants des obligations catastrophes sur le marché secondaire se décline en plusieurs approches linéaires dans lesquelles l'écart de taux des obligations catastrophes est toujours la variable dépendante. En premier lieu, nous analysons l'influence des taux d'intérêt (Libor et T-Bill) sur les écarts de taux en tenant compte des facteurs spécifiques

aux obligations catastrophes. Ensuite, nous effectuons une analyse de l'impact des facteurs macroéconomiques. Ce qui donne le modèle général (Modèle I2) suivant :

$$spread_{2it} = \beta \cdot X_{it} + \delta \cdot Z_t + \varepsilon_{it} \quad (2.1)$$

Où $spread_{2it}$ représente l'écart de taux du marché secondaire. X_{it} contient les variables spécifiques aux obligations catastrophes. Z_t contient les variables macroéconomiques y compris le taux d'intérêt et les effets fixes annuels. ε_{it} est le terme d'erreur. Les variables sont décrites dans la section 2.4. L'indice i fait référence à l'obligation catastrophe i et l'indice t représente le temps.

Dans un deuxième temps, nous allons identifier les facteurs déterminants de la liquidité des obligations catastrophes à travers deux indicateurs de liquidité. Plus spécifiquement, nous mettons en exergue, les facteurs spécifiques des obligations catastrophes et les variables macroéconomiques qui ont un impact sur les indicateurs de liquidité retenus. Nous effectuons des régressions pour chacun des deux indicateurs sur les facteurs précités à travers le modèle suivant :

$$Y_{it} = \theta \cdot X_{it} + \nu \cdot Z_t + \varepsilon_{it} \quad (2.2)$$

où Y_{it} représente un indicateur de liquidité des obligations catastrophes.

2.4 Variables et statistiques descriptives

Cette partie décrit les variables clés ainsi que les données associées à ces variables.

2.4.1 Mesures de liquidité du marché des obligations catastrophes

Pour mesurer la liquidité des obligations d'entreprise, Houweling et al. (2005) ont considéré neuf indicateurs (montant de l'émission, cotation, taux de change "euro", obligations catastrophes récemment émises "on-the-run", âge, prix manquants ("missing prices"), volatilité des rendements, nombre de contributeurs et dispersion des rendements).

De façon analogue, une étude empirique effectuée par Zhao et Yu (2019)³ a conclu que le délai restant avant l'échéance, la volatilité des rendements et la dispersion des écarts de taux du marché secondaire par rapport au marché primaire sont les trois indicateurs de liquidité les plus efficaces sur le marché des obligations catastrophes.

3. Nous avons testé l'impact de plusieurs indicateurs sur les écarts de rendement pour vérifier leur cohérence avec les hypothèses de liquidité et nous sommes parvenus à la même conclusion que Zhao et Yu (2019).

Compte tenu du manque de consensus dans la littérature sur le sens dans lequel le délai restant avant l'échéance agit sur les écarts de taux, nous retenons comme indicateurs de liquidité, la volatilité (VOL) des écarts de taux et la dispersion des écarts de taux du marché secondaire par rapport au marché primaire (DISP). La formule de la dispersion est la suivante.

$$DISP_i = \sqrt{\sum_t \left(\frac{SPr_{it} - SPr_{i0}}{SPr_{i0}} \right)^2} \quad (2.3)$$

où SPr_{it} est l'écart de taux du marché secondaire de l'obligation catastrophe i à la date de cotation t et SPr_{i0} est l'écart de taux de l'obligation catastrophe i à l'émission (sur le marché primaire).

Le choix de la volatilité (VOL) et la dispersion (DISP) se justifie en ce sens que plus les croyances sont hétérogènes, plus la prime de liquidité est importante pour une obligation (Tychon et al., 2002). Autrement dit, la dispersion des écarts de taux d'une obligation reflète la mesure dans laquelle les participants au marché s'accordent sur la valeur de l'obligation. Une volatilité plus élevée entraîne des écarts plus importants entre les offres et les demandes et donc une liquidité plus faible et des primes de liquidité plus élevées (Houweling et al., 2005). Ainsi, Hong et Warga (2000) ont apporté la preuve d'une corrélation positive entre la volatilité des rendements et l'écart bid-ask des obligations. Zhao et Yu (2019) ont confirmé ce constat, en montrant qu'une dispersion ou une volatilité élevée implique une baisse de la liquidité, entraînant de fait une hausse des écarts de taux des obligations catastrophes.

2.4.2 Taux d'intérêt

Nous utiliserons comme taux d'intérêt le Libor 3 mois US et le T-bill (bons du Trésor américain) 3 mois US. Ces taux sont représentés respectivement par les variables LIB et TBILL (Hotchkiss et Jostova, 2017).

2.4.3 Variables spécifiques aux obligations catastrophes

Nous désignons par AMT, le montant à l'émission. MAT est le délai entre la date d'échéance et la date d'émission et la variable TTM représente le délai entre la date d'échéance et la date de cotation.

Le sponsor (IS) : Les investisseurs exigent des sponsors respectés des écarts de taux plus bas sur les obligations catastrophes. Swiss Re étant un des investisseurs les plus respectés, nous supposons que la variable sponsor IS est égale à 1 si une obligation catastrophe est émise par Swiss Re sinon IS est égale à 0 (Braun (2016), Zhao et Yu (2019)).

Perte espérée (EL) : La perte espérée est définie comme le rapport entre l'espérance des pertes liées au sinistre et le principal de l'obligation catastrophe .

Déclencheur (IN, PA, MP, INDEX) : Notons par IN la variable représentant le déclencheur d'indemnisation. Nous considérons trois types de déclencheurs non liés à l'indemnisation : les déclencheurs de type paramétriques (PA), les déclencheurs basés sur un indice (INDEX), les déclencheurs basés sur une perte modélisée (MP) selon les paramètres de la catastrophe ayant eu lieu. Chaque déclencheur est représenté par une variable fictive qui est égale à un si une obligation catastrophe repose sur ledit déclencheur et zéro dans le cas contraire (Braun (2016), Gürtler et al. (2016)).

Rating (RAT) : Nous considérons une variable RAT comme étant égale à 1 pour les obligations de qualité supérieure et à zéro pour les obligations catastrophes à haut rendement (c.-à-d. les obligations de qualité inférieure ou égale à la notation BB) (Braun (2016), Zhao et Yu (2019)).

Péril (WIND ; EQ ; MULP) : nous classons le type de péril en trois grandes catégories (Braun (2016) ; Gürtler et al. (2016) ; Zhao et Yu (2019)). Le vent (WIND), les tremblements de terre (EQ) et la catégorie multi-périls (MULP). Dans la catégorie vent, nous classons tout ce qui relève des activités éoliennes telles que les ouragans, les tempêtes de vent et les typhons. Ainsi, la variable fictive WIND est égale à 1 si l'obligation catastrophe assure les ouragans, les tempêtes de vent et les typhons, sinon WIND est égale à zéro. Si une obligation catastrophe assure les tremblements de terre, alors la variable fictive EQ est égale à un. La variable MULP est égale à 1 si une obligation catastrophe assure à la fois le vent et le tremblement de terre.

Territoire couvert (US ; UE ; JP ; MULT) : Nous considérons trois principaux territoires dont États-Unis (US), Europe (EU) et Japon (JP). Nous définissons quatre variables fictives : US, EU, JP et MULT. Lorsqu'une obligation catastrophe couvre l'un des territoires désignés, alors la variable fictive concernée est égale à 1 sinon elle est égale à 0. Si le territoire d'une obligation catastrophe couvre au moins deux régions parmi les trois citées ci-dessus et d'autres régions, alors la variable fictive MULT (Multi-territoire) est égale à 1 (Braun (2016) ; Gürtler et al. (2016) ; Zhao et Yu (2019)).

Effet fixe annuel (YEAR) : Nous incluons des effets fixes annuels (YEAR) pour tenir compte des différences de primes de risque absolues dans le temps (Gürtler et al. (2016) ; Zhao et Yu (2019)).

2.4.4 Variables macroéconomiques

Variation de l'indice de réassurance(REI) : Elle permet de capter le cycle de réassurance. Les obligations catastrophes peuvent être considérées comme une alternative à la réassurance traditionnelle (Cummins et Trainar (2009) ; Finken et Laux (2009) ; Gürtler et al. (2016)).

Ce qui peut avoir un impact sur la liquidité des obligations catastrophes. Nous utilisons la variation de l'indice Guy Carpenter Global Property Rate on Line Index (REI) pour mesurer l'impact du cycle de réassurance sur la liquidité des obligations catastrophes (Gürtler et al. (2016)). Cette variable permet de capter tous les autres événements qui se sont produits en conjonction avec la baisse des taux d'intérêt telle que l'afflux de capitaux dans le marché de la réassurance.

Écart de taux des obligations d'entreprises (BBspread) : Nous utilisons l'écart de taux des obligations de sociétés de cote BB pour saisir les effets de contagion sur l'écart de taux et la liquidité des obligations catastrophes.

Rendement du marché boursier (SP) : Le rendement du S&P 500 servira à mesurer l'effet des marchés boursiers sur l'écart de taux et la liquidité.

2.4.5 Données et statistiques descriptives

Les données sur les obligations catastrophes concernent à la fois les marchés primaire et secondaire des obligations catastrophes sur la période allant de 2002 à 2018. Elles proviennent essentiellement de Lane Financial LLC. Des informations complémentaires sur les mécanismes de déclenchement appliqués et les périls ont été recueillies auprès de Artemis Deal Directory. Nous avons au départ un ensemble de données constituées de 746 obligations catastrophes. Plusieurs obligations catastrophes ont été éliminées de l'ensemble de données original. Nous avons éliminé les obligations catastrophes pour lesquelles la perte espérée est manquante ainsi que ceux avec des écarts de taux du marché secondaire manquants.

L'ensemble de données retenues se compose de 629 obligations catastrophes qui assurent les risques de catastrophes naturelles. Cet ensemble de données représente pratiquement tout l'univers des obligations catastrophes négociées sur les marchés primaires et secondaires. Plus spécifiquement, les écarts de taux du marché primaire et secondaire ont été obtenus à partir de données fournies par Lane Financial LLC. Les données sur les écarts de taux commencent au premier trimestre de 2002 et sont déterminées comme les écarts des rendements moyens par rapport au LIBOR sur une base trimestrielle. Les données sur le Libor et le Treasury Bill (T-Bill) proviennent de la Federal Reserve Economic Data .

Les tableaux 2.1 et 2.2 présentent les statistiques sommaires des variables du marché primaire et secondaire des obligations catastrophes. Parmi les types de périls, les types vent et multi-péril sont les plus fréquents. Nous reportons les statistiques relatives à certaines variables connues pour avoir un lien avec la liquidité des obligations catastrophes à savoir la perte espérée (EL), le montant émis (AMT), le temps restant jusqu'à maturité (TTM) et la maturité initiale (MAT). L'écart de taux, le Libor , le T-bill et le S&P 500 sont rapportés trimestriellement, car les observations des écarts de taux sont trimestrielles tandis que l'indice de réassurance est annuel.

TABLE 2.1 – Résumé statistique des variables du marché primaire : obligations catastrophes et variables macroéconomiques

	<i>Observation</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Médiane</i>	<i>Écart-type</i>	<i>Minimum</i>	<i>Maximum</i>
Spread1 (bps)	629	766	625	530	65	4920
Montant(millions)	629	134.63	100	121.41	1.75	1500
Maturité (mois)	629	38	37	12	5	62
Perte-espérée (bps)	629	241	153	236	0.03	1575
Spread2 (bps)	6471	698.5	600	451	65	4920
TTM (mois)	6471	21.8	20.8	13.5	0	61.4
Libor (bps)	72	162.66	112.85	177.74	7.90	687.50
TBILL	72	127.49	92.00	145.68	1	494
REI	18	147	-370	1407	-1120.00	3659
Rendement-S&P-500 (bps)	72	174.91	246.61	768.95	-2255.82	1522.18
BBspread (bps)	72	162.66	112.85	177.74	7.90	687.50

Note :Spread1= écart de taux du marché primaire ; Spread2=écart de taux du marché secondaire ; TTM= temps restant jusqu'à maturité ; BBspread = écart de taux des obligations de sociétés de cote BB ; REI = variation de l'indice de réassurance.

TABLE 2.2 – Statistiques des variables nominales spécifiques aux obligations catastrophes

	Observation	Pourcentage
Déclencheur-Indice	255	41%
Déclencheur-Indemnité	261	42%
Déclencheur-Perte modélisée	43	7%
Déclencheur-Paramétrique	70	11%
USA	368	59%
Europe	47	8%
Japon	43	7%
Multi-territoire	145	23%
Vent	221	35%
Séisme	122	19%
Multi-péril	281	45%
Rating	32	5%
Sponsor	165	26%

Sur le marché primaire, l'écart de taux (Spread1) moyen est de 766 bps et la perte moyenne espérée (EL) est de 241 bps. Par conséquent, nous observons un rendement excédentaire moyen de 525 bps par obligation. L'écart de taux moyen est presque trois fois supérieur à la moyenne de la perte espérée (EL). L'écart de taux moyen du marché secondaire est de 698.5 bps. Cette moyenne est légèrement inférieure à l'écart de taux du marché primaire. Elle vaut presque trois fois la moyenne de la perte espérée (EL). La différence entre le taux Libor moyen (225 bps) et la perte espérée (241 bps) n'est pas très élevée. Cependant la perte espérée est deux fois plus volatile que le taux Libor. La taille moyenne à l'émission est de 134.6 millions USD avec une fourchette de valeurs variant entre 1.75 et 1500 millions USD. L'échantillon comprend des transactions dont la durée va d'un minimum de 5 mois à un maximum de 62 mois et en moyenne, les obligations catastrophes arrivent à échéance après 3 années. Le tableau 2.3 présente les corrélations entre certaines variables et l'écart de taux des obligations catastrophes sur le marché primaire.

TABLE 2.3 – Corrélations entre les variables et l'écart de taux des obligations catastrophes sur le marché primaire

	<i>MULT</i>	<i>MULP</i>	<i>RAT</i>	<i>IS</i>	<i>AMT</i>	<i>Spread1</i>	<i>MAT</i>	<i>LIB</i>	<i>REI</i>	<i>SP</i>	<i>EL</i>	<i>IN</i>	<i>BBspr</i>
<i>MULT</i>	1												
<i>MULP</i>	0.45	1.00											
<i>RAT</i>	0.11	-0.01	1.00										
<i>IS</i>	0.07	-0.16	0.14	1.00									
<i>AMT</i>	-0.10	-0.08	-0.05	-0.35	1.00								
<i>Spread1</i>	0.18	0.21	-0.24	0.19	-0.28	1.00							
<i>MAT</i>	-0.04	0.07	0.00	-0.35	0.20	-0.33	1.00						
<i>LIB</i>	0.04	-0.09	0.12	0.34	-0.18	0.15	-0.36	1.00					
<i>REI</i>	-0.08	-0.22	0.05	0.36	-0.20	0.25	-0.25	0.45	1.00				
<i>SP</i>	-0.02	0.00	-0.04	-0.01	0.02	0.06	0.00	-0.24	0.11	1.00			
<i>EL</i>	0.22	0.25	-0.22	0.06	-0.23	0.75	-0.17	0.01	0.00	0.06	1.00		
<i>IN</i>	-0.24	0.13	-0.09	-0.45	0.22	-0.14	0.19	-0.27	-0.27	0.00	-0.04	1.00	
<i>BBspr</i>	0.04	0.03	0.05	-0.02	-0.04	-0.01	0.00	0.02	-0.27	-0.76	-0.11	-0.03	1.00

Note :LIB(Libor) ; AMT (montant à l'émission) ; MAT (Délai entre la date d'échéance et la date d'émission) ; TTM (Le délai avant l'échéance) ; IS (sponsor) ; EL (Perte espérée) ; IN (déclencheur d'indemnisation) ; PA (déclencheur paramétriques) ; INDEX (les déclencheurs basés sur un indice) ; MP (perte modélisée) ; RAT (représente le rating) ; Vent (WIND) ; (EQ) multi-périls (MULP) ; US (États-Unis) ; EU (Europe) ; JP (Japon) ; MULT (Multi-territoire) ; REI = variation de l'indice de réassurance ; BBspr (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB) ; SP (Le rendement du S&P 500).

La perte espérée (EL), le Libor (LIB), le type muti-périls (MP), la variation de l'indice de réassurance (REI), ainsi que le rendement du S&P 500 (SP) sont positivement corrélés avec les écarts de taux des obligations catastrophes (Spread1). D'autre part, le montant à l'émission et le rating sont négativement liés à l'écart de taux. Toutes ces relations sont conformes aux hypothèses de liquidité.

En revanche, les corrélations des variables Maturité (MAT) et de l'émetteur (IS) avec l'écart de taux ont des signes opposés à ceux prédits par les hypothèses de liquidité. Cependant, cette donne pourrait changer dans un cadre multivarié et conduire à une dépendance différente.

La corrélation entre les variables MP et MULT montre que les obligations catastrophes qui assurent plusieurs types de périls assurent le plus souvent plusieurs régions de périls en même temps.

Une corrélation positive est observée entre le Libor et l'écart de taux. La relation entre le Libor et l'écart de taux des obligations catastrophes est mise en évidence dans le graphique 2.1. On remarque une évolution presque concomitante des deux variables. Ce qui confirme la corrélation positive constatée. Depuis la crise de 2007-2009, on remarque une tendance à la baisse de l'écart de taux des obligations catastrophes et du Libor. Ce qui nous amène à chercher à savoir si le Libor a un impact sur les écarts de taux des obligations catastrophes.

2.5 Analyse des résultats

L'analyse empirique se décline en 2 temps : dans un premier temps, nous analysons les déterminants des écarts de taux et l'impact particulier du taux Libor et du TBILL sur les écarts de taux des obligations catastrophes du marché secondaire. Ensuite, nous analyserons les déterminants de la liquidité à travers les deux indicateurs de liquidité retenus, notamment la dispersion et la volatilité des écarts de taux.

2.5.1 Déterminants des écarts de taux des obligations catastrophes sur le marché secondaire.

L'analyse des déterminants des obligations catastrophes sur le marché secondaire se décline selon l'équation (2.1). En premier lieu, nous analysons l'impact du Libor et du TBILL sur l'écart de taux et des facteurs spécifiques aux obligations catastrophes sur l'écart de taux (Nous appelons ce modèle I1) et enfin, nous effectuons une analyse de l'impact des facteurs macroéconomiques (Modèle I2).

Impact du Libor et du TBILL sur les obligations catastrophes

Dans le modèle I1, nous considérons le Libor comme un facteur déterminant de la prime en plus des variables spécifiques aux obligations catastrophes. Les résultats sont présentés dans le tableau 2.4. Au regard du modèle I1, l'hypothèse 2 est vérifiée. Le coefficient du Libor est positif et significatif. L'écart de taux baisserait à la suite d'une baisse du Libor.

Lorsqu'on remplace le Libor par le TBILL (voir tableau 2.5), nous aboutissons aux mêmes résultats. La baisse du TBILL est associée à une baisse des écarts de taux. On pourrait donc

conclure que la baisse du taux d'intérêt rendrait les obligations classiques moins intéressants que les obligations catastrophes, d'où la hausse de la liquidité des obligations catastrophes.

Impact des facteurs spécifiques aux obligations catastrophes

Sur la base des modèles I1 et I2 (tableau 2.4), nous analysons l'impact des variables spécifiques aux obligations catastrophes tout en contrôlant avec les variables macroéconomiques. Les résultats suivants sont observés.

Naturellement, l'écart de taux de l'obligation catastrophe augmente avec la perte espérée (EL), laquelle apparaît comme la variable la plus pertinente avec le plus haut coefficient. Le coefficient de la variable TTM est positif et significatif. L'écart de taux des obligations catastrophes diminue lorsqu'on s'approche de l'échéance. Autrement dit, les obligations catastrophes deviennent plus liquides à l'approche de l'échéance (voir aussi Zhao et Yu (2019)). Ce résultat est cohérent avec l'hypothèse 1.

Cependant les obligations catastrophes avec des maturités élevées (MAT) à l'émission présentent des écarts de taux plus faibles. Ce qui est contraire à l'hypothèse de liquidité. Il en est de même pour le montant à l'émission en ce sens que les obligations catastrophes avec de forts montants à l'émission (AMT) présentent des écarts de taux plus élevés. Ce qui est contraire à l'hypothèse de liquidité.

