




Quaderni del  
Dottorato di  
Ricerca in Ingegneria  
dell'Informazione  
dell'Università di Firenze

**Stefano Maddio**

**Introduzione  
ai Sistemi di  
Localizzazione  
Indoor**



**2**



Quaderni del  
Dottorato di  
Ricerca in Ingegneria  
dell'Informazione  
dell'Università di Firenze

**Stefano Maddio**

# Introduzione ai Sistemi di Localizzazione Indoor



**2**

MANUALI  
SCIENZE TECNOLOGICHE

# Quaderni del Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell'Informazione dell'Università di Firenze

## COMITATO SCIENTIFICO

Luigi Chisci (Direttore), Fabrizio Argenti, Michele Basso, Alessandro Cidronali, Alberto Del Bimbo, Enrico Del Re, Romano Fantacci, Alessandro Fantechi, Paolo Frasconi, Dino Giuli, Gianfranco Manes, Stefano Manetti, Paolo Nesi, Giuseppe Pelosi, Massimiliano Pieraccini, Alessandro Rizzo, Stefano Ruffo, Piero Tortoli, Fabio Schoen, Marco Sciandrone, Carlo Sorrentino, Alberto Tesi, Enrico Vicario.

## TITOLI GIÀ PUBBLICATI

Alessandro Cidronali, Paolo Colantonio, Leonardo Lucci, *Antenne Integrate Attive*  
Stefano Maddio, *Introduzione ai Sistemi di Localizzazione Indoor*

STEFANO MADDIO

# Introduzione ai Sistemi di Localizzazione Indoor

Firenze University Press

2017

Introduzione ai Sistemi di Localizzazione Indoor /  
Stefano Maddio. – Firenze : Firenze University Press,  
2017.

(Manuali. Scienze tecnologiche ; 7).

<http://digital.casalini.it/9788864534886>

ISBN 978-88-6453-488-6 (online)

Progetto grafico di copertina: Alberto Pizarro Fernández,  
Pagina Maestra snc

#### *Certificazione scientifica delle Opere*

Tutti i volumi pubblicati sono soggetti ad un processo di referaggio esterno di cui sono responsabili il Consiglio editoriale della FUP e i Consigli scientifici delle singole collane. Le opere pubblicate nel catalogo della FUP sono valutate e approvate dal Consiglio editoriale della casa editrice. Per una descrizione più analitica del processo di referaggio si rimanda ai documenti ufficiali pubblicati sul catalogo on-line della casa editrice ([www.fupress.com](http://www.fupress.com)).

#### *Consiglio editoriale Firenze University Press*

A. Dolfi (Presidente), M. Boddi, A. Bucelli, R. Casalbuoni, M. Garzaniti, M.C. Grisolia, P. Guarnieri, R. Lanfredini, A. Lenzi, P. Lo Nostro, G. Mari, A. Mariani, P.M. Mariano, S. Marinai, R. Minuti, P. Nanni, G. Nigro, A. Perulli, M.C. Torricelli.

La presente opera è rilasciata nei termini della licenza Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0: <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>).

CC 2017 Firenze University Press  
Università degli Studi di Firenze  
Firenze University Press  
via Cittadella, 7, 50144 Firenze, Italy  
[www.fupress.com](http://www.fupress.com)

# INDICE

<b>Presentazione della collana (<i>Presentation of the series</i>)</b>	<b>VII</b>
<b>Prefazione</b>	<b>IX</b>
<b>Lista degli acronimi</b>	<b>XIII</b>
<b>1 Modelli per la localizzazione radio</b>	<b>1</b>
1.1 Trilaterazione . . . . .	2
1.1.1 Stima della distanza basata sul tempo di volo . . . . .	6
1.1.2 Stima della distanza basata sulla potenza – RSSI . . . . .	7
1.2 Trilaterazione differenziale . . . . .	8
1.2.1 Differenza dei tempi di volo . . . . .	10
1.3 Triangolazione . . . . .	11
1.3.1 Stima dell’angolo di arrivo basata su array di antenne . . . . .	12
1.4 Triangolazione differenziale . . . . .	14
<b>2 Algoritmi per la localizzazione</b>	<b>17</b>
2.1 Approcci Lineari . . . . .	17
2.1.1 Linear Least Square - LLS . . . . .	18
2.1.2 Weighted Linear Least Square - WLLS . . . . .	23
2.2 Esempi di triangolazione basata su approcci lineari . . . . .	26
2.3 Approcci non lineari . . . . .	27
2.3.1 Nonlinear Least Square - NLS . . . . .	28
2.3.2 Maximum Mikelihood - ML . . . . .	32
2.4 Esempi di triangolazione basata su approcci non lineari . . . . .	34
2.5 Confronto tra approcci lineari e non lineari . . . . .	36
<b>3 Diluizione della precisione</b>	<b>41</b>
3.1 Il limite teorico della precisione: il Cramer Rao Bound . . . . .	43
3.2 Cramer Rao Bound per la trilaterazione . . . . .	45
3.2.1 Alcuni esempi di CRB per costellazioni semplici . . . . .	47
3.3 Analisi di media e varianza: l’approccio ottimo . . . . .	50
3.3.1 Analisi del metodo Maximum Likelihood . . . . .	51
3.3.2 Analisi del metodo Weighted Linear Least Square . . . . .	52
3.4 Considerazioni finali sulla costellazione di ancore . . . . .	53
<b>Guida al materiale di approfondimento</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>
<b>L’autore</b>	<b>65</b>





## PRESENTAZIONE DELLA COLLANA (*Presentation of the series*)

Da novembre 2013, con il XXIX ciclo, è attivo presso il Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione dell'Ateneo fiorentino il Dottorato di Ingegneria dell'Informazione (DINFO). Tale dottorato, che fa parte della Scuola di Dottorato di Ingegneria dello stesso Ateneo, si propone di formare studiosi in grado di svolgere attività di ricerca di alto livello in svariati settori dell'Ingegneria dell'Informazione e affini, quali Automatica, Ricerca Operativa, Ingegneria Elettrica, Elettronica, Elettromagnetismo, Informatica, Bioingegneria e Telecomunicazioni. La presente collana si propone di raccogliere alcune monografie legate a corsi specifici del Dottorato, cercando anche di fornire una panoramica delle attività di ricerca che si svolgono nell'ambito del Dottorato stesso. Questo volume, in particolare, rappresenta un'introduzione alle attività svolte presso il Laboratorio *RF, Microonde ed Elettromagnetismo* (DINFO) nell'ambito della localizzazione *indoor* basata su segnali radio, e funge da materiale di supporto per il corrispondente corso di dottorato intitolato *Introduction to Indoor Wireless Positioning Systems*, tenuto da Stefano Maddio.

*In November 2013, at the Department of Information Engineering of the University of Florence, the Doctorate of Information Engineering has been activated. PhD courses, belonging to the Engineering PhD School of the University of Florence, are aimed to the education and training of graduates able to perform high level research activities in different areas of Information Engineering and similar, as Automation, Operative Research, Electric Engineering, Electronics, Electromagnetics, Information Technology, Bioengineering and Telecommunications. This series is aimed to the collection of some monographs related to specific PhD courses, trying to provide an overview on the research activities carried in the context of the doctorate. This volume, in particular, is an introduction to the activities carried out at the Laboratory RF, Microonde ed Elettromagnetismo in the field of indoor wireless localization, and serves as a support material for the corresponding doctoral course entitled Introduction to Indoor Wireless Positioning Systems, held by Stefano Maddio.*

Firenze, gennaio 2017

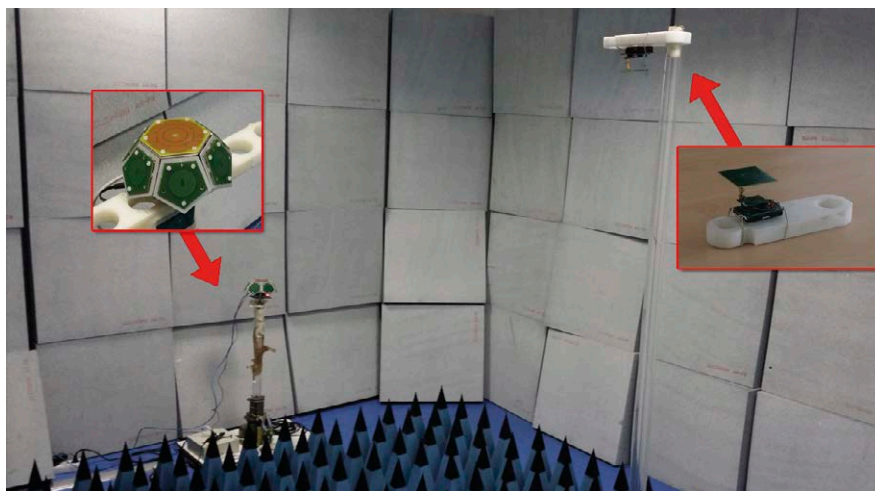
Luigi Chisci



## PREFAZIONE

Di recente, la capacità di localizzare persone e beni è diventata la forza trainante di un nuovo contesto di applicazioni spazialmente consapevoli (*context-aware*), che vanno dai servizi di sicurezza e protezione, alla *navigazione* di ambienti per fini commerciali, dalla gestione delle merci nei magazzini di stoccaggio, all'intrattenimento.

Sul fronte degli ambienti aperti, ovvero in un contesto indicato comunemente in letteratura scientifica come *outdoor*, lo standard tecnologico ormai consolidato è il sistema *Global Positioning System* (GPS), disponibile oramai su tutti i dispositivi personali. Il sistema GPS richiede per un corretto funzionamento la comunicazione con almeno quattro satelliti in orbita, ed è necessario che questa comunicazione avvenga in condizioni ottimali di *Line of Sight* (LoS). La costellazione dei satelliti si trova in orbita geostazionaria a circa 20000 km: data la distanza percorsa dai segnali, si comprende bene come piccoli errori percentuali sulla stima della distanza siano particolarmente gravosi per la stima posizionale dell'utente finale. Per rendersi conto dall'ordine di grandezza, un errore relativo dello 0.001% sulla stima della distanza utente-satellite corrisponde ad un errore assoluto sulla distanza pari a 2 km.



**Figura 1:** Caratterizzazione di un'antenna intelligente, cuore del sistema di localizzazione sviluppato presso il Laboratorio *RF, Microonde ed Elettromagnetismo* del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione dell'Università di Firenze.

Sebbene siano stati apportati molti miglioramenti nel campo della navigazione satellitare (su tutti si ricorda il nuovo sistema Galileo sviluppato dalla comunità europea), l'accuratezza di questa tecnologia è tuttavia fortemente limitata in ambienti chiusi (*indoor*), dove la ricezione dei segnali dai satelliti è deteriorata a causa dell'attenuazione del segnale e degli effetti delle riflessioni multiple, ovvero dal *multipath*. L'ambiente *indoor*, specie se complesso come un museo o un grande spazio commerciale, è uno scenario ostile al sistema satellitare, a causa della difficoltà incontrata dal segnale a propagarsi attraverso le opere murarie senza subire distorsioni inaccettabili. Lo scenario *indoor* non è l'unico

caso in cui la navigazione satellitare è non disponibile o estremamente inaffidabile: ad esempio aree all'aperto caratterizzate da un denso fogliame e aree aperte ma estremamente urbanizzate, come i moderni centri cittadini affollati di grattacieli, rendono comunque ardua la stima posizionale satellitare.

Negli ultimi decenni, molti sforzi sono stati dedicati allo sviluppo di sistemi di localizzazione di tipo locale, pensati per ambienti *indoor* e non dipendenti dall'accesso alle costellazioni di satelliti. Questo sviluppo indipendente è stato in parte trainato dallo straordinario sviluppo delle reti di sensori – *Wireless Sensor Network* (WSN) – nate per monitorare in maniera autonoma aree più o meno vaste, senza l'intervento dell'uomo. Queste reti hanno trovato applicazioni in molti campi interdisciplinari e sono spesso interfacciate con le infrastrutture preesistenti, come le *Wireless Local Area Network* (WLAN). In tutti questi campi, l'associazione di una grandezza monitorata ad una precisa posizione geografica è pressoché obbligatoria, pena l'inutilità del dato misurato, che resta privo di contesto. Questo approccio si sta evolvendo nell'ancor più dirompente campo dell'*Internet of Things* (IoT), e di tutte le sue ricadute quali la domotica e l'automazione avanzata.

È chiaro che, per ovvi motivi economici, un sistema di localizzazione *indoor* con fini domotici, commerciali o accademici, non può competere con una costellazione di satelliti in orbita in termini di costi e prestazioni. Inoltre, le caratteristiche di un sistema di localizzazione *indoor* dipendono molto dalla scala geometrica che caratterizza il singolo problema, preso caso per caso. Se lo scopo del sistema di localizzazione è assegnare la posizione ad un visitatore in un museo, una precisione submetrica può ritenersi adeguata, ma se l'applicazione è tele-chirurgica, allora la scala della precisione deve essere almeno micrometrica. È chiaro quindi che la complessità, sia software che hardware, e di conseguenza i costi che un sistema di localizzazione deve sostenere, possono essere estremamente variabili, quantificabili soltanto una volta esplicitato il caso concreto.



**Figura 2:** Costellazione di sensori appesi al soffitto nei locali dell'Università di Firenze. Questa configurazione permette una localizzazione radio non invasiva di nodi mobili e utenti.

Seguendo questa filosofia, presso il laboratorio *RF, Microonde ed Elettromagnetismo* del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione dell'Università di Firenze, sono stati sviluppati molti prototipi per sistemi di localizzazione indoor basati su segnali radio. L'idea di base è quella di operare con un sensore che sia in grado di svolgere la funzione di ancora sia per sistemi di trilaterazione (basati sull'intersezione di cerchi), che di triangolazione (basati sull'intersezione di rette). La chiave di questo sistema è un nodo *wireless*, illustrato in Figura 1, dotato di una antenna intelligente in grado di ricon-

figurare il proprio fascio. Sulla base di questo nodo elementare, sono state sviluppate reti di sensori scalabili, in grado di localizzare un nodo mobile sulla base di comunicazioni radio standard, operanti secondo lo standard WiFi 802.11. Un esempio di rete di sensori è mostrata in Figura 2.

Il presente testo *Introduzione ai Sistemi di Localizzazione Indoor* vuole essere un primo riferimento per chi intende cimentarsi in questo promettente campo di studi in rapida via di espansione. Questo volume è infatti il secondo numero della collana dal titolo «Quaderni del Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell'Informazione dell'Università di Firenze» a supporto dell'omonimo corso di Dottorato dell'Università di Firenze.

Nel caso di interesse di questo testo, le misure coinvolte nella stima posizionale sono esclusivamente i segnali a radio frequenza, operanti nella comunicazione tra l'oggetto da localizzare e il sistema stesso, in piena compatibilità con il paradigma portato al successo dall'approccio IoT. Nei 3 capitoli di cui si compone il presente testo vengono affrontati in modo generale, ma comunque rigoroso, le strategie di localizzazione base che fungono da fondamento per i moderni e complessi sistemi di posizionamento che si stanno affacciando sul mercato. Viene inoltre fornita una dettagliata bibliografia per permettere al lettore l'approfondimento di specifiche tematiche legate a questo mondo.

Firenze, luglio 2016

Stefano Maddio



## LISTA DEGLI ACRONIMI

<b>AoA</b>	Angle of Arrival
<b>CRB</b>	Cramer Rao Bound
<b>DoA</b>	Direction of Arrival
<b>DAoA</b>	Difference Angle of Arrival
<b>DDoA</b>	Difference Direction of Arrival
<b>GN</b>	Gauss - Newton
<b>IoT</b>	Internet of Things
<b>LLS</b>	Linear Least Square
<b>LoB</b>	Line of Bearing
<b>LoS</b>	Line of Sight, linea di vista
<b>ML</b>	Maxium Likelihood
<b>NLS</b>	Non-Linear Least Square
<b>GN</b>	Gauss - Newton
<b>RSSI</b>	Received Signal Strenght Indicator
<b>RX</b>	Ricevente - Ricezione
<b>SNR</b>	Signal to Noise Ratio
<b>SD</b>	Steepest Descent
<b>T</b>	Target, oggetto da localizzare
<b>ToA</b>	Time of Arrival
<b>ToF</b>	Time of Flight
<b>TDoA</b>	Time Difference of Arrival
<b>TDoF</b>	Time Difference of Flight
<b>TX</b>	Trasmittente - Trasmissione
<b>TX/RX</b>	Trasmissione/Ricezione
<b>WLAN</b>	Wireless Local Area Network
<b>WLLS</b>	Weighted Linear Least Square
<b>WSN</b>	Wireless Sensor Network





# 1. MODELLI PER LA LOCALIZZAZIONE RADIO

L'obiettivo di un sistema di localizzazione (o di posizionamento, come verrà indicato alternativamente in questo testo) è di attribuire ad un mezzo mobile indipendente, indicato come *nodo target* o semplicemente *target* nel prosieguo di questo testo, una posizione definita rispetto ad un riferimento noto, ovvero un insieme di 3 coordinate spaziali che rappresentino in maniera non ambigua la collocazione di quest'ultimo nel riferimento del sistema. Le coordinate spaziali possono essere di tipo cartesiano, sferico o cilindrico, avendo opportunamente definito il tipo di riferimento a cui queste saranno riferite. È implicito che assieme alla posizione sia indicata una precisione ad essa associata, nel senso che, come ogni apparato di misura reale, il sistema di localizzazione è affetto da un'incertezza legata alla propagazione dell'errore.

Un sistema di localizzazione si caratterizza con una precisione *adeguata* alla scala che il sistema stesso si propone: nel caso di un geo-posizionamento satellitare un errore di qualche metro può essere adeguato allo scopo; se invece l'idea è quella di individuare la posizione di un visitatore in un museo sarà probabilmente indispensabile ricercare un errore sub-metrico. La sequenza storica ordinata delle posizioni successive di un target si configura poi come tracciamento (*tracking*) dell'oggetto, e usufruisce di molti altri risultati mutuati da altre discipline, come ad esempio il *filtro di Kalman*.

In generale la localizzazione richiede l'osservazione di un sottoinsieme di grandezze fisiche. Questi valori di misurazione caratterizzano una certa posizione all'interno dell'ambiente monitorato, pertanto è evidente che le osservazioni per scopi di posizionamento devono mostrare una dipendenza spaziale/locale. Questo capitolo è dedicato ai principi di posizionamento, che sono tipicamente applicati quando ciò che si osserva e misura è una forma d'onda a radiofrequenze o alle microonde. Benché esistano altre grandezze monitorabili per determinare la posizione, quelli basati sullo stesso apparato utilizzato per la comunicazione radio hanno l'indubbio vantaggio di non dover duplicare la sensoristica, e sono perciò particolarmente adatti al moderno paradigma dell' *Internet of Things* e della domotica.

Nell'eseguire il compito di localizzazione, con la collaborazione del nodo localizzando, si possono individuare quattro fasi:

1. osservazione del segnale;
2. estrazione di parametri del segnale dipendenti dalla posizione del target;
3. elaborazione dei parametri;
4. post-elaborazione basata eventualmente sullo storico delle osservazioni.

Un sistema di localizzazione può essere definito effettivo se riesce a individuare la posizione con adeguata precisione – per esempio persona in un museo con un errore sub-metrico – ed efficace se riesce nel suo intento con risorse minimali (in termini di hardware, software, tempi, ecc). Quest'ultima osservazione può decretare il successo o il fallimento di un sistema di localizzazione in un mercato estremamente competitivo.

Dal punto di vista matematico, il *modello di osservazione* può essere espresso in modo molto semplice e sintetico nella seguente espressione:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \tag{1.1}$$

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore delle grandezze misurate, ovvero una specifica caratteristica legata alla grandezza fisica utilizzata per rivelare la posizione,  $\mathbf{x}$  la posizione incognita del mezzo mobile,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  è una funzione vettoriale nota, eventualmente non lineare, che leghi la posizione  $\mathbf{x}$  alla grandezza  $\mathbf{r}$ ; infine  $\mathbf{n}$  è un rumore additivo supposto a media nulla. Il tipo di grandezza monitorata determina l'approccio per l'elaborazione che poi si traduce nella determinazione della posizione. Si può altresì affermare che la relazione  $\mathbf{f}(\cdot)$  associ la posizione  $\mathbf{x}$  nel sistema di riferimento noto allo specifico segnale  $N$ -dimensionale osservato  $\mathbf{r}$ . Quest'ultima associazione è affetta dal rumore  $\mathbf{n}$ , che anche in un contesto semplificato non può prescindere dal rumore termico insito nel sistema elettronico che determina la grandezza  $\mathbf{r}$ . Il sistema di localizzazione si intende composto da un numero variabile di *ancore*, ovvero sensori di posizione nota, che monitorino il nodo localizzando attraverso la misurazione della grandezza  $\mathbf{r}$ . Questi nodi ancora si intendono posizionati in una fase di setup e costituiscono l'infrastruttura di riferimento. Il loro insieme sarà indicato come *costellazione*.