Les coefficients de la variable type d'émetteur (IS) ne sont pas significatifs. Le sponsor n'a pas d'impact sur les écarts de taux du marché secondaire. Cependant, les obligations catastrophes possédant un rating de qualité supérieure ont un écart de taux plus faible.

Parmi les types de périls, les tremblements de terre (EQ) sont les plus significatifs. Les obligations catastrophes couvrant les tremblements de terre présentent des écarts de taux faibles compte tenu de leur faible fréquence. Nous pouvons aussi remarquer que les écarts de taux des obligations catastrophes émis aux USA et au Japon sont plus élevés alors que les obligations catastrophes émises en Europe présentent un écart de taux plus faible. La forte fréquence des vents et des tremblements de terre aux USA et au Japon comparativement à l'Europe, pourrait justifier cette différence.

Les obligations catastrophes avec un déclencheur de type paramétrique (PA) présentent des écarts de taux plus faibles sur le marché secondaire. Parmi les types de déclencheurs, le déclencheur de type paramétrique (PA) apparaît comme le plus significatif et présente également le coefficient le plus élevé. Le type de déclencheur indemnité (IN) est également associé à des écarts de taux plus faibles.

TABLE 2.4 – Déterminants des écarts de taux avec le Libor comme taux d'intérêt

	Modèle I1		Modèle I2	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	0.0693***	0.0000	0.0256*	0.0447
Libor	0.1119***	0.0000	-0.1261***	0.0001
TTM	0.0002***	0.0000	0.0002***	0.0000
AMT	0.0000***	0.0000	0.0000*	0.0237
MAT	-0.0007***	0.0000	-0.0003***	0.0000
EL	1.6338***	0.0000	1.7411***	0.0000
Index	-0.0086**	0.0018	-0.0016	0.5394
IN	-0.0151***	0.0000	-0.0015	0.5806
MP	0.0030	0.3438	0.0060*	0.0361
PA	-0.0111***	0.0001	-0.0132***	0.0000
US	0.0191***	0.0000	0.0128***	0.0000
EUR	-0.0009	0.7683	-0.0083**	0.0026
JP	0.0167***	0.0000	0.0066*	0.0163
MULT	0.0118***	0.0000	0.0087***	0.0009
WIND	-0.0149	0.2639	-0.0277*	0.0227
EQ	-0.0300*	0.0250	-0.0379**	0.0019
MULP	-0.0142	0.2859	-0.0275*	0.0241
RAT	-0.0030	0.1052	-0.0097***	0.0000
IS	0.0019	0.1001	-0.0017	0.1554
BBspread			0.5073***	0.0000
REI			0.0473***	0.0000
SP			0.0279***	0.0000
Effet Annual	Non		Oui	
R-Squared	0.5416		0.6278	
Adj.R-Squared	0.5403		0.6256	
Observations	6471		6471	
F-statistic	6452	0.0000	6433	0.0000
BP	164.34	0.0000	162.05	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan ; AMT (montant à l'émission) ; MAT (délai entre la date d'échéance et la date d'émission) ; TTM (le délai avant l'échéance) ; IS (sponsor) ; EL (perte espérée) ; IN (déclencheur d'indemnisation) ; PA (déclencheur paramétrique) ; INDEX (les déclencheurs basés sur un indice) ; MP (perte modélisée) ; RAT (représente le rating) ; vent (WIND) ; (EQ) multi-périls (MULP) ; US (États-Unis) ; EU (Europe) ; JP (Japon) ; MULT (Multi-territoire) ; REI (cycle de réassurance) ; BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB) ; SP (le rendement du S&P 500).

TABLE 2.5 – Déterminants des écarts de taux avec le Tbill comme taux d'intérêt

	Modèle I1		Modèle I2	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	0.0704***	0.0000	0.0283*	0.0278
TBILL	0.0879**	0.0041	-0.1509***	0.0002
TTM	0.0002***	0.0000	0.0002***	0.0000
AMT	0.0000***	0.0000	0.0000**	0.0072
MAT	-0.0007***	0.0000	-0.0003***	0.0000
EL	1.6324***	0.0000	1.7201***	0.0000
Index	-0.0087**	0.0016	-0.0023	0.3728
IN	-0.0153***	0.0000	-0.0029	0.2775
MP	0.0028	0.3735	0.0040	0.1648
PA	-0.0108***	0.0002	-0.0142***	0.0000
US	0.0193***	0.0000	0.0121***	0.0000
EUR	-0.0005	0.8688	-0.0095***	0.0006
JP	0.0171***	0.0000	0.0065*	0.0181
MULT	0.0120***	0.0000	0.0081**	0.0019
WIND	-0.0149	0.2636	-0.0273*	0.0243
EQ	-0.0299*	0.0254	-0.0379**	0.0018
MULP	-0.0142	0.2878	-0.0273*	0.0243
RAT	-0.0025	0.1824	-0.0097***	0.0000
IS	0.0022	0.0598	-0.0006	0.5839
BBspread			0.5217***	0.0000
REI			0.0469***	0.0000
SP			0.0322***	0.0000
Effet Annual	Non		oui	
R-Squared	0.5416		0.6036	
Adj.R-Squared	0.5403		0.6015	
Observations	6471		6471	
F-statistic	6452	0.0000	6436	0.0000
BP	164.34	0.0000	163.	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan; AMT (montant à l'émission); MAT (Délai entre la date d'échéance et la date d'émission); TTM (Le délai avant l'échéance); IS (sponsor); EL (Perte espérée); IN (déclencheur d'indemnisation); PA (déclencheur paramétriques); INDEX (les déclencheurs basés sur un indice); MP (perte modélisée); RAT (représente le rating); Vent (WIND); (EQ) multi-périls (MULP); US (États-Unis); EU (Europe); JP (Japon); MULT (Multi-territoire); REI (Cycle de réassurance); BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB); SP (Le rendement du S&P 500).

Impact des variables macroéconomiques

L'ajout des variables macroéconomiques et de l'effet fixe annuel (modèle I2) améliore le R2 ajusté. Le R2 ajusté passe de 54% à 63% (tableau 2.4).

Les coefficients des variables BBspread, REI et SP sont tous significatifs et positifs. Ceci confirme un lien positif entre les écarts de taux des obligations d'entreprises et ceux des obligations catastrophes (Braun (2016) et Gürtler et al. (2016)). Les hypothèses 3 et 4 sont vérifiées. L'écart de taux baisse à la suite de la baisse de l'indice de réassurance (Braun (2016); Gürtler et al. (2016)). En outre la baisse du rendement des actions est associée à une baisse des écarts de taux sur le marché secondaire. Ce résultat est conforme au résultat trouvé par Hotchkiss et Jostova (2017) sur le marché obligataire, mais contraire à celui de Gürtler et al. (2016).

Test de robustesse

Les tests de robustesse sont effectués sur le modèle I2. Premièrement, nous analysons si les résultats sont stables pour différentes périodes en tenant compte de la crise de 2007-2008. La première période (2002-2006) est celle d'avant la crise financière des surprimes. La deuxième période correspond à la période de la crise de 2007-2009. Enfin la dernière période considérée est celle de la période post-crise (2010-2018). Deuxièmement nous contrôlons également en tenant compte de l'effet fixe individuel. Enfin, nous vérifions si les résultats sont robustes par type de péril (Vent et Multi-péril).

Les résultats des modèles à effet fixe individuel (Tableaux 2.11 et 2.12) et par type de péril (Tableaux 2.13 et 2.14) confirment les résultats précédents. Cependant si on considère des échantillons sur des périodes différentes, les précisions suivantes apparaissent à certains niveaux.

Taux d'intérêt

À la vue du modèle I2, une baisse du Libor rendrait les obligations catastrophes moins liquides (Tableau 2.4). Cependant, une analyse plus fine montre que son signe négatif a été observé seulement durant la période de la crise de 2007-2009 (Tableau 2.6). En dehors de cette période de stress, le lien entre le Libor et l'écart de taux est positif. Ce qui signifie qu'en période de stress, une baisse du Libor est associée à une hausse des écarts de taux. Ce qui est contraire en période normale. En particulier, depuis la crise de 2007-2009, la baisse du Libor a pour conséquence une baisse des écarts de taux permettant ainsi d'augmenter la liquidité des obligations catastrophes.

En utilisant le T-BILL comme proxy de taux d'intérêt, nous aboutissons au même résultat (voir tableau 2.7). La baisse du T-BILL après la crise est associée à une hausse des écarts de taux. On peut donc conclure que la baisse du taux d'intérêt rendrait les obligations clas-

siques moins intéressantes que les obligations catastrophes, d'où la hausse de la liquidité des obligations catastrophes.

Ainsi, le volume croissant des obligations catastrophes transigées ces dernières années pourrait aussi s'expliquer par la baisse durable des taux d'intérêt. En effet, la baisse durable des taux d'intérêt après la crise financière pourrait encourager les investisseurs à se tourner vers des actifs à rendement plus élevé et moins corrélé avec le marché des capitaux tels les obligations catastrophes. Ce qui confirme l'hypothèse 2.

En outre, les différents tests de robustesse confirment que depuis la crise de 2007-2008, le taux d'intérêt est devenu la variable la plus significative dans l'explication des écarts de taux après la perte espérée.

Variables macroéconomiques

Les coefficients des variables SP et BBSpread ne sont pas significatifs sur la période 2010-2018 tandis que le coefficient de la variable REI n'est pas significatif sur la période 2002-2006 (tableau 2.6). Tous les tests de robustesse (effet fixe, type de péril et type de taux d'intérêt) montrent que la variable SP n'est pas significative sur la période 2010-2018. Ainsi, sur la base de l'indice S&P 500, Il n'y a pas de lien entre le marché financier et le marché des obligations catastrophes depuis la crise des subprimes. Les obligations catastrophes se comporteraient comme des zéros beta pendant cette période. Ce qui va dans le sens de Galeotti et al. (2013). Ces derniers n'ont pas été en mesure d'identifier une quelconque corrélation entre les marchés financiers et le marché des obligations catastrophes sur la base de l'indice S&P 500. Les obligations catastrophes seraient donc propices à la diversification des investisseurs ces dernières années. Ceci encouragerait leur liquidité.

Variables spécifiques aux obligations catastrophes

Parmi les types de périls, le test confirme la pertinence des tremblements de terre (EQ) dans l'explication des écarts de taux du marché secondaire sur la période de 2002-2006 et sur les périodes récentes de 2010-2018. En particulier, sur la période d'avant la crise (ie 2002-2006), seuls les tremblements de terre (EQ) ont présenté un coefficient significatif et négatif (tableau 2.6).

Concernant les obligations catastrophes émises par Suisse Re (IS) les résultats du test à effet fixe individuel confirment la non-significativité du coefficient. Le coefficient de la variable émetteur (IS) reste significatif sur la période de 2007 à 2018, mais son signe n'est pas stable. Son signe est positif sur la période 2010-2018 alors qu'il est négatif sur la période 2007-2009. On remarque la même instabilité pour ce qui concerne la variable maturité (MAT), son coefficient est positif sur la période de 2002-2006 et négative sur la période 2007-2018 (tableau 2.6). Le rating n'a pas eu d'impact sur les écarts de taux des obligations catastrophes depuis la crise financière.

TABLE 2.6 – Test de robustesse sur différentes périodes avec le Libor comme taux d'intérêt

Modèle I2	2002-2006		2007-2009		2010-2018	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	-0.0426**	0.0093	0.0160.	0.0786	0.0403**	0.0049
LIB	0.2041*	0.0140	-0.2966***	0.0000	1.2400***	0.0000
TTM	0.0005***	0.0000	0.0005***	0.0000	0.0006***	0.0000
AMT	0.0000	0.5115	0.0000***	0.0003	0.0000*	0.0128
MAT	0.0004**	0.0024	-0.0008***	0.0000	-0.0007***	0.0000
EL	1.7277***	0.0000	2.0236***	0.0000	1.4492***	0.0000
Index	-0.0034	0.6888	0.0067.	0.0530	-0.0044	0.4277
IN	0.0040	0.6547	-0.0080*	0.0491	-0.0021	0.7093
MP	0.0115	0.2663	0.0199***	0.0000	-0.0006	0.9164
PA	-0.0026	0.7459	-0.0158***	0.0000	-0.0156*	0.0194
US	0.0140.	0.0615	0.0247***	0.0000	-0.0002	0.9627
EUR	-0.0043	0.6080	-0.0036	0.4793	-0.0214***	0.0000
JP	0.0056	0.4812	0.0085	0.1413	-0.0030	0.5069
MULT	0.0096	0.2808	0.0101*	0.0436	-0.0007	0.8688
WIND	0.0006	0.8860	0.0102***	0.0002	-0.0235*	0.0407
EQ	-0.0155***	0.0004	-0.0008	0.8361	-0.0311**	0.0071
MULP					-0.0196.	0.0877
RAT	-0.0065.	0.0460*	0.0009	0.8229	-0.0078	0.2585
IS	0.0054	0.1453	-0.0245***	0.0000	0.0046**	0.0091
BBspread	0.7344***	0.0000	0.4088***	0.0000	-0.0542	0.5464
REI	-0.0122.	0.0632	0.1162***	0.0000	0.0343***	0.0002
SP	0.0850***	0.0002	-0.0004	0.9748	-0.0060	0.5064
Effet Annual	OUI		OUI		OUI	
R-Squared	0.4876		0.6952		0.55889	
Adj.R-Squared	0.48		0.6894		0.55557	
Observations	1399		1182		3891	
F-statistic	63.99	0.0000	120.2	0.0000	168.64	0.0000
BP	426.8	0.0000	203.3	0.0000	73.50	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan; AMT (montant à l'émission); MAT (Délai entre la date d'échéance et la date d'émission); TTM (Le délai avant l'échéance); IS (sponsor); EL (Perte espérée); IN (déclencheur d'indemnisation); PA (déclencheur paramétriques); INDEX (les déclencheurs basés sur un indice); MP (perte modélisée); RAT (représente le rating); Vent (WIND); (EQ) multi-périls (MULP); US (États-Unis); EU (Europe); JP (Japon); MULT (Multi-territoire); REI (Cycle de réassurance); BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB); SP (Le rendement du S&P 500).

Résumé de la partie

En somme, la perte espérée, le Libor, le temps restant jusqu'à maturité apparaissent comme les variables les plus influentes pour expliquer les écarts de taux des obligations catastrophes sur le marché secondaire. Cependant, nous n'avons pas trouvé d'évidence quant à l'impact réel

TABLE 2.7 – Test de robustesse sur différentes périodes avec le Tbill comme taux d'intérêt

Modèle I2	2002-2006		2007-2009		2010-2018	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	-0.0215,	0.0776	0.0177,	0.0812	0.0420**	0.0034
TBILL	0.1683*	0.0139	-0.4056**	0.0040	1.1281***	0.0000
TTM	0.0002*	0.0253	0.0005***	0.0003	0.0006***	0.0000
AMT	0.0000	0.1710	0.0000***	0.0003	0.0000*	0.0126
MAT	-0.0002,	0.0848	-0.0007***	0.0000	-0.0007***	0.0000
EL	2.3560***	0.0000	2.0158***	0.0000	1.4496***	0.0000
Index	-0.0067	0.2832	0.0068*	0.0484	-0.0043	0.4354
IN	-0.0047	0.4726	-0.0082*	0.0462	-0.0020	0.7186
MP	0.0063	0.4058	0.0199***	0.0000	-0.0005	0.9342
PA	-0.0024	0.6905	-0.0159***	0.0000	-0.0154*	0.0209
US	0.0194***	0.0003	0.0243***	0.0000	-0.0001	0.9815
EUR	-0.0047	0.4284	-0.0043	0.4053	-0.0213***	0.0000
JP	0.0087	0.1186	0.0082	0.1602	-0.0030	0.5196
MULT	0.0087	0.1708	0.0097,	0.0547	-0.0006	0.8858
WIND	0.0005	0.8715	0.0100***	0.0004	-0.0238*	0.0390
EQ	-0.0175***	0.0000	-0.0015	0.6867	-0.0313**	0.0068
MULP	-0.0026	0.2752	0.0005	0.8981	-0.0198,	0.0854
RAT	-0.0029	0.2706	-0.0246***	0.0000	-0.0082	0.2402
IS	0.7030***	0.0000	0.3792***	0.0000	0.0046**	0.0092
BBspread	0.0170**	0.0012	0.1296***	0.0000	-0.0429	0.6363
REI	0.0555***	0.0005	0.0017	0.8909	0.0350***	0.0002
SP	-0.0215,	0.0776	0.0177***	0.0812	-0.0063	0.4926
Effet Annual	OUI					
R-Squared	0.7703		0.69263		0.5579	
Adj.R-Squared	0.7663		0.6868		0.5546	
Observations	1399		1182		3891	
F-statistic	191.9810	0.0000	118.714	0.0000	167.9460	0.0000
BP	102.1100	0.0000	200.45	0.0000	74.143	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan; AMT (montant à l'émission); MAT (Délai entre la date d'échéance et la date d'émission); TTM (Le délai avant l'échéance); IS (sponsor); EL (Perte espérée); IN (déclencheur d'indemnisation); PA (déclencheur paramétriques); INDEX (les déclencheurs basés sur un indice); MP (perte modélisée); RAT (représente le rating); Vent (WIND); (EQ) multi-périls (MULP); US (États-Unis); EU (Europe); JP (Japon); MULT (Multi-territoire); REI (Cycle de réassurance); BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB); SP (Le rendement du S&P 500).

de la maturité (MAT) et du sponsor (IS) sur les écarts de taux des obligations catastrophes. Zhao et Yu (2019) avaient également abouti à la même conclusion. De façon analogue à Gürtler et al. (2016) nous trouvons qu'un montant à l'émission (AMT) plus élevé conduit à des écarts de taux significativement plus élevés, ce qui va à l'encontre de l'hypothèse de liquidité.

Les variables macroéconomiques REI, SP et BBSpread ne sont pas significatives sur toutes les périodes. Ce qui n'est pas le cas du taux Libor qui apparait comme la variable la plus pertinente après la perte espérée. En période normale, une baisse du Libor est associée à une baisse des écarts de taux. Le phénomène contraire est observé en période de stress. En particulier, depuis la crise de 2007-2009, la baisse du Libor a pour conséquence une baisse des écarts de taux permettant ainsi d'augmenter la liquidité des obligations catastrophes.

Nous aboutissons aux mêmes conclusions lorsqu'on remplace le Libor par le T-Bill. Ce qui pourrait signifier que la manipulation du Libor n'a pas eu d'impact significatif sur l'écart de taux et la liquidité des obligations catastrophes. Depuis la crise de 2007-2008, le taux d'intérêt est devenu la variable la plus significative dans l'explication des écarts de taux après la perte espérée.

Aussi, il ressort que sur la base de l'indice S&P 500, il n'y a pas de lien entre le marché financier et le marché des obligations catastrophes sur la période post la crise des subprimes. Les obligations catastrophes se comporteraient comme des zéros beta pendant cette période. Ce qui va dans le sens de Galeotti et al. (2013) qui n'ont pas été en mesure d'identifier une quelconque corrélation entre les marchés financiers et le marché des obligations catastrophes sur la base de l'indice S&P 500. Les obligations catastrophes sont donc devenues propices à la diversification des investisseurs ces dernières années. Ceci encouragerait leur liquidité.

2.5.2 Les déterminants de la liquidité des obligations catastrophes

Dans cette partie, nous mettrons en exergue, les facteurs spécifiques aux obligations catastrophes et les variables macroéconomiques qui ont un impact sur les indicateurs de liquidité retenus. Les résultats précédents ayant déterminé le Libor comme un facteur pertinent de l'écart de taux des obligations catastrophes, nous testerons également son impact sur les indicateurs de liquidité retenus. Sur la base de l'équation (2.2), nous effectuons des régressions des deux indicateurs (VOL et DISP) sur les facteurs précités à travers les deux modèles suivants :

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 EL_i + \beta_2 LIB_i + \beta_3 MAT_i + \beta_4 AMT_i + \beta_5 INDEX_i + \beta_6 IN_i + \beta_7 MP_i + \beta_8 PA_i \\ + \beta_9 US_i + \beta_{10} EUR_i + \beta_{11} JP_i + \beta_{12} MULT_i + \beta_{13} WIND_i + \beta_{14} EQ_i + \beta_{15} MULP_i$$

$$+\beta_{16}RAT_i+\beta_{17}IS_i+\beta_{18}TTM_{it}+\beta_{19}REI_t+\beta_{20}BBspread_t+\beta_{21}SP_t+\beta_{22}YEAR_t+\varepsilon_{it} \quad (2.4)$$

Avec Y_{it} égale à LOG (VOL $_{it}$) ou LOG (DISP $_{it}$)

En prenant le logarithme (LOG), nous obtenons des modèles de meilleures qualités. Le R2 ajusté s'en trouve presque doublé.

Impact des variables spécifiques aux obligations catastrophes.

Dans un premier temps, nous mettons en exergue, les facteurs du marché des obligations catastrophes qui ont un impact sur les indicateurs de liquidité retenus. Notre échantillon comprend un large éventail d'obligations catastrophes. Ce qui nous permet d'examiner le lien entre les indicateurs de liquidité (VOL et DISP) et diverses caractéristiques des obligations, dont certaines sont connues pour être liées à la liquidité des obligations catastrophes. Les résultats des régressions des deux indicateurs sur diverses caractéristiques des obligations catastrophes sont présentés dans le tableau 2.8. Les résultats des tests de robustesse sont consignés dans les tableaux 2.9 et 2.10.

Naturellement, la perte espérée (EL) apparaît comme la principale variable explicative des deux indicateurs de liquidité. Son coefficient est significatif et plus élevé, quel que soit le modèle. Les tests de robustesse sur différents échantillons confirment cette tendance. Les obligations catastrophes avec une perte espérée élevée sont moins liquides. Ceci confirme l'hypothèse 1.

À travers le coefficient de la variable TTM, nous constatons que les obligations catastrophes les plus proches de leurs maturités (c'est-à-dire les anciennes) ont en moyenne une dispersion (DISP) et une volatilité (VOL) plus élevées, et les résultats sont robustes, quelles que soient les variables de contrôle utilisées dans la régression. En matière de liquidité, ce résultat apparaît plutôt conforme aux résultats trouvés sur le marché obligataire par Bao et al. (2011). Une des explications plausibles serait l'effet probable du gel des obligations plus âgées dans les portefeuilles des investisseurs. Ce qui les rendrait moins liquides. Les tests de robustesse sur plusieurs échantillons et les modèles à effet fixe individuel confirment ce résultat.

Les obligations catastrophes avec des maturités plus élevées (MAT) ont une dispersion (DISP) plus élevée et une volatilité (VOL) élevée. Ce qui est cohérent avec les hypothèses de liquidité. Les tests de robustesse confirment cette tendance.

De même, nous constatons que les obligations catastrophes dont les montants à l'émission (AMT) sont plus importants ont tendance à avoir une dispersion (DISP) et une volatilité (VOL) plus élevées. Ceci est contraire à l'hypothèse de liquidité.

En revanche, il ressort des tests de robustesse que son coefficient par rapport aux deux indi-

cateurs n'est pas significatif sur la période de 2002-2009. Ce qui pose des questions quant à la pertinence de l'impact de cette variable sur tout l'échantillon.

Les obligations catastrophes avec une notation de crédit (RAT) de qualité supérieure ont des niveaux d'indicateurs de liquidité plus faible. (Ce qui confirme l'hypothèse de liquidité de ce type d'obligation catastrophe). Ce résultat qui est cohérent avec l'hypothèse de liquidité est également confirmé par les tests de robustesses à l'exception de la période de la crise où le rating n'a pas eu d'impact sur les 2 indicateurs.

Les obligations catastrophes émises par Suisse Re (IS) semblent avoir une volatilité (VOL) plus faible. Sur la base de ce résultat, on pourrait conclure que les obligations catastrophes émises par les grands émetteurs tels que Suisse Re sont plus liquides. Cependant, cette variable n'a aucun impact significatif sur la dispersion (DISP). En outre les tests de robustesse montrent que le coefficient de la variable IS par rapport à la volatilité (VOL) n'est pas significatif sur la période de la crise de 2007 à 2009.

Le type de déclencheur a un impact uniquement sur la variable DISP via les déclencheurs paramétriques (PA et index) dont les coefficients sont négatifs. Ce qui signifie que les obligations catastrophes avec des déclencheurs paramétriques ont tendance à être plus liquides. Les tests de robustesse sur différents échantillons montrent que cette tendance a été plus forte durant la période de crise de 2007-2009. En effet, contrairement aux déclencheurs indemnités, les déclencheurs paramétriques ne sont pas sujets à l'asymétrie d'information. Cette visibilité galvanise les investisseurs et ceci est particulièrement vrai en période de crise où les investisseurs deviennent plus averses au risque.

Les obligations catastrophes émises dans l'Union européenne sont plus liquides. Ce résultat est vérifié à la fois pour les deux indicateurs de liquidité (VOL et DISP). Cependant, si on se réfère à la volatilité (VOL), on observe une tendance contraire pour ce qui concerne les obligations catastrophes émises aux USA (US). Néanmoins, on ne peut trop se prononcer sur l'impact réel de la variable US. Elle n'est pas significative par rapport au proxy DISP compte tenu de l'instabilité de son signe sur différentes périodes (voir test de robustesse au tableau 2.9). En effet, les risques liés au vent (tempête, tornade, etc.) et au tremblement de terre sont moindres en Europe comparativement aux USA et au Japon.

Enfin, parmi les types de périls, seuls les tremblements de terre sont pertinents, et ce, pour le proxy DISP. Les obligations catastrophes couvrant le risque de tremblements de terre sont plus liquides.

Impact du Libor et des autres variables macroéconomiques

Nous pouvons également examiner le lien entre les indicateurs de liquidité (VOL et DISP) et les autres variables macroéconomiques. Nous constatons que dans tous les deux modèles,

TABLE 2.8 – Déterminants des indicateurs de liquidité

	Volatilité		Dispersion	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	-5.7100***	0.0000	-8.4889***	0.0000
LIB	-3.4559***	0.0002	-6.1917***	0.0007
TTM	-0.0199***	0.0000	-0.0794***	0.0000
AMT	0.0000**	0.0067	0.0000***	0.0000
MAT	0.0043**	0.0011	0.0347***	0.0000
BBspread	2.9859**	0.0030	4.8808*	0.0146
REI	0.5539***	0.0000	1.3868***	0.0000
SP	0.1530	0.3963	0.4466	0.2100
EL	10.7540***	0.0000	28.7080***	0.0000
Index	-0.0184	0.7978	-0.4527**	0.0014
IN	0.1049	0.1542	-0.0557	0.7013
MP	-0.0002	0.9976	-0.0173	0.9127
PA	0.1317,	0.0721	-0.7178***	0.0000
US	0.2579***	0.0001	0.0096	0.9427
EUR	-0.5602***	0.0000	-1.0208***	0.0000
JP	-0.0237	0.7579	-0.1489	0.3271
MULT	0.1917**	0.0082	-0.2347	0.1010
WIND	0.3167	0.3504	-0.7953	0.2346
EQ	-0.3225	0.3423	-2.0745**	0.0020
MULP	0.2677	0.4298	-0.8397	0.2093
RAT	-0.2390***	0.0000	-0.5455***	0.0000
IS	-0.1270***	0.0001	0.0348	0.5957
Effet Annual	OUI		OUI	
R-Squared	0.3602		0.49946	
Adj.R-Squared	0.35652		0.49657	
F-statistic	97.8837	0.0000	172.899	0.0000
BP	436.08	0.0000	415.8	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan ; AMT (montant à l'émission) ; MAT (Délai entre la date d'échéance et la date d'émission) ; TTM (Le délai avant l'échéance) ; IS (sponsor) ; EL (Perte espérée) ; IN (déclencheur d'indemnisation) ; PA (déclencheur paramétriques) ; INDEX (les déclencheurs basés sur un indice) ; MP (perte modélisée) ; RAT (représente le rating) ; Vent (WIND) ; (EQ) multi-périls (MULP) ; US (États-Unis) ; EU (Europe) ; JP (Japon) ; MULT (Multi-territoire) ; REI (Cycle de réassurance) ; BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB) ; SP (Le rendement du S&P 500).

le coefficient du Libor est très significatif. À première vue, une baisse du Libor rendrait les obligations catastrophes moins liquides (tableau 2.8). Cependant, une analyse plus fine montre que le coefficient du Libor est significatif seulement sur la période de la crise de 2007 à 2009 (tableau 2.9 et tableau 2.10).

Le rendement du marché de réassurance RI apparaît comme la variable macroéconomique la plus significative après le Libor. Les coefficients étant positifs, nous pouvons en déduire qu'un rendement élevé sur le marché de réassurance entraîne une baisse de la liquidité des obligations catastrophes. Ceci est cohérent avec l'hypothèse 3.

Une augmentation de l'écart de taux des obligations (BBspread) est associée à une hausse de la volatilité (VOL) et de la dispersion (DISP). Les tests de robustesse montrent que le coefficient du BBspread par rapport à la volatilité (VOL) est significatif uniquement sur la période allant de 2010 à 2018.

Le rendement du S&P 500 n'a pas de lien significatif avec les deux indicateurs de liquidité sur toute la période de référence (tableau 2.8). Les tests de robustesse montrent que depuis la crise financière de 2007-2008, le rendement du S&P 500 n'a pas eu d'impact sur la liquidité des obligations catastrophes. Néanmoins, on observe un lien significatif et négatif avec le proxy dispersion (DISP) sur la période 2002-2006. Ce résultat est contraire à l'hypothèse 4, mais similaire à celui de Görtler et al (2016).

Résumé de la partie

Au regard des deux indicateurs (VOL et DISP), la liquidité baisse avec la perte espérée (EL). Par contre, elle augmente avec le temps restant jusqu'à maturité (TTM), le rating (RAT) et le territoire couvert (EUR). Conformément à l'hypothèse 1, la perte espérée et le temps restant jusqu'à maturité (TTM), apparaissent comme les plus pertinents dans l'explication de la liquidité.

L'impact du temps restant jusqu'à maturité sur la liquidité est conforme aux résultats trouvés sur le marché obligataire par Bao et al. (2011). Une des explications plausibles serait l'effet probable du gel des obligations plus âgées dans les portefeuilles des investisseurs. Ce qui les rendrait moins liquides.

les obligations catastrophes couvrant l'Europe sont plus liquides. En effet, les risques liés au vent (tempête, tornade, etc.) et au tremblement de terre sont moindres en Europe comparativement aux USA et au Japon.

Un montant à l'émission (AMT) plus élevé conduit à une liquidité plus faible, ce qui va à l'encontre de l'hypothèse de la liquidité. En outre, nous ne trouvons pas d'évidence d'une prime de liquidité pour le montant à l'émission et le sponsor. Ceci est cohérent avec les conclusions de la section 2.5.1 ainsi que les résultats de Görtler et al. (2016) et Zhao et Yu

(2019).

L'indice de réassurance est la variable macroéconomique la plus susceptible d'influer sur la liquidité du point de vue des deux indicateurs de liquidité. En tant qu'alternative principale aux obligations catastrophes, un recours actif à la réassurance réduit les investissements dans les obligations catastrophes et se traduirait par une baisse de leur liquidité. L'hypothèse 3 est donc vérifiée.

L'impact du Libor sur la liquidité est particulièrement observé lors de la crise de 2007-2009. En période de stress, une baisse du Libor est associée à une baisse de la liquidité. Ce qui pourrait être lié à l'aspect systémique de la crise qui fait que la liquidité baisse indépendamment de la baisse de l'écart de taux.

On observe un lien positif entre les deux indicateurs de liquidité et l'écart de taux des obligations d'entreprises (BBspread) sur la période post-crise (2010 à 2018). L'effet de contagion entre les écarts de taux des obligations d'entreprise et les écarts de taux des obligations catastrophes pourrait expliquer ce résultat. Une hausse des écarts de taux des obligations d'entreprises (BBspread) entraîne une hausse des écarts de taux des obligations catastrophes et donc une baisse de la liquidité.

Depuis la crise financière de 2007-2008, le rendement des actions (S&P 500) n'a pas eu d'impact sur la liquidité des obligations catastrophes. Ceci confirme le résultat trouvé précédemment (section 2.5.1) selon lequel les obligations catastrophes se comporteraient comme des zéros beta depuis la fin de la crise de 2007-2008. L'hypothèse 4 n'est donc pas vérifiée.

2.6 Conclusion

Le présent travail a permis d'analyser les déterminants des écarts de taux des obligations catastrophes et la liquidité en prenant en compte l'impact du taux d'intérêt. Ceci nous a permis de revisiter les déterminants des écarts de taux des obligations catastrophes à la lumière des données plus récentes et exhaustives sur les marchés primaire et secondaire.

Sur le marché secondaire, la perte espérée, le Libor, le temps restant jusqu'à maturité apparaissent comme les variables les plus influentes pour expliquer les écarts de taux des obligations catastrophes. Cependant, nous ne trouvons pas d'évidence de l'impact de la maturité et du sponsor. Le montant à l'émission (AMT) bien que significatif conduit à des écarts de taux significativement plus élevés, ce qui va à l'encontre de l'hypothèse de liquidité.

Depuis la crise des subprimes, le taux d'intérêt apparaît comme la variable la plus influente après la perte espérée (EL). En général, une augmentation du taux d'intérêt s'accompagne d'une hausse des écarts de taux sur le marché secondaire à l'exception de la période de crise de

FIGURE 2.1 – Taux Libor et écart de taux annuel des obligations catastrophes

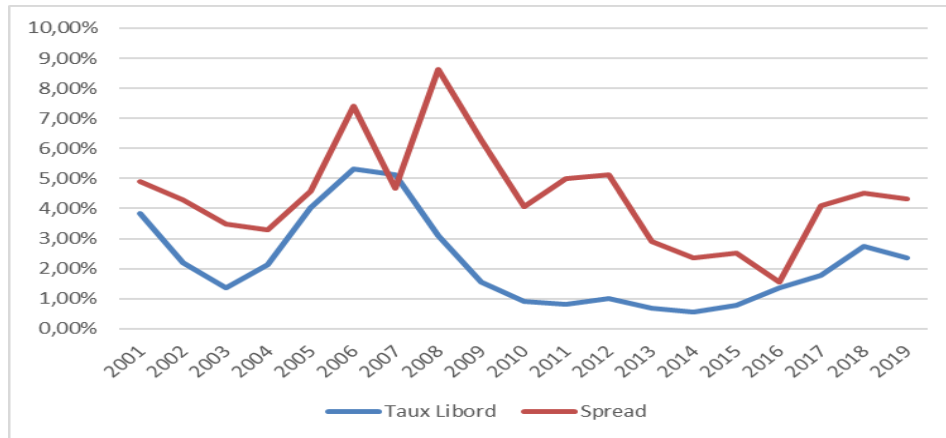


TABLE 2.9 – Test de robustesse pour le proxy dispersion (DISP)

Modèle I2	2002-2006		2007-2009		2010-2018		Effet fixe	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	-8.014***	0.0000	-8.672***	0,0000	-7.549***	0.0000		
LIB	7.523.	0.0615	-27.509***	0,0000	-1.4339	0.8777	-6.639***	0.0000
TTM	-0.078***	0.0000	-0.068***	0,0000	-0.078***	0.0000	-0.079***	0.0000
AMT	0.0000	0.6178	0.0000	0,6308	0.000***	0.0000		
MAT	0.034***	0.0000	0.053***	0,0000	0.034***	0.0000		
BBspread	-5.601	0.3028	15.091***	0,0000	-31.565***	0.0000	5.504**	0.0012
REI	1.393***	0.0000	-0.4412	0,6625	-1.640***	0.0010	0.605***	0.0007
SP	-2.894**	0.0077	-0.1618	0,8384	-0.0700	0.8870	0.2078	0.4801
EL	24.446***	0.0000	23.389***	0,0000	30.441***	0.0000		
Index	0.0562	0.8904	-0.4498*	0,0439	-0.3971	0.1851		
IN	1.612***	0.0002	-0.2199	0,4044	0.0352	0.9064		
MP	-0.4547	0.3564	0.3473	0,2178	-0.0899	0.7629		
PA	-0.4914	0.2050	-0.6058**	0,0060	-0.2436	0.4991		
US	-0.8955*	0.0122	-0.2197	0,3850	0.6054**	0.0096		
EUR	-1.636***	0.0000	-1.0339**	0,0012	-1.019***	0.0000		
JP	-0.4286	0.2579	-1.1586**	0,0012	0.4024	0.1050		
MULT	-1.220**	0.0039	-1.416***	0,0000	0.5851*	0.0141		
WIND	0.723***	0.0006	-0.694***	0,0001	-0.7920	0.2032		
EQ	-0.643**	0.0023	-2.052***	0,0000	-2.110***	0.0007		
MULP					-0.8565	0.1687		
RAT	-0.879***	0.0000	0.1064	0,6745	-1.389***	0.0002		
IS	0.752***	0.0000	-0.0779	0,6037	-0.0845	0.3800		
Annuel	OUI		OUI		OUI		OUI	
R2	0.4466		0.4485		8677.40		0.3339	
Adj.R2	0.4382		0.4394		0.5519		0.2670	
F-statistic	52.86	0.0000	49.56	0.0000	0.55	0.0000	587.36	0.0000
BP	271.45	0.0000	237.54	0.0000	163.88	0.0000	415.80	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan ; AMT (montant à l'émission) ; MAT (Délai entre la date d'échéance et la date d'émission) ; TTM (Le délai avant l'échéance) ; IS (sponsor) ; EL (Perte espérée) ; IN (déclencheur d'indemnisation) ; PA (déclencheur paramétriques) ; INDEX (les déclencheurs basés sur un indice) ; MP (perte modélisée) ; RAT (représente le rating) ; Vent (WIND) ; (EQ) multi-périls (MULP) ; US (États-Unis) ; EU (Europe) ; JP (Japon) ; MULT (Multi-territoire) ; REI (Cycle de réassurance) ; BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB) ; SP (Le rendement du S&P 500) ; annuel= effet annuel ; Adj.R2 = R carré ajusté.

TABLE 2.10 – Test de robustesse pour le proxy volatilité des écarts de taux (VOL)

Modèle I2	2002-2006		2007-2009		2010-2018		Effet fixe	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	-5.688***	0.0000	-4.812***	0.0000	-5.296***	0.0000		
LIB	-0.0441	0.9703	-3.8914*	0.0424	-3.6147	0.4652	-1.7675*	0.0152
TTM	0.0005	0.7494	-0.019***	0.0000	-0.026***	0.0000	-0.019***	0.0000
AMT	0.0000	0.3150	0.0000	0.4218	0.0000**	0.0016		
MAT	0.0005	0.8219	0.0035	0.3756	0.0043*	0.0492		
BBspread	-0.6042	0.7167	3.2756,	0.0737	6.6555**	0.0100	0.7972	0.3041
REI	0.0306	0.7561	1.0299*	0.0232	1.368***	0.0000	0.564***	0.0000
SP	-0.0815	0.8018	-0.4478	0.2266	0.5988	0.0522	-0.0029	0.9826
EL	-1.1190	0.3206	13.222***	0.0000	15.609***	0.0000		
Index	-0.1459	0.2512	-0.0186	0.8548	-0.1904	0.2318		
IN	-0.0282	0.8332	0.1376	0.2533	-0.0183	0.9087		
MP	-0.4061**	0.0085	-0.0683	0.5979	-0.1422	0.3691		
PA	0.1144	0.3427	0.0771	0.4424	-0.4416*	0.0212		
US	0.0465	0.6688	0.522***	0.0000	-0.0704	0.5704		
EUR	-0.1366	0.2629	-0.4461**	0.0033	-1.059***	0.0000		
JP	0.2484*	0.0297	0.0465	0.7859	-0.444***	0.0008		
MULT	0.689***	0.0000	-0.0331	0.8228	-0.1526	0.2280		
WIND	0.428***	0.0000	-0.1038	0.2051	0.3477	0.2931		
EQ	0.352***	0.0000	-0.726***	0.0000	-0.5316	0.1090		
MULP	-0.676***	0.0000	0.277*	0.0220	0.3030	0.3595		
RAT	-0.322***	0.0000	-0.1160	0.1013	-0.5128*	0.0103		
IS					0.1076*	0.0354		
Annuel	OUI		OUI		OUI		OUI	
R2	0.5417		0.3295		0.4352		0.1268	
Adj.R2	0.534		0.317		0.431		0.039	
F-statistic	67.656	0.0000	25.884	0.0000	102.552	0.0000	170.886	0.0000
BP	341.050	0.0000	165.390	0.0000	263.640	0.0000	436.080	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan ; AMT (montant à l'émission) ; MAT (Délai entre la date d'échéance et la date d'émission) ; TTM (Le délai avant l'échéance) ; IS (sponsor) ; EL (Perte espérée) ; IN (déclencheur d'indemnisation) ; PA (déclencheur paramétriques) ; INDEX (les déclencheurs basés sur un indice) ; MP (perte modélisée) ; RAT (représente le rating) ; Vent (WIND) ; (EQ) multi-périls (MULP) ; US (États-Unis) ; EU (Europe) ; JP (Japon) ; MULT (Multi-territoire) ; REI (Cycle de réassurance) ; BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB) ; SP (Le rendement du S&P 500) ; annuel= effet annel ; Adj.R2 = R carré ajusté.