Lo scopo del presente testo è l'analisi dei soli approcci basati su misure a radio-frequenza; si aggiunga inoltre che il problema verrà affrontato con un approccio bidimensionale, ovvero la posizione del nodo localizzando si intenderà come completamente nota una volta note due delle sue 3 componenti spaziali, ad esempio  $x$  e  $y$  nel caso il sistema di riferimento sia cartesiano (come nella maggioranza dei casi di interesse). Questa semplificazione è legittimata dal tipo di dominio che un sistema di localizzazione radio, come quelli trattati in questo testo, è in grado di coprire. Infatti, non soltanto la posizione bidimensionale è compatibile con tutti i casi di interesse pratico che la nuova frontiera della localizzazione *indoor* presenta (si pensi ad esempio al caso di monitoraggio per la fruizione dei beni museali, alla navigazione in spazi commerciali, ecc.), ma oltretutto risulta relativamente semplice estendere la maggior parte dei risultati al caso tridimensionale effettivo.

In questo contesto le strategie principali per la localizzazione possono essere divise in 2 macrogruppi: triangolazione (*triangulation*) e trilaterazione (*trilateration*), che a loro volta possono specializzarsi in una forma differenziale o in altre implementazioni ancor più specifiche, queste ultime nate in genere da esigenze pratiche relative alle grandezze misurate.

## 1.1 Trilaterazione

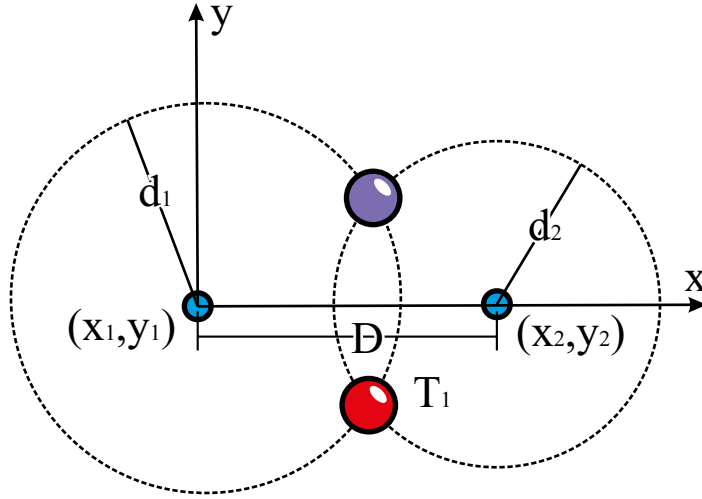
La trilaterazione, o multilaterazione come viene più propriamente definita nel generico caso in cui siano disponibili  $L$  riferimenti, stima la posizione del target basandosi sulle proprietà geometriche dei triangoli.

In particolare, la posizione di un'unità mobile si ottiene come risultato di un sistema non lineare operante sull'insieme di distanze tra il nodo target e ognuna delle ancore di riferimento. Definita infatti la distanza  $d_1$  dalla prima ancora, la posizione del target è vincolata a giacere su di un cerchio di raggio  $d_1$  dal centro di questa. Data poi una seconda stima  $d_2$  rispetto ad un seconda ancora – e quindi da un secondo centro – viene a determinarsi un secondo cerchio su cui il target è vincolato a giacere.

Due cerchi possono intersecarsi soltanto in due punti, che corrispondono a due possibile posizioni del target. Si esprime quindi la posizione del target come  $\mathbf{r} = (x, y)$  e si suppone nota la posizione di due ancore, rispettivamente pari a  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . La distanza tra le ancore e il target è quindi pari a  $d_1, d_2$ , e la relazione tra le grandezze in esame risulta:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = d_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = d_2^2 \end{cases} \quad (1.2)$$

Come si evince dalla Figura 1.1, la posizione del target è quindi individuata dall'intersezione dei due cerchi, ma presenta un'ambiguità. Per risolverla è necessario ricorrere a una terza misura rispetto ad una terza ancora di posizione  $(x_3, y_3)$ , che individua una distanza  $d_3$  con il target. In questo modo il



**Figura 1.1:** ambiguità della posizione del target con due misure di distanza.

sistema si traduce in:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = d_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = d_2^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = d_3^2 \end{cases} \quad (1.3)$$

che ammette quindi una soluzione univoca.

L'approccio classico per la soluzione di questo sistema si basa sul *teorema della corda*. A tal scopo si supponga, senza perdere di generalità, di poter fissare il centro del riferimento assoluto nella posizione dell'ancora #1, e che l'asse  $x$  sia quello che la congiunge all'ancora #2. Questo implica che  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$  e  $x_2 = D$ ,  $y_2 = 0$ . Con riferimento alla Figura 1.1 si ha che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = d_1^2 \\ (x - D)^2 + y^2 = d_2^2 \end{cases} \quad (1.4)$$

sottraendo la seconda equazione alla prima si ottiene

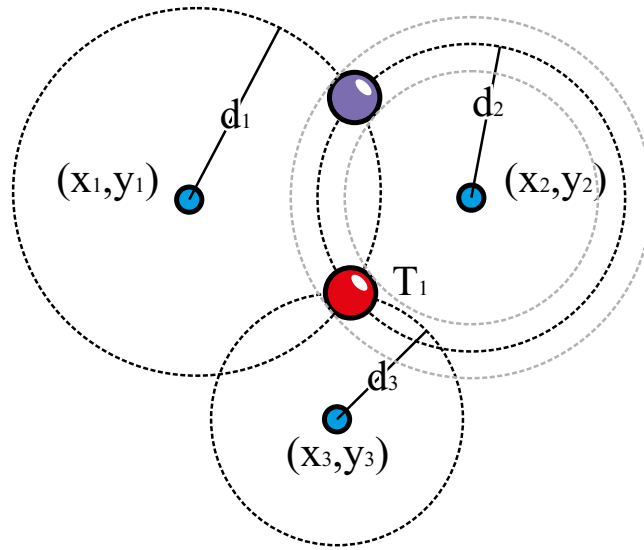
$$x^2 - (x - D)^2 = 2xD - D^2 = d_1^2 - d_2^2 \quad (1.5)$$

da cui, facilmente

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{D}{2} + \frac{d_1^2 - d_2^2}{2D} \\ \hat{y} = \pm \sqrt{d_1^2 - \hat{x}^2} \end{cases} \quad (1.6)$$

dove il segno  $\pm$  è dovuto all'ambiguità precedentemente descritta.

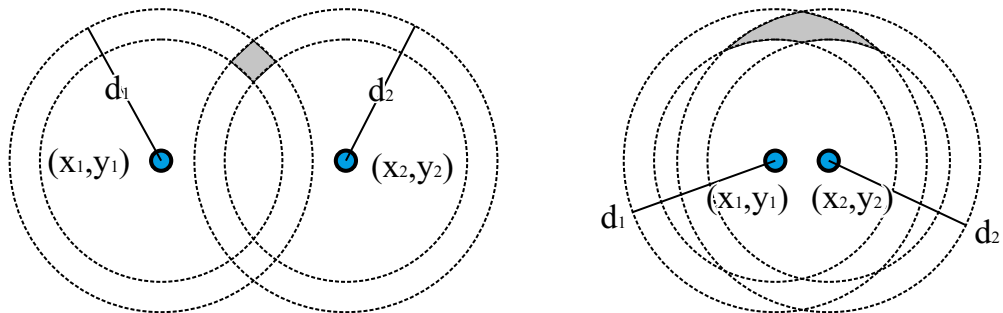
Per risolvere questa ambiguità è sufficiente aggiungere una terza ancora, come indicato in Figura 1.2. In questo caso infatti ogni coppia di cerchi produrrà due stime posizionali formalmente identiche alle (1.6), ovvero sei stime in tutto. Di queste, almeno tre saranno coincidenti, e corrisponderanno alla reale posizione  $(x, y)$  del target  $T$ . Si può pertanto concludere che, nel caso ideale, il numero minimo di ancore necessarie per trilaterare la posizione è pari a 3. Tuttavia, a causa di inevitabili errori di misura nella stima delle distanze  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  il sistema di trilaterazione a tre ancore è risolvibile esattamente soltanto in via teorica, perché l'effetto del rumore è di perturbare i tre cerchi, impedendo l'esatta intersezione e quindi la determinazione della posizione del target. Si può affermare che anziché con una



**Figura 1.2:** Posizione individuate in modo non ambiguo mediante un sistema di tre ancore.

distanza deterministica si ha a che fare con un *intervallo* di possibili distanze, dal momento che nel caso pratico è almeno possibile stimare un intervallo di fiducia sulla misura di  $d$ , individuando quindi gli estremi entro cui  $d$  si trova con sicurezza statistica. Si parla talvolta di *pseudo-range*, specialmente nelle implementazioni basate sul calcolo dei tempi come misura indiretta per la distanza.

Dall'ispezione diretta si può inoltre comprendere come l'errore con cui è affetta la stima delle distanze  $d$  possa avere effetti diversi in conseguenza della posizione localizzanda. L'accuratezza dell'espressione  $\frac{d_1^2 - d_2^2}{2D}$ , che determina la coordinata  $x$  del target, dipende molto dal rapporto tra  $d$  e  $D$ . Se quest'ultimo è molto piccolo, l'errore su  $d$  verrà esaltato nel calcolo causando una propagazione nefasta dell'errore. In Figura 1.3 questo concetto è mostrato in modo grafico. A sinistra, l'intersezione



**Figura 1.3:** Propagazione dell'errore per effetto della posizione delle ancore rispetto al target.

di due cerchi di uguale raggio si modifica in seguito ad una perturbazione sulla misura degli stessi (per semplicità l'errore è supposto identico su entrambi). In seguito a questa deformazione, la posizione del localizzando è incerta all'interno dell'area sovrapposta dei due segmenti circolari. In altre parole, la posizione del target potrebbe essere ovunque all'interno della regione grigia.

A destra, la medesima situazione si ripete nel caso in cui la distanza tra le ancore sia molto minore di quella nel caso a sinistra. A fronte di una medesima perturbazione sui raggi dei cerchi, l'area identificata dall'intersezione dei segmenti circolari è maggiore che nel primo caso e molto più

deformata in un senso rispetto all'altro. Questa situazione avrà quindi un peso maggiore sull'incertezza della stima finale.

È abbastanza chiaro che, a prescindere dalla perturbazione dovuta all'errore, la stima posizionale migliora se l'intersezione viene eseguita a partire da più coppie di cerchi e quindi più distanze, poiché questa sovradeterminazione raffina l'intersezione tra gli intervalli di sicurezza con cui le grandezze  $d$  sono stimate. Tuttavia, anche in presenza di un sistema sovradimensionato, la soluzione della trilaterazione in maniera diretta come intersezione di cerchi non è generalmente il modo migliore con cui procedere. La migliore strategia passa infatti attraverso la riformulazione del problema in maniera più strutturata, in modo da sfruttare anche i risultati provenienti da altri ambiti di ricerca.

Nel caso generale di una costellazione di  $L$  antenne, il modello di misura in (1.3) si riformula in maniera estesa nel seguente modo:

$$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\| = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (1.7)$$

Pertanto, la  $l$ -ima misura della distanza indicata con  $r_{R,l}$ , si può indicare con

$$r_{R,l} = d_l + n_{R,l} = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} + n_{R,l}, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (1.8)$$

che può essere a sua volta espressa in forma vettoriale come:

$$\mathbf{r}_{R,l} = \mathbf{f}_R(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_R \quad (1.9)$$

dove

$$\mathbf{r}_{R,l} = [r_{R,1}, r_{R,2}, \dots, r_{R,L}]^T, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{n}_{R,l} = [n_{R,1}, n_{R,2}, \dots, n_{R,L}]^T, \quad (1.11)$$

La funzione vettoriale  $\mathbf{f}_R(\mathbf{x})$  è quindi composta da componenti parametrizzate in  $\mathbf{x}$ , pertanto il problema della localizzazione si traduce nella stima di  $\mathbf{x}$  data la grandezza misurata  $\mathbf{r}_R$ , che si intende sempre affetta da errore come espresso dalla relazione in (1.11).

Riscrivendo il tutto esplicitamente, la relazione in questione diventa:

$$\begin{bmatrix} r_{R,1} \\ r_{R,2} \\ \vdots \\ r_{R,L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{R,1} \\ n_{R,2} \\ \vdots \\ n_{R,L} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Un modello alternativo per questo tipo di osservazione è quello basato sull'approccio probabilistico. In questo senso, la generica osservazione eseguita dall'ancora  $l$ -sima rispetto al target è vista come una densità di probabilità di tipo normale (gaussiana), esprimibile come:

$$p(r_{R,l}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{R,l}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{R,l}^2}(r_{R,l} - d_l)^2\right). \quad (1.13)$$

La media di questa distribuzione è ovviamente  $d_l$  e la deviazione standard dovuta all'errore è pari a  $\sigma_{R,l}$ . In questa accezione, il modello (1.12) può essere riscritto in forma di statistica  $L$ -dimensionale nel seguente modo:

$$p(\mathbf{r}_R) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} |\mathbf{C}_R|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_R - \mathbf{d})^\top \mathbf{C}_R^{-1}(\mathbf{r}_R - \mathbf{d})\right) \quad (1.14)$$

dove la matrice di correlazione  $\mathbf{C}_R$  può essere espressa come

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{E} [(\mathbf{r}_R - \mathbf{d})(\mathbf{r}_R - \mathbf{d})^\top], \quad (1.15)$$

essendo l'operatore  $\mathbf{E}[a]$  il valore atteso della grandezza  $a$ . Nel caso in cui le distribuzioni di probabilità siano indipendenti, ovvero nel caso di rumori di misura scorrelati tra le varie ancore, la matrice di correlazione può essere semplificata:

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{E} [\mathbf{n}_R \mathbf{n}_R^\top] = \text{diag} (\sigma_{R,1}^2, \sigma_{R,2}^2, \dots, \sigma_{R,L}^2) \quad (1.16)$$

E di conseguenza anche il modello (1.13) assume la forma di una distribuzione gaussiana multidimensionale:

$$p(\mathbf{r}_R) \sim \mathcal{N}(\mathbf{d}, \text{diag}(\sigma_{R,1}, \sigma_{R,2}, \dots, \sigma_{R,L})) \quad (1.17)$$

che può essere espressa nel seguente modo:

$$p(\mathbf{r}_R) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} \prod_{l=1}^L \sigma_{R,l}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \frac{(r_{R,l} - d_l)^2}{\sigma_{R,l}^2} \right) \quad (1.18)$$

### 1.1.1 Stima della distanza basata sul tempo di volo

Gli approcci basati sulla trilaterazione sono stati tra i primi ad essere impiegati per la stima della posizione del target incognito, sfruttando misurazioni temporali dei segnali radio. Queste ultime possono infatti essere facilmente convertite in misure di distanza conoscendo la velocità dei segnali in gioco, [1-3].

Il tempo impiegato dal segnale per percorrere lo spazio che separa il target localizzando posizionato in  $\mathbf{r}$  dalle singole ancore è tipicamente definito *tempo di volo*, o con una diffusa nomenclatura inglese *Time of Flight* (ToF); nome alternativo è quello di *tempo di arrivo*, ovvero *Time of Arrival* (ToA) in Inglese, che enfatizza invece l'istante in cui il segnale viene rilevato. La velocità del segnale è evidentemente la velocità della luce nel mezzo di propagazione, tipicamente l'aria.

In genere si assume che ogni nodo ancora abbia accesso allo stesso *clock* condiviso dall'intera costellazione. Si indica dunque con  $t_i$  il tempo di arrivo alla  $i$ -esima ancora. Assumendo che il segnale sia trasmesso al tempo  $t_M$ , sia  $\tau_i$  il ToF tra il target e la generica ancora  $(x_i, y_i)$ , distante  $d_i$  dal target. Utilizzando queste informazioni, è possibile scrivere che

$$t_i = \tau_i + t_M = \frac{d_i}{c} + t_M = \frac{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}}{c} + t_M \quad (1.19)$$

che assume il ruolo della (1.7). Senza perdere di generalità, si può supporre che la sorgente – il target – emetta il segnale al tempo zero, e che il sensore nell'ancora  $l^{\text{th}}$  lo riceva al tempo  $t_l$ ; in questa situazione il modello di misura in (1.3) si riformula in maniera estesa nel seguente:

$$r_{ToA,l} = \frac{d}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} + n_{ToA,l}, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (1.20)$$

Di conseguenza i modelli per trattare questo caso sono identici a quelli in (1.9) e (1.13) a parte il fattore di scala dovuto alla velocità della luce.

Quest'ultima è appunto la principale difficoltà che affligge i sistemi basati sul principio ToA, dato che l'elevatissimo valore di  $3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ , rapportato alle distanze metriche degli ambienti *indoor*, rende necessarie precisioni e coerenza estreme. Per ottenere con un valore di precisione adeguato il ritardo di propagazione del segnale, i riferimenti temporali di tutte le ancore e del target devono

essere uguali, ma questo requisito è difficile da raggiungere. Dal lato della costellazione di ancore è possibile impiegare una ragionevole quantità di risorse per sincronizzare le basi tempi, utilizzando orologi altamente stabili. L'eventuale asincronia tra la ancore può inoltre essere misurata e fornire così il dato occorrente per compensare tale deviazione. Tuttavia, il problema di differenti basi temporali tra la costellazione di ancore ed il nodo target permane, almeno per dispositivi commerciali di massa. Questi ultimi sono infatti costruiti con componenti a basso costo e possono al massimo fornire una ragionevole stabilità a breve termine. Questa incertezza implica un'ineliminabile perturbazione sui cerchi, causando un'intersezione rumorosa come quella indicata in Figura 1.3.

### 1.1.2 Stima della distanza basata sulla potenza – RSSI

Con il termine *Received Signal Strength Indicator*, o RSSI, si intende un valore numerico che indica la potenza ricevuta dai sensori di riferimento durante una comunicazione con il target, [4, 5]. Si assume comunemente che la potenza ricevuta segua il modello di decadimento polinomiale, tipico del modello di Friis, [6, 7]. Tale potenza è infatti supposta dipendente quella trasmessa, dalle costanti di perdita lungo il percorso — *path loss constant* — e dalla distanza tra sorgente e sensore. Il fatto che ogni trasmettitore conforme agli standard IEEE sia nativamente in grado di misurare il valore dell'RSSI dei pacchetti radio ha reso molto popolari i metodi basati su questo approccio, [8–13].

Assunta una potenza trasmessa  $P_t$ , in assenza di disturbi la potenza media ricevuta dall' $l^o$  sensore, indicata come  $P_{r,l}$ , è modellata da [14]:

$$P_{r,l} = K_l P_t d_l^{-\alpha} = K_l P_t \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\|^{-\alpha}, \quad 1, 2, \dots, L \quad (1.21)$$

dove i coefficienti  $K_l$  tengono conto di tutti quei fattori che influenzano la potenza ricevuta ma che non dipendono dalla distanza, come ad esempio il guadagno delle antenne usate per la comunicazione (che pertanto dovranno essere ben caratterizzate). Il coefficiente  $\alpha$  è invece la costante di path-loss, che in funzione dello scenario può essere un numero variabile tra 2, valido per lo spazio libero, a 5 o 6 in un ambiente chiuso, a causa di riflessioni e altri fenomeni diffusivi di ordine superiore. Esistono molti modelli empirici ed euristici che permettono di conservare la validità del modello a patto di aumentare appunto il valore di tale costante. Inoltre, svariati anni di sperimentazioni hanno messo in evidenza come il rumore additivo alla grandezza RSSI sia di tipo *lognormale* — dove con tale termine si intende una distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria  $r$  il cui logaritmo  $\ln(r)$  segue una distribuzione normale, [15].

Basandosi quindi sulle precedenti considerazioni, il modello di osservazione completo può essere in questo caso espresso come:

$$\ln P_{r,l} = \ln K_l + \ln P_t - \alpha \ln d_l + n_{RSSI,l}, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (1.22)$$

dove la distribuzione  $n_{RSSI,l}$  è normale. Per semplicità si assume che  $n_{RSSI,l}$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  siano processi gaussiani a media nulla caratterizzati da varianze  $\{\sigma_{RSSI,l}^2\}$ . Definito il valore

$$r_{RSSI,l} = \ln P_{r,l} - \ln K_l - \ln P_t \quad (1.23)$$

il modello si semplifica in:

$$r_{RSSI,l} = -\alpha \ln d_l + n_{RSSI,l}, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (1.24)$$

che assume la seguente forma vettoriale:

$$\mathbf{r}_{RSSI} = \mathbf{f}_{RSSI}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_{RSSI} \quad (1.25)$$

dove

$$\mathbf{r}_{RSSI} = [r_{RSSI,1}, r_{RSSI,2}, \dots, r_{RSSI,L}]^T \quad (1.26)$$

$$\mathbf{n}_{RSSI} = [n_{RSSI,1}, n_{RSSI,2}, \dots, n_{RSSI,L}]^T; \quad (1.27)$$

$$\mathbf{f}_{RSSI}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} = -\alpha \begin{bmatrix} \ln \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \\ \ln \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \\ \vdots \\ \ln \sqrt{(x-x_L)^2 + (y-y_L)^2} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Pertanto, il problema della localizzazione del target basato su stime della potenza ricevuta può essere formalizzato come la stima di  $\mathbf{x}$  dato il set di misure formalizzate come  $\mathbf{r}_{RSSI}$ .