2007-2009 pendant laquelle on a observé une relation inverse. Ceci pourrait être lié à l'aspect systémique de la crise entraînant une baisse de la liquidité des obligations catastrophes. Depuis la crise de 2007-2009, la baisse des taux d'intérêt a eu pour conséquence de favoriser la liquidité des obligations catastrophes via la baisse des écarts de taux. En effet, la baisse durable des taux d'intérêt pourrait encourager les investisseurs à se tourner vers des actifs à rendement plus élevé et moins corrélé avec le marché des capitaux tels les obligations catastrophes. Aussi, il ressort de cela que depuis la crise financière de 2007-2008, il n'y a pas de lien significatif entre le marché des actions et le marché des obligations catastrophes. Les obligations catastrophes se comporteraient comme des zéros beta pendant cette période. Cela étant, les obligations catastrophes sont devenues plus propices à la diversification ces dernières années. Ceci encouragerait aussi leur liquidité.

La volatilité des écarts de taux sur le marché secondaire et la dispersion par rapport au marché ont été utilisées comme indicateurs pour capter l'illiquidité du marché des obligations catastrophes. Cela étant, une analyse des déterminants des deux indicateurs de liquidité a permis de mettre en exergue les variables spécifiques aux obligations catastrophes ainsi que les variables macroéconomiques susceptibles d'expliquer la liquidité des obligations catastrophes. Parmi ces variables, les plus significatives à la fois pour les deux indicateurs sont la perte espérée, l'indice de réassurance, le temps restant jusqu'à maturité, le rating, le territoire couvert et le Libor. Cependant, l'impact du Libor sur les deux indicateurs est particulièrement observé lors de la crise de 2007-2009. En se référant aux deux indicateurs de liquidité, il n'y a pas d'évidence du montant à l'émission, du sponsor et du rendement du S&P 500 sur la liquidité des obligations catastrophes.

En somme, l'analyse a montré l'impact prépondérant du Libor sur l'écart de taux des obligations catastrophes ces dernières années. Si le Libor apparaît comme une variable clé des écarts de taux, sa relation avec les deux indicateurs apparaît seulement évidente en période de stress. Il se pourrait que ces indicateurs ne soient pas en mesure de capter toutes les dimensions de la liquidité des obligations catastrophes.

Nous aboutissons aux mêmes conclusions concernant le T-Bill. Ce qui pourrait signifier que la manipulation du Libor n'a pas eu d'effet significatif sur l'écart de taux et la liquidité des obligations catastrophes.

Ce travail vient à point nommé pour mettre en exergue l'influence du Libor sur les écarts de taux et la liquidité des obligations catastrophes compte tenu du contexte actuel de la fin du Libor au profit d'autres taux de référence sans risque (RFRs).

2.7 Appendix

TABLE 2.11 – Modèle avec effet fixe individuel avec le Libor comme taux d'intérêt

	Modèle I2		2002-2006		2007-2009		2010-2018	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	-0.1262***	0.0000	-0.0763.	0.0852	-0.2072***	0.0000	1.3669***	0.0000
LIB	0.0002***	0.0000	0.0000	0.7815	0.0004***	0.0000	0.0007***	0.0000
TTM	0.5152***	0.0000	0.5303***	0.0000	0.4532***	0.0000	0.1048	0.2182
BBspread	0.0455***	0.0000	0.0301***	0.0000	0.1009***	0.0000	0.0344***	0.0001
REI	0.0255***	0.0000	0.0396***	0.0005	0.0059	0.5349	-0.0072	0.3917
SP	-0.1262***	0.0000	-0.0763	0.1197	-0.2072***	0.0000	1.3669***	0.0000
Annuel	OUI		OUI		OUI		OUI	
R2	0.1129		0.1657		0.3415		0.0777	
Adj.R2	0.0242		0.0706		0.2712		-0.0109	
F-statistic	149.71	0.0000	41.54	0.0000	92.23	0.0000	59.78	0.0000
BP	162.05	0.0000	102.39	0.0000	203.50	0.0000	73.49	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan ; TTM (Le délai avant l'échéance) ; REI (Cycle de réassurance) ; BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB) ; SP (Le rendement du S&P 500) ; annuel= effet annuel ; Adj.R2 = R carré ajusté.

TABLE 2.12 – Modèle avec effet fixe individuel avec le Tbill comme taux d'intérêt

	Modèle I2		2002-2006		2007-2009		2010-2018	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	-0.0552	0.1716	0.0347	0.5010	-0.0652	0.5739	1.2364	0.0000
TBILL	0.0002***	0.0000	0.0001	0.2331	0.0002	0.0706	0.0007***	0.0000
TTM	0.5253***	0.0000	0.5866	0.0000	0.4985***	0.0000	0.0919	0.2860
BBspread	0.0458***	0.0000	0.0268	0.0000	0.1122***	0.0000	0.0352***	0.0001
REI	0.0280***	0.0000	0.0432	0.0001	0.0098	0.3072	-0.0074	0.3819
SP	-0.0552	0.1716	0.0347	0.5010	0.0519*	0.0394	1.2364	0.0000
Annuel	OUI		OUI		OUI		OUI	
R2	0.1103		0.1640		0.3311		0.0747	
Adj.R2	0.0214		0.0688		0.2596		-0.0142	
F-statistic	145.84	0.0000	41.04	0.0000	88.01	0.0000	57.28	0.0000
BP	162.96	0.0000	102.11	0.0000	200.45	0.0000	74.14	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan ; TTM (Le délai avant l'échéance) ; REI (Cycle de réassurance) ; BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB) ; SP (Le rendement du S&P 500) ; annuel= effet annuel ; Adj.R2 = R carré ajusté.

TABLE 2.13 – Déterminants des écarts de taux pour le type multi-péril

	Modèle I2		2002-2006		2007-2009		2010-2018	
	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value	Estimate	P-Value
(Intercept)	-0.0327**	0,0048	-0.0113	0,6219	-0.0132	0,3469	0.0319**	0,0023
LIB	-0.1182*	0,0172	0.1415	0,2907	-0.347***	0,0001	1.695***	0,0000
TTM	0.000***	0,0000	0.0004*	0,0165	0.001***	0,0000	0.001***	0,0000
AMT	1.676***	0,0000	2.261***	0,0000	1.821***	0,0000	1.465***	0,0000
MAT	0.0000	0,2191	0.0000	0,5221	0.0000	0,7575	0.000**	0,0023
EL	-0.001***	0,0000	-0.0009**	0,0015	-0.0007**	0,0071	-0.001***	0,0000
Index	-0.0017	0,6118	0.0002	0,9837	0.0036	0,3626	-0.0117,	0,0973
IN	0.0015	0,6751	-0.0170*	0,0351	-0.0082,	0,0821	-0.0076	0,2837
MP	-0.0016	0,6561			-0.0123*	0,0103	-0.0045	0,5059
PA	-0.017***	0,0000			-0.023***	0,0000	-0.024**	0,0064
US	0.042***	0,0000	0.024***	0,0003	0.042***	0,0000	0.0010	0,5483
EUR	0.0138	0,3011					-0.0254**	0,0019
JP	0.0358**	0,0041					-0.0109	0,1300
MULT	0.039***	0,0001			0.0310**	0,0013		
WIND								
EQ								
MULP								
RAT	-0.011***	0,0001	-0.022**	0,0034	-0.0007	0,873	-0.0173*	0,0334
IS	0.005**	0,0051	-0.0103	0,3604	-0.0048	0,1433	0.0049*	0,0426
BBspread	0.611***	0,0000	0.906***	0,0000	0.663***	0,0000	-0.2654*	0,0341
REI	0.059***	0,0000	0.036***	0,0003	0.0624**	0,0034	0.0349**	0,0042
SP	0.029**	0,0016	0.0892*	0,0214	0.0412*	0,0142	-0.0213,	0,0794
Annuel							Oui	
R2	0,7138		0,82872		0,7925		0,6441	
Adj.R2	0,7107		0,82081		0,7854		0,6393	
F-statistic	231,27		104,74		111,19		134,49	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan ; AMT (montant à l'émission) ; MAT (Délai entre la date d'échéance et la date d'émission) ; TTM (Le délai avant l'échéance) ; IS (sponsor) ; EL (Perte espérée) ; IN (déclencheur d'indemnisation) ; PA (déclencheur paramétriques) ; INDEX (les déclencheurs basés sur un indice) ; MP (perte modélisée) ; RAT (représente le rating) ; Vent (WIND) ; (EQ) multi-périls (MULP) ; US (États-Unis) ; EU (Europe) ; JP (Japon) ; MULT (Multi-territoire) ; REI (Cycle de réassurance) ; BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB) ; SP (Le rendement du S&P 500) ; annuel= effet annel ; Adj.R2 = R carré ajusté.

TABLE 2.14 – Déterminants des écarts de taux pour le type vent

	Modèle I2		2002-2006		2007-2009		2010-2018	
(Intercept)	-0.0332**	0.0053	-0.0390	0.1090	0.0246	0,1019	0.0153	0,2421
LIB	-0.0887,	0.0806	0.0443	0.6715	-0.2413*	0,0142	0.6312*	0,0352
TTM	0.0004***	0.0000	0.0001	0.4391	0.0004*	0,0202	0.0004***	0,0002
AMT	0.0000	0.1469	2.5730***	0.0000	2.0759***	0,0000	1.4243***	0,0000
MAT	-0.0005***	0.0000	0.0000*	0.0131	0.0000***	0,0002	0.0000	0,3392
EL	1.6938***	0.0000	0.0002	0.4063	-0.0006*	0,0139	-0.0006**	0,0015
Index	-0.0018	0.5870	0.0025	0.8598	0.0176*	0,0380	-0.0017	0,8667
IN	0.0019	0.5891	0.0030	0.8672	0.0027	0,7461	-0.0037	0,7086
MP	-0.0005	0.8910	-0.0017	0.9333	0.1115***	0,0000	-0.0322*	0,0268
PA	-0.0167***	0.0000	-0.0243	0.1366	-0.0060	0,4176	0.0099	0,4031
US	0.0415***	0.0001	0.0271*	0.0321	0.0218**	0,0016	-0.0114	0,3237
EUR	0.0163	0.2239	-0.0008	0.9471	0.0062	0,4170	0.0147	0,2534
JP	0.0353**	0.0055	0.0045	0.7522	-0.0103	0,3095	0.0074	0,5351
MULT	0.0390***	0.0001	0.0328***	0.0000	-0.0189***	0,0001	0.0038	0,2870
WIND	-0.0107***	0.0001	0.0063	0.3055	0.2508**	0,0093	0.2395	0,1725
EQ	0.0047**	0.0092	0.6962***	0.0000	0.1428***	0,0000	0.0456*	0,0111
MULP	0.6051***	0.0000	0.0085	0.3628	-0.0191	0,2911	0.0161	0,4009
RAT	-0.0634***	0.0000	-0.0725*	0.0226				
IS	0.0286**	0.0019	-0.0270**	0.0033				
BBspread	-0.0332**	0.0053	-0.0293***	0.0007				
REI	-0.0887,	0.0806	0.0002	0.9751				
SP	0.0004***	0.0000	0.0033	0.7385				
Annuel	0,7148						Oui	
R2	0,7113		0.6002		0,7520		0,3090	
Adj.R2	204,7290	0.0000	0.5835		0,7424		0,2975	
F-statistic	199,46	0.0000	35.89	0.0000	78,51	0.0000	26,79	0.0000

Note :BP = test de Breusch-Pagan; AMT (montant à l'émission); MAT (Délai entre la date d'échéance et la date d'émission); TTM (Le délai avant l'échéance); IS (sponsor); EL (Perte espérée); IN (déclencheur d'indemnisation); PA (déclencheur paramétriques); INDEX (les déclencheurs basés sur un indice); MP (perte modélisée); RAT (représente le rating); Vent (WIND); (EQ) multi-périls (MULP); US (États-Unis); EU (Europe); JP (Japon); MULT (Multi-territoire); REI (Cycle de réassurance); BBspread (écart de taux des obligations d'entreprises de cote BB); SP (Le rendement du S&P 500); annuel= effet annel; Adj.R2 = R carré ajusté.

Chapitre 3

Pricing dynamics and solvency in insurance : capital allocation, surplus and insurance cycle

Résumé

Cet article^a propose un modèle de tarification stochastique multi-période basé sur la valeur de l'option par défaut avec cycle d'assurance pour examiner les interactions entre la tarification, l'allocation de surplus et la solvabilité pour un assureur multi-lignes. Le modèle innovant proposé capture les aspects dynamiques de la capitalisation et l'impact de la fixation dynamique des primes sur la solvabilité et la gestion des risques de l'assureur. Nous avons dérivé la prime d'équilibre pour différentes conceptions de contrats d'assurance. Nos résultats montrent que l'allocation de l'excédent par ligne affecte le défaut des autres lignes et dépend de la corrélation entre le ratio de solvabilité et le ratio de pertes de la ligne. La présence du cycle d'assurance peut renforcer la solvabilité à condition que l'assureur adopte la bonne stratégie de souscription. Sur la base de la corrélation entre le ratio de solvabilité et le ratio de pertes de la ligne, l'assureur peut prendre une décision stratégique concernant la tarification équitable. Ceci permet de concilier les objectifs de tarification avec la solvabilité de l'assureur et sa prise de décision stratégique dans une perspective de long terme.

Mots-clés : Prime, défaut, allocation de capital , surplus, cycle d'assurance.

Codes JEL : G22

a. Cet article a été publié dans la revue « Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance »

Abstract

This paper proposes a stochastic multi-period pricing model based on the default option value with insurance cycle to examine the interactions among pricing, surplus allocation and solvency for a multiline insurer. The proposed innovative model captures the dynamic aspects of capitalization and the impact of dynamic premium setting on the insurer's solvency and risk management. We derived the equilibrium premium for different insurance contract designs. Our results show that the allocation of surplus per line affects the default of the other lines and depends on the correlation between the solvency ratio and the loss ratio of the line. The presence of the insurance cycle can boost solvency provided that the insurer adopts the right underwriting strategy. Based on the correlation between the solvency ratio and the loss ratio of the line, the insurer can make strategic decision about fair pricing. This makes it possible to reconcile the objectives of pricing with the insurer's solvency and its strategic decision-making in a long-term perspective.

Keywords : Premium, default, capital allocation, surplus, insurance cycle

JEL-codes : G22

3.1 Introduction

In recent years, the demand for greater transparency and corporate accountability in risk management has been particularly strong. In a recent development, insurance regulators in North America have adopted the ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) requirements, which already exist under the second pillar of Solvency II in Europe. Under ORSA, companies are required in their decision-making and strategic analysis process to assess, on an ongoing and forward-looking basis, the solvency needs related to the insurer's overall and specific risk profile (Santomil and González (2020) ; Planchet and Robert (2016)). This should be reflected in the insurer's pricing. In short, insurance prices should reflect the insurer's overall risk.

There are many theories in the literature to explain insurance pricing, including : the financial asset valuation model (Cummins and Harrington (1985) ; Zhang and Nielson (2012)), actuarial or discounted cash flow methods (Myers and Cohn (1987) ; Cummins (1990) ; Diers et al. (2016) ; Hahn (2017)), the financial model of arbitrage pricing Kraus and Ross (1982), and the financial model based on option pricing theory (Doherty and Garven (1986) ; Phillips and Allen (1998) ; Sherris (2006) ; Ibragimov et al. (2010) ; Zhang and Nielson (2012) ; Soumaré and Tafolong (2017)). Unlike traditional actuarial models, financial pricing models are asset-based and consider default risk. These financial models represent a significant improvement over traditional actuarial models because they recognize that insurance prices should be consistent with an asset valuation model or, at a least, avoid the creation of arbitrage opportunities (Phillips and Allen, 1998).

In the case of multiline insurances, pricing may sometimes require an optimal capital allocation rule to determine the appropriate insurance premium for each line (Merton and Perold (1993) ; Myers and Read Jr (2001) ; Sherris (2006) ; Ibragimov et al. (2010) ; Zhang and Nielson (2012)). This is particularly true in the presence of friction costs and in a limited liability framework where the insurer is obliged to consider the risk of default in order to guarantee fair pricing. Thus, following in the footsteps of Merton and Perold (1993), Myers and Read Jr (2001) determined a capital allocation rule using an incremental technique based on the Euler method. This marginal method is based on an ex-ante allocation but satisfies the property that the sum of capital injections is exactly equal to the total quantity of capital to be allocated (adding up property). Sherris (2006) and Ibragimov et al. (2010) determined the capital allocation for multiline insurances based on the Myers and Read Jr (2001) model ; however, they applied an ex-post allocation rule unlike these previous authors. Zhang and Nielson (2012) also opted for an ex-post capital allocation rule in a multiline model based on the Doherty and Garven (1986) model. In addition, they considered the interactions among available assets, premium levels and investment income, which is not done by Sherris (2006). Indeed, Sherris (2006) considered the links among solvency, capital allocation, and fair rate of return in insurance. A method to allocate capital to lines of business is developed based on an economic definition of solvency and the market value of the insurer's balance sheet. The main

finding of Sherris (2006) is that there is no link between the default per line and the allocation of surplus to business lines. Moreover, similar to the previously cited authors, Sherris (2006) focused on a one-period static model and do not consider the dynamic features of pricing and capitalization. A continuous and prospective assessment of solvency requires considering the intertwined dynamics of pricing, capital allocation, insurer's solvency and insurance cycle. In practice, these interactions are part of multi-periodic strategic decisions.

The objective of this work is to propose a multi-periodic dynamic model in order to examine the dynamics and interactions among pricing, surplus allocation and solvency for a multi-line insurer. More specifically, we address the following research questions : (1) What are the impacts of premiums and funding dynamics on the insurer's solvency and capital allocation ? (2) Does the default risk affect the insurer's surplus ? (3) What is the impact of the insurance cycle on the insurer's solvency in a limited liability context ?

To answer these research questions, we propose a stochastic multi-periodic model of pricing and capital allocation. We extend upon the financial pricing model of Sherris (2006) in a dynamic context. This approach considers the possibility that the insurer may default at any time. As default is captured by an exchange option whose underlyings are the assets and liabilities, the insurer's insolvency is measured by the value of the exchange option over time. This dynamic framework accounts for the loss growth rate (including inflation), the loss distribution, the time interdependence and the insurance cycle. We assume that claims payments are made gradually and the value of assets changes with premiums and investment income. We also allow the insurer to find the equilibrium premium with respect to some minimum performance target over a given time horizon. The insurer may also adjust its premium to reflect its exposure to default risk given its limited liability. The insurance cycle is modelled through the security loading and claim rate by an autoregressive AR(2) model.