A livello pratico lo schema di posizionamento è più semplice di quello usato per le misure dei tempi di volo, dal momento che non sono necessarie sincronizzazioni. Tuttavia, la complessità del canale radio implica delle perturbazioni notevoli (e spesso con distribuzione non uniforme) sulla stima della potenza ricevuta.

In questa implementazione, la formulazione basata sulla densità di probabilità assume la forma:

$$p(\mathbf{r}_{RSSI}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} |\mathbf{C}_R|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_{RSSI} - \mathbf{d})^\top \mathbf{C}_{RSSI}^{-1}(\mathbf{r}_R - \mathbf{d})\right) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} \prod_{l=1}^L \sigma_{RSSI,l}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \frac{(r_{RSSI,l} + \alpha \ln d_l)^2}{\sigma_{RSSI,l}^2}\right) \quad (1.29)$$

dove la matrice di correlazione  $\mathbf{C}_{RSSI}$  risulta pari a  $\text{diag}(\sigma_{RSSI,1}, \sigma_{RSSI,2}, \dots, \sigma_{RSSI,L})$  (?).

## 1.2 Trilaterazione differenziale

La trilaterazione differenziale si basa sulla *differenza* tra le distanze, ovvero sulla *combinazione* tra i range stimati dalle varie ancore, avendone assunto uno come riferimento, [16]. Con riferimento alla stessa distribuzione di ancore di Figura 1.1, la distanza  $d_1$  fa stavolta da riferimento, per cui:

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} - \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \\ d_3 - d_1 = \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2} - \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \end{cases} \quad (1.30)$$

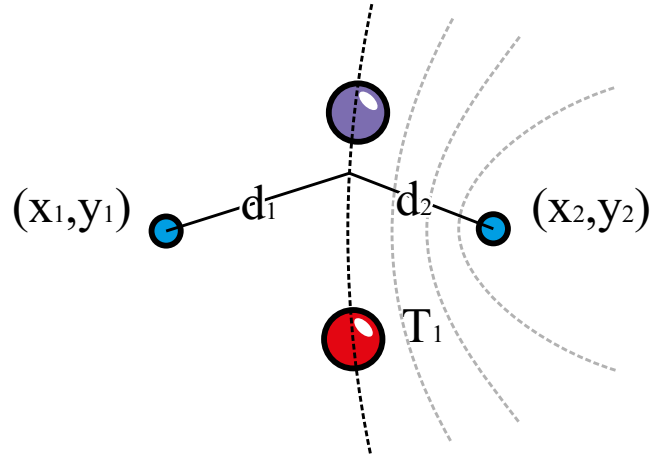
Geometricamente, la prima relazione definisce un'iperbole con i fuochi in  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , come si può osservare in Figura 1.4; la posizione del target è ottenuta dall'intersezione di almeno due iperboli, quindi in una costellazione che dispone di almeno tre ancore, come illustrato in Figura 1.5. Nel caso generale di più ancore si avranno ovviamente più iperboli che a causa del rumore di misura non necessariamente si intersecheranno in un singolo punto, andando così a rendere la localizzazione ambigua.

Date  $L$  ancore, esistono  $L(L-1)/2$  differenze di range distinte considerando ogni possibile coppia, ovvero:

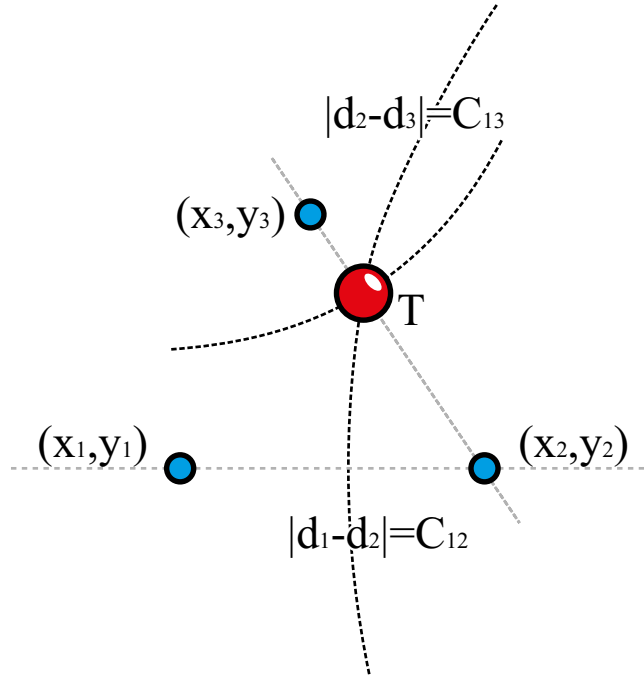
$$d_{k,l} = d_k - d_l, \quad k, l = 1, 2, \dots, L \text{ con } k > l. \quad (1.31)$$

Tuttavia, soltanto  $(L-1)$  di queste differenze sono indipendenti. Al fine di ridurre la complessità senza sacrificare le prestazioni, è preferibile misurare tutte le  $L(L-1)/2$  per poi convertirle nel sottoinsieme delle  $L-1$  stime non ridondanti [17].





**Figura 1.4:** Luogo dei punti in cui può trovarsi il target quando è nota soltanto la differenza  $d_2 - d_1$ .



**Figura 1.5:** Posizione individuate grazie all'intersezione di due iperboli ottenute mediante tre ancore.

Senza addentrarsi troppo nei dettagli di questa strategia, e senza perdere di generalità, si assume che il sensore 1 faccia da riferimento per l'implementazione diretta, per cui la singola osservazione su cui si fonda il modello risulta:

$$d_{l,1} = d_l - d_1 = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad l = 2, \dots, L. \quad (1.32)$$

Assunto ciò, la funzione di osservazione vettoriale comprensiva di rumore diventa

$$r_{DR,l} = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + n_{DR,l}, \quad l = 2, \dots, L \quad (1.33)$$

che concisamente in forma vettoriale si scrive:

$$\mathbf{r}_{DR} = \mathbf{f}_{DR,l}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_{DR} \quad (1.34)$$

dove

$$\mathbf{r}_{DR} = [r_{DR,2}, r_{DR,3}, \dots, r_{DR,l}]^\top \quad (1.35)$$

e inoltre

$$\mathbf{f}_{DR}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} - \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \\ \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2} - \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x-x_L)^2 + (y-y_L)^2} - \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Il problema della localizzazione con approccio di tipo triangolazione differenziale si enuncia formalmente come la stima di  $\mathbf{x}$  nell'equazione (1.34) dato il vettore  $\mathbf{r}_{DR}$ .

Per quanto riguarda l'approccio basato sulla distribuzione di probabilità, in questo caso è necessario porre attenzione alla natura dell'errore. Assunto infatti che il vettore di errore  $\mathbf{n}_{DR}$  sia gaussiano a media nulla, la pdf associata a questo modello di osservazione si può scrivere:

$$p(\mathbf{r}_{DR}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} |\mathbf{C}_{DR}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_{DR} - \mathbf{d})^\top \mathbf{C}_{DR}^{-1}(\mathbf{r}_{DR} - \mathbf{d})\right) \quad (1.37)$$

ma in questo caso, la matrice di correlazione  $\mathbf{C}_{DR}$  non è diagonale, dal momento che la scelta di riferire tutte le stime di distanza alla stima del sensore  $l = 1$  rende i contributi  $n_{DR,l}$  correlati tra loro [18].

### 1.2.1 Differenza dei tempi di volo

Il modo più diretto per implementare la trilaterazione differenziale è attraverso l'applicazione della differenza dei tempi di volo, o *Time Difference of Arrival* (TDoA) sfruttando la dizione con cui è nota a livello internazionale. Tale metodo si basa su una misura diretta della differenza dei tempi di percorrenza del segnale nel suo tragitto dal target alle ancore. Il grande vantaggio del metodo TDoA rispetto al ToA consiste nel rilassamento sulle richieste di sincronizzazione, dal momento che in questo caso non è necessario che essa sia assoluta. Si può infatti affermare che il modello differenziale si è affermato proprio per permettere di rilassare la richiesta di sincronizzazione assoluta, la cui implementazione può risultare estremamente complicata e costosa a livello hardware.

Sulla base di questa filosofia è basato il sistema LORAN (*LOng RANGE Navigation*), utilizzato in passato da molte nazioni, quali gli Stati Uniti, il Giappone, l'India e molti paese europei, [19]. Questo è un sistema di radionavigazione terrestre tramite onde radio in banda *LF*, con frequenze da 90 a 110 kHz - che sfrutta la misura dell'intervallo di tempo tra i segnali ricevuti da tre o più stazioni per determinare la posizione di una nave o di un aereo.

Nell'ambito di questo tipo di sistemi, si assume che la sorgente emetta il segnale al tempo  $t_0$  - di per se non noto al sistema - e che il sensore  $l$ -simo lo riceva al tempo  $t_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  con  $L \geq 3$ . Utilizzando questo sistema, non è necessaria una sincronizzazione assoluta, dal momento che è sufficiente un contatore preciso nel target, ma non obbligatoriamente sincrono con il riferimento delle boe. Queste ultime invece debbono essere sincronizzate tra loro, ma questa operazione è senza dubbio più semplice rispetto al garantire un target sincrono in maniera assoluta. Tipicamente le ancore sono infatti più sofisticate del target, ed inoltre, facendo capo ad un nodo supervisore che è parte della stessa rete, sono facilmente sincronizzabili in una fase di setup.

Il modo più semplice per implementare la strategia basata sulla differenza dei tempi di voli consiste infatti nel tenere il target in ascolto, e far trasmettere a tutta la costellazione di ancore il proprio segnale

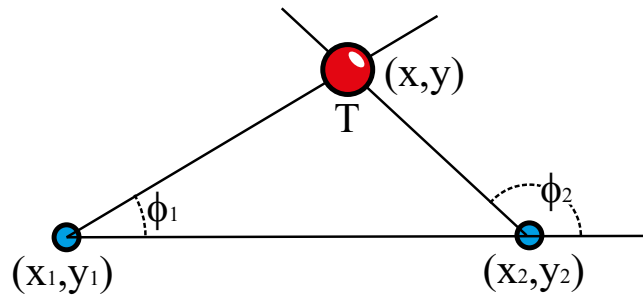
in modo sincrono tra loro. Al target sarà sufficiente registrare gli arrivi dei vari segnali dalle ancore per costruire una tabella riferita ad un proprio tempo locale. Da tali dati il target è quindi in grado di costruire le  $L - 1$  misurazioni necessarie per l'implementazione del metodo.

### 1.3 Triangolazione

La triangolazione è l'approccio duale a quello della trilaterazione. In questo caso la stima della posizione del target mobile avviene confrontando la direzione che esso assume rispetto ai riferimenti locali delle ancore. Si suppone che queste ultime siano coordinate tra di loro, condividendo quindi lo stesso riferimento assoluto.

La direzione che unisce ancora e target viene spesso indicata come direzione di arrivo, in genere con la dizione inglese di *Direction of Arrival* (DoA), o talvolta anche come *Angle of Arrival* (AoA). Il vantaggio dei metodi basati sulla triangolazione è che non necessitano della stima dei tempi di volo (e conseguentemente nemmeno di sincronizzazioni), e non sono neppure basati su stime assolute di potenza, come già visto spesso complicate da fenomeni di ordine superiore e dalla necessità di calibrazione dei sensori.

Con dizione mutuata dalla tradizione nautica, si suole indicare come *Line of Bearing* (LoB) la retta che congiunge il nodo target all'ancora di riferimento: di fatto questa nomenclatura è equivalente a *Line of Sight* (LoS), ma quest'ultima viene utilizzata anche in altri ambiti. L'angolo di arrivo è quindi quell'angolo  $\phi$  che la retta LoB identifica con l'asse  $x$  del target (scelto generalmente come zero di riferimento per gli angoli); esso può essere stimato sia dal target rispetto alla costellazione di ancore o viceversa da parte delle ancore che osservano il nodo localizzando. In entrambi casi il modello di osservazione non cambia, ed è formalmente identificato come segue.



**Figura 1.6:** Posizione del Target T individuata attraverso l'intersezione di due rette tracciate da due ancore.

Con riferimento alla figura Figura 1.6, siano  $\phi_1$  e  $\phi_2$  gli angoli di arrivo individuati dal target T rispettivamente con l'ancora 1 e 2; la relazione tra le coordinate spaziali dell'ancora e quelle del target risulta:

$$y - y_1 = \tan(\phi_1)(x - x_1) \quad (1.38a)$$

$$y - y_2 = \tan(\phi_2)(x - x_2). \quad (1.38b)$$

Senza perdere in generalità, si può considerare un riferimento locale per cui  $y_1 = y_2 = 0$ , e sottraendo membro a membro le due (1.38) si ottiene la coordinata  $x$ :

$$x = \frac{\tan \phi_1 x_1 - \tan \phi_2 x_2}{\tan \phi_1 - \tan \phi_2}. \quad (1.39)$$

Sostituendo questo valore in una delle due (1.38) si perviene alla stima della coordinata  $y$ :

$$y = \frac{\tan \phi_1 \tan \phi_2}{\tan \phi_1 - \tan \phi_2} (x_1 - x_2). \quad (1.40)$$

Anche in questo caso, come per l'approccio basato sulla trilaterazione, la presenza del rumore di misura può pregiudicare la stima. È infatti possibile che, in presenza di più di tre ancore, le relative rette non si incontrino in un solo punto, ma individuino un insieme di intersezioni. Mutuando il concetto di intervallo di distanze introdotto per la trilaterazione reale, in questo caso si ha a che fare con un insieme di rette che determinano una sorta di cono entro cui è possibile affermare si trovi l'effettiva *Line of Bearing*.

Anche in questo caso, inoltre, l'errore di misura affligge la stima di posizioni differenti in modo differente. Dalle formule in (1.39) e (1.40) si osserva che in entrambi i casi si ha a denominatore la differenza tra due stime angolari, pertanto una stessa variazione può modificare in modo sostanziale la stima di  $x$  e  $y$  a seconda dell'effettivo valore degli angoli.

Si procede pertanto alla riformulazione del problema in termini più generali, supponendo di poter operare con un insieme sovradimensionato di ancore come per il caso della trilaterazione. Sia  $\phi_l$  la direzione tra il target e l'ancora  $l$ -sima, per cui:

$$\tan \phi_l = \left( \frac{y - y_l}{x - x_l} \right), \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (1.41)$$

In presenza di rumore, la stima dell'angolo formato dalla retta LoB può essere formulato nel seguente modo:

$$r_{A,l} = \phi_l + n_{A,l} = \tan^{-1} \left( \frac{y - y_l}{x - x_l} \right) + n_{A,l}, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (1.42)$$

ovvero, in forma vettoriale:

$$\mathbf{r}_{A,l} = \mathbf{f}_A(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_A \quad (1.43)$$

dove

$$\mathbf{r}_A = [r_{A,1}, r_{A,2}, \dots, r_{A,L}]^T \quad (1.44)$$

$$\mathbf{n}_A = [n_{A,1}, n_{A,2}, \dots, n_{A,L}]^T; \quad (1.45)$$

e infine

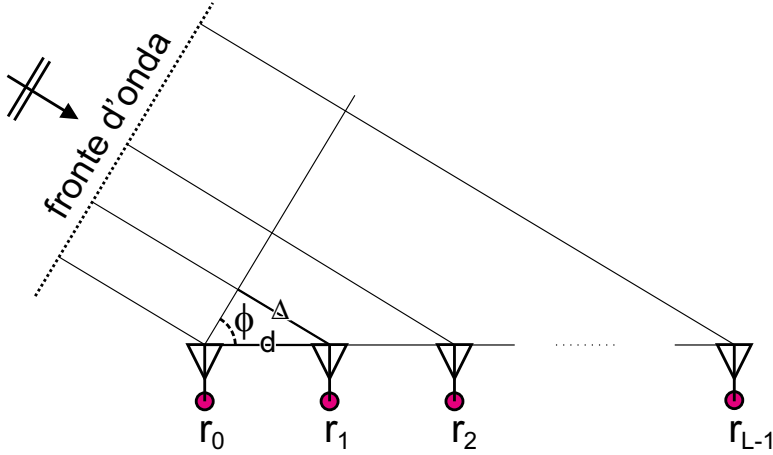
$$\mathbf{f}_A(\mathbf{x}) = \phi = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left( \frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \\ \tan^{-1} \left( \frac{y - y_2}{x - x_2} \right) \\ \vdots \\ \tan^{-1} \left( \frac{y - y_L}{x - x_L} \right) \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Anche in questo caso il problema può essere considerato in modo statistico, con una distribuzione di probabilità simile a quella in (1.13).

### 1.3.1 Stima dell'angolo di arrivo basata su array di antenne

L'angolo di arrivo di un segnale radio coincide con l'angolo di arrivo del fronte d'onda cui esso appartiene. Se si assume una propagazione in linea di vista, ovvero ignorando in prima approssimazione effetti del secondo ordine come diffrazione, riflessione, etc., è facile comprendere come un array di antenne sia adeguato per stimare l'angolo di arrivo nel caso 2D, [20, 21].

Con riferimento a Figura 1.7, si assume che un nodo ancora sia equipaggiato con un array lineare di antenne – *Uniform Linear Array*, *ULA*. La distanza inter-elemento, costante lungo tutto l'array, è



**Figura 1.7:** Stime dell'angolo di arrivo basata su un array lineare di antenne.

indicata con  $d$ . Il fronte d'onda in arrivo forma un  $\phi$  con il riferimento dell'array, il che implica che ogni antenna riceva un segnale "ritardato" di distanza incrementale  $\Delta$  pari a  $d \sin \phi$ .

Nell'ipotesi di operare in regime sinusoidale, si può affermare che i segnali  $r_l$  ricevuti dagli elementi dell'array sperimentano una progressione di fase proporzionale all'angolo di arrivo  $\phi$ :

$$\psi_l = - \left( l - \frac{L-1}{2} \right) k d \sin \phi \quad (1.47)$$

dove  $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  è il numero d'onda dell'array e  $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$  è la lunghezza d'onda nel vuoto associata al segnale ricevuto alla frequenza  $f_0$ .

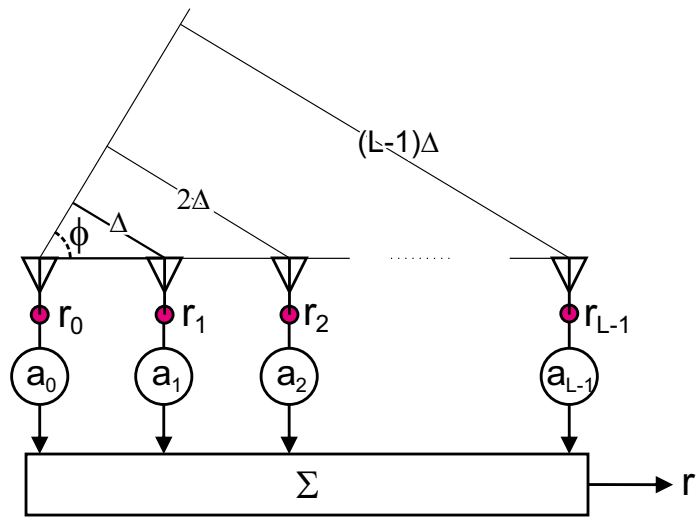
Ignorando il rumore, il segnale ricevuto dall'elemento  $l$ -esimo del set di antenne può essere espresso in notazione complessa come [22]:

$$r_l = s_l e^{-j \left( l - \frac{L-1}{2} \right) k d \sin \phi} \quad (1.48)$$

dove  $s_l$  è l'ampiezza del segnale ricevuto. Quest'ultima può essere supposta costante su tutti gli elementi dell'array dal momento che la differenza di cammino  $d \sin \phi$  è in genere trascurabile rispetto alla distanza percorsa dal segnale, e considerato che il modulo del singolo segnale è proporzionale all'inverso della distanza. Ovviamente non può essere trascurata nella fase, che invece sperimenta una variazione rapida lungo l'array, e che costituisce la chiave per la determinazione dell'angolo di arrivo.

Con riferimento alla Figura 1.8, i segnali  $r_l$  vengono pesati da dei fattori  $a_l$  e quindi sommati. Il vettore  $a = [a_0, a_1, \dots, a_{L-1}]$  viene indicato con il nome di *steering vector*. A seconda della forma di questo elemento, il segnale risultante  $r = \sum_{l=0}^{L-1} a_l r_l$  può indicare quale sia la direzione di arrivo  $\phi$  in maniera plurivoca, consentendo quindi moltissime e varie strategie di stima della DoA, [20–22]. Sistemi ancor più avanzati sono stati proposti negli ultimi anni, in cui l'array di antenne piuttosto che lineare ha una forma circolare. Questi approcci permettono di utilizzare anche le informazioni relative al modulo dei segnali incidenti, aprendo la strada a molti altri algoritmi di stima della DoA.

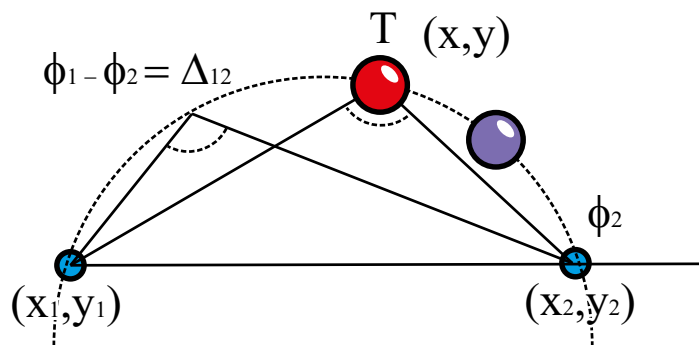
Si consideri inoltre che operando con queste geometrie è possibile determinare la direzione di arrivo anche utilizzando il solo modulo, anziché la sola fase. È questo il caso delle antenne intelligenti, in Inglese *Smart Antennas*, capaci di riconfigurare il proprio fascio in più direzioni, [23–25].



**Figura 1.8:** Stime dell'angolo di arrivo basata su un array lineare di antenne.

#### 1.4 Triangolazione differenziale

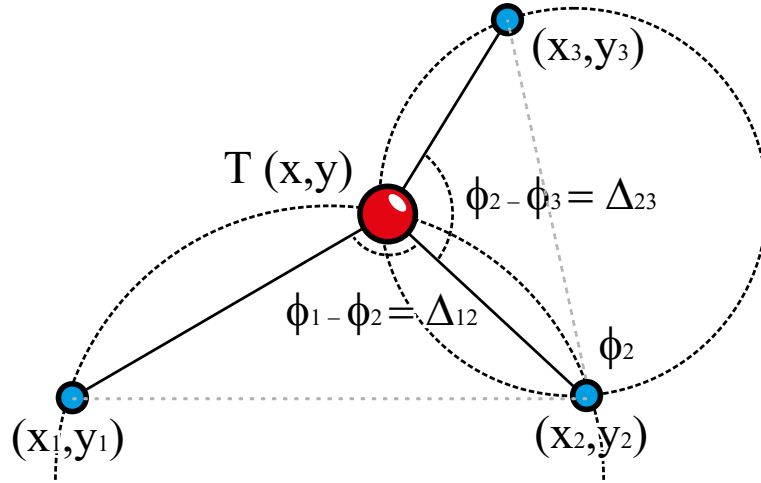
Può accadere che il target sia equipaggiato con un sensore in grado di determinare la direzione di arrivo del segnale rispetto al proprio riferimento, ma che questo riferimento non sia condiviso con la costellazione delle ancore [22]. In queste condizioni non è possibile quindi fissare una direzione univoca rispetto alla singola ancora, e conseguentemente non si può procedere alla determinazione della posizione tramite l'intersezione delle rette. Stimando l'angolo di arrivo individuato rispetto ad una



**Figura 1.9:** Luogo dei punti in cui può giacere il target data la differenza di angoli di arrivo da 2 ancore.

seconda ancora, il target è tuttavia in grado di fissare in modo certo almeno la differenza degli angoli di arrivo rispetto alle due. Questa situazione è duale rispetto a quello che accade nella trilaterazione differenziale, in cui è la differenza di distanze a essere nota piuttosto che l'insieme delle distanze stesse. È facile dimostrare che, stimato  $\Delta\phi$  rispetto a due ancore, il target giace senza dubbio sul luogo dei punti che osserva il segmento individuato dalle due ancore sotto lo stesso angolo, ovvero un cerchio che passa per i due riferimenti in questione.

Il modo più sicuro di procedere passa dalla riformulazione del problema in termini più generali; si supponga quindi di poter operare con un insieme sovradimensionato di ancore, come per il caso



**Figura 1.10:** Posizione del Target T individuata attraverso l'intersezione di due cerchi identificati dalle due differenze angolari  $\Delta\phi_{1,2}$  e  $\Delta\phi_{2,3}$ .

della trilaterazione. Si assuma che il sensore  $l = 1$  faccia da riferimento, e si indichi con  $\phi_l$  l'angolo identificato tra il target e l'ancora  $l$ -sima. Il modello di osservazione per il singolo caso risulta di conseguenza:

$$\Delta\phi_{l,1} = \phi_l - \phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{y - y_l}{x - x_l} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y - y_1}{x - x_1} \right), \quad l = 2, 3, \dots, L, \quad (1.49)$$

che in presenza di rumore diviene

$$r_{DA,l} = \Delta\phi_{l,1} + n_{DA,l} = \tan^{-1} \left( \frac{y - y_l}{x - x_l} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y - y_1}{x - x_1} \right) + n_{DA,l}, \quad l = 2, 3, \dots, L \quad (1.50)$$

ovvero, in forma vettoriale:

$$\mathbf{r}_{DA,l} = \mathbf{f}_{DA}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_{DA} \quad (1.51)$$

con il vettore di misure e il vettore di rumore definiti da

$$\mathbf{r}_{DA} = [r_{DA,1}, r_{DA,2}, \dots, r_{DA,L}]^T \quad (1.52)$$

$$\mathbf{n}_{DA} = [n_{DA,1}, n_{DA,2}, \dots, n_{DA,L}]^T; \quad (1.53)$$

e infine, la funzione che lega misurazioni e posizione:

$$\mathbf{f}_{DA}(\mathbf{x}) = \Delta\phi = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left( \frac{y - y_2}{x - x_2} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \\ \tan^{-1} \left( \frac{y - y_3}{x - x_3} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \\ \vdots \\ \tan^{-1} \left( \frac{y - y_L}{x - x_L} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

ritrovando così la familiare forma (1.1).

### Formulazione alternativa

Esiste infine un modo alternativo per trattare la triangolazione differenziale. Sfruttando il *teorema di Carnot*, altrimenti noto come legge dei coseni, si può affermare che, fissando la prima stima  $\phi_1$  come DoA di riferimento, vale la seguente uguaglianza per la boa  $l$ -sima:

$$d_{l,1}^2 = d_1^2 + d_l^2 - 2d_1d_l \cos(\phi_l - \phi_1) \quad (1.55)$$

Questa relazione si traduce nel set di equazioni non lineari quando ogni DoA è riferita alla stima dell'ancora  $l = 1$ :

$$(x_1 - x_l)^2 + (y_1 - y_l)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_l)^2 + (y - y_l)^2 - 2\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}\sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} \cos(\Delta\phi_{l,1}) \quad l = 2, 3, \dots, L \quad (1.56)$$

da cui si può infine ricavare la relazione:

$$\Delta\phi_{l,1} = \arccos\left(\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_l)^2 + (y - y_l)^2 - (x_1 - x_l)^2 - (y_1 - y_l)^2}{2\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}\sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}}\right) \quad (1.57)$$

e quindi:

$$f_{DA}(x) = \Delta\phi = \begin{bmatrix} \arccos\left(\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-(d_{1,2})^2}{2\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}}\right) \\ \arccos\left(\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2-(d_{1,3})^2}{2\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}}\right) \\ \vdots \\ \arccos\left(\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_L)^2+(y-y_L)^2-(d_{1,L})^2}{2\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\sqrt{(x-x_L)^2+(y-y_L)^2}}\right) \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Ciò fatto si può arrivare ad una formulazione completamente polinomiale del problema, evitando quindi le funzioni inverse trigonometriche che possono mal-condizionare i procedimenti risolutivi, elevando a quadrato i due membri di (1.55) ed ottenendo così:

$$4((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2) (\cos(\Delta\phi_{l,1}))^2 = ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_l)^2 + (y - y_l)^2 - (x_1 - x_l)^2 - (y_1 - y_l)^2)^2 \quad l = 2, 3, \dots, L \quad (1.59)$$

Date almeno tre stime indipendenti dell'angolo di arrivo da tre diverse ancore, si ottengono due equazioni polinomiali indipendenti con il massimo grado di quattro sia in  $x$  che in  $y$ . Così come due cerchi si intersecano al massimo in due punti, in questo caso le intersezioni sono 12: è pertanto necessario sovradimensionare il sistema in modo che la soluzione reale emerga dall'intersezione delle varie curve ridondanti.



## 2. ALGORITMI PER LA LOCALIZZAZIONE

Gli approcci per risolvere il sistema rappresentato dall'equazione (1.1), e quindi le sue specializzazioni nei vari metodi visti nel capitolo precedente, si suddividono in due grandi categorie: gli approcci lineari e i non lineari.

Per la precisione, quelli lineari sono più propriamente approcci *linearizzati*, ottenuti sviluppando l'equazione di partenza assumendo alcune ipotesi che dipendono dallo specifico approccio di localizzazione. Ogni metodo linearizzato necessita di attenzioni diverse ed in genere non è univoco il modo in cui dall'equazione (1.1) si perviene a un modello lineare, per cui anche l'efficacia dell'approccio dipende molto dalla filosofia con cui si opera e dalla perizia con cui si adoperano le informazioni disponibili.

Per quel che riguarda i metodi non lineari, questi cercano di risolvere l'equazione (1.1) in modo diretto, cercando di determinare l'incognita  $\mathbf{x}$  minimizzando il residuo, costruito a partire dalla specifica forma che assume l'equazione (1.1) caso per caso. La funzione di costo viene costruita a partire dal residuo implementando un approccio ai minimi quadrati – *Least Square (LS)* – o la sua variante più raffinata con pesaggio – *Weighted Least Square, WLS*. In generale si indicherà il residuo nel seguente modo:

$$\mathbf{e}_{NL} = \mathbf{r} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.1)$$

dove  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}, \hat{y}]^T$  è la variabile di ottimizzazione per  $\mathbf{x}$ , che corrisponde allo specifico stimatore. La stima del metodo di localizzazione corrisponderà a quel valore di  $\hat{\mathbf{x}}$  che rende il residuo il più piccolo possibile – da cui la dizione  $\mathbf{e}$  ad indicare che si tratta di un *errore*. In questo senso, gli approcci non lineari sono più generali di quelli lineari e possono sfruttare i notevoli risultati della teoria dell'ottimizzazione apparsi in letteratura scientifica negli ultimi anni.

Sul fronte delle tecniche lineari, si tratta di convertire l'equazione (1.1) in un set di equazioni esprimibili nella seguente forma:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{q} \quad (2.2)$$

dove  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{A}$  sono le grandezze disponibili, derivanti dalla misura, mentre  $\mathbf{q}$  è il vettore del rumore di misura trasformato dall'operazione di linearizzazione. Quest'ultimo può essere estremamente malcondizionato nella trasformazione, pertanto grande cura deve essere usata in questa classe di algoritmi.

A partire dall'equazione (2.2), si costruisce il residuo

$$\mathbf{e}_L = \mathbf{r} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad (2.3)$$

L'applicazione delle tecniche ai minimi quadrati – *Least Square, LS* – o ai minimi quadrati pesati – *Weighted Least Square, WLS* – all'equazione (2.3) porta ai metodi *Linear Least Square (LLS)* e *Weighted Linear Least Square (WLLS)*.

### 2.1 Approcci Lineari

L'idea alla base degli approcci lineari è quella di convertire il modello di osservazione delle varie strategie viste nel precedente capitolo in un set di equazioni lineari affette da un rumore a media nulla e

di entità modesta rispetto alla grandezza misurata, cioè caratterizzato da una varianza sufficientemente piccola. Una volta che il metodo di localizzazione in esame viene convertito in una forma equivalente lineare, la corrispondente funzione di costo risulta sicuramente unimodale per definizione di residuo di un sistema lineare (sia esso sovradimensionato o meno), pertanto una soluzione globale del sistema è sempre garantita, nonché conseguentemente una localizzazione *verosimile*.

Nel prosieguo, verranno trattati due approcci lineari, ovvero l'approccio lineare ai minimi quadrati, o *Linear Least Square* (LLS), [26, 27] e l'approccio pesato corrispondente, ovvero il *Weighted Linear Least Square* (WLLS), [28–31]

### 2.1.1 Linear Least Square - LLS

Nell'ambito degli approcci *Linear Least Square*, il modello di osservazione viene trasformato in un sistema lineare sovradimensionato e quindi risolto con le ordinarie tecniche dei minimi quadrati. Nel fare ciò, ci si serve di variabili intermedie funzioni della posizione incognita. I passaggi necessari per le specifiche implementazioni dei vari approcci sono sviluppati per i singoli metodi di localizzazione, pertanto non è possibile generalizzare la strategia; sarà invece necessario operare singolarmente su ogni specifico approccio.

### Trilaterazione

Per convertire la trilaterazione delle distanze in un approccio LLS, si opera generalizzando quanto descritto nel caso ideale privo di rumore nell'equazione (1.3) e seguenti, andando a linearizzare in modo diretto l'eguaglianza quadratica basandosi sul teorema della corda. Si riparte dell'equazione (1.9), valida per il generico sensore  $l$  e qui riportata per comodità:

$$r_{R,l} = d_l + n_{R,l} = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} + n_{R,l}, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (2.4)$$

si procede quindi elevando a quadrato entrambi i membri, ottenendo:

$$r_{R,l}^2 = (x - x_l)^2 + (y - y_l)^2 + 2n_{R,l}\sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} + n_{R,l}^2, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (2.5)$$

Si definisce a questo punto una nuova grandezza ausiliaria, il contributo del rumore modificato dal processo di linearizzazione:

$$m_{R,l} = n_{R,l}^2 + 2n_{R,l}\sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}. \quad (2.6)$$

Utilizzando quest'ultima equazione può essere scritto un nuovo modello di osservazione che lega posizione e stima della distanza rispetto al sensore  $l$ :

$$r_{R,l}^2 = (x - x_l)^2 + (y - y_l)^2 + m_{R,l}. \quad (2.7)$$

È conveniente sviluppare ulteriormente il ragionamento, introducendo la variabile di localizzazione ausiliare  $R$  definita nel seguente modo

$$R = x^2 + y^2. \quad (2.8)$$

Di conseguenza l'equazione (2.7) diventa:

$$r_{R,l}^2 = x^2 + x_l^2 - 2x_l x + y^2 + y_l^2 - 2y_l y + m_{R,l} \quad (2.9)$$

che è utile riorganizzare nel seguente:

$$-2x_l x - 2y_l y + R + m_{R,l} = r_{R,l}^2 - x_l^2 - y_l^2, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (2.10)$$

Questo nuovo modello di osservazione, valido per il sensore  $l$ -simo, rappresenta già la generica equazione di un sistema lineare equivalente a quello di partenza, ma stavolta definito in tre variabili: le due coordinate posizionali  $x, y$ , ed il loro valore assoluto rispetto al centro del riferimento, ovvero  $R$ . Ciò si rende più evidente andando a definire quattro grandezze in forma matriciale/vettoriale, in particolare la matrice  $\mathbf{A}$ , legata alla costellazione delle ancore:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2x_1, & -2y_1, & 1 \\ -2x_2, & -2y_2, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -2x_L, & -2y_L, & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.11)$$

il vettore del rumore linearizzato, composto da  $L$  espressioni introdotte dall'equazione (2.6):

$$\mathbf{q} = [m_{R,1}, m_{R,2}, \dots, m_{R,L}]^\top; \quad (2.12)$$

ed infine, la matrice  $\mathbf{B}$  dei termini forzanti, costituita di due parti:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, \quad (2.13)$$

dove la prima matrice  $\mathbf{b}_1$  viene determinata in tempo reale, durante la fase di localizzazione vera e propria, e rappresenta l'effettivo termine forzante:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} r_{R,1}^2 \\ r_{R,2}^2 \\ \vdots \\ r_{R,L}^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

mentre la seconda matrice  $\mathbf{b}_2$  può essere costruita in una fase iniziale *offline* e contestualmente alla matrice  $\mathbf{A}$ , prima di eseguire le misure necessarie a determinare la matrice  $\mathbf{b}_1$ :

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ \vdots \\ x_L^2 + y_L^2 \end{bmatrix}; \quad (2.15)$$

ed infine il già citato vettore ausiliario delle incognite

$$\mathbf{p} = [x, y, R]^\top. \quad (2.16)$$

Si è quindi pervenuti a un sistema lineare affetto da rumore che può essere formalmente schematizzato nella seguente scrittura:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{b}. \quad (2.17)$$

Operativamente, per risolvere il sistema si osserva che, nel caso il rumore di misura sia sufficientemente piccolo, si può procedere con la seguente approssimazione:

$$\mathbf{q} \approx \begin{bmatrix} 2n_{R,1}\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \\ 2n_{R,2}\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} \\ \vdots \\ 2n_{R,L}\sqrt{(x-x_L)^2+(y-y_L)^2} \end{bmatrix}; \quad (2.18)$$

il vettore  $\mathbf{q}$ , può pertanto essere considerato a media nulla, ovvero  $E[\mathbf{q}] = \mathbf{0}$ , per le ipotesi di partenza su  $n_{R,l}$ . Alla luce di quest'ultima considerazione, è possibile approssimare l'equazione (2.17) in valore medio, nel seguente modo:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} \approx \mathbf{b}. \quad (2.19)$$

In questa forma, il sistema della trilaterazione può essere risolto con le normali metodologie dei minimi quadrati. Operativamente si definisce il funzionale linearizzato ai minimi quadrati, indicato con  $J_{LLS,R}(\hat{\mathbf{p}})$ , nel seguente modo:

$$J_{LLS,R}(\tilde{\mathbf{p}}) = (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{b})^\top (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{b}) = \tilde{\mathbf{p}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \tilde{\mathbf{p}} - 2\tilde{\mathbf{p}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{b} + \mathbf{b}^\top \mathbf{b}; \quad (2.20)$$

tale funzionale è una forma quadratica in  $\hat{\mathbf{p}}$ , il che assicura l'esistenza di un minimo assoluto. Formalmente, il minimo di questa forma quadratica può essere determinato eseguendo la derivata rispetto alla variabile  $\tilde{\mathbf{p}}$  calcolata in  $\mathbf{p}$ :

$$\left. \frac{\partial J_{LLS,R}(\tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} \right|_{\tilde{\mathbf{p}}=\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

da cui discende che

$$2\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{p} - 2\mathbf{A}^\top \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{p} - 2\mathbf{A}^\top \mathbf{b} = 0 \quad (2.22)$$

e quindi, in definitiva

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}\mathbf{b}. \quad (2.23)$$

In maniera formale la stima posizionale si ottiene quindi dalla prima e seconda posizione del vettore ausiliare  $\hat{\mathbf{p}}$ , ovvero:

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{p}_1, \hat{p}_2]^\top \quad (2.24)$$

Questo modo di procedere è però sub-ottimo, poiché ignorare  $\hat{p}_3$  dopo che esso è comunque stato calcolato risulta uno spreco a livello informativo. L'approccio pesato affrontato nella prossima sezione fornisce l'opportunità di sfruttare anche questa quantità.

In alternativa, esiste un secondo modo per linearizzare il modello di osservazione della triangolazione che consiste nell'eliminare  $R$  alla radice semplicemente sottraendo due equazioni del modello (2.10). Senza perdere di generalità si prenda la prima equazione come riferimento e la si sottragga da ogni successiva, ovvero

$$-2x_l x - 2y_l y + R + m_{R,l} = r_{R,l}^2 - x_l^2 - y_l^2 \quad (2.25a)$$

$$-2x_1 x - 2y_1 y + R + m_{R,1} = r_{R,1}^2 - x_1^2 - y_1^2 \quad (2.25b)$$

ottenendo quindi  $(L - 1)$  equazioni linearmente indipendenti del tipo:

$$-2(x_l - x_1)x - 2(y_l - y_1)y + m_{R,l} - m_{R,1} = r_{R,l}^2 - x_l^2 - y_l^2 - r_{R,1}^2 + x_1^2 + y_1^2, \quad l = 2, 3, \dots, L. \quad (2.26)$$

Queste possono essere riformulate in maniera matriciale nel seguente:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (2.27)$$

in questo contesto, le matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{b}$  sono riformulate nella seguente maniera:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) \\ -2(x_3 - x_1) & -2(y_3 - y_1) \\ \vdots & \vdots \\ -2(x_L - x_1) & -2(y_L - y_1) \end{bmatrix}; \quad (2.28)$$

il termine di rumore

$$\mathbf{q} = [m_{R,2} - m_{R,1}, m_{R,3} - m_{R,1}, \dots, m_{R,L} - m_{R,1}]; \quad (2.29)$$

e il termine forzante, ancora una volta scomponibile in contributi variabili con la misura e contributi fissi dipendenti dalla sola costellazione:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} r_{R,2}^2 - x_2^2 - y_2^2 - r_{R,1}^2 + x_1^2 + y_1^2 \\ r_{R,3}^2 - x_3^2 - y_3^2 - r_{R,1}^2 + x_1^2 + y_1^2 \\ \vdots \\ r_{R,L}^2 - x_L^2 - y_L^2 - r_{R,1}^2 + x_1^2 + y_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{R,2}^2 - r_{R,1}^2 \\ r_{R,3}^2 - r_{R,1}^2 \\ \vdots \\ r_{R,L}^2 - r_{R,1}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2) \\ (x_3^2 + y_3^2) - (x_1^2 + y_1^2) \\ \vdots \\ (x_L^2 + y_L^2) - (x_1^2 + y_1^2) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Pertanto, assumendo che il rumore  $\mathbf{q}$  sia sufficientemente piccolo, si procede come nel caso precedente, andando ad ottenere così la stima posizionale sfruttando le proprietà delle forme quadratiche:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \quad (2.31)$$

che stavolta risulta direttamente coincidente con la stima cercata, a differenza di quanto avvenuto nel caso precedente.