In the proposed model, the prices of the different business lines in the market are obtained using a capital allocation method based on the value of the insolvency exchange option (Zhang and Nielson (2012)). The default option is allocated on the basis of the proportion of claims amounts generated by each line (Merton and Perold (1993) ; Myers and Read Jr (2001) ; Sherris (2006) ; Zhang and Nielson (2012)). The allocation of capital is carried out by setting an ex-post allocation rule, making it possible to allocate equity capital according to the risk of loss in each line. It should be noted that the advantage of multiline insurance is the diversification benefit that it can generate, particularly when the lines are independent. There is evidence that an insurer can reduce its overall risk by increasing the number of lines of business in the portfolio (Sherris (2006) ; Zhang and Nielson (2012)).

Our contributions to the existing literature are threefold. Firstly, we propose an innovative dynamic stochastic multi-periodic pricing model of capital allocation based on the default option of the multiline insurer. Previous works that examined the insurer's solvency and

capital allocation were limited to a single periodic static model. We go beyond a one-period model by studying the dynamic of solvency over several periods from a long-term perspective. Additionally, in the event of insolvency, we account for the fact that claims payouts by business lines may be determined by other factors such as corporate restructuring. Secondly, we use this proposed model to study the intertwined effects of capitalization and pricing dynamics on the insurer's solvency. Thirdly and finally, we account for the insurance cycle in the financial default option pricing model. This has until now only been considered in actuarial pricing models. This extension allows us to explicitly measure the impact of the insurance cycle on the insurer's solvency in order to better explain how the equilibrium premium is determined and to account for underwriting strategies in a context of exogenous price fluctuations.

Our results show that the evolution of the insurer's solvency depends on the premium and the funding dynamics. Unlike Sherris (2006), we found that the allocation of surplus per line affects the default of the other lines of business and depends on the correlation between the solvency ratio and the loss ratio of the line. Our result is more general and Sherris' (2006) result may be a special case where the correlation between the line's solvency ratio and its loss ratio is perfect. The higher the probability of loss of the line in the event of default, the lower its competitive premium-to-liability ratio. However, the larger the default risk of the line, the more its premium will be lower if its liabilities are lower. In certain situations, the presence of the cycle will allow the insurer to boost its solvency provided that it adopts the right underwriting strategy. In sum, the proposed innovative model includes factors that help better understand how prices are determined at equilibrium. This makes it possible to reconcile the objectives of designing insurance contracts with the insurer's solvency and its strategic decision-making from a long-term perspective.

The rest of the paper is structured as follows. Section 3.2 presents the model. Section 3.3 calibrates and simulates the model using real data. We also discuss the simulated results in this section. Section 3.4 introduces and analyses the impact of the insurance cycle in the model. Section 3.5 concludes.

3.2 Model

Our model is based on extensions of the models of Sherris (2006) and Zhang and Nielson (2012). The analysis will therefore be based on the assumptions that insurers have limited liability. Sherris (2006) and Zhang and Nielson (2012) assume a single premium and a single paid-up capital at the beginning of the period. We generalize these earlier models in a dynamic multi-period framework by including the temporal evolution of the insurer's liabilities and assets. We assume that claims payments are made gradually, as opposed to a single payment at the end of the contract in these earlier models. In addition, our model will include time-varying premiums and capital allocation dynamics. We consider different premium configurations and

the speed of recapitalization.

In line with Sherris (2006) and Zhang and Nielson (2012), among others, we assume an arbitrage-free pricing model and make a complete market assumption. These assumptions ensure easy tractability of our proposed pricing model. Under the complete market assumption, it exists a risk neutral probability Q . We denote by E^Q the expectation under this risk neutral probability measure. r_t is the risk-free interest rate.

Dynamic of the insurer's balance sheet

3.2.1 Insurer's liabilities

The insurer has several business lines indexed by $i = 1, \dots, N$. Denote by $L_i(t)$ the value of liabilities of line i at time t . Assume that the dynamics of the liability $L_i(t)$ for business line i at time t is determined according to the following diffusion process adopted by Cummins (1988) :

$$dL_i(t) = [\pi_L L_i(t) + S_i(t) - \eta_i L_i(t)] dt + \sigma_{L_i} L_i(t) dW_{L_i}(t), 0 \leq t \leq T \quad (3.1)$$

with $dW_{L_i}(t) dW_{L_j}(t) = \rho_{ij} dt$, $i \neq j$, ρ_{ij} is the correlation between the idiosyncratic risks of line i and line j . π_L is the inflation rate. T is the maturity of the contract. $\sigma_{L_i}^2$ is the instantaneous variance of claims from business line i . $W_{L_i}(t)$ is a Brownian motion. Claims are paid each period at a rate η_i . Therefore, the total liability of business line i , $L_i(t)$, increases with the inflation rate (π_L) and the arrival of new claims ($S_i(t)$) and decreases when claims are paid ($\eta_i L_i(t)$). When the amount of new claims $S_i(t)$ is proportional to the liability $L_i(t)$, then the liability follows a lognormal process.

The total liability for the insurance company at each period t is :

$$L(t) = \sum_{i=1}^N L_i(t)$$

It is important to note that under the limited liability assumption, it is possible that the amount compensated will be less than the total value of claims. The economic value of the insurer's total liability takes into account the impact of insolvency on claims payouts. It depends on the investment policy and the amount of the insurer's capital at the time the policy is issued.

3.2.2 Insurer's assets

The value of these assets is determined according to the diffusion process adopted by Cummins (1988). In addition, we consider the dynamic evolution of capital. The initial market value of assets at time 0, $A(0)$, consists of both the market premiums paid by policyholders, $P(0)$, and the capital contribution of the insurer's shareholders, $C(0)$:

$$A(0) = C(0) + P(0). \quad (3.2)$$

This initial asset is invested in a portfolio of assets according to the insurance company's investment policy. Hence, at each time t , the value of the insurer's assets is expected to increase with the return on investment, the new capital contribution $E(t)$ and the collection of new premiums $P(t)$, and to decrease with the payout of claims. We assume the dynamic of the asset at time t , $A(t)$, is as follows :

$$dA(t) = \left[\mu_A A(t) + E(t) + P(t) - \sum_{i=1}^N \eta_i L_i(t) \right] dt + \sigma_A A(t) dW_A(t), 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

where μ_A is the instantaneous rate of return on assets and σ_A^2 is the instantaneous variance of assets returns. $W_A(t)$ is a Brownian motion with $dW_{L_i}(t) dW_A(t) = \epsilon_{LiA} dt, \forall i$. ϵ_{LiA} is the correlation between the specific risk of business line i and the idiosyncratic risk of assets. The new capital contribution $E(t)$ depends on capitalisation speed (see Equation (3.16) below) and is equal to zero when capital is not adjusted.

3.2.3 Surplus, default and equilibrium premium

Payments to policyholders and default option

Let's consider a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, where \mathbb{P} is the measure of probability on \mathcal{F} . \mathcal{F} is a σ -algebra of subsets Ω with an increasing filtration $F_t \subset \mathcal{F}, t \in [0, T]$.

We denote by $S(t+1)$ the surplus at time $t+1$. Thus $S(t+1) = A(t+1) - L(t+1)$. The market value at time t of the surplus $S(t+1)$ denoted by $S(t)$ is :

$$S(t) = E^Q [\exp(-r_t) \cdot (A(t+1) - L(t+1)) | F_t] \quad (3.4)$$

From the assets and liabilities dynamics given above, the values of the balance sheet items at each time $t+1$ are random. At any given time $t+1$ up to contract maturity T , two possibilities exist : either the insurer remains solvent, i.e. $A(t+1) \geq L(t+1)$, or it becomes insolvent $A(t+1) < L(t+1)$. If the insurer is solvent, total liabilities are fully paid and the surplus $(A(t+1) - L(t+1) > 0)$ belongs to shareholders and the government. In the event of insolvency $(A(t+1) - L(t+1) < 0)$, liabilities are not fully paid, which affects policyholders, shareholders and the government. Under such circumstances, the insurer is forced to liquidate its assets to partially pay policyholders. Shareholders receive nothing and lose their investment capital. They are not, however, required to pay any additional losses due to the limited liability feature. Policyholders do not receive all the expected payments $L(t+1)$, they only obtain the liquidation value of assets $A(t+1)$.

Under these assumptions, the payoffs of the default $D(t+1)$ at date $t+1$ is :

$$D(t+1) = \max(L(t+1) - A(t+1), 0) \quad (3.5)$$

The value $D(t)$ of this default payoff at time t is equivalent to the value of the insolvency exchange option; its value is given by :

$$D(t) = E^Q [\exp(-r_t) \cdot \max(L(t+1) - A(t+1), 0) | F_t] \quad (3.6)$$

The payment $CP(t+1)$ to insured policyholders at date $t+1$ is :

$$CP(t+1) = \min(L(t+1), A(t+1)) \quad (3.7)$$

The value at time t , $CP(t)$, of this $t+1$ payment to insured policyholders is :

$$CP(t) = E^Q [\exp(-r_t) \cdot \min(L(t+1), A(t+1)) | F_t] \quad (3.8)$$

$$= E^Q [\exp(-r_t) \cdot (L(t+1) - \max(L(t+1) - A(t+1), 0)) | F_t] \quad (3.9)$$

$$= E^Q [\exp(-r_t) \cdot L(t+1) | F_t] - D(t) \quad (3.10)$$

It can be noticed that $D(t)$ is equivalent to an exchange put option as follows :

$$D(t) = Put[A(t+1), L(t+1)], \quad (3.11)$$

with the function $Put[X, Y] = E^Q [\exp(-r_t) \cdot \max(Y - X, 0) | F_t]$ whatever the random variables X, Y .

The value of the default exchange option reflects both the probability of insolvency and the expected severity of insolvency based on risk-neutral probabilities. It accounts for the underlying economic risk factors, and the insurer's liability and solvency level. Insurers with higher levels of economic capital will set higher prices for their insurance contracts (Sherris (2006)).

Shareholders' value

To determine the insurer's profit, we consider government taxes because these taxes can sometimes have a non-negligible impact on premiums (Garven (1992); Zhang and Nielson (2012)). If the insurer is solvent, it generates a positive profit that is shared among the government and shareholders. For government taxes $TG(t+1)$ to be paid to the government at date $t+1$, we apply the income tax rate I_a to the generated profit at time $t+1$ as follows :

$$TG(t+1) = I_a \times \max(A(t+1) - L(t+1), 0) \quad (3.12)$$

We denote by $Y(t)$ the market value at date t of the shareholders' net profit or the net surplus at date $t+1$ after deduction of taxes. The market value of this net profit is expressed as follows :

$$Y(t) = E^Q [\exp(-r_t) \times (A(t+1) - CP(t+1) - TG(t+1)) | F_t]. \quad (3.13)$$

Let $C(t)$ be the level of capital at t . We assume that the insurance premium is set at a level such that shareholders are remunerated at a fair return (Zhang and Nielson (2012)). Hence, the current market value of shareholders' net profit must be equal to the initial capital investment $C(t)$. Thus, the equilibrium premium $P(t)$ satisfies the following equilibrium :

$$C(t) = Y(t). \quad (3.14)$$

3.2.4 Dynamics of the insurer's capital

Now, we will describe the evolution of the capital $C(t)$.

We first assume that the insurer determines a minimum fixed capital amount $C(0)$. This minimum capital is set on the basis of the insurer's risk exposure over the entire contract period T . Instead of imposing a fixed level of capital from the outset, we allow the insurer to partially adjust its capital toward a target capital requirement C_θ . We assume that the capital amount grows between subsequent time periods at the rate μ_c , which yields :

$$C(t) = C(t-1)(1 + \mu_c) + \max(C_\theta - C(t-1), 0), \quad (3.15)$$

where C_θ is the long-term target capital level, $C(t)$ is the level of capital at t , and γ is the speed of adjustment.

Therefore, the new capital contribution $E(t)$ in Equation (3.3) is given by :

$$E(t) = \max(C_\theta - C(t-1), 0). \quad (3.16)$$

The rationale is that since it is costly to hold a high level of capital, the insurer needs to build up its capital dynamically through successive adjustments during the reference period ; this is precisely the concept of partial adjustment.

Our capital adjustment model (Equation (3.15)) is an extension of Flannery and Rangan (2006) partial adjustment model. According to this latter model, the target capital level remains an unattainable ideal, particularly because of market frictions, which requires partial adjustments each period towards reaching the long-term capital target. The basic adjustment process proposed by these authors is :

$$C(t) - C(t-1) = \gamma(C_\theta - C(t-1)).$$

We extend this capital adjustment model by restricting the insurer to not exceed the target capital level, which gives Equation (3.15), assuming that the existing capital level grows by μ_c between $t-1$ and t .

3.2.5 Default by line, capital by line and insurance premium by line

Allocation of the default option and Payments by line.

To examine competitive market prices for the different business lines, it is necessary to find a method to allocate the value of the default exchange option among the business lines. This must take into account the likelihood of default of each business line. For that purpose, in the same vein as Sherris (2006) and Zhang and Nielson (2012), we will allocate the default option on the basis of equal priority among business lines. In other words, business lines have equal priority for unpaid claims in the event of an insurer's default. This means that if a default occurs, the amounts that policyholders can expect to receive are proportional to the value of claims they hold against the insurer. Hence, a proportion L_i/L of the insurer's total default is assigned to each business line i , where L_i is the amount of outstanding liability for business line i and L is the insurer's total liability.

The default assigned to business line i at time $t+1$ denoted by $D_i(t+1)$ is therefore :

$$D_i(t+1) = \frac{L_i(t+1)}{L(t+1)} \cdot D(t+1). \quad (3.17)$$

The value at time t of the default option of business line i is :

$$D_i(t) = E^Q \left[\exp(-r_t) \cdot \frac{L_i(t+1)}{L(t+1)} \cdot D(t+1) | F_t \right]. \quad (3.18)$$

An interesting alternative would be to use the dynamic allocation method of Boonen et al. (2019) based on compositional data methods. However, we use the proportional method to reduce the complexity of the model, and in particular, to guarantee the comparison of our results with those of Sherris's (2006) model, which we have extended here.

The market value at time t of the surplus $S_i(t+1)$ denoted by $S_i(t)$ is :

$$S_i(t) = E^Q [\exp(-r_t)(A_i(t+1) - L_i(t+1)) | F_t]. \quad (3.19)$$

$A_i(t)$, corresponds to the asset per line.

The payoff of the payment $CP_i(t+1)$ of business line i at time $t+1$ is :

$$CP_i(t+1) = L_i(t+1) - D_i(t+1) \quad (3.20)$$

Hence, the value at time t , $CP_i(t)$, of this $t+1$ payment to insured policyholders is :

$$CP_i(t) = E^Q [\exp(-r_t) [L_i(t+1) - D_i(t+1)] | F_t] \quad (3.21)$$

$$= E^Q [\exp(-r_t) L_i(t+1) | F_t] - D_i(t). \quad (3.22)$$

The market value of the payment by business line, $CP_i(t)$, corresponds to the competitive premium per line.

Capital allocation.

The objective of the allocation is to enhance the *Pareto* optimal performance of each business line and the overall performance of the insurer. This involves finding the premium per line, $P_i(t)$, such that the initial value of capital equals the fair value of assets after payment of claims and taxes. Let $C_i(t)$ be the capital allocated to business line i . Formally, at each instant t , the following equality must be maintained :

$$C_i(t) = E^Q [\exp(-r_t)(A_i(t+1) - CP_i(t+1) - TG_i(t+1))|F_t] \quad (3.23)$$

Hence, to obtain the premium per line, we need to determine the amount of capital allocated to the line : $C_i(t)$. Therefore, we need to find an allocation rule a_{it} so that :

$$C_i(t) = a_{it}C(t) \quad (3.24)$$

We approach the problem in the same way as Zhang and Nielson (2012), by setting an allocation rule based on the default option. However, unlike Zhang and Nielson (2012), since we are in a dynamic setting, the capital allocation is made at each time t for the period $[t, t+1]$ until T the maturity of all contracts :

$$a_{it} = \frac{Put\left(\frac{L_i(t)}{L(t)} \times A(t), L_i(t)\right)}{Put(A(t), L(t))} \quad (3.25)$$

where Put is the value of the exchange option, a_{it} represents the corresponding allocation rule at date t , and $\sum_{i=1}^N a_{it} = 1$. The rule adopted is directly related to the value of capital. It is well-specified since it satisfies the properties required for a capital allocation. The adoption of an allocation rule based on the default exchange option ensures that lines that are more likely to experience higher losses at a time when the company is insolvent get more capital.

Equilibrium premiums per line, $\mathbf{P}_i(t)$

After getting the capital by line, we can derive the equilibrium premium, $P_i(t)$ so that Equation (3.23) holds, i.e. :

$$C_i(t) = E^Q [\exp(-r_t)(A_i(t+1) - CP_i(t+1) - TG_i(t+1))|F_t].$$

We know that $A_i(t)$ is a function of the premium $P_i(t)$ and the capital $C_i(t)$. $TG_i(t)$ is a function of $A_i(t)$ and therefore of $P_i(t)$ and $C_i(t)$. The premium for each line can therefore be expressed as a function of capital allocated per line, claims payments per line and assets per line. Denoting by f this premium function, we have :

$$P_i(t) = f(C_i(t), CP_i(t+1), A_i(t+1)). \quad (3.26)$$

We need to study the functional form of f ; however, since we don't have a closed-form, we use simulation and optimization techniques to get the equilibrium premium.

Note that the capital and the premium may have different dynamics over time. To determine the equilibrium premiums, we consider three different dynamics for premiums per business line to maintain the equilibrium. These three different premium configurations are :

1. A single premium P_{i0} , paid upfront, which guarantees equality between the current value of shareholders' profit and their initial capital allocated to business line i , i.e.

$$C_i(0) = E^Q \left[e^{(-r_0T)} (A_i(T) - CP_i(T) - TG_i(T)) | F_0 \right] \quad (3.27)$$

2. Constant periodic premium P_i , paid periodically, which guarantees equality between the current value of shareholders' profit and their initial capital allocated to business line i , i.e.

$$C_i(0) = E^Q \left[e^{(-r_0T)} (A_i(T) - CP_i(T) - TG_i(T)) | F_0 \right] \quad (3.28)$$

3. Variable periodic premiums $\{P_{it}\}$, are determined on a rolling basis, i.e. at each date the premium is adjusted according to the insurer's results. This requires determining at each date t , the periodic premium P_{it} that guarantees equality between the present values of shareholders' expected profit and the capital allocated to business line i , i.e. :

$$C_i(t) = E^Q \left[e^{-rt} (A_i(t+1) - CP_i(t+1) - TG_i(t+1)) | F_t \right] \quad (3.29)$$

Remark

Two major implications flow from our model. First, unlike Sherris (2006), considering the dynamics of the premium and the capital per business line leads to a dependence between surplus and default per line. Indeed, according to Sherris (2006), the default per line depends on the overall surplus; it does not depend on the allocation of surpluses to business lines. Note that this result is true if the asset allocation is arbitrary and does not depend on the premium dynamic per line. Thus, the difference between our results and Sherris (2006) is due to the dynamics of the premiums, notably, the non-zero correlation between the solvency ratio (capital-to-liability ratio) and the line's loss ratio (premium-to-liability ratio). We will show this later in our empirical analysis.

Second, it is important to note here that the equilibrium premium will be different from the competitive premium. Indeed, the equilibrium premium accounts for the dynamics of the insurer's liabilities, investment returns and shareholders' value. This premium will therefore be different from the competitive premium which represents the fair value of liabilities. In a limited liability context, the competitive premium of business line i is equal to the value of the payments (Equation (3.21)) as follow :

$$CP_i(t) = E^Q \left[e^{-rt} L_i(t+1) | F_t \right] - D_i(t).$$

Using the stochastic discount factor m , the competitive premium per unit liability in business line i becomes :

$$\frac{CP_i(t)}{E^Q \left[e^{-rt} L_i(t+1) | F_t \right]} = 1 - \frac{D_i(t)}{E^Q \left[e^{-rt} L_i(t+1) | F_t \right]}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{E^Q \left[e^{-r_t} \frac{L_i(t+1)}{L(t+1)} \cdot D(t+1) | F_t \right]}{E^Q [e^{-r_t} L_i(t+1) | F_t]} = 1 - \frac{E \left[m \frac{L_i(t+1)}{L(t+1)} \cdot D(t+1) \right]}{E [m \cdot L_i(t+1)]} \\
&= 1 - E \left[\frac{D(t+1)}{L(t+1)} \right] - \frac{Cov \left[m \cdot L_i(t+1), \frac{D(t+1)}{L(t+1)} \right]}{E [m \cdot L_i(t+1)]}
\end{aligned}$$

From this formula, if we assume insurance risk to be independent of market risk (e.g., Ibragimov et al. (2010)), then the business line that has a higher probability of loss in the event of default will be the one with a lower competitive premium-to-liability ratio. We cannot draw the same conclusion with regard to the equilibrium premium per line since it depends on the competitive premium and other factors such as investment returns and the capital allocated per business line (see Equation (3.15)). This finding is different from Zhang and Nielson (2012), who used a one-period setting. In their analysis, the business line that has a higher probability of loss in the event of default will be the one with a lower equilibrium premium-to-liability ratio, which is not necessarily the case with our model. We will deepen that discussion below in our empirical section.