Quanto detto in questa sezione vale in maniera equivalente per la trilaterazione basata sui tempi di volo, che stima il range  $d_l$  a partire dai ToF, come descritto nel precedente capitolo. Pertanto a livello algoritmico quanto affermato fin qui vale in tutto e per tutto, applicando la semplice operazione di moltiplicazione per la velocità della luce laddove necessario.

### Trilaterazione differenziale

In questo caso si riparte dall'equazione (1.32), riscritta isolando nei due membri i fattori contenenti la radice quadrata:

$$r_{DR,l} + \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} + n_{DR,l} \quad (2.32)$$

si definisce il vettore di rumore modificato:

$$m_{DR,l} = n_{DR,l}^2 + 2n_{DR,l} \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}, \quad (2.33)$$

e si introduce inoltre la variabile ausiliaria  $R$ , che stavolta assume la forma

$$R_l = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}. \quad (2.34)$$

Elevando a quadrato entrambi i membri si ottiene

$$2(x_1 - x_l)(x - x_1) + 2(y_1 - y_l)(y - y_1) + 2r_{DR,l}R_l + m_{DR,l} = r_{DR,l}^2 - (x_1 - x_l)^2 - (y_1 - y_l)^2 \quad l = 2, 3, \dots, L. \quad (2.35)$$

Si definisce quindi la matrice  $\mathbf{A}$  nel seguente modo:

$$\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & -r_{DR,2} \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & -r_{DR,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 - x_L & y_1 - y_L & -r_{DR,L} \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

quindi il vettore dei termini noti

$$\mathbf{p} = [x - x_1, y - y_1, R_l]^\top, \quad (2.37)$$

il vettore del rumore

$$\mathbf{q} = [m_{DR,2}, m_{DR,3}, \dots, m_{DR,L}]^\top, \quad (2.38)$$

e il termine forzante:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} r_{DR,2}^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 \\ r_{DR,3}^2 - (x_1 - x_3)^2 - (y_1 - y_3)^2 \\ \vdots \\ r_{DR,L}^2 - (x_1 - x_L)^2 - (y_1 - y_L)^2 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Come in precedenza, nell'ipotesi in cui il termine di rumore  $\mathbf{q}$  sia sufficientemente piccolo, la soluzione del sistema risulta:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \quad (2.40)$$

da cui, in definitiva:

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{p}_1 + x_1, \hat{p}_2 + y_1]^\top. \quad (2.41)$$

Come nota finale, vale la stessa considerazione fatta al termine della sezione precedente: la stima basata sulla differenza dei tempo di volo, ovvero l'approccio noto in letteratura come TDoA, viene implementato esattamente come descritto in questa sezione, a patto di scalare il tutto con il termine  $c$  della velocità della luce.

### Triangolazione

L'approccio localizzatore basato sulla triangolazione di rette differisce in maniera abbastanza netta da quello basato sulla triangolazione delle distanze e per molti versi ne risulta il duale. In questo caso, si riparte dalla relazione generica che lega il valore degli angoli visti dalle ancore alla posizione del target rispetto alle coordinate delle stesse:

$$r_{A,l} = \phi_l + n_{A,l} = \tan^{-1} \left( \frac{y - y_l}{x - x_l} \right) + n_{A,l}; \quad (2.42)$$

riordinando i due membri si ottiene facilmente la seguente uguaglianza:

$$\tan(r_{A,l} - n_{A,l}) = \frac{\sin(r_{A,l} - n_{A,l})}{\cos(r_{A,l} - n_{A,l})} = \frac{y - y_l}{x - x_l} \quad (2.43)$$

che può essere riorganizzata nel seguente modo:

$$\sin(r_{A,l} - n_{A,l})(x - x_l) = \cos(r_{A,l} - n_{A,l})(y - y_l). \quad (2.44)$$

Nell'ipotesi di rumore sufficientemente contenuto, si può senza dubbio ipotizzare che  $\sin(n_{A,l}) \approx n_{A,l}$  e  $\cos(n_{A,l}) \approx 1$ . Sfruttando queste due approssimazioni, si può semplificare notevolmente il modello espresso dall'equazione (2.44) attraverso le formule di somma e differenza delle funzioni trigonometriche:

$$\sin(r_{A,l} - n_{A,l}) = \sin(r_{A,l}) \cos(n_{A,l}) - \cos(r_{A,l}) \sin(n_{A,l}) \approx \sin(r_{A,l}) - \cos(r_{A,l}) n_{A,l} \quad (2.45a)$$

$$\cos(r_{A,l} - n_{A,l}) = \cos(r_{A,l}) \cos(n_{A,l}) + \sin(r_{A,l}) \sin(n_{A,l}) \approx \cos(r_{A,l}) + \sin(r_{A,l}) n_{A,l}. \quad (2.45b)$$

Sostituendo le equazioni (2.45a) e (2.45b) nel modello espresso dall'equazione (2.44) si perviene al modello linearizzato:

$$\sin(r_{A,l})x - \cos(r_{A,l})y + m_{A,l} = \sin(r_{A,l})x_l - \cos(r_{A,l})y_l, \quad (2.46)$$

dove è stato utilizzata la seguente definizione del contributo di rumore portato in forma lineare:

$$m_{A,l} = n_{A,l} [(x_l - x) \cos(r_{A,l}) + (y_l - y) \sin(r_{A,l})] \quad (2.47)$$

L'equazione (2.46) può essere riformulata come un sistema lineare attraverso le definizioni della matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin(r_{A,1}), & -\cos(r_{A,1}) \\ \sin(r_{A,2}), & -\cos(r_{A,2}) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(r_{A,L}), & -\cos(r_{A,L}) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

del vettore termine forzante  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sin(r_{A,1})x_1 - \cos(r_{A,1})y_1 \\ \sin(r_{A,2})x_2 - \cos(r_{A,2})y_2 \\ \vdots \\ \sin(r_{A,L})x_L - \cos(r_{A,L})y_L \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

e del rumore linearizzato  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} = [m_{A,1}, m_{A,2}, \dots, m_{A,L}]^\top. \quad (2.50)$$

Pertanto, come nel caso della trilaterazione, si può scrivere il sistema linearizzato nella forma

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (2.51)$$

per il quale si può affermare che il rumore è a media nulla dal momento che  $E[\mathbf{q}] = 0$ . Sulla base di questa considerazione si può procedere come nel caso precedente e identificare la soluzione con la seguente inversione formale del sistema lineare:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \quad (2.52)$$

### 2.1.2 Weighted Linear Least Square - WLLS

Gli approcci di tipo LLS sono molto semplici da implementare, ma pagano tale apprezzabile qualità con prestazioni sub-ottime. Infatti, soltanto nel caso in cui i disturbi di misura siano indipendenti e identicamente distribuiti i metodi LLS raggiungono l'ottimo prestazionale. Nella realtà invece l'effetto del rumore è diverso sulle varie stime, il che significa che, a priori, è possibile attribuire un certo livello di affidabilità alla singola misurazione  $r_l$ , e quindi sfruttare questa metrica nella ricombinazione delle misure.

L'accuratezza dei metodi LLS può essere migliorata includendo una matrice di peso, indicata con  $\mathbf{W}$ . A partire dalla generica equazione linearizzata affetta da errore in forma lineare, ovvero

$$\mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (2.53)$$

si definisce il funzionale quadratico pesato con la seguente forma, indicata come  $J_{WLLS}(\tilde{\theta})$ :

$$J_{WLLS}(\tilde{\mathbf{p}}) = (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{b})\mathbf{W}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{b}). \quad (2.54)$$

In accordo con la teoria del miglior estimatore lineare non polarizzato (*Best Linear Unbiased Estimator*, BLUE), [28], la matrice  $\mathbf{W}$  deve essere scelta uguale all'inverso della matrice di covarianza di  $\mathbf{q}$ , in modo da ottenere la prestazione asintoticamente ottima. Qualitativamente, la matrice  $\mathbf{W}$  introduce l'effetto della statistica del rumore nella stima di  $\mathbf{r}$  e permette di migliorare l'algoritmo di localizzazione aggiungendo delle informazioni sull'affidabilità della singola equazione del sistema lineare. Data la natura della matrice  $\mathbf{W}$ , non è possibile generalizzare l'approccio pesato, che si specializza a partire dalla specifica strategia di linearizzazione applicata allo modello di osservazione selezionato.

### Trilaterazione

Nel caso della trilaterazione, considerando l'espressione del rumore per l'equazione linearizzata, ovvero

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2n_{R,1}\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \\ 2n_{R,2}\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} \\ \vdots \\ 2n_{R,L}\sqrt{(x-x_L)^2+(y-y_L)^2} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

si può costruire la matrice  $\mathbf{W}$  nel seguente modo:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{E}[\mathbf{q}\mathbf{q}^\top]]^{-1} \approx [\text{diag}(4\sigma_{R,1}^2 d_1^2, 4\sigma_{R,2}^2 d_2^2, \dots, 4\sigma_{R,L}^2 d_L^2)]^{-1}. \quad (2.56)$$

Dal momento che il vettore dei valori  $d_l$  non è ovviamente noto in forma esatta, la migliore strategia per la costruzione della matrice  $\mathbf{W}$  passa attraverso la sostituzione di questi ultimi con la loro migliore stima disponibile, ovvero  $r_l$ . Pertanto:

$$\mathbf{W} = \text{diag}\left(\frac{1}{4\sigma_{R,1}^2 r_1^2}, \frac{1}{4\sigma_{R,2}^2 r_2^2}, \dots, \frac{1}{4\sigma_{R,L}^2 r_L^2}\right). \quad (2.57)$$

Si può da questo punto procedere con l'approccio classico, determinando esplicitamente il minimo del funzionale quadratico nella sua variante pesata come previsto dall'equazione (2.54), ovvero:

$$\hat{\mathbf{p}} = \underset{\tilde{\mathbf{p}}}{\text{argmin}} (J_{WLLS,R}(\tilde{\mathbf{p}})) = (\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{b}. \quad (2.58)$$

Come nel corrispondente caso LLS, la stima posizionale si ottiene quindi dalla prima e seconda posizione del vettore ausiliare  $\hat{\mathbf{p}}$ , e cioè:

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{p}_1, \hat{p}_2]^\top. \quad (2.59)$$

Questo approccio fornisce risultati migliori di quelli determinati dall'equazione (2.23), al prezzo di una semplice operazione aggiuntiva di scarso peso computazionale.

### Trilaterazione a due passi

Il risultato ottenuto utilizzando il pesaggio può essere ulteriormente migliorato sfruttando la stima di  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ , fornita da  $\hat{p}_3$ , disponibile anch'essa a costo nullo. Aggiungendo un secondo stadio di elaborazione all'algoritmo, che diviene così un metodo a due passi, si ottiene un risultato ancora più raffinato semplicemente applicando alcune operazioni aggiuntive, [29].

Si noti infatti che se  $\hat{\mathbf{x}}$  è una stima sufficientemente accurata di  $\mathbf{x}$ , la differenza di quadrati può senza dubbio essere sviluppata nel seguente modo:

$$(\hat{p}_1)^2 - x^2 \approx 2x(\hat{p}_1 - x) \quad (2.60a)$$

$$(\hat{p}_2)^2 - y^2 \approx 2y(\hat{p}_2 - y). \quad (2.60b)$$

Si può quindi procedere col costruire il sistema ausiliario nella variabile  $\mathbf{z} = [x^2, y^2]^\top$ , da determinarsi sulla base delle stime ottenute dalla soluzione precedente, che diviene così il passo 1 di un sistema in due step. Il vettore  $\mathbf{z}$  è il risultato del sistema lineare espresso da:

$$\mathbf{h} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{w} \quad (2.61)$$



che coinvolge un termine forzante costruito a partire dalla soluzione completa del funzionale (2.58):

$$\mathbf{h} = [(\hat{p}_1)^2, (\hat{p}_2)^2, \hat{p}_3], \quad (2.62)$$

e la seguente grandezza ausiliaria:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

nonché il termine “rumoroso” derivante dalle espressioni (2.60):

$$\mathbf{w} = [2x(\hat{p}_1 - x), \quad 2y(\hat{p}_1 - y), \quad \hat{p}_3 - R]^\top. \quad (2.64)$$

Per determinare la matrice di covarianza del vettore  $\mathbf{w}$  si utilizza la teoria dell'estimatore BLUE, da cui si può concludere che [32]:

$$E[\hat{p}_1 - x, \hat{p}_2 - y, \hat{p}_3 - z][\hat{p}_1 - x, \hat{p}_2 - y, \hat{p}_3 - z]^\top = (\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1}; \quad (2.65)$$

pertanto, utilizzando i risultati ottenuti dalle equazioni (2.64) e (2.65), la matrice di peso ottimale risulta in questo caso pari a

$$\Phi = [\text{diag}(2x, 2y, 1)(\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \text{diag}(2x, 2y, 1)]^{-1}, \quad (2.66)$$

che in definitiva porta all'ottima soluzione pesata

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{G}^\top \Phi \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^\top \Phi \mathbf{h}. \quad (2.67)$$

Finalmente, la nuova stima per la posizione risulta

$$\hat{\mathbf{x}} = [\text{sign}(\hat{p}_1)\sqrt{\hat{z}_1}, \text{sign}(\hat{p}_2)\sqrt{\hat{z}_2}] \quad (2.68)$$

dove  $\text{sign}(\cdot)$ , ovvero la funzione segno, si rende necessaria dal momento che  $\hat{p}_1$  e  $\hat{p}_2$  sono i quadrati di  $x^2$  e  $y^2$ .

### Triangolazione

In questo caso, la determinazione della matrice di peso sfrutta alcuni risultati validi per la trilaterazione. Innanzitutto è necessario ipotizzare di avere a che fare con rumori sufficientemente contenuti per poter supporre che

$$x - x_l = d_l \cos(\phi_l) \quad (2.69a)$$

$$y - y_l = d_l \sin(\phi_l). \quad (2.69b)$$

In queste condizioni il vettore di rumore modificato si può semplificare in

$$m_{A,l} = n_{A,l} [(x_l - x) \cos(r_{A,l}) + (y_l - y) \sin(r_{A,l})] \approx n_{A,l} [(x_l - x) \cos(\phi_l) + (y_l - y) \sin(\phi_l)] \quad (2.70)$$

da cui, sfruttando le due equazioni (2.69):

$$m_{A,l} = -n_{A,l} [-d_l \cos(\phi_l)^2 - d_l \sin(\phi_l)^2] = -n_{A,l} d_l. \quad (2.71)$$

La matrice di peso può quindi essere determinata come nel caso della trilaterazione, ovvero:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{E}[\mathbf{q}\mathbf{q}^\top]]^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_{A,1}^2 d_1^2}, \frac{1}{\sigma_{A,2}^2 d_2^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{A,L}^2 d_L^2} \right). \quad (2.72)$$

Sfortunatamente, le distanze  $d_l$  non sono disponibili in questo contesto e non sono neppure legate in maniera diretta alle grandezze misurate su cui si basa l'algoritmo come nel caso della trilaterazione, dato che in questo approccio sono invece gli angoli di arrivo del segnale a svolgere il ruolo di quantità in ingresso. Pertanto, per costruire le matrici di pesaggio è necessario ricorrere ad una strategia alternativa, di tipo iterativo. Questa può essere sviluppata nei seguenti passi:

1. si determina  $\hat{\mathbf{x}}$  utilizzando l'approccio LLS della triangolazione, descritto nel paragrafo 2.1.1;
2. si stimano le distanze  $d_l$  utilizzando la stima  $\hat{\mathbf{x}}$  del punto precedente;
3. si costruisce la matrice  $\mathbf{W}$  utilizzando le stime  $d_l$  e le statistiche delle stime angolari  $\sigma_{A,l}$ ;
4. si determina una nuova stima di  $\hat{\mathbf{x}}$  utilizzando l'approccio pesato;
5. si ripetono i passi 2-4 fino a che la stima della posizione non è sufficientemente raffinata.

Anche in questo caso si ottengono risultati sensibilmente migliori rispetto che con la versione non pesata, a prezzo di una piccola complicazione computazionale.

## 2.2 Esempi di triangolazione basata su approcci lineari

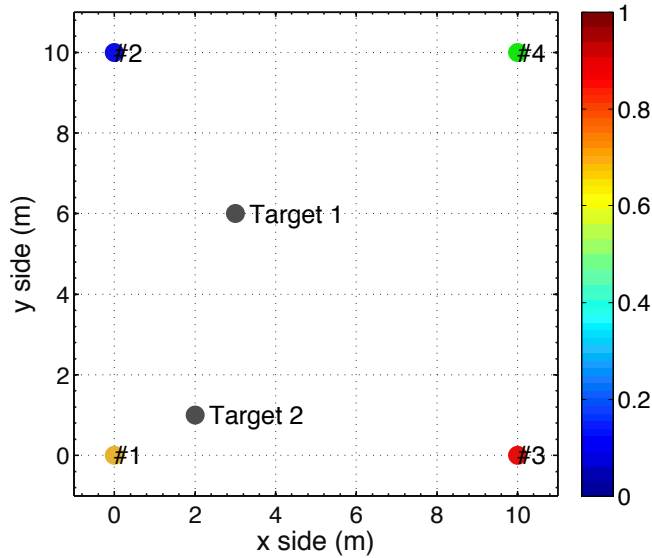
In questa sezione sono riportati alcuni test di localizzazione basati sugli algoritmi presentati. Si fa riferimento in generale ad un dominio di 10 metri per 10 metri, monitorato da 4 antenne poste ai quattro vertici del quadrato, come rappresentato in Figura 2.1. In questo dominio il target è libero di muoversi in qualunque punto.

Con riferimento alla Figura 2.1, la posizione del target T viene stimata sulla base delle distanze individuate rispetto al set di antenne disponibili. Per fissare le idee il target è inizialmente posizionato nel punto  $\mathbf{x} = [3, 6]$ , e la stima delle distanze è stata modellata come affetta da un rumore bianco gaussiano di varianza  $\sigma_l^2$ . Questa varianza è supposta proporzionale al valore del range  $d_l$ , sulla base di considerazioni che trovano ampio riscontro nella pratica. Per valutare un ampio spettro di casi, si è reso variabile il rapporto segnale rumore (SNR), definito in modo da soddisfare la proporzionalità con la distanza, ovvero:

$$SNR = \frac{d_l^2}{\sigma_l^2}. \quad (2.73)$$

Avendo a disposizione questa libertà si è simulato un valore di SNR non costante nel dominio, ma che invece migliora in vicinanza delle antenne, come di fatto succede in un contesto reale. Per conferire a questo test un valore statistico, la stima posizionale è stata eseguita 1000 volte, e in ognuna di queste realizzazioni simulate il rumore bianco è stato generato casualmente ma sempre soddisfacendo la relazione di proporzionalità e mantenendo costante il rapporto segnale rumore in ogni prova. Infine, vari test sono stati condotti variando il valore di SNR a partire da valori estremamente bassi, per modellizzare situazioni critiche, fino a valori che rasentano l'idealità.

Per ognuno dei casi analizzati la posizione del target è stata stimata utilizzando l'algoritmo LLS di tipo 1, l'algoritmo WLLS semplice e la variante WLLS a due passi. In Figura 2.2 si può apprezzare come, a parità di rapporto segnale-rumore, l'algoritmo caratterizzato dalle migliori prestazioni sia sempre l'algoritmo WLLS a due passi, mentre il peggiore l'algoritmo LLS base. È da rimarcare come



**Figura 2.1:** Dominio di localizzazione di  $100 \text{ m}^2$  e relativa costellazione di 4 ancore, posizionate ai vertici di un quadrato di lato 10 m. Due target sono stati presi in considerazione: il primo in posizione  $[3, 6]$ , e il secondo in  $[2, 1]$ .

la variante WLLS a singolo passo sia praticamente sovrapposto a quest'ultimo per valori di SNR maggiori di 10 dB.

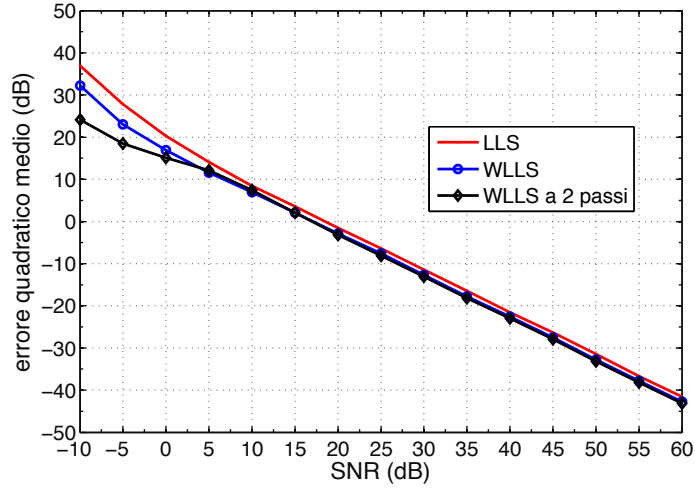
Un secondo test è stato condotto considerando la posizione  $[2, 1]$ , e i relativi risultati sono presentati in Figura 2.3. In questa seconda prova i risultati sono peggiori in termini di accuratezza rispetto a quelli ottenuti in precedenza con lo stesso valore di SNR. Inoltre, appare più evidente la differenza tra i vari algoritmi, con LLS che si conferma il peggiore mentre WLLS a due passi che fornisce risultati sensibilmente migliori di WLLS singolo. Asintoticamente, tra il migliore e il peggiore risultato ci sono circa 5 dB di differenza. Questa situazione non è casuale, ma corrisponde al fatto che la posizione 2 è *più critica* della posizione 1, per motivi che saranno resi più chiari nel prossimo capitolo.

### 2.3 Approcci non lineari

Nell'ambito degli approcci non lineari si cerca di determinare la posizione del target minimizzando direttamente le vari equazioni affrontate nel capitolo precedente, viste come funzionali da ottimizzare. La convergenza globale di questi approcci non è però garantita a priori, in quanto le relative funzioni di costo sono in generale multimodali, ovvero possono presentare dei valori corrispondenti alla minimizzazione del residuo che però non corrispondono al valore effettivo della posizione del target; ciò accade a causa della presenza del rumore di misura.

Paradossalmente, i metodi non lineari sono comunque più semplici da implementare rispetto a quelli lineari, perché non richiedono la conoscenza specifica dei meccanismi con cui la stima della posizione viene determinata, cosa invece necessaria per ottenere una soddisfacente linearizzazione dell'equazione del modello di osservazione.

Il metodo ai minimi quadrati di tipo non lineare, ovvero *Non-Linear Least Square* (NLS), in particolare, è il più semplice da implementare ed è una scelta pratica nei casi in cui non sia disponibile alcuna informazione sulla statistica del rumore. L'implementazione del metodo NLS infatti sfrutta



**Figura 2.2:** Stima della coordinate cartesiane del target 1 in Figura 2.1 mediante lateralizzazione implementata con gli algoritmi lineari descritti nei paragrafo 2.1.1 e 2.1.2: LLS, WLLS a singolo passo e WLLS a due passi.

strategie che sono molto generali, andando ad applicare risultati della teoria dell'ottimizzazione nella loro forma più teorica.

D'altra parte, il metodo basato sullo stimatore a massima verosimiglianza, ovvero Maximum Likelihood (ML) utilizza in modo costruttivo la matrice di covarianza del rumore, ed è ottimale nel senso che la sua prestazione può eguagliare il limite teorico sancito dalla teoria dell'informazione, come sarà chiarito in seguito. Può inoltre essere considerato la versione pesata del metodo NLS, nello stesso modo in cui i metodi lineari di tipo WLLS estendono quelli LLS utilizzando la teoria del migliore stimatore linearizzato.

### 2.3.1 Nonlinear Least Square - NLS

Il metodo NLS minimizza la funzione di costo di tipo ai minimi quadrati partendo dalle equazioni (1.7), (1.41) e le simili implementazioni dei modelli di osservazione.

A titolo di esempio si analizza il caso della trilaterazione dei range  $d_l$ , ma l'estensione alla triangolazione e tutti gli altri approcci possibili è estremamente diretta. Basandosi sull'equazione (1.7) la funzione di costo NLS, indicata con  $J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}})$ , può essere scritta nel seguente modo:

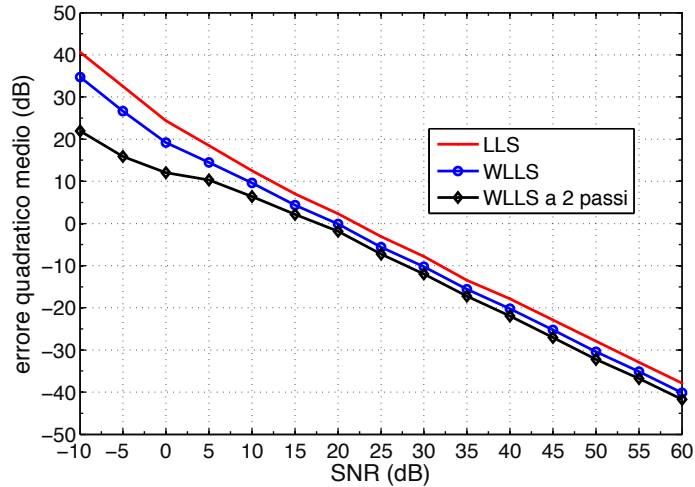
$$J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}))^T (\mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}})) \quad (2.74)$$

o alternativamente, esplicitando la sommatoria delle componenti dei vettori:

$$J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{l=1}^L \left( r_{R,l} - \sqrt{(\hat{x} - x_l)^2 + (\hat{y} - y_l)^2} \right)^2, \quad (2.75)$$

per cui il problema della localizzazione si traduce formalmente nel determinare la posizione  $\hat{\mathbf{x}}$  cui corrisponde il più piccolo valore del funzionale  $J_{NLS,R}$ . Dal momento che il funzionale è sempre definito positivo, è formalmente lecito scrivere che:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\tilde{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmin}} (J_{NLS,R}(\tilde{\mathbf{x}})) \quad (2.76)$$



**Figura 2.3:** Stima della coordinate cartesiane del target 2 in Figura 2.1 mediante lateralizzazione implementata con gli algoritmi lineari descritti nei paragrafo 2.1.1 e 2.1.2: LLS, WLLS a singolo passo e WLLS a due passi.

Determinare  $\hat{\mathbf{x}}$  non è un compito semplice in quanto nel dominio  $J_{NLS,R}$  vi sono minimi locali oltre al minimo assoluto. Fondamentalmente, ci sono due strategie per risolvere (2.76). La prima tenta di eseguire un' esplorazione globale utilizzando la ricerca della griglia o ricerche casuali, come algoritmi genetici [33] e ottimizzazione a *sciame di particelle*, noto con il nome di *particle swarm* nella letteratura internazionale [34].

L'altra strategia possibile corrisponde ad una ricerca locale, ovvero un algoritmo iterativo basato su una stima iniziale della posizione, indicata con  $\hat{\mathbf{x}}^0$ , dove 0 si riferisce alla stima iniziale, anche grezza. Dal momento che tutti gli algoritmi qui trattati si riferiscono al caso indoor, una stima iniziale può corrispondere al centro del dominio di localizzazione, o eventualmente alla posizione di una delle antenne scelta casualmente, o infine al risultato di un altro metodo di localizzazione, ad esempio uno dei metodi lineari descritti nella sezione precedente. In quest'ultimo caso è consigliato implementare i metodi LLS, computazionalmente semplici, piuttosto che i più sofisticati ma più complessi metodi WLLS. Se questa stima iniziale  $\hat{\mathbf{x}}^0$  risulta sufficientemente vicino a  $\mathbf{x}$ , si suppone che la soluzione esatta  $\mathbf{x}$  possa essere determinata in maniera abbastanza rapida con una procedura iterativa.

Qui affronteremo i metodi di ricerca locale, in particolare i metodi Gauss-Newton, Newton-Raphson, e il metodo di massima discesa, noto internazionalmente con il nome di *Steepest Descent*. Per tecniche di ricerca locale più avanzate, si rimanda a [35].

### Gauss-Newton

Il metodo Gauss-Newton sfrutta una considerazione molto semplice per costruire la successione delle stime. Per risolvere il problema espresso dalla (2.76) si suppone in questo contesto che la stima iniziale  $\hat{\mathbf{x}}^0$  sia così vicina alla soluzione da permettere uno sviluppo di Taylor nell'intorno di quest'ultima. In questa ipotesi si può pertanto scrivere

$$\mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^0) + \mathbf{G}^k(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^0) \quad (2.77)$$

dove  $\mathbf{G}^k$  è pari a  $\mathbf{G}(\mathbf{f}_R(\mathbf{x}))$ , ovvero la matrice Jacobiana di  $\mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^k)$ , calcolata in  $\mathbf{x}^k$ . Nel caso della trilaterazione, questa matrice assume la seguente forma esplicita:

$$\mathbf{G}(\mathbf{f}_R(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\partial x}, & \frac{\partial \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}}{\partial x}, & \frac{\partial \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \sqrt{(x-x_L)^2+(y-y_L)^2}}{\partial x}, & \frac{\partial \sqrt{(x-x_L)^2+(y-y_L)^2}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x-x_1}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)^{1/2}}, & \frac{y-y_1}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)^{1/2}} \\ \frac{x-x_1}{((x-x_2)^2+(y-y_2)^2)^{1/2}}, & \frac{y-y_1}{((x-x_2)^2+(y-y_2)^2)^{1/2}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x-x_L}{((x-x_L)^2+(y-y_L)^2)^{1/2}}, & \frac{y-y_L}{((x-x_L)^2+(y-y_L)^2)^{1/2}} \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Cambiando il metodo di localizzazione cambia la funzione di osservazione, e conseguentemente la matrice Jacobiana, ma il procedimento resta identico.

Sostituendo lo sviluppo prodotto nell'equazione (2.77) nel funzionale espresso dall'equazione (2.74) si ottiene:

$$J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}) = \left( \mathbf{r}_R - \left( \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^0) + \mathbf{G}^k(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^0) \right) \right)^\top \left( \mathbf{r}_R - \left( \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^0) + \mathbf{G}^k(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^0) \right) \right). \quad (2.79)$$

Si definisce quindi un nuovo termine forzante, basato su quello originale e sulle grandezze ottenute grazie alla stima iniziale  $\mathbf{x}^0$ :

$$\mathbf{r}_R' = \mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^0) + \mathbf{G}^k \hat{\mathbf{x}}^0; \quad (2.80)$$

considerando questo termine, l'equazione (2.79) può essere riscritta nel seguente

$$J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}) = \left( \mathbf{r}_R' - \mathbf{G}^k \hat{\mathbf{x}} \right)^\top \left( \mathbf{r}_R' - \mathbf{G}^k \hat{\mathbf{x}} \right). \quad (2.81)$$

Questa forma è lineare in  $\hat{\mathbf{x}}$  e corrisponde quindi ad un problema ai minimi quadrati sovradimensionato. Come discusso nella sezione precedente, la soluzione canonica del sistema risulta:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{G}^{k\top} \mathbf{G}^k)^{-1} \mathbf{G}^{k\top} \mathbf{r}_R'; \quad (2.82)$$

tuttavia, utilizzando l'equazione (2.80), questa espressione risulta pari a

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{G}^{k\top} \mathbf{G}^k)^{-1} \mathbf{G}^{k\top} \left( \mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^0) + \mathbf{G}^k \hat{\mathbf{x}}^0 \right), \quad (2.83)$$

e quindi riordinando i termini e sfruttando le proprietà delle matrici:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^0 + (\mathbf{G}^{k\top} \mathbf{G}^k)^{-1} \mathbf{G}^{k\top} \left( \mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^0) \right). \quad (2.84)$$

Osservando questa espressione si evince come a partire dalla stima iniziale  $\hat{\mathbf{x}}^0$  si sia pervenuti ad una nuova, basata sull'attuale quantità residuale  $\left( \mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^0) \right)$ , che esplicitamente quantifica la distanza della stima disponibile nei confronti dalla soluzione reale. Inoltre l'espressione matriciale  $(\mathbf{G}^{k\top} \mathbf{G}^k)^{-1} \mathbf{G}^{k\top}$  fornisce la direzione da seguire per aggiornare questo residuo nella direzione in cui si trova la soluzione reale. Si può dunque pensare di generalizzare il metodo, reiterando il processo sulla stima di  $\hat{\mathbf{x}}$ , generalizzando la regola di aggiornamento:

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k + \left( \mathbf{G}(\mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^k))^\top \mathbf{G}(\mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^k)) \right)^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^k))^\top \left( \mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^k) \right) \quad (2.85)$$

### Newton-Raphson

Il metodo di Newton-Raphson generalizza ancor di più l'approccio Gauss-Newton. In questo caso, a partire dalla stima iniziale  $\hat{\mathbf{x}}^0$ , la regola di aggiornamento per la posizione risulta la seguente:

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k - \mathbf{H}^{-1}(J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}^k)) \nabla(J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}^k)), \quad (2.86)$$

dove  $\nabla J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}^k)$  è il gradiente di  $J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}^k)$ , valutato al passo  $k^{th}$ :

$$\nabla(J_{NLS,R}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

e  $\mathbf{H}(J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}^k))$  è la matrice Hessiana, anch'essa valutata al passo  $k^{th}$ :

$$\mathbf{H}(J_{NLS,R}(\mathbf{x})) = \frac{\partial^2 J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Nel caso della trilaterazione queste grandezze si specializzano in:

$$\frac{\partial^2 J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \sum_{l=1}^L 2 \left( \frac{(x-x_l)^2}{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} - \frac{(r_{R,l} - \sqrt{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2})(y-y_l)^2}{((x-x_l)^2 + (y-y_l)^2)^{3/2}} \right), \quad (2.89a)$$

$$\frac{\partial^2 J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial y^2} = \sum_{l=1}^L 2 \left( \frac{(y-y_l)^2}{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} - \frac{(r_{R,l} - \sqrt{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2})(x-x_l)^2}{((x-x_l)^2 + (y-y_l)^2)^{3/2}} \right), \quad (2.89b)$$

e inoltre

$$\frac{\partial^2 J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} = \sum_{l=1}^L \frac{2r_{R,l}(x-x_l)(y-y_l)}{((x-x_l)^2 + (y-y_l)^2)^{3/2}}, \quad (2.89c)$$

mentre il vettore gradiente risulta

$$\nabla(J_{NLS,R}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial J_{NLS,R}(\mathbf{x})}{\partial y} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^L \frac{(r_{R,l} - \sqrt{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2})(x-x_l)}{((x-x_l)^2 + (y-y_l)^2)^{3/2}} \\ \sum_{l=1}^L \frac{(r_{R,l} - \sqrt{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2})(y-y_l)}{((x-x_l)^2 + (y-y_l)^2)^{3/2}} \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

### Steepest-Descent

Infine, viene presentato il procedimento iterativo per il metodo della massima discesa, noto in letteratura come metodo *Steepest-Descent*. Per questo, la formula di aggiornamento della stima risulta:

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k - \mu \nabla(J_{NLS,R}(\hat{\mathbf{x}}^k)), \quad (2.91)$$

dove  $\mu$  è una costante positiva che controlla la convergenza e le stabilità. In generale, più alto il valore di  $\mu$  e più rapida è la convergenza, ma anche più elevato il rischio dell'instaurarsi di oscillazioni; nella pratica è necessario scegliere un valore adeguatamente basso per valutare la stabilità dell'algoritmo.

Quale che sia il metodo iterativo scelto, e quindi la corrispondente equazione di aggiornamento (2.85), (2.88) o (2.91), è comunque necessario stabilire un criterio di arresto. Tipicamente, per questi metodi si stabilisce un massimo per il raffinamento iterativo, nella forma di  $\|\hat{\mathbf{x}}^{k+1} - \hat{\mathbf{x}}^k\|_2 < \varepsilon$ , dove  $\varepsilon$  è

un numero positivo adeguatamente piccolo. Inoltre, è tipicamente necessario stabilire anche il massimo numero di passi, onde evitare lo stallo nel caso di mancata convergenza, allorquando la soluzione oscilla tra due stati equidistanti dal valore reale.

Per trarre un bilancio, il metodo di Newton-Raphson e il metodo di Gauss-Newton sono molto rapidi, ma pagano questa rapidità con una grossa onerosità computazionale, dal momento che è implicata l'inversione di una matrice. Di converso, il metodo *Steepest Descent* è stabile, ma il suo tasso di convergenza è basso. Quest'ultimo metodo può essere considerato una forma di approssimazione dell'equazione 2.86, in cui il calcolo della matrice Hessiana è omesso.

### Applicazione ad altri approcci

Nel caso si applichi un metodo della stima della distanza che sfrutti la potenza ricevuta, quali quelli basati sull'inversione della stessa – i.e. *Received Signal Strength Indicator*, RSSI – è possibile riscrivere il tutto sulla base della differente definizione. Formalmente quindi, il nuovo funzionale, indicato come  $J_{NLS,RSSI}(\hat{\mathbf{x}})$ , risulta

$$J_{NLS,RSSI}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{l=1^L} \left( r_{RSSI,l} + \alpha \ln \left( \sqrt{(\hat{x} - x_l)^2 + (\hat{y} - y_l)^2} \right) \right)^2 = (\mathbf{r}_{RSSI} - \mathbf{f}_{RSSI}(\hat{\mathbf{x}}))^T (\mathbf{r}_{RSSI} - \mathbf{f}_{RSSI}(\hat{\mathbf{x}})), \quad (2.92)$$

pertanto la corrispondente stima NLS risulta formalmente individuata dal seguente:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\tilde{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmin}} (J_{NLS,RSSI}(\tilde{\mathbf{x}})). \quad (2.93)$$

Lo stesso approccio può essere facilmente generalizzato a tutti gli altri metodi, anche alla trilaterazione differenziale o alla triangolazione. La differenza sta nel calcolo delle rispettive metriche e matrici, ma in ogni caso questa operazione può essere compiuta in forma chiusa, data la struttura delle funzioni di osservazione coinvolte.

### 2.3.2 Maximum Likelihood - ML

Risultati migliori per quanto riguarda la stima posizionale si possono ottenere partendo dalla conoscenza della distribuzione dell'errore. Gli approcci basati sulla massima verosimiglianza, ovvero quelli raggruppati sotto la dicitura *Maximum Likelihood*, utilizzano la conoscenza della statistica dell'errore per ottenere risultati ottimi, nel senso che l'errore che si commette sulla stima della posizione è compatibile con il limite asintotico per questo tipo di problema – si veda il prossimo capitolo a riguardo. Nel caso in cui l'errore sia gaussiano a media nulla, la massimizzazione delle equazioni corrisponde alla versione pesata dell'approccio NLS.

Operativamente, si prende in considerazione la densità di probabilità associata al modello di osservazione, ovvero la forma definita da (1.13) per quanto riguarda la trilaterazione, ripetuta qui per comodità:

$$p(\mathbf{r}_R) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} |\mathbf{C}_R|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_R - \mathbf{d})^\top \mathbf{C}_R^{-1} (\mathbf{r}_R - \mathbf{d}) \right). \quad (2.94)$$

Operando in questo contesto, la posizione del target è identificata come quella che massimizza la densità di probabilità. Si preferisce però considerare la versione logaritmica di questa densità di probabilità, definita generalmente con il nome *score* nella letteratura internazionale:

$$\ln(p(\mathbf{r}_R)) = \ln \left( \frac{1}{(2\pi)^{L/2} |\mathbf{C}_R|^{1/2}} \right) - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_R - \mathbf{d})^\top \mathbf{C}_R^{-1} (\mathbf{r}_R - \mathbf{d}). \quad (2.95)$$



Il primo termine del secondo membro di (2.95) è indipendente dalla variabile  $\mathbf{x}$ , per cui massimizzare l'equazione (2.94) equivale a minimizzare il solo secondo termine  $(\mathbf{r}_R - \mathbf{d})^\top \mathbf{C}_R^{-1}(\mathbf{r}_R - \mathbf{d})$ . Definito quindi il funzionale

$$J_{ML,R}(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}))^\top \mathbf{C}_R^{-1}(\mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}})) = \sum_{l=1}^L \frac{\left( r_{R,l} - \sqrt{(\tilde{x} - x_l)^2 + (\tilde{y} - y_l)^2} \right)^2}{\sigma_{R,l}^2} \quad (2.96)$$

la stima di tipo ML risulta formalmente:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\tilde{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmin}} (J_{ML,R}(\tilde{\mathbf{x}})). \quad (2.97)$$

Confrontando le equazioni (2.96) con (2.74) e (2.75), si può osservare come, in presenza di un rumore bianco gaussiano a media nulla, lo stimatore di tipo ML generalizza il metodo NLS introducendo un fattore aggiuntivo al singolo termine della sommatoria, ovvero operando un pesaggio del contributo informativo dovuto alla stima  $l$ -sima.