3.3 Calibration of the model and empirical results

The cash-flow structure of our pricing model leads to difficulties in finding a closed form to derive equilibrium premiums (see Equations (3.27), (3.28) and (3.29)). Thus, we use Monte Carlo simulations and optimization techniques.

The model calibration and empirical analysis conducted in this section will be done with two business lines without loss of generality. The two business lines are the earthquake line (L1) and the tornado line (L2). Both business lines are modelled by homogenous compound Poisson distribution with log normal distribution for the severity X_i and constant claim rate λ_i . Thus, the amount of new claims $S_i(t)$ described in Equation (3.1) will be computed using a homogenous compound Poisson process :

$$S_i(t) = \sum_{k=1}^{N(i)} X_k(t), \quad (3.30)$$

where $N(\lambda_i)$ is the frequency of losses of intensity λ_i , and the severities of the claims $\{X_k, k \geq 1\}$ are series of independent identically distributed random variables with the same probability distribution. X_k and $N(\lambda_i)$ are not correlated. We prefer the Poisson distribution as a frequency distribution since this probability distribution is more compatible with dynamic occurrences of claims.

The data come from SHELDUS for the period 1978-2015. Table 3.1 summarizes the frequency and severity parameters of our distributions after calibration. It appears that line 2 has a higher loss experience than line 1.

TABLE 3.1 – Estimation of the parameters of the distributions

Distribution	Parameter	Line 1	Line 2
Poisson Process (<i>loss frequency distribution</i>)	λ	0.5918	3.9796
Log normal distribution (κ, τ^2) (<i>loss severity distribution</i>)	κ	18.73	20.77
	τ^2	4.68	1.22

Table 3.2 presents the parameters of the insurer’s assets and liabilities dynamics. The drift and volatility parameters of the insurer’s assets and liabilities are similar to those used by Pan and Xiao (2017) and Li et al. (2018). We assume that the insurer’s liabilities are riskier than its assets, hence the drift and volatility of liabilities are greater than those of assets. The payment rate is based on the work of Cummins (1988). For simplicity and without loss of generality, we assume the corporate income tax to be equal to zero, i.e., $I_a = 0$.

TABLE 3.2 – Parameters of the insurer’s assets and liabilities

	Drift- of- liabilities	Claims- payment- rate	volatility- of-liabilities	Drift- of- assets	volatility- of-assets	Risk- free- rate
Parameter	π_L	η_i	σ_{Li}	μ_A	σ_A	r
Value	0.045	0.20	0.15	0.035	0.10	3.5%

3.3.1 Baseline analysis

Single premium, default and surplus at the aggregate level

The decision not to choose a long-term contract type is generally motivated by insolvency issues related to uncertainty about future losses. Here, we want to understand how an insurer’s likelihood to default or insolvency $D(t)$ (Equation (3.6)) evolves according to the maturity of the contract ($T = 1, 2, \dots, 12$ months) and how it relates to surplus $S(t)$ (Equation (3.4)) and the insurer’s equilibrium single premium (P_0). The single premium (P_0) is the sum of the single premiums per line (P_{i0}), i.e. $P_0 = \sum_{i=1}^2 P_{i0}$. Each single premium P_{i0} is derived from Equation (3.27). We assume a fixed capital amount $C(0) = \$ 9.2$ million for all maturities (which represents 1% of losses over one month). The speed of capital adjustment is set to zero : $\gamma = 0$.

As can be seen in figure 3.1, for the same level of capital, the increase in the premium is driven by a decrease in the insolvency exchange option, and vice versa, for both business lines. It should be noted that since the level of capital is fixed for all contracts, the premium remains much more sensitive to the natural evolution of the loss experience as the contract maturity increases. As we will see later, the factor that contributes to the noise in the link between the premium and the insolvency option is the funding dynamic.

Premium, surplus and default per business line.

We now look at the link between the surplus per line (S_i), the default per line (D_i) and the premiums per line (P_{i0} , P_i , $\{P_{it}\}$). The aim is to examine to what extent the structure of the premium will affect the surplus and the default for a given line. As a reminder, the three premium structures described in section 3.2 above are the following : (i) single premium contract : P_{i0} paid upfront ; (ii) constant monthly premium contract : P_i ; and (iii) variable monthly premium contract : $\{P_{it}\}$. We simulate these premiums for a one-year contract (i.e. $T = 12$ months) on the basis of equilibrium conditions (Equations (3.27), (3.28) and (3.29)). For a given line i , the default is obtained using Equation (3.18) and the surplus is obtained by Equation (3.19). The results are given in table 3.3 and highlighted in Figures 3.2 and 3.3.

Figure 3.2 shows that the default is higher with the constant periodic premium contract. The constant periodic premium is the distribution of the single premium over time which therefore has a lower surplus compared to a single premium paid upfront. Single premium contracts are more viable in the short term than the other contract types, and that because when the insurer collects a single premium upfront, it has a strong ability to meet its commitments from the outset in the sense that it has the entire premium in reserve for investment. The premium collected upfront generates more returns over time.

Variable premium contracts are the most expensive for policyholders, but they are less subject to long-term insolvency. This is because the insurer renews its premium each period depending on the results achieved and the periodic claims experience. The insurer then has control over its solvency. As a result, there is a reduction in time uncertainty compared to single premium contracts whose insolvency increases over time.

Implication 1. “Single premium contracts are more solvent in the short term, whereas variable premium contracts are more solvent in the long term. Constant periodic premium contracts are the most subject to default.”

Nevertheless, one cannot rule out the possibility that the single premium may be favourable in the long term if the return on assets is very high and if there are few exits, as is often the case in life insurance. In the absence of frequent exits, long-term investments offer the insurer more returns in the case of the single premium collected at the beginning of the contract. Variable premiums are less certain for policyholders and may also involve higher renewal costs for the insurer. Therefore, the trade-off between the costs of renewing variable premium contracts and future uncertainty associated with single premium contracts will be decisive when choosing between the two types of contracts.

Figure 3.3 shows an inverse relationship between the surplus and the default per line, regardless of the underlying premium method. The least solvent line has the lowest surplus for contracts with constant and variable periodic premiums. However, the opposite is true when the insurer offers a single premium. This is due to the lower absolute value of the correlation between the surplus and the default (-0.115 for line 1 and -0.285 for line 2). The absolute value of the correlation is higher for the periodic variable premium (-0.999 for the two lines), followed by the constant periodic premium (-0.992 for line 1 and -0.993 for line 2). Thus, the more the premium of the line adjusts to the surplus of each period, the stronger the correlation between surplus and default will be.

Finally, we sought to understand why the relationship between the default per line and the surplus per line is stronger when the insurer offers a variable premium. Table 3.3 confirms the fact that the surplus per line is lower when the default-to-liability ratio is higher in the variable premium contract. This relationship is weak if the insurer offers a single premium contract or a constant premium contract. The strong relationship between the surplus and the default makes sense when the premium is variable, since the premium adjusts better to the surplus of each period. We note that the correlation between the capital per unit liability and the premium per unit liability is higher for the constant premium whereas it is lower for the variable premium. For line 1, we have a correlation of 0.12 with the variable premium against a correlation of 0.94 for the constant premium. For line 2 we have a correlation of 0.47 with the variable premium against 0.97 for the constant premium. This again explains why the relationship between the surplus and the default per line is stronger for the variable premium.

From these results, we can see that if the capital and the premium are allocated in the same way as implied by Sherris (2006), it is unlikely that surplus and default will be closely related. Our results are more general, and Sherris (2006) can be seen as a special case where the correlation between the line's solvency ratio and its loss ratio is perfect. In our model, this correlation is not perfect because asset allocation is not totally free since it is constrained by the dynamics of the premiums per business line. The dynamics of the premium and the capital are therefore key elements in understanding the link between the insurer's asset allocation and its solvency.

Implication 2. *“The relationship between the surplus per line and the default per line depends on the correlation between the solvency ratio and the loss ratio of the business line. This relationship is stronger when the insurer offers variable premium contracts.”*

Competitive versus equilibrium premiums per business line

TABLE 3.3 – Monthly premium, surplus and default by line and by type of premium over one-year

Single premium													
Period (months)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Premium-to-liability (line 1)	ratio	5.767	2.691	1.398	1.048	0.864	0.785	0.697	0.587	0.524	0.468	0.429	0.393
Premium-to-liability (line 2)	ratio	10.8715	0.073	2.636	1.976	1.630	1.479	1.314	1.106	0.989	0.883	0.808	0.741
Default-to-liability (line 1)	ratio	0.000	0.000	0.000	0.060	0.074	0.073	0.062	0.063	0.076	0.147	0.253	0.301
Default-to-liability (line 2)	ratio	0.000	0.000	0.000	0.052	0.068	0.073	0.067	0.065	0.098	0.177	0.247	0.280
Surplus-to-liability (line 1)	ratio	3.986	2.418	0.939	0.614	0.423	0.238	0.048	-	-	-	-	0.676
Surplus-to-liability (line 2)	ratio	9.880	4.000	1.559	0.889	0.534	0.371	0.200	-	-	-	-	0.627
									0.005	0.124	0.230	0.306	
Constant periodic premium													
Period (months)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Premium-to-liability (line 1)	ratio	0.422	0.274	0.150	0.122	0.104	0.090	0.072	0.067	0.059	0.051	0.049	0.045
Premium-to-liability (line 2)	ratio	0.921	0.430	0.223	0.167	0.138	0.125	0.111	0.094	0.084	0.075	0.068	0.063
Default-to-liability (line 1)	ratio	0.000	0.293	0.332	0.601	0.674	0.708	0.657	0.802	0.753	0.755	0.864	0.821
Default-to-liability (line 2)	ratio	0.000	0.182	0.300	0.577	0.669	0.753	0.745	0.723	0.778	0.789	0.817	0.823
Surplus-to-liability (line 1)	ratio	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Surplus-to-liability (line 2)	ratio	0.572	0.684	0.813	0.842	0.863	0.886	0.908	0.921	0.940	0.959	0.971	0.983
Surplus-to-liability (line 1)	ratio	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Surplus-to-liability (line 2)	ratio	0.070	0.537	0.744	0.797	0.824	0.832	0.844	0.863	0.872	0.881	0.887	0.893
Variable premium													
Period (months)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Premium-to-liability (line 1)	ratio	0.252	4.496	3.067	1.243	1.693	2.144	0.268	1.096	1.088	1.296	0.938	0.789
Premium-to-liability (line 2)	ratio	0.017	0.434	0.412	0.256	1.149	0.270	1.040	0.555	0.777	1.569	0.903	0.065
Default-to-liability (line 1)	ratio	0.031	0.053	0.089	0.132	0.122	0.127	0.126	0.157	0.136	0.122	0.145	0.177
Default-to-liability (line 2)	ratio	0.060	0.071	0.088	0.143	0.144	0.152	0.168	0.193	0.187	0.149	0.189	0.247
Surplus-to-liability (line 1)	ratio	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Surplus-to-liability (line 2)	ratio	0.733	0.519	0.475	0.482	0.376	0.352	0.319	0.350	0.286	0.229	0.252	0.276
Surplus-to-liability (line 1)	ratio	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Surplus-to-liability (line 2)	ratio	0.775	0.568	0.508	0.543	0.423	0.382	0.353	0.357	0.317	0.223	0.246	0.299

In section 3.2 above, we saw that the competitive premium equals the economic value of the payment $CP_i(t)$ (Equation (3.21)). In the case of a single premium, we compare the competitive premium $CP_i(0)$ with the equilibrium premium per line P_{i0} (Equation (3.27)). The goal is to test whether the line with the highest default likelihood requires the lowest equilibrium premium-to-liability ratio as is the case for competitive premium in the literature.

Table 3.4 shows that if the insurer applies a single premium pricing, line 2, the most exposed to default, has the lowest competitive premium-to-liability ratio. This is consistent with the results of Ibragimov et al. (2010) when assuming independence between insurance risk and market risk. However, unlike the competitive premium, the equilibrium premium of line 2 is higher for some maturities. So, the fact that a line has the highest default per liability doesn't necessarily imply a lower premium per liability. These results contradict Zhang and Nielson (2012) and can be explained by the fact that our model allows us to derive the equilibrium premium without making approximations with the competitive premium as is the case in Zhang and Nielson (2012). The equilibrium premium considers the fact that the insurer pays itself at its fair value. The premium is also linked to the level of capitalisation of the insurer, and therefore internalizes the insurer's performance.

We can also point out that the line with the largest default will have a lower equilibrium premium if its liabilities are lower. For example, for a 3-month contract, line 2's liabilities are lower, and its premiums are lower as well. For all other contracting durations, where its liabilities are higher, line 2 has both the highest default and the highest equilibrium premium.

Implication 3. “*The line with the highest probability of loss in the event of default has a lower competitive premium per unit liability. This is not the case for the equilibrium premium. The line with the largest default will have a lower equilibrium premium if its liabilities are lower.*”

On the other hand, the results in table 3.4 show that the default per unit liability is lower for the line with the highest surplus per unit liability. This is true for most contracts. Figure 3.1 above illustrates this very well. The surplus per line is correlated with the premium per line, which itself depends strongly on the default per line. In addition to the capital, the premium also serves as a bridge between the line's surplus and its default-to-loss ratio.

TABLE 3.4 – Premium, surplus and default per unit liability by business line and by maturity of the contract

Maturity (months)	1	3	6	9	12
Equilibrium premium-to-liability (line 1)	0.252	0.549	0.662	0.390	0.612
Equilibrium premium-to-liability (line 2)	0.218	0.540	0.686	0.393	0.669
Competitive premium-to-liability (line 1)	0.260	0.568	0.702	0.393	0.668
Competitive premium-to-liability (line 2)	0.218	0.536	0.674	0.383	0.646
Surplus-to-liability ratio (line 1)	-0.733	-0.429	-0.284	-0.597	-0.309
Surplus-to-liability ratio (line 2)	-0.775	-0.457	-0.313	-0.606	-0.330
Default-to-liability ratio (line 1)	0.737	0.423	0.281	0.581	0.297
Default-to-liability ratio (line 2)	0.780	0.456	0.309	0.591	0.390
Liability line 1 (in \$ billions)	0.499	2.114	3.480	4.665	6.352
Liability line 2 (in \$ billions)	0.911	1.969	3.873	5.779	8.150

3.3.2 Taking into account the dynamic of capital

With a fixed capital level, we showed above the importance of premium dynamics in the relationship among premium, capital allocation and insolvency. What happens if the capital level changes over time? We therefore consider the case of a single premium contract where the periodic (annual) capital is adjusted over the period according to Equation (3.15).

For the implementation, we start with the minimum capital level $C(0) = \$ 1.32$ billion and set a target capital level equal to three times the minimum capital level. The value of $C(0)$ was simulated on the basis of the Value-at-Risk (VaR) of the losses over one year. The capital growth rate μ_c equals 0.035 . We test different levels of annual capital adjustment speed γ .

The results presented in table 3.5 show that gradual adjustment towards the target capital allows the insurer to improve its solvency and reduces the solvency gap between contracts of different maturities. This makes sense since capital contributions are quicker when the speed of adjustment is higher.

Implication 4. “Increasing the speed of capitalization reduces the solvency gap between

contracts of different maturities. This increases the possibility of offering long-term contracts.”

TABLE 3.5 – Default per unit liability by maturity of the contract as a function of the speed (γ) of capitalization

Speed	term				
	1 year	2 years	3 years	4 years	5 years
0	0.047	0.019	0.073	0.057	0.060
0.1	0.044	0.017	0.058	0.041	0.046
0.2	0.042	0.015	0.050	0.034	0.039
0.4	0.041	0.013	0.045	0.029	0.035
0.5	0.039	0.012	0.041	0.025	0.031
0.6	0.038	0.011	0.037	0.022	0.029
0.8	0.036	0.011	0.034	0.020	0.026
0.9	0.035	0.010	0.032	0.019	0.025

3.3.3 Diversification benefit

If there is diversification benefit, the insurer’s solvency should improve with the addition of new business lines. To test for the benefit of diversification, we use the one-year contract ($T = 12$ months) with single premium (Equation (3.27)) to illustrate. We compare the value of the default option when the insurer offers one business line to that of two business lines. The results are reported in table 3.6. The default-to-liability ratio is lower when the insurer offers two lines, all else being equal. For a given amount of loss, the effect of diversification is manifested through a reduction in insolvency.

TABLE 3.6 – Monthly comparison of default-to-liability ratios for one line and two lines for a 12-month contract

Period (months)	Default-to-liability ratio											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Line-1-only	0.000	0.000	0.000	0.182	0.195	0.249	0.271	0.420	0.495	0.723	0.886	1.005
Line-1-in-multi-line-context	0.000	0.000	0.000	0.060	0.074	0.073	0.062	0.063	0.076	0.147	0.253	0.301
Line-2-only	0.000	0.000	0.000	0.105	0.089	0.120	0.150	0.234	0.278	0.347	0.396	0.438
Line-2-in-multi-line-context	0.000	0.000	0.000	0.052	0.068	0.073	0.067	0.065	0.098	0.177	0.247	0.280

Now, we seek to understand how the correlation (ρ_{ij}) between the liabilities of the lines can have an impact on the total default-to-liability ratio according to the maturity of the contract

($T=1, 2, \dots, 12$ months). The total default-to-liability ratio will be derived from Equation (3.6). From the results presented in table 3.7, we can see in particular that a stronger correlation between the liabilities of the lines does not necessarily lead to an increase in the default-to-loss ratio. At first glance, this result may seem inconsistent. Nevertheless, it is justified in a dynamic context where the evolution of the value of assets depends on liabilities.

Implication 5. *“The effect of diversification is manifested through the reduction in insolvency. Allowing for correlation does not necessarily inhibit diversification gain.”*

TABLE 3.7 – Default-to-liability ratio by maturity as a function of the correlation between business lines’ liabilities

Correlation 1 (ρ_{12})	Default-to-liability ratio by maturity (month)											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
0	0.765	0.494	0.439	0.499	0.367	0.449	0.627	0.403	0.586	0.419	0.343	0.310
0.1	0.773	0.501	0.490	0.523	0.363	0.379	0.528	0.403	0.373	0.384	0.525	0.369
0.2	0.772	0.507	0.435	0.715	0.383	0.279	0.474	0.388	0.335	0.392	0.801	0.258

3.3.4 Restructuring

In the event of default or bankruptcy, the company may not liquidate its assets right away, but instead it can be given the chance to restructure. The company can adopt a new configuration by reviewing its organizational structure. This may involve mergers and acquisitions, outsourcing of certain functions, relocation of some activities, job cuts, abandonment of a product or business line, etc. The latter may be plausible in the case of multiline insurance, especially when one business line is less profitable than the others or is a source of large losses. In some cases, such as insurance holdings companies, the headquarters may have to close a failed line rather than sacrifice the entire group holdings.

Thus, in the event of default, the insurer will be able to restructure itself to ensure the sustainability of its activities. This presupposes that the insurer remains optimistic about its ability to overcome the insolvency and become profitable in the medium to long term. It may also mean that the default is resorbable. The decision to restructure will depend on the severity of the default. When the default is too large to be remedied, the company will have to cease all activities as is the case with most bankrupt companies, which close.