Intuitivamente, se la varianza  $\sigma_{R,l}^2$  relativa alla misura dell'ancora  $l$ -sima è elevata, significa che questa misura è da considerarsi poco affidabile, certamente meno affidabile di quella fornita da un altro elemento che presenti  $\sigma$  più bassa. Da ciò consegue come nella combinazione di tutti i termini il contributo delle due ancore debba essere pesato con un valore che tenga conto della loro reciproca relazione di forza nella sommatoria, in modo da rendere conto della rispettiva attendibilità. Una misura caratterizzata da un rumore molto modesto sarà infatti più affidabile, e quindi il suo peso  $1/\sigma_{R,l}^2$  sarà un numero proporzionalmente grande rispetto a quello delle misurazioni inaffidabili.

Se tutte le stime sono caratterizzate dalla stessa varianza, ovvero se la matrice  $\mathbf{C}_R^{-1}$  risulta proporzionale alla matrice identità attraverso un mero coefficiente scalare, l'approccio ML si riduce a quello NLS generico. Il legame tra ML e NLS è quindi lo stesso che sussiste tra WLLS e LLS, ovvero l'approccio ML è in grado di utilizzare con successo le informazioni aggiuntive che sono implicitamente contenute nella statistica del rumore sovrapposto alla misura.

Operativamente, per determinare la soluzione è necessario ricorrere a un metodo risolutivo non-lineare, come quelli affrontati precedentemente. Utilizzando il metodo di Newton-Raphson:

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k - \mathbf{H}^{-1}(J_{ML,R}(\hat{\mathbf{x}}^k)) \nabla(J_{ML,R}(\hat{\mathbf{x}}^k)), \quad (2.98)$$

dove

$$\mathbf{H}(J_{ML,R}(\mathbf{x})) = \frac{\partial^2 J_{ML,R}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top}, \quad (2.99)$$

ovvero, nel caso della trilaterazione si ha:

$$[\mathbf{H}(J_{ML,R}(\mathbf{x}))]_{1,1} = \sum_{l=1}^L \frac{2}{\sigma_{R,l}^2} \left( \frac{(x - x_l)^2}{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} - \frac{\left( r_{R,l} - \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} \right) (y - y_l)^2}{((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2)^{3/2}} \right) \quad (2.100a)$$

$$[\mathbf{H}(J_{ML,R}(\mathbf{x}))]_{2,2} = \sum_{l=1}^L \frac{2}{\sigma_{R,l}^2} \left( \frac{(y - y_l)^2}{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} - \frac{\left( r_{R,l} - \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2} \right) (x - x_l)^2}{((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2)^{3/2}} \right); \quad (2.100b)$$

inoltre

$$[\mathbf{H}(J_{ML,R}(\mathbf{x}))]_{1,2} = [\mathbf{H}(J_{ML,R}(\mathbf{x}))]_{2,1} = \sum_{l=1}^L \frac{2r_{R,l}(x - x_l)(y - y_l)}{\sigma_{R,l}^2 ((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2)^{3/2}}, \quad (2.100c)$$

e infine

$$\nabla(J_{ML,R}(\mathbf{x})) = -2 \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^L \frac{(r_{R,l} - \sqrt{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2})(x-x_l)}{\sigma_{R,l}^2((x-x_l)^2 + (y-y_l)^2)^{3/2}} \\ \sum_{l=1}^L \frac{(r_{R,l} - \sqrt{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2})(y-y_l)}{\sigma_{R,l}^2((x-x_l)^2 + (y-y_l)^2)^{3/2}} \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

È inoltre possibile procedere con gli approcci Gauss-Newton, sfruttando una forma che generalizza quella vista in (2.80):

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k + (\mathbf{G}^\top(\mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^k))\mathbf{C}_R^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^k))^{-1}\mathbf{G}^\top(\mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^k))\mathbf{C}_R^{-1}(\mathbf{r}_R - \mathbf{f}_R(\hat{\mathbf{x}}^k))); \quad (2.102)$$

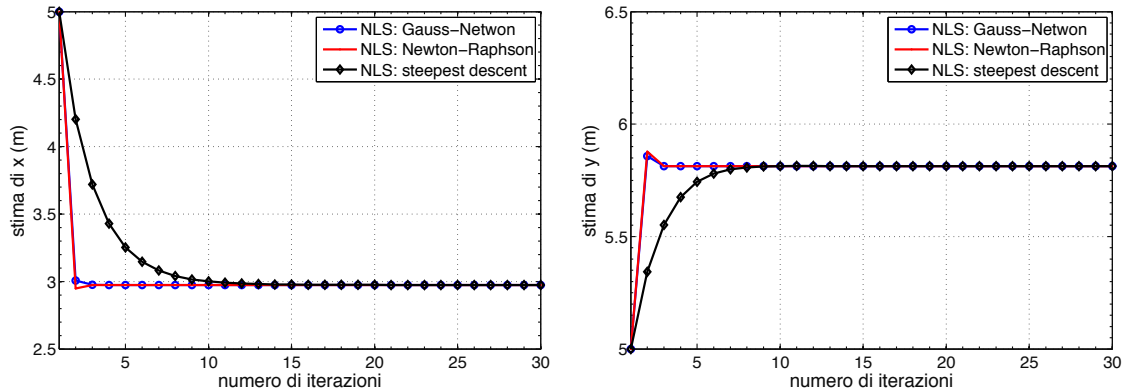
e infine, mediante il procedimento iterativo per il metodo della massima discesa:

$$\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k - \mu \nabla(J_{ML,R}(\hat{\mathbf{x}}^k)), \quad (2.103)$$

in cui valgono le stesse considerazioni viste precedentemente sul valore di  $\mu$  e sui criteri di arresto.

## 2.4 Esempi di triangolazione basata su approcci non lineari

Anche per il caso degli algoritmi non lineari è opportuno fare un confronto. Innanzitutto è necessario valutare come, fissate le condizioni al contorno (ovvero il rapporto segnale-rumore), i tre algoritmi iterativi si comportino rispetto alla rapidità di esecuzione. A questo proposito, con riferimento allo stesso setup modellato in Figura 2.1, la figura Figura 2.4 mostra il risultato dei tre algoritmi Gauss-Newton, Newton-Raphson e *Steepest Descent*, quando il target si trova nella posizione  $\mathbf{x} = [3, 6]$ , ovvero la stessa posizione su cui sono stati eseguiti i test con gli approcci lineari nella sezione 2.2.

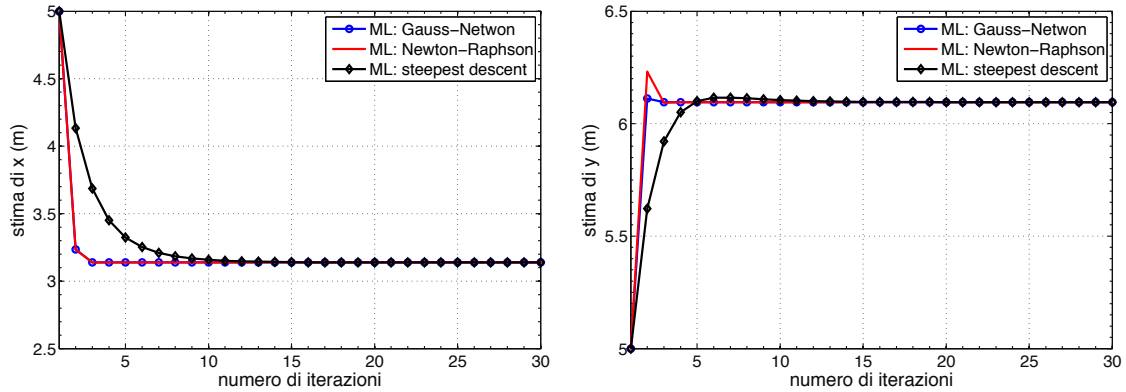


**Figura 2.4:** Stima della coordinate cartesiane del target utilizzando i tre algoritmi NLS descritti nel paragrafo 2.3.1: Gauss-Newton, Newton-Raphson e *Steepest Descent*.

Per tutti e tre i casi è stato scelto come punto di partenza il centro del dominio, ovvero il punto  $\hat{\mathbf{x}}_0 = [5, 5]$ , per mettere in evidenza la rapidità di convergenza dei tre metodi. In figura Figura 2.4 si può apprezzare l'andamento della convergenza dei tre algoritmi per la coordinata  $x$ , a sinistra e la coordinata  $y$ , a destra. Per fissare le idee è stato scelto un elevato livello di SNR, pari a 30 dB.

Figura 2.5 mostra invece l'andamento degli stessi tre metodi non lineari, ma stavolta implementati secondo la filosofia della massima verosimiglianza basata sulla statistica dell'errore, come descritto nella sezione 2.3.2. Anche in questo caso si conferma la stessa efficacia dei tre approcci, nel senso

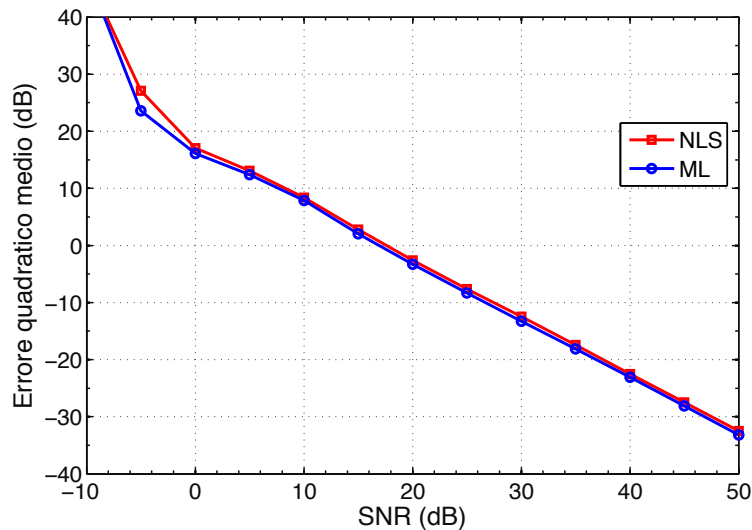
che ancora una volta i metodi Gauss-Newton e Newton-Raphson forniscono la stima definitiva in un numero ristretto di passi, mentre il metodo della massima discesa impiega almeno una decina di iterazioni.



**Figura 2.5:** Stima della coordinate cartesiane del target utilizzando i tre algoritmi NLS descritti nel paragrafo 2.3.2: Gauss-Newton, Newton-Raphson e *Steepest Descent*.

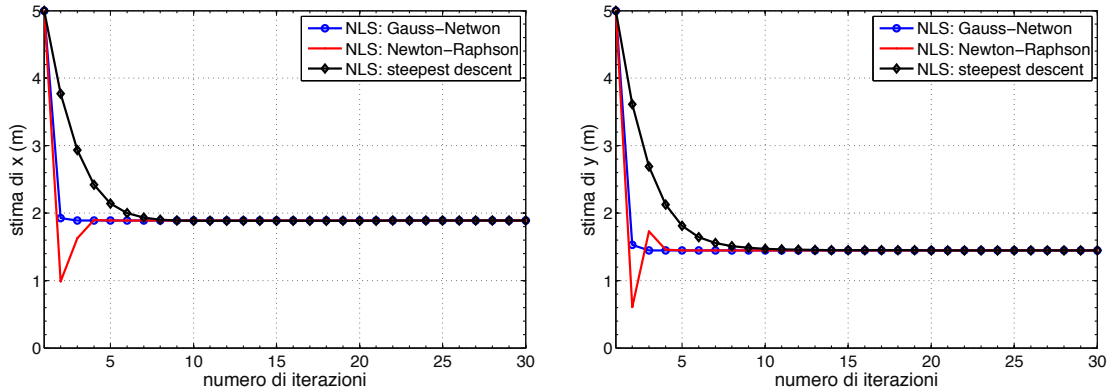
L'errore che si ottiene utilizzando gli approcci NLS è paragonabile a quello che si ottiene utilizzando l'implementazione ML. Con riferimento alla Figura 2.6, anche in questo caso si è valutato l'effetto del rapporto segnale rumore nella stima della posizione nelle 2 varianti NLS e ML. In particolare si fa riferimento all'implementazione Newton-Raphson, dal momento che, fissato il tipo di paesaggio, i tre algoritmi forniscono lo stesso risultato, mentre ciò che cambia è il numero di passi necessari per ottenerlo. Il comportamento è simile nei due casi, producendo curve praticamente sovrapposte, anche se si può apprezzare come quella riferita al metodo ML sia marginalmente migliore.

Ripetendo l'intera analisi per una diversa posizione del target, si osservano alcune differenze.

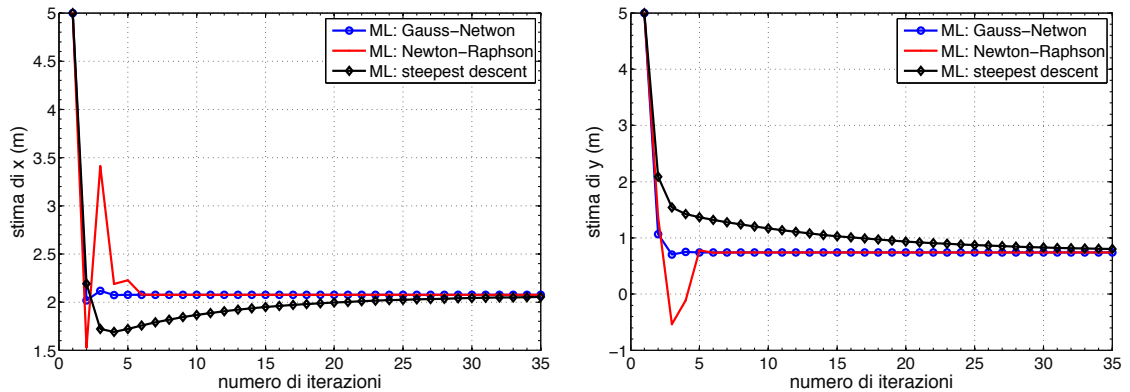


**Figura 2.6:** Confronto tra tre le implementazioni Newton-Raphson di tipo NLS, descritto nel paragrafo 2.3.1 e di tipo ML, descritto nel paragrafo 2.3.2.

Considerando di nuovo il punto  $\boldsymbol{x} = [2, 1]$ , come fatto nel paragrafo 2.2, i risultati degli approcci NLS sono riportati in Figura 2.7, mentre quelli per gli approcci ML sono riportati in Figura 2.8. Si può osservare come la stima della posizione sia più difficoltosa per tutti gli algoritmi, in tutte le sei combinazioni di NLS/ML e GN/NR/SD. In questo caso però emerge che i metodi ML sono in vantaggio rispetto a quelli NLS, almeno per bassi valori di SNR, come si può apprezzare osservando Figura 2.9, che mostra l'errore quadratico medio in funzione del rapporto segnale rumore. Questa differenza dipende dal migliore utilizzo che gli algoritmi ML fanno delle informazioni disponibili.



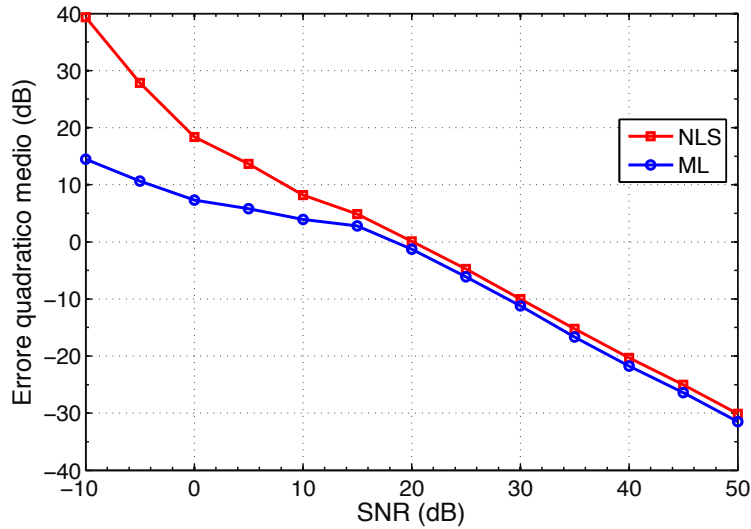
**Figura 2.7:** Stima della coordinate cartesiane del target utilizzando i tre algoritmi NLS descritti nel paragrafo 2.3.1 quando il target si trova in posizione  $\boldsymbol{x} = [2, 1]$ .



**Figura 2.8:** Stima della coordinate cartesiane del target utilizzando i tre algoritmi ML descritti nel paragrafo 2.3.2 quando il target si trova in posizione  $\boldsymbol{x} = [2, 1]$ .

## 2.5 Confronto tra approcci lineari e non lineari

Per concludere questo capitolo, tutti gli algoritmi presentati sono messi a confronto. In particolare Figura 2.10 li mette a confronto quando la posizione del target è  $\boldsymbol{x} = (3, 6)$ . Si può osservare come, asintoticamente, tutti i metodi presentino risultati simili e soltanto per bassissimi valori di SNR l'algoritmo WLLS a 2 passi risulti il migliore. Asintoticamente, l'errore quadratico medio è compreso entro 1 dB.

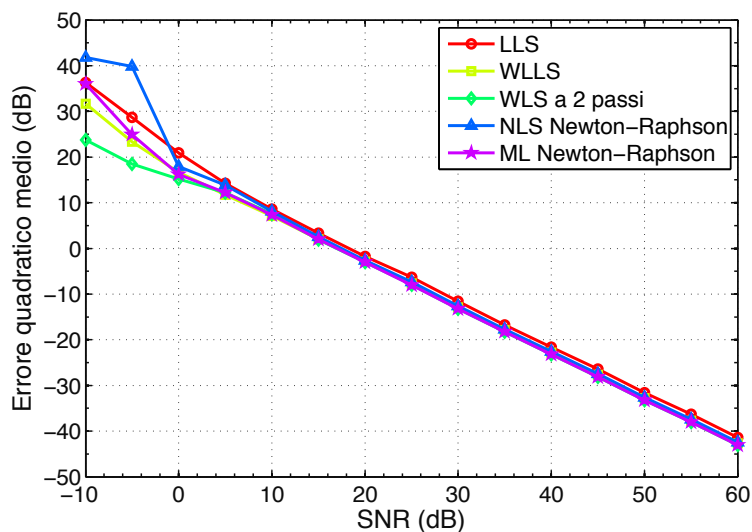


**Figura 2.9:** Confronto tra tre le implementazioni Newton-Raphson di tipo NLS, descritto nel paragrafo 2.3.1 e di tipo ML, descritto nel paragrafo 2.3.2 quando il target si trova nella posizione  $\mathbf{x} = [2, 1]$ .

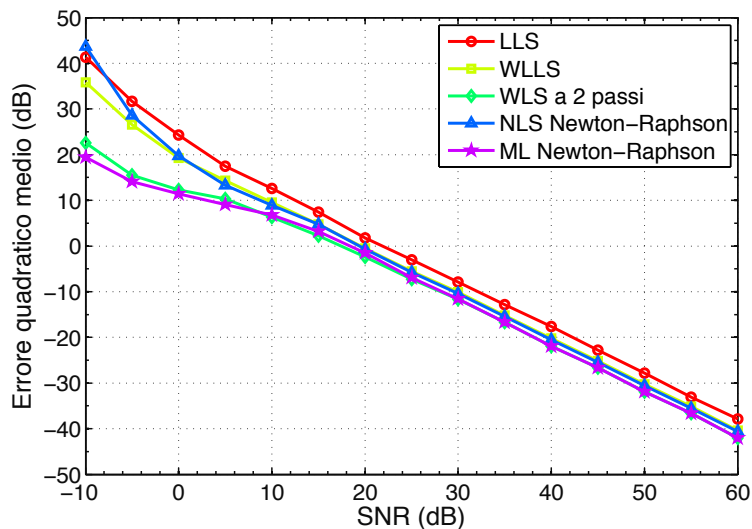
Considerando invece Figura 2.11, i vari algoritmi si distribuiscono in una dinamica di circa 4dB. Si può osservare come, asintoticamente, il metodo WLS a 2 passi e il metodo *Maximum Likelihood* siano praticamente identici producendo il più basso errore quadratico a parità di SNR, mentre l'implementazione LLS, la più semplice tra tutte quelle presentate, si conferma come quella con le peggiori prestazioni. Le due posizioni  $\mathbf{x} = [3, 6]$  e  $\mathbf{x} = [2, 1]$  sono state scelte proprio perché molto estreme nella dinamica delle possibilità. Nel prossimo capitolo verrà chiarito il perché di questa differenza di risultati.

Come nota finale a questo capitolo, la medesima successione di prestazioni tra gli algoritmi vale anche per le altre implementazioni, in particolare per la triangolazione basata sull'intersezione di rette. Cambia eventualmente l'effetto che la posizione del target ha sull'errore di localizzazione osservato, nel senso che, fissata la costellazione, la propagazione dell'errore di misura è diversa per i vari algoritmi.