From this point on, we assume the existence of an early default threshold above which the insurer declares bankruptcy and liquidates its assets. Below this threshold, the insurer will proceed to restructuring of its activities. This threshold will therefore depend on the anticipation of future gains from the restructuring process. To formalize the restructuring in our

model, we introduce a barrier in the insolvency option (in Equation (3.6)). The default option will ultimately be a barrier exchange option and can be rewritten as follows :

$$D(t) = E^Q \left[\exp(-r_t) \max(L(t+1) - A(t+1), 0) 1_{(L(t+1) - A(t+1)) > K_T} | F_t \right], \quad (3.31)$$

where K_T is the restructuring threshold. This threshold depends on the expected gains from restructuring over a given time horizon. Its determination remains a major challenge.

Table 3.8 compares the default option values and the associated equilibrium premiums when considering the possibility of a restructuring. We consider the case of single premium contracts for different maturity T (1 month, 3 months, 6 months, 9 months, 12 months). For simplicity without loss of generality, calculations are made based on the fixed capital amount $C(0) = \$ 9.2$ million for each contract.

The inclusion of restructuring in the model reduces the value of the default option by increasing the insurer's ability to meet its future obligations. All other things being equal, the premium increases.

Implication 6. “The inclusion of restructuring in the model has the effect of reducing the value of the default option.”

TABLE 3.8 – Default and premium per unit liability by maturity of the contract

Maturity (months)	1	3	6	9	12
Premium-to-liability with restructuring	0.996	0.793	0.997	1.002	0.690
Premium-to-liability without restructuring	0.232	0.555	0.704	0.420	0.711
Default to-liability with restructuring	0.000	0.097	0.000	0.000	0.294
Default to-liability without restructuring	0.765	0.439	0.449	0.586	0.310

Note : We assume a constant restructuring threshold (K_T) of \$ 4 billion.

3.4 Accounting for the insurance cycle.

A dynamic analysis of insurance pricing requires considering the insurance cycle. Indeed, the presence of the cycle constitutes an exogenous risk to the insurer's solvency, particularly if the pricing model is dynamic. To consider the insurance cycle, two parameters of the previous

model will be adjusted : the payment value (CP_i) will be adjusted by adding a cyclical security loading, and the claim rate (λ_i) will become cyclical as well.

3.4.1 Cycle modeling

Security loading

An insurer can adjust its premium during the underwriting cycle by changing its security loading $\theta_i(t)$. The security loading follows periodic cyclical dynamics. Thus, in order to consider the cycle, we modify the model described in section 3.2 by adding a security loading to the payment value CP_i (which corresponds to the competitive premium in the previous model). For that purpose, let denote by CPC_i the payment value in the cyclical context. The payment made to the insured policyholders described by Equation (3.21) becomes as follows in the cyclical context :

$$CPC_i(t) = CP_i(t)(1 + \theta_i(t)), \quad (3.32)$$

with the security loading $\theta_i(t)$ dynamic given as follows :

$$\theta_i(t) = \delta(\theta_{i0} + \alpha_{i1}\theta_i(t-1) + \alpha_{i2}\theta_i(t-2) + \epsilon(t)). \quad (3.33)$$

The security loading $\theta_i(t)$ follows the autoregressive AR(2) model proposed by Brockett and Witt (1982) to capture the possibility of an insurance cycle, with $\alpha_{i1} > 0$, $\alpha_{i2} < 0$ and $\alpha_{i1}^2 + 4\alpha_{i2} < 0$. $\epsilon(t)$ is the normally distributed error term with mean zero and standard deviation σ .

The parameter δ capture the underwriting strategies as recommended by Boor (1998). (see also Daykin et al. (1993), Jones and Ren (2006) and Hagouangn'rin (2011)). These strategies are broken down as follows :

1. The market share maintenance strategy ($\delta = 1$) under which the insurer decides to follow the market evolution at the risk of losing profits by offering lower prices if necessary. This strategy keeps the claim rate constant.
2. The capital conservation strategy ($\delta = 0$) which consists of the insurer aiming to counter the cycle by subscribing fewer contracts when the market is soft. This strategy allows the insurer to maintain its capital level constant and to sell more subscriptions during the hard market.
3. Finally, we have the mixed strategy which is a combination of the two previous ones (with δ between 0 and 1).

Claims rate

The amount of new claims $S_i(t)$ described in Equation (3.1) will be computed using a non homogenous compound Poisson process :

$$S_i(t) = \sum_{k=1}^{N(\mu_i(t))} X_k(t). \quad (3.34)$$

Thus, the claim rate (λ_i) in the previous model is replaced by a cyclical claim rate $\mu_i(t)$ as follows :

$$\mu_i(t) = \mu_{i0} - (1 - \delta)k(\theta_{i0} + \alpha_{i1}\theta_i(t-1) + \alpha_{i2}\theta_i(t-2) + \epsilon(t)), k > 0 \quad (3.35)$$

The coefficient k captures the extent to which the security loading will impact the claim rate. The security loading and the claim rate are linked. Increasing the security loading rate will increase the premium, thus have a decreasing effect on the market share, hence leading to less claims. Therefore, an insurer adopting a capital conservation strategy ($\delta = 0$) will have variables claim rates while an insurer with a strategy to maintain its market share ($\delta = 1$) will have a fixed claim rate.

3.4.2 Impact of the cycle

We analyse the impact of the cycle on the default $D(t)$ (Equation (3.6)) of the insurer. We consider the case of single total premium (P_0) contracts for different maturities T . The maturities range from 1 year to 6 years. As a reminder, the single total premium P_0 is the sum of the premiums per line ($P_0 = \sum_{i=1}^2 P_{i0}$). Thus we use cyclical parameters based on the US property-casualty insurance obtained from Boyer and Owadally (2015) for AR(2) model. We therefore assume $\theta_{i0} = 0$, $\alpha_{i1} = 0.905$, $\alpha_{i2} = -0.215$ and $k = 1$. The initial claim rates correspond to the values in table 3.1 for line 1 and line 2 : $\mu_{10} = 0.5918$ and $\mu_{20} = 3.9796$. As maturities are annual, we assume a fixed capital amount $C(0) = \$ 92$ million for all maturities (which is 10 times the monthly capital set out in subsection 3.5.1).

The simulation results for 1 to 6-year maturity contracts are shown in table 3.9. In general, it can be noted that, regardless of the underwriting strategy adopted by the insurer, an increase (or decrease) in the default-to-liability ratio implies a decrease (or increase) in the premium-to-claim ratio. For any given liability, the temporal increase in the premium is driven by a decrease in solvency.

Table 3.9 shows that default-to-claim ratios are lower from maturities of 3 to 6 years when the insurer adopts a capital conservation strategy. This is therefore the best strategy in terms of reducing insolvency. In adopting this strategy, the insurer underwrites fewer contracts during the soft market. This allows it to maintain its capital level and to offer more subscriptions

during the hard market. Naturally, the mixed strategy comes second in terms of solvency for all contracts. Finally, the default-to-liability ratio is highest when the insurer adopts the strategy of maintaining market share. Indeed, by deciding to maintain its market share, the insurer increases the risk of insolvency. However, for 1- and 2-year contracts maturing at the beginning of the cycle, the strategy of maintaining market share seems to be the most advantageous in terms of solvency.

Generally speaking, the default-to-liability ratio is lower in the absence of the cycle. This is particularly true when the insurer decides to adapt to changes in market prices during the cycle, i.e. when the insurer adopts a strategy of maintaining market share or a mixed strategy. Nevertheless, sometimes the cycle can provide an opportunity to reduce insolvency. For example, when the insurer adopts a capital conservation strategy, the default-to-liability ratio is lower for 3- to 6-year contracts compared to a no cycle case. All in all, it appears from this that the presence of the cycle brings additional risk of insolvency. Nevertheless, the insurer can control its solvency, or even boost it if it adopts the right strategy. The choice of a strategy can also be decisive in the choice of the maturity of the contract.

***Implication 7.** “The presence of the cycle may, in certain situations, allow the insurer to boost its solvency, particularly when the insurer adopts the capital conservation strategy.”*

3.5 Conclusion

This paper examines the interactions among insurance premium, capital allocation and solvency for a multiline insurer using a stochastic multi-periodic pricing model based on the default option, taking into account the dynamic aspects of pricing, capitalization and the insurance cycle. Also, in the event of insolvency, we consider the fact that payments by business lines may be determined by other factors such as corporate restructuring.

Previous works on this subject have used only single period models. We go beyond the one period model to better capture the impact of capitalization and premium dynamics on the insurer’s solvency and capital allocation. Finally, we introduce the insurance cycle into our default model. This makes it possible to measure the impact of the insurance cycle on the insurer’s solvency in order to better explain the equilibrium premium and account for underwriting strategies to deal with exogenous price fluctuations.

Our results show that the evolution of the insurer’s solvency depends strongly on the capitalization dynamic and the premium structure adopted by the insurer. In multiline insurance, the business line with the highest probability of loss in the event of default will not necessarily have a lower equilibrium premium per unit liability, whereas it is the case for the competi-

TABLE 3.9 – Default and premium by maturity of the contract based on the underwriting strategy adopted during the cycle

Strategy		Maturity (annual)					
		1	2	3	4	5	6
Capital conserva- tion ($\delta = 0$)	Premium-to-liability ratio	0.299	0.483	0.259	0.530	0.692	0.599
	Default-to-liability ratio	0.656	0.505	0.749	0.468	0.382	0.455
Mixed ($\delta = 0.5$)	Premium-to-liability ratio	0.752	0.746	0.122	0.184	0.276	0.423
	Default-to-liability ratio	0.269	0.287	0.880	0.834	0.766	0.666
Maintain market share ($\delta = 1$)	Premium-to-liability ratio	0.848	0.798	0.107	0.151	0.220	0.308
	Default-to-liability ratio	0.253	0.233	0.892	0.852	0.805	0.740
No cycle	Premium-to-liability ratio	0.213	0.459	0.454	0.203	0.284	0.362
	Default-to-liability ratio	0.752	0.516	0.535	0.798	0.740	0.686

tive premium. This finding is in contrast with the results of Zhang and Nielson (2012). The line with the largest default risk will have a lower premium if its liabilities are lower. Single premium contracts are more solvent in the short term, while variable premium contracts are more solvent in the long term. The contract with a constant periodic premium is the most subject to default.

Unlike Sherris (2006), we found that the allocation of the amounts of unpaid claims per line in the event of default is a function of the surplus per line. This dependence is greater when the insurer offers a variable premium contract. This link depends on the correlation between the solvency ratio and the loss ratio of the line. Thus, when the correlation is low, the allocation of the default per line will depend on the surplus per line, whereas there is almost no link if the correlation is too high. This last situation is implicitly the case of Sherris (2006), where asset allocation is arbitrary and does not depend on the premium level per line. Thus, our result is more general, and Sherris's (2006) result may be a special case where the correlation between the line's solvency ratio and its loss ratio is perfect. This difference is due to the fact that in our model, asset allocation is not totally free since it is constrained by the dynamics of capital and premiums. The presence of the insurance cycle may, in certain situations, allow the insurer to boost its solvency, in particular if the insurer adopts a capital preservation strategy.

In short, we contribute to the literature by including factors to better understand how insurance premiums are determined at equilibrium. This should make it possible to reconcile the design of insurance contracts, capital allocation, solvency and the insurer's strategic decision-making from a long-term perspective. An extension of the model would be to include the impact of loss distribution and time dependency on business lines. A more in-depth study of the impact of the cycle on allocations per business line and pricing would also be interesting.

FIGURE 3.1 – single premium, default and surplus by maturity of the contract

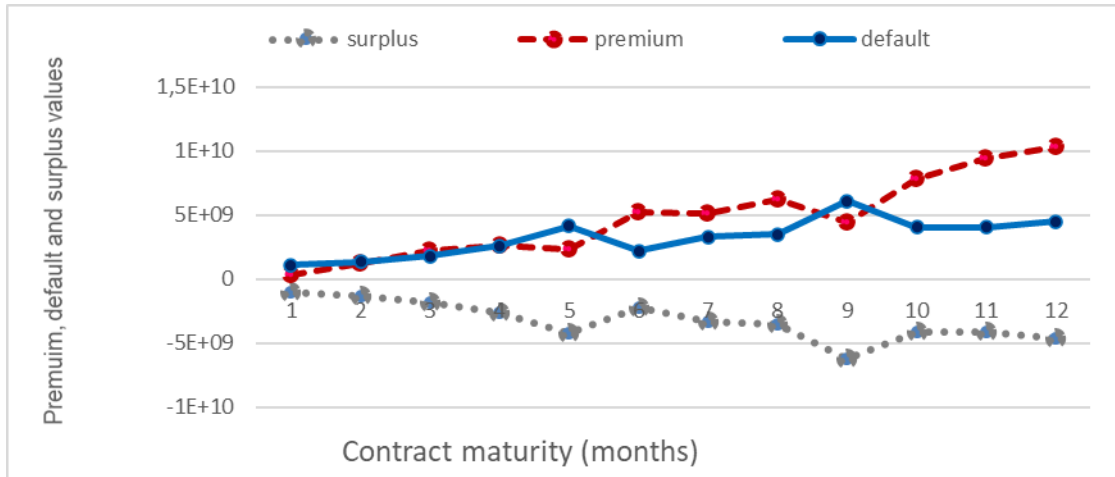


FIGURE 3.2 – Monthly evolution of the global default of the one-year contract by premium structure

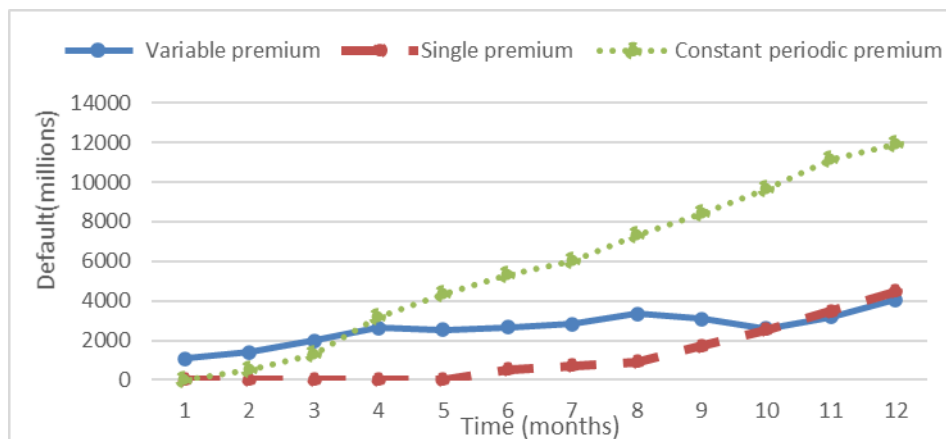
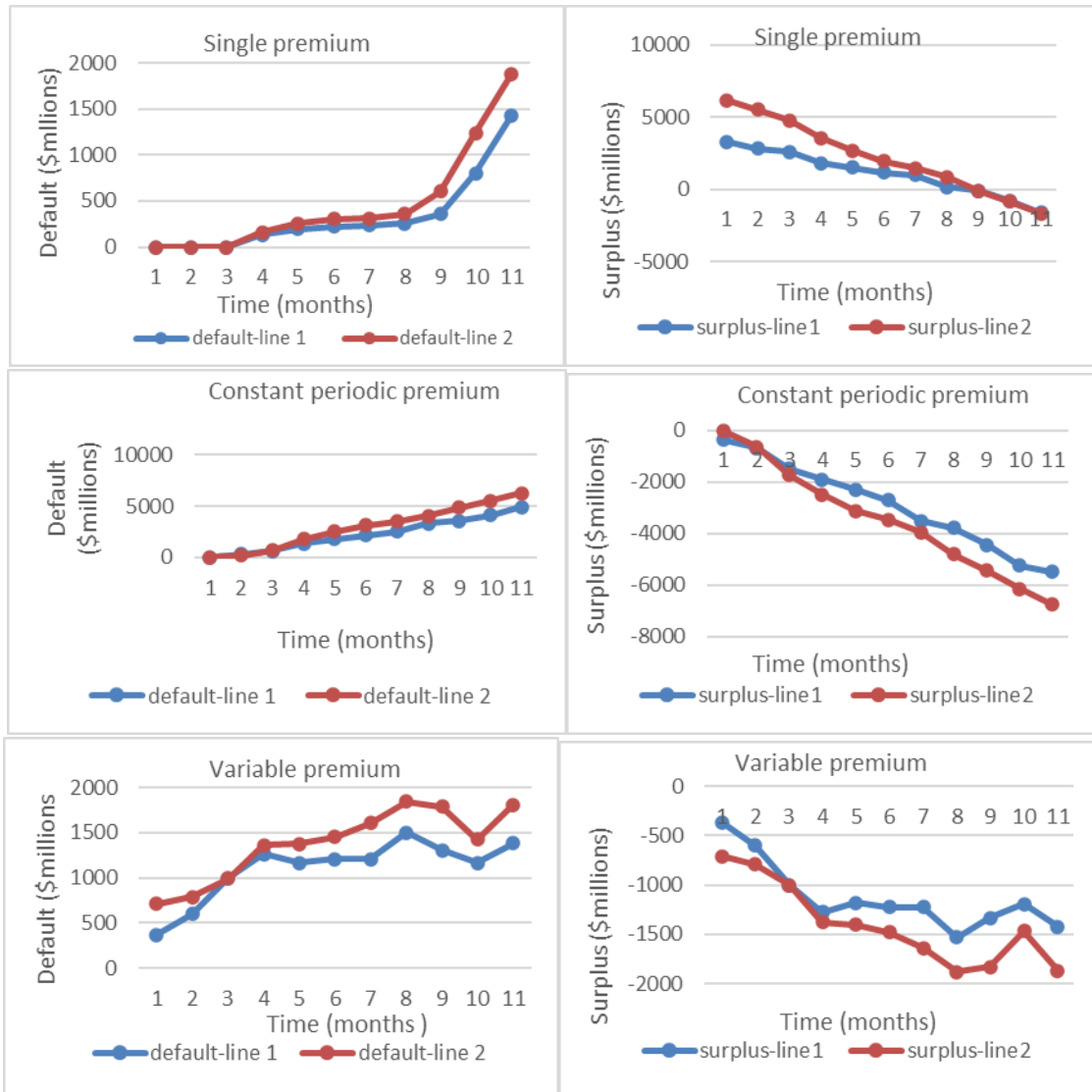


FIGURE 3.3 – Monthly comparison of default and surplus per line for a one-year contract



Conclusion

Cette thèse est composée de 3 essais en modélisation financière, l'évaluation des risques et la couverture des risques.

Le premier chapitre analyse le choix entre les obligations non contingentes et les obligations catastrophes émises pour financer le risque de tremblement de terre. Nous avons proposé un modèle dynamique d'optimisation stochastique avec frictions et montré dans quelles conditions il peut être avantageux pour un gouvernement d'émettre une obligation catastrophe au lieu d'une obligation non contingente standard. Nous supposons que le coût d'emprunt n'est pas fixe et dépend des coûts de friction telle que l'illiquidité associée à l'emprunt lorsqu'une catastrophe se produit. À cet effet, nous supposons que les coûts de friction sont une fonction du ratio d'endettement du pays. Ce travail contribue à la littérature existante à deux égards. Premièrement, nous montrons dans quelles conditions il peut être avantageux pour un gouvernement d'émettre une obligation catastrophe au lieu d'une obligation non contingente. La prise en compte des coûts de friction, en particulier les primes d'illiquidité associées à la dette, révèle une plus grande probabilité d'émettre des obligations catastrophes en réduisant l'écart entre les écarts de taux générés par le modèle et les rendements excédentaires observés sur le marché. Deuxièmement, la calibration a fourni plusieurs résultats pertinents sur le prix d'une obligation catastrophe pour couvrir les tremblements de terre au Québec. Il ressort de cela qu'il peut être avantageux pour le Mexique et le gouvernement du Québec d'émettre une obligation catastrophe pour se protéger contre les pertes potentielles dues aux tremblements de terre. Cela pourrait permettre de réduire le ratio d'endettement et donc de diminuer les coûts de financement. Néanmoins, il convient de noter que l'effet des coûts de friction associés à la dette est contrebalancé par les coûts de friction associés à l'obligation catastrophe. La décision d'émettre une obligation catastrophe va donc dépendre de l'ampleur relative des deux types de frictions. Notre modèle permet d'établir une borne pour l'excès de rendement ainsi que le niveau optimal d'intensité des frictions favorable à l'émission d'obligations catastrophes. En d'autres termes, le modèle confirme l'importance des coûts de friction pour expliquer les excès de rendement observés sur le marché des obligations catastrophes.

Le deuxième chapitre analyse la liquidité des obligations catastrophes et détermine l'impact du taux d'intérêt sur l'écart de taux et la liquidité des obligations catastrophes. Nous contribuons

à la littérature en revisitant les déterminants des écarts de taux des obligations catastrophes à la lumière des données plus récentes et exhaustives sur le marché primaire et secondaire. Ensuite, nous mesurons l'impact spécifique du taux d'intérêt sur les écarts de taux et la liquidité des obligations catastrophes. Enfin, nous mettons en exergue les déterminants de la liquidité sur le marché des obligations catastrophes. Les résultats des analyses montrent l'impact prépondérant du taux d'intérêt sur l'écart de taux des obligations catastrophes. Depuis la crise des subprimes, le taux d'intérêt est apparu comme la variable la plus influente après la perte espérée. En période normale, une baisse du taux d'intérêt est associée à une baisse des écarts de taux. Le phénomène contraire est observé en période de stress où le taux d'intérêt et l'écart de taux varient en sens inverse. Ceci pourrait être lié à l'aspect systémique de la crise entraînant une baisse de la liquidité des obligations catastrophes indépendamment de la baisse de l'écart de taux. En particulier, depuis la crise de 2007-2009, la baisse du taux d'intérêt a pour conséquence une baisse des écarts de taux permettant ainsi d'augmenter la liquidité des obligations catastrophes. La baisse du taux d'intérêt encouragerait les investissements dans les obligations catastrophes. Parmi les déterminants des deux indicateurs de liquidité, la perte espérée, le temps restant jusqu'à maturité (TTM), l'indice de réassurance et le Libor se révèlent comme les plus importants tandis qu'aucune prime de liquidité n'a été observée pour ce qui concerne le montant à l'émission et le sponsor. Si le Libor apparaît comme une variable clé des écarts de taux du marché secondaire, sa relation avec les deux indicateurs de liquidité apparaît seulement évidente en période de stress. Il importe de noter qu'en utilisant le T-Bill comme taux d'intérêt, nous aboutissons aux mêmes conclusions observées pour le Libor. Ce qui pourrait signifier que la manipulation du Libor n'a pas eu d'impact significatif sur l'écart de taux et la liquidité des obligations catastrophes. Aussi, il ressort de cela que sur la base de l'indice S&P 500, les obligations catastrophes se comporteraient comme des zéros beta depuis la crise des subprimes. Les obligations catastrophes sont donc devenues plus propices à la diversification ces dernières années. Ceci encouragerait aussi leur liquidité.

Le troisième article examine les interactions entre la prime d'assurance, l'allocation du capital et la solvabilité pour un assureur multi-lignes en utilisant un modèle de tarification stochastique multi-périodique basé sur l'option de défaut, en tenant compte des aspects dynamiques de la tarification, de la capitalisation et du cycle d'assurance. De plus, en cas d'insolvabilité, nous considérons le fait que les paiements par lignes d'affaires peuvent être déterminés par d'autres facteurs tels que la restructuration de l'entreprise. Nous avons dérivé la prime d'équilibre pour différentes structures de contrats d'assurance. Nos résultats montrent que l'évolution de la solvabilité de l'assureur dépend de la dynamique de la prime et de la capitalisation. L'allocation de surplus par ligne affecte le défaut des autres lignes d'affaires et dépend de la corrélation entre le ratio de solvabilité et le ratio de pertes de la ligne. Notre résultat est plus général et le résultat de Sherris (2006) peut être un cas particulier où la corrélation entre le ratio de solvabilité de la ligne et son ratio sinistre-prime est parfaite. Plus la probabilité de perte de la ligne en cas de défaut est élevée, plus son ratio de prime concurrentielle sur

le passif est faible. Cependant, plus le risque de défaut de la ligne est important, plus sa prime sera faible si son passif est plus faible. Dans certaines situations, la présence du cycle permettra à l'assureur de renforcer sa solvabilité à condition qu'il adopte la bonne stratégie de souscription. En somme, le modèle innovant proposé inclut des facteurs qui permettent de mieux comprendre comment les prix sont déterminés à l'équilibre. Cela permet de concilier les objectifs de conception des contrats d'assurance avec la solvabilité de l'assureur et ses décisions stratégiques dans une perspective de long terme.

D'une façon globale, les sujets abordés dans cette thèse s'insèrent dans les problématiques actuelles de l'évaluation et la gestion de risques. Le modèle développé dans le chapitre 3 et qui combine l'évaluation des risques et la gestion stratégique de l'assureur rentre dans le cadre de la gestion intégrée des risques. L'analyse de l'impact du Libor sur le marché des obligations catastrophes s'avère également importante compte tenu du contexte actuel de la fin du Libor au profit d'autres taux de référence sans risque (RFRs). Enfin, l'avènement du covid a relancé le débat sur la problématique de financement des pandémies et des catastrophes naturelles par le gouvernement. Le modèle construit dans le chapitre 1 pourrait tout aussi être développé dans le cadre du financement des pandémies par le gouvernement.

Bibliographie

- ALEXANDER, G. J., A. K. EDWARDS, AND M. G. FERRI (2000) : “The determinants of trading volume of high-yield corporate bonds,” *Journal of Financial Markets*, 3, 177–204.
- AMIHUD, Y. AND H. MENDELSON (1991) : “Liquidity, maturity, and the yields on US Treasury securities,” *The Journal of Finance*, 46, 1411–1425.
- ARTEMIS (2016) : “Catastrophe bond and insurance linked securities market reports,” *Rapport du T4 2015. Blog. Janvier*.
- BANTWAL, V. J. AND H. C. KUNREUTHER (2000) : “A cat bond premium puzzle?” *The Journal of Psychology and Financial Markets*, 1, 76–91.
- BAO, J., J. PAN, AND J. WANG (2011) : “The illiquidity of corporate bonds,” *The Journal of Finance*, 66, 911–946.
- BARRIEU, P. AND H. LOUBERGÉ (2009) : “Hybrid cat bonds,” *Journal of Risk and Insurance*, 76, 547–578.
- BARYSHNIKOV, Y., A. MAYO, AND D. R. TAYLOR (2001) : “Pricing of CAT bonds,” *preprint*.
- BOONEN, T. J., M. GUILLEN, AND M. SANTOLINO (2019) : “Forecasting compositional risk allocations,” *Insurance : Mathematics and Economics*, 84, 79–86.
- BOOR, J. (1998) : “The impact of the insurance economic cycle in insurance pricing,” .
- BORENSZTEIN, E., E. CAVALLO, AND O. JEANNE (2017) : “The welfare gains from macro-insurance against natural disasters,” *Journal of Development Economics*, 124, 142–156.
- BOYER, M. M. AND I. OWADALLY (2015) : “Underwriting apophenia and cryptids : Are cycles statistical figments of our imagination ?” *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 40, 232–255.
- BRAUN, A. (2016) : “Pricing in the primary market for cat bonds : new empirical evidence,” *Journal of Risk and Insurance*, 83, 811–847.

- BROCKETT, P. L. AND R. C. WITT (1982) : “The underwriting risk and return paradox revisited,” *The Journal of Risk and Insurance*, 49, 621–627.
- CHAKRAVARTY, S. AND A. SARKAR (1999) : “Liquidity in US fixed income markets : A comparison of the bid-ask spread in corporate, government and municipal bond markets,” *FRB of New York Staff Report*.
- COX, S. H. AND H. W. PEDERSEN (2000) : “Catastrophe risk bonds,” *North American Actuarial Journal*, 4, 56–82.
- CRABBE, L. E. AND C. M. TURNER (1995) : “Does the liquidity of a debt issue increase with its size? Evidence from the corporate bond and medium-term note markets,” *The Journal of Finance*, 50, 1719–1734.
- CROSON, D. C. AND H. C. KUNREUTHER (2000) : “Customizing indemnity contracts and indexed cat bonds for natural hazard risks,” *The Journal of Risk Finance*.
- CUMMINS, J. D. (1988) : “Risk-based premiums for insurance guaranty funds,” *The journal of Finance*, 43, 823–839.
- (1990) : “Multi-period discounted cash flow rate-making models in property-liability insurance,” *Journal of Risk and Insurance*, 79–109.
- CUMMINS, J. D. AND H. GEMAN (1995) : “Pricing catastrophe insurance futures and call spreads : An arbitrage approach,” *The Journal of Fixed Income*, 4, 46–57.
- CUMMINS, J. D. AND S. HARRINGTON (1985) : “Property-liability insurance rate regulation : estimation of underwriting betas using quarterly profit data,” *Journal of Risk and Insurance*, 16–43.
- CUMMINS, J. D., D. LALONDE, AND R. D. PHILLIPS (2004) : “The basis risk of catastrophic-loss index securities,” *Journal of Financial Economics*, 71, 77–111.
- CUMMINS, J. D. AND O. MAHUL (2009) : *Catastrophe risk financing in developing countries : principles for public intervention*, World Bank Publications.
- CUMMINS, J. D. AND P. TRAINAR (2009) : “Securitization, insurance, and reinsurance,” *Journal of Risk and Insurance*, 76, 463–492.
- CUMMINS, J. D. AND M. A. WEISS (2009) : “Convergence of insurance and financial markets : Hybrid and securitized risk-transfer solutions,” *Journal of Risk and Insurance*, 76, 493–545.
- DASSIOS, A. AND J.-W. JANG (2003) : “Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the Cox process with shot noise intensity,” *Finance and Stochastics*, 7, 73–95.

- DAYKIN, C. D., T. PENTIKAINEN, AND M. PESONEN (1993) : *Practical risk theory for actuaries*, CRC Press.
- DIECKMANN, S. (2008) : “By Force of Nature : The Catastrophe Bond Market and Katrina,” *Available at SSRN 1108060*.
- (2009) : “By force of nature : Explaining the yield spread on catastrophe bonds : Working paper,” *Philadelphia, PA : Univ. of Pennsylvania*.
- (2019) : “A consumption-based evaluation of the cat bond market,” in *Advances in Pacific Basin Business, Economics and Finance*, Emerald Publishing Limited.
- DIERS, D., M. LINDE, AND L. HAHN (2016) : “Addendum to ‘The multi-year non-life insurance risk in the additive reserving model’ [Insurance Math. Econom. 52 (3)(2013) 590–598] : Quantification of multi-year non-life insurance risk in chain ladder reserving models,” *Insurance : Mathematics and Economics*, 67, 187–199.
- DOHERTY, N. A. (2000) : “Innovation in corporate risk management : the case of catastrophe risk,” in *Handbook of Insurance*, Springer, 503–539.
- DOHERTY, N. A. AND J. R. GARVEN (1986) : “Price regulation in property-liability insurance : A contingent-claims approach,” in *The Journal of Finance*, Springer, vol. 51, 103150.
- DUBINSKY, W. AND D. LASTER (2003) : *Insurance-linked securities*, Swiss Re Capital Markets Corporation.
- EDWARDS, A. K., L. E. HARRIS, AND M. S. PIWOWAR (2007) : “Corporate bond market transaction costs and transparency,” *The Journal of Finance*, 62, 1421–1451.
- EGAMI, M. AND V. R. YOUNG (2008) : “Indifference prices of structured catastrophe (CAT) bonds,” *Insurance : Mathematics and Economics*, 42, 771–778.
- EL EZZ, A. A., A. SMIRNOFF, M. NASTEV, M.-J. NOLLET, AND H. MCGRATH (2019) : “ER2-Earthquake : Interactive web-application for urban seismic risk assessment,” *International journal of disaster risk reduction*, 34, 326–336.
- FINKEN, S. AND C. LAUX (2009) : “Catastrophe bonds and reinsurance : the competitive effect of information-insensitive triggers,” *Journal of Risk and Insurance*, 76, 579–605.
- FISHER, L. (1959) : “Determinants of risk premiums on corporate bonds,” *Journal of political economy*, 67, 217–237.
- FROOT, K. ET AL. (1999) : *The financing of catastrophe risk*, University of Chicago Press Chicago.

- FROOT, K. A. (2001) : “The market for catastrophe risk : a clinical examination,” *Journal of Financial Economics*, 60, 529–571.
- GALEOTTI, M., M. GÜRTLER, AND C. WINKELVOS (2013) : “Accuracy of premium calculation models for CAT bonds—an empirical analysis,” *Journal of Risk and Insurance*, 80, 401–421.
- GARVEN, J. R. (1992) : “An exposition of the implications of limited liability and asymmetric taxes for property-liability insurance,” *Journal of Risk and Insurance*, 34–56.
- GÜRTLER, M., M. HIBBELN, AND C. WINKELVOS (2016) : “The impact of the financial crisis and natural catastrophes on CAT bonds,” *Journal of Risk and Insurance*, 83, 579–612.
- HAGOUANGN’RIN, Z. K. (2011) : “Le capital économique chez les assureurs : cycle des assurances et catastrophes naturelles (modélisation, évaluation),” .
- HAHN, L. (2017) : “Multi-year non-life insurance risk of dependent lines of business in the multivariate additive loss reserving model,” *Insurance : Mathematics and Economics*, 75, 71–81.
- HÄRDLE, W. K. AND B. L. CABRERA (2010) : “Calibrating CAT bonds for Mexican earthquakes,” *Journal of Risk and Insurance*, 77, 625–650.
- HELFENSTEIN, R. AND T. HOLZHEU (2006) : *Securitization-new opportunities for insurers and investors*, Swiss Reinsurance Company, Economic Research & Consulting.
- HONG, G. AND A. WARGA (2000) : “An empirical study of bond market transactions,” *Financial Analysts Journal*, 56, 32–46.
- HOTCHKISS, E. AND G. JOSTOVA (2017) : “Determinants of corporate bond trading : A comprehensive analysis,” *Quarterly Journal of Finance*, 7, 1750003.
- HOUWELING, P., A. MENTINK, AND T. VORST (2005) : “Comparing possible proxies of corporate bond liquidity,” *Journal of Banking & Finance*, 29, 1331–1358.
- IBRAGIMOV, R., D. JAFFEE, AND J. WALDEN (2010) : “Pricing and capital allocation for multiline insurance firms,” *Journal of Risk and Insurance*, 77, 551–578.
- JAFFEE, D. AND T. RUSSELL (2013) : “The welfare economics of catastrophe losses and insurance,” *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 38, 469–494.
- JONES, B. L. AND J. REN (2006) : “Underwriting cycle and ruin probability,” in *ARIA Annual Meeting*, Citeseer.
- KAMARA, A. (1994) : “Liquidity, taxes, and short-term treasury yields,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 403–417.

- KRAUS, A. AND S. A. ROSS (1982) : “The determination of fair profits for the property-liability insurance firm,” *The Journal of Finance*, 37, 1015–1028.
- KUKLA, G. AND K. BURNECKI (2003) : “Pricing of zero-coupon and coupon cat bonds,” in *INSURANCE MATHEMATICS & ECONOMICS*, ELSEVIER SCIENCE BV PO BOX 211, 1000 AE AMSTERDAM, NETHERLANDS, vol. 33, 439–439.
- LAKDAWALLA, D. AND G. ZANJANI (2012) : “Catastrophe bonds, reinsurance, and the optimal collateralization of risk transfer,” *Journal of Risk and Insurance*, 79, 449–476.
- LE PAN, N. (2016) : *Les lignes de faille : Tremblements de terre, assurance, et risque financier systémique*, Institut CD Howe.
- LEE, J.-P. AND M.-T. YU (2002) : “Pricing default-risky CAT bonds with moral hazard and basis risk,” *Journal of Risk and Insurance*, 25–44.
- (2007) : “Valuation of catastrophe reinsurance with catastrophe bonds,” *Insurance : Mathematics and Economics*, 41, 264–278.
- LI, D., Y. SHEN, AND Y. ZENG (2018) : “Dynamic derivative-based investment strategy for mean–variance asset–liability management with stochastic volatility,” *Insurance : Mathematics and Economics*, 78, 72–86.
- LI, X., Y. JIAO, M.-T. YU, AND Y. ZHAO (2019) : “Founders and the decision of Chinese dual-class IPOs in the US,” *Pacific-Basin Finance Journal*, 57, 101017.
- LOBO, B. J. (2000) : “Asymmetric effects of interest rate changes on stock prices,” *Financial Review*, 35, 125–144.
- MA, Z.-G. AND C.-Q. MA (2013) : “Pricing catastrophe risk bonds : A mixed approximation method,” *Insurance : Mathematics and Economics*, 52, 243–254.
- MERTON, R. C. AND A. F. PEROLD (1993) : “Theory of Risk Capital in Financial Firms,” *The Journal of Applied Corporate Finance*, 6, 1632.
- MISHKIN, F. S. (1996) : “The channels of monetary transmission : Lessons for monetary policy,” .
- MYERS, S. C. AND R. A. COHN (1987) : “A discounted cash flow approach to property-liability insurance rate regulation,” in *Fair Rate of Return in Property-Liability Insurance*, Springer, 55–78.
- MYERS, S. C. AND J. A. READ JR (2001) : “Capital allocation for insurance companies,” *Journal of Risk and Insurance*, 545–580.

- PAN, J. AND Q. XIAO (2017) : “Optimal dynamic asset-liability management with stochastic interest rates and inflation risks,” *Chaos, Solitons & Fractals*, 103, 460–469.
- PAPACHRISTOU, D. (2011) : “Statistical Analysis of the Spreads of Catastrophe Bonds at the Time of Issue,” *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 41, 251–277.
- PHILLIPS, R. D., J. D. C. AND F. ALLEN (1998) : “Financial Pricing of Insurance in the Multiple-Line Insurance Company,” *Journal of Risk Insurance*, 65 (4), 597–636.
- PLANCHET, F. AND C.-Y. ROBERT (2016) : “From internal to ORSA models,” in *Modelling in Life Insurance—A Management Perspective*, Springer, 105–124.
- SANTOMIL, P. D. AND L. O. GONZÁLEZ (2020) : “Enterprise risk management and Solvency II : the system of governance and the Own Risk and Solvency Assessment,” *The Journal of Risk Finance*.
- SARIG, O. AND A. WARGA (1989) : “Bond price data and bond market liquidity,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, 367–378.
- SCHULTZ, P. (1998) : “Corporate bond trading costs and practices : A peek behind the curtain,” *Unpublished manuscript, University of Notre Dame*.
- SHERRIS, M. (2006) : “Solvency, capital allocation, and fair rate of return in insurance,” *Journal of Risk and Insurance*, 73, 71–96.
- SMACK, L. (2016) : “Catastrophe bonds—Regulating a growing asset class,” *Risk Management and Insurance Review*, 19, 105–125.
- SOMARÉ, I. AND E. TAFOLONG (2017) : “Risk-based capital for credit insurers with business cycles and dynamic leverage,” *Quantitative Finance*, 17, 597–612.
- TÊTU, A., I. SOMARÉ, M. GENDRON, ET AL. (2015) : “Hedging flood losses using CAT bonds,” *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 9, 149–184.
- TYCHON, P., V. VANNEBELBOSCH, ET AL. (2002) : *Debt valuation and marketability risk*, Université Catholique de Louvain.
- VAUGIRARD, V. E. (2003) : “Valuing catastrophe bonds by Monte Carlo simulations,” *Applied Mathematical Finance*, 10, 75–90.
- WARGA, A. (1992) : “Bond returns, liquidity, and missing data,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27, 605–617.
- WORLDWIDE, A. (2013) : “Study of impact and the insurance and economic cost of a major earthquake in British Columbia and Ontario/Québec,” *Prepared for Insurance Bureau of Canada*.

- YOUNG, V. R. (2004) : “Pricing in an incomplete market with an affine term structure,” *Mathematical Finance : An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 14, 359–381.
- ZARE, R. AND M. AZALI (2015) : “The association between aggregated and disaggregated stock prices with monetary policy using asymmetric cointegration and error-correction modeling approaches,” *Review of development Finance*, 5, 64–69.
- ZHANG, L. AND N. NIELSON (2012) : “Pricing for multiline insurer : Frictional costs, insolvency, and asset allocation,” *Risk Management and Insurance Review*, 15, 129–152.
- ZHAO, Y. AND M.-T. YU (2019) : “Measuring the liquidity impact on catastrophe bond spreads,” *Pacific-Basin Finance Journal*, 56, 197–210.