Per concludere questo capitolo, la tabella 2.1 mostra un confronto tra vantaggi e svantaggi dei vari metodi, lineari e non lineari, discussi in questo capitolo. In conclusione, quelli che considerano la statistica dell'errore ottengono generalmente i risultati migliori, ma non sempre quest'ultima è nota: introdurre una sbagliata può peraltro peggiorare molto il risultato finale. I metodi lineari determinano sempre la soluzione globale, ma la loro accuratezza può essere scarsa; d'altro canto, quelli non lineari sono generalmente più prestanti, ma anche più onerosi.



**Figura 2.10:** Confronto tra tutti i metodi di triangolazione presentati in questo capitolo quando il target si trova in posizione  $x = [3, 6]$ . LLS introdotto in 2.1.1, WLLS e WLS a 2 passi introdotti in 2.1.2, Newton-Raphson di tipo NLS, introdotto in 2.3.1 e Newton-Raphson di tipo ML, introdotto in 2.3.2.



**Figura 2.11:** Confronto tra tutti i metodi di triangolazione presentati in questo capitolo quando il target si trova in posizione  $x = [2, 1]$ . LLS introdotto in 2.1.1, WLLS e WLS a 2 passi introdotti in 2.1.2, Newton-Raphson di tipo NLS, introdotto in 2.3.1 e Newton-Raphson di tipo ML, introdotto in 2.3.2.

**Tabella 2.1:** Confronto tra i vari approcci presentati in questo capitolo

Metodo	Vantaggi	Svantaggi
LLS	Implementazione semplice Soluzione globale garantita Nessuna conoscenza pregressa richiesta	Bassa accuratezza
WLS	Soluzione globale garantita Media/elevata accuratezza	Richiesta conoscenza delle statistiche dell'errore Necessità di iterazione
NLS	Media/elevata accuratezza Nessuna conoscenza pregressa richiesta	Soluzione globale non garantita Complessità media/alta Necessità di iterazione
ML	Elevata accuratezza	Soluzione globale non garantita Complessità media/alta Necessità di iterazione





### 3. DILUIZIONE DELLA PRECISIONE

Nel capitolo precedente si sono mostrati vari metodi per la determinazione della posizione del target una volta fissato il numero delle ancore e la loro disposizione. Si sono anche mostrati i risultati di alcune simulazioni basate sui modelli esposti nel primo capitolo, eseguendo la localizzazione di un ipotetico target all'interno di una semplice costellazione di 4 ancore disposte ai vertici di un quadrato per fissare le idee. È lecito chiedersi se i risultati ottenuti dipendano dalla posizione del target rispetto alla posizione delle ancore, e in caso affermativo se esista un modo per quantificare a priori il livello di errore che ci si debba aspettare nel processo di stima della posizione.

Quanto detto dipende dal fatto che ad ogni metodo affrontato può essere associata una differente interpretazione geometrica, caratterizzata da differenti famiglie di curve. A parità di perturbazione sull'errore iniziale, infatti, le intersezioni delle varie curve non sono caratterizzate dalla stessa propagazione dell'errore andando ad agire in regioni diverse dello spazio disponibile; ciò è evidente se si pensa all'intersezione di rette piuttosto che a quella di cerchi.

Nel capitolo precedente si sono testate le varie implementazioni dei metodi di localizzazione operando sulla stessa posizione di riferimento, scelta in modo del tutto arbitrario. Si è osservato come tutti gli algoritmi scelti si comportino in modo simile operando su tale posizione, e si è apprezzato come tutti presentino lo stesso andamento asintotico nei confronti del rapporto segnale-rumore. Per valutare se questi risultati dipendano o meno dalla posizione del target si procede qui ad un'analisi globale, ovvero si esegue l'algoritmo di localizzazione campionando l'intera area monitorata dalle ancore. Questo tipo di analisi si traduce nello spostare il target in maniera regolare lungo tutto il dominio. Operativamente si utilizza il passo costante  $\Delta x = \Delta y = 1\text{m}$ .

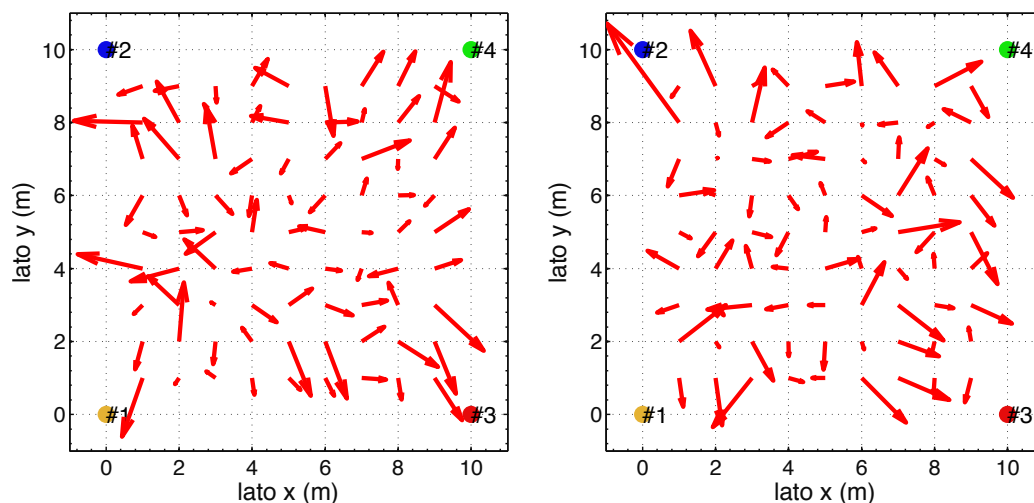
In Figura 3.1 sono riportati i risultati di due esperimenti di triangolazione eseguiti con il metodo LLS introdotto nella sezione 2.1.1. In entrambi i casi si sono utilizzate 10 medie per ogni posizione e si è fissato il valore del rapporto segnali rumore a 30 dB. Per ogni posizione in cui si trova effettivamente il target è stata tracciata una freccia fino alla posizione stimata, pertanto a frecce più brevi corrispondono stime più accurate.

I due quadri sinottici mostrati a destra e sinistra in Figura 3.1 sono formalmente identici come procedura di localizzazione e condizioni al contorno, ma del tutto scorrelati nei confronti del rumore: in entrambi i casi si può osservare come gli errori siano più contenuti in alcune zone (prevalentemente in un intorno del centro del dominio), mentre tendono ad aumentare spostandosi lungo il bordo del dominio. Dal momento che non c'è alcuna correlazione o effetto di memoria tra le due simulazioni, è ragionevole aspettarsi che la distribuzione dell'errore dipenda da qualche caratteristica intrinseca al metodo di localizzazione.

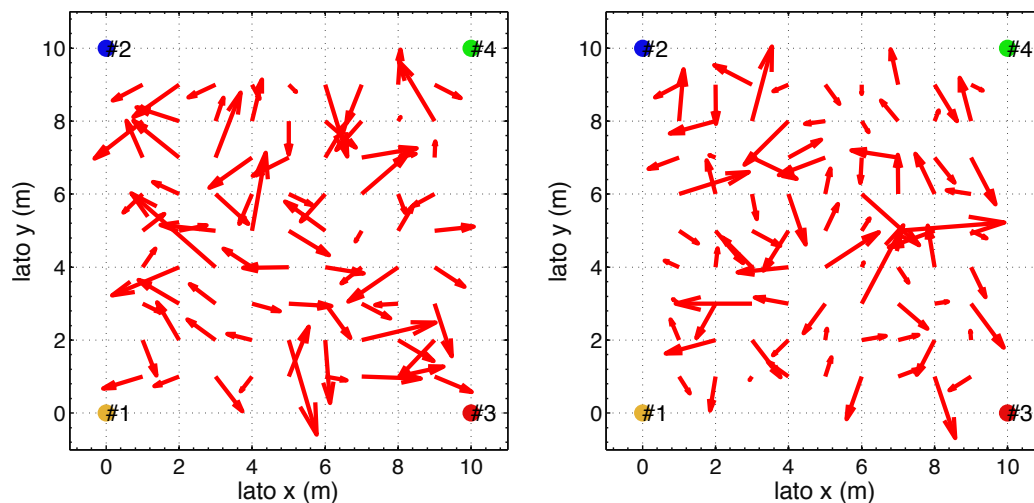
Figura 3.2 descrive la stessa situazione in termini di dominio, posizioni del target e condizioni al contorno; in questo caso però l'algoritmo impiegato è il WLLS a due step, una delle migliori implementazioni possibili per la triangolazione, introdotto nella sezione 2.1.2.

Benché la distribuzione dell'errore in questo caso sia diversa da quella descritta in Figura 3.1, si è mantenuto comunque il suo andamento nei confronti del dominio, ovvero gli errori minori si osservano verso il centro della costellazione.

È evidente che se si portasse il numero di misure da 10 ad un valore asintoticamente alto, l'errore medio nella singola posizione si attenuerebbe fino a diventare nullo, dato che per tutti i metodi



**Figura 3.1:** Risultati di due esperimenti di localizzazione estesi ad un grigliato regolare di posizioni del target. In entrambi i casi l'algoritmo utilizzato è la triangolazione di tipo LLS.

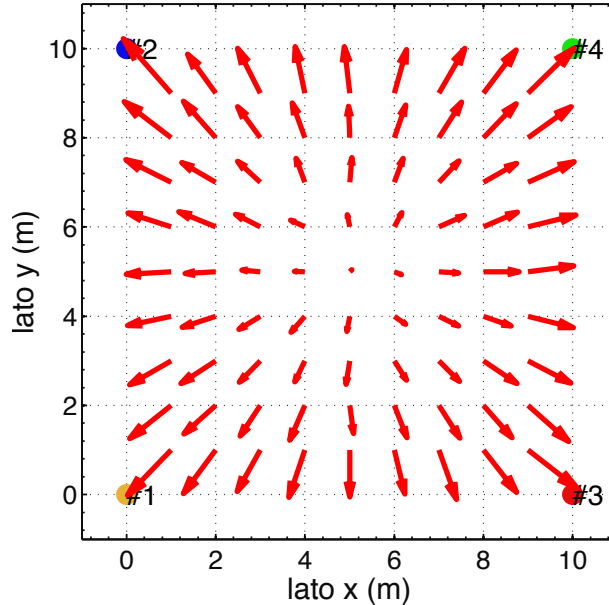


**Figura 3.2:** Risultati di due esperimenti di localizzazione estesi ad un grigliato regolare di posizioni del target. In entrambi i casi l'algoritmo utilizzato è la triangolazione di tipo WLLS a due passi.

presentati si è supposta l'assenza di errori sistematici. Questi ultimi infatti, qualora presenti sarebbero da imputare alla tecnica di misura del range – o dell'angolo di arrivo. Eventualmente sarebbe possibile eliminarli o al limite mitigarli con una procedura di calibrazione applicata al sistema di misura; tuttavia la questione va al di là dello scopo del presente testo.

È invece interessante valutare lo scarto quadratico dell'errore in senso asintotico. Per stimarlo è necessario procedere a un numero elevato di test di localizzazione e valutare per ognuno di esso l'errore commesso nella stima delle coordinate  $x$  e  $y$  in valore assoluto. Il risultato di questa valutazione è presentato in Figura 3.3. Osservando la figura diventa evidente come la distribuzione dell'errore non sia casuale ma segua bensì un preciso andamento. Non è difficile concludere che i punti centrali

sono avvantaggiati perché equidistanti dalla costellazione delle ancore, per cui gli errori casuali che avvengono nella stima della posizione mediamente tendono ad elidersi, essendo il rumore a media nulla.

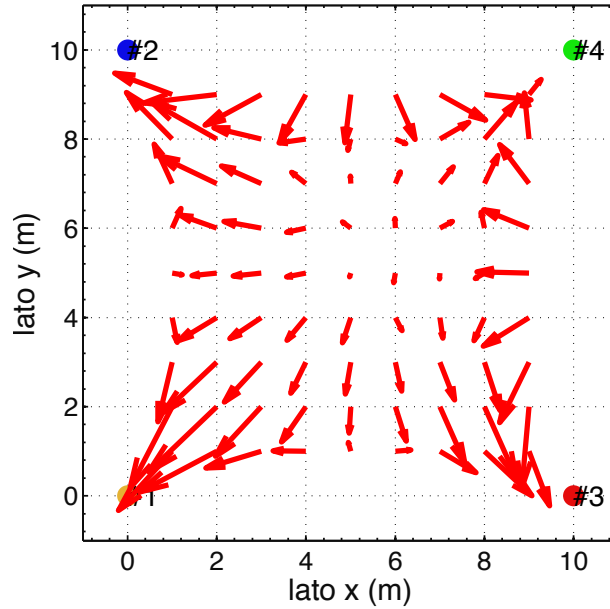


**Figura 3.3:** errore quadratico medio ottenuto stimando la posizione del target utilizzando l'algoritmo di triangolazione LLS introdotto in sezione 2.1.1. Le 91 posizioni uniformemente distribuite nel dominio sono state stimate 10000 volte per valutare l'errore quadratico medio.

La stessa analisi eseguita sull'algoritmo WLLS a due passi è presentata in Figura 3.4. In questo caso la distribuzione dell'errore rispetta la stessa osservazione emersa nel caso precedente, ovvero una presenza di errori più bassi al centro. Tuttavia le due distribuzioni non sono esattamente sovrapponibili: si nota infatti che, a differenza di quanto avviene in Figura 3.3, in questo caso l'errore si mantiene relativamente contenuto anche sulla congiungente di due ancore, lungo i lati del quadrato. Si può quindi fin qui concludere che una causa della distribuzione dell'errore sia dovuta alla disposizione delle ancore (data la similitudine dei risultati ottenuti con due metodi diversi), ma che al contempo esista comunque una componente di questa distribuzione indubbiamente figlia del metodo scelto.

### 3.1 Il limite teorico della precisione: il Cramer Rao Bound

Lo strumento analitico utilizzato per affrontare questo tipo di analisi è la teoria della *quantità di informazione* sviluppata da Fisher, e in particolare uno dei suoi risultati più notevoli, il criterio noto come *Cramer Rao Bound*, CRB, talvolta indicato anche come *Cramer Rao Lower Bound*, CRLB, [36]. Questo indice metrico fornisce una stima della minor varianza teoricamente ottenibile una volta fissato uno stimatore, nell'ipotesi che sia nota la statistica di rumore dei dati in ingresso. Per motivi pratici in genere ci si riduce a considerare soltanto statistiche gaussiane dell'errore, data la difficoltà insita nel modellizzare densità di probabilità di tipo qualsiasi. Benché questa ipotesi possa sembrare restrittiva, data la grande quantità di processi e meccanismi che a seconda del metodo possono colorare la statistica dell'errore, l'approccio qui descritto trova comunque grande riscontro anche nella verifica sperimentale.



**Figura 3.4:** errore quadratico medio ottenuto stimando la posizione del target utilizzando l'algoritmo di triangolazione LLS introdotto in sezione 2.1.2. Sono state considerate le stesse posizioni con le stesse condizioni di Figura 3.3.

Il CRB si configura come l'asintoto per le prestazioni dei vari metodi di localizzazione, ed è in generale una funzione del solo modello di osservazione, non dello specifico metodo risolutivo. Si può anzi utilizzare come metro di paragone di ogni algoritmo, dato che l'efficienza di un approccio può essere misurata valutandola in rapporto a quanto previsto dal CRB nella medesima configurazione. In quanto varianza limite, il valore di CRB va confrontato con lo scarto quadratico medio dell'errore di posizionamento, e pertanto fornisce una valutazione aprioristica della precisione del metodo in esame. È bene precisare infatti che tutti i metodi qui valutati sono *non polarizzati* (*unbiased*), ovvero forniscono in media il valore esatto. Se esiste un *bias*, infatti, esso si traduce in un errore sistematico delle misure, e può pertanto essere sempre corretto.

Il punto di partenza per la costruzione del CRB è la matrice dell'informazione di Fisher, nota con il nome di *Fisher Information Matrix* (FIM). Quest'ultima è una metrica che valuta la *quantità* di informazione contenuta in un modello di osservazione.

I passi per calcolare il CRB si possono schematizzare nella seguente procedura:

1. si calcolano le derivate seconde del logaritmo della distribuzione di probabilità della misura rispetto all'incognita posizionale, ovvero:  $\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{r})}{(\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top)}$ ;
2. a partire da queste grandezze, si costruisce la matrice di Fisher stimando il valore atteso dei valori calcolati al punto 1, ovvero:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} \right], \quad (3.1)$$

con  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  che indica la matrice di Fisher;

3. il valore del CRB si ottiene a questo punto invertendo  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . In particolare, nel caso in questione, la funzione CRB per gli elementi in  $x$  e  $y$  sono le componenti diagonali dell'inverso della matrice di Fisher, ovvero:

$$CRB(x) = [\mathbf{F}(\mathbf{x})]_{1,1}^{-1} \quad (3.2a)$$

$$CRB(y) = [\mathbf{F}(\mathbf{x})]_{2,2}^{-1}. \quad (3.2b)$$

Come anticipato, nel caso in cui le misure siano affette da un errore gaussiano a media nulla, la matrice di Fisher può essere calcolata in modo ancor più agevole, nel seguente modo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^\top \mathbf{C}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right], \quad (3.3)$$

dove  $\mathbf{C}$  è la matrice delle covarianze per il rumore  $\mathbf{n}$ . A partire da quest'ultima espressione è possibile valutare in maniera diretta il CRB dei vari metodi di localizzazione. Si ricorda ancora come questo dipenda dal modello di osservazione, comprendendo in questo la specifica morfologia della costellazione di ancore, ovvero disposizione e densità nei confronti del dominio monitorato.

### 3.2 Cramer Rao Bound per la trilaterazione

Si procede quindi a stimare la forma della funzione CRB per l'approccio di localizzazione basato sulla trilaterazione. Ripartendo dalla funzione di osservazione in questione:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \\ \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x-x_L)^2 + (y-y_L)^2} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

è semplice realizzare che il primo passo per il calcolo del CRB, ovvero la derivata direzionale di (3.4), risulta:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{pmatrix} \frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} & \frac{y-y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} \\ \frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}} & \frac{y-y_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x-x_L}{\sqrt{(x-x_L)^2 + (y-y_L)^2}} & \frac{y-y_L}{\sqrt{(x-x_L)^2 + (y-y_L)^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_1}{d_1} \\ \frac{x-x_2}{d_2} & \frac{y-y_2}{d_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x-x_L}{d_L} & \frac{y-y_L}{d_L} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

dove si è sfruttato la definizione di distanza tra target e costellazione:

$$\sqrt{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2} = d_l. \quad (3.6)$$

Ricordando la definizione della matrice di correlazione e sostituendo l'espressione (3.5) in quella semplificata riportata in (3.3) si ottiene:

$$\mathbf{F}_R(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{x-x_2}{d_2} & \cdots & \frac{x-x_L}{d_L} \\ \frac{y-y_1}{d_1} & \frac{y-y_2}{d_2} & \cdots & \frac{y-y_L}{d_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{R,1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{R,1}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_{R,L}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_1}{d_1} \\ \frac{x-x_2}{d_2} & \frac{y-y_2}{d_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x-x_L}{d_L} & \frac{y-y_L}{d_L} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

calcolando la quale si perviene alla forma esplicita della matrice di Fisher:

$$\mathbf{F}_R(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)^2}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} & \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)(y-y_l)}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} \\ \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)(y-y_l)}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} & \sum_{l=1}^L \frac{(y-y_l)^2}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Pertanto, in accordo con il punto 3 della definizione, le componenti del CRB risultano

$$CRB_x(\mathbf{x}) = [\mathbf{F}_R(\mathbf{x})]_{1,1}^{-1} = \frac{\sum_{l=1}^L \frac{(y-y_l)^2}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2}}{|\mathbf{F}_R(\mathbf{x})|} \quad (3.9a)$$

$$CRB_y(\mathbf{x}) = [\mathbf{F}_R(\mathbf{x})]_{2,2}^{-1} = \frac{\sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)^2}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2}}{|\mathbf{F}_R(\mathbf{x})|}, \quad (3.9b)$$

con  $|\mathbf{A}|$  determinante della matrice  $\mathbf{A}$ .

Da queste, si può pervenire alla varianza assoluta sulla localizzazione, ovvero alla varianza dell'errore di localizzazione del tipo  $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|$ , come somma delle due componenti

$$CRB_R(\mathbf{x}) = CRB_x(\mathbf{x}) + CRB_y(\mathbf{x}). \quad (3.10)$$

Come anticipato, questa funzione non contiene alcuna informazione sullo specifico metodo risolutivo, ma soltanto l'effetto della costellazione sull'area monitorata, dal momento che ogni punto dello spazio osservato dal CRB viene messo in relazione all'insieme delle distanze relative dalle ancore attraverso le distanze  $d_l$ . Partendo dagli altri metodi di localizzazione, basati su modelli di osservazione diversi, si ottengono espressioni simili ma non identiche. Nel caso della triangolazione differenziale, per esempio, la matrice  $\left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]$  risulta:

$$\mathbf{f}_{DR}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x-x_2}{d_2} - \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_2}{d_2} - \frac{y-y_1}{d_1} \\ \frac{x-x_3}{d_3} - \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_3}{d_3} - \frac{y-y_1}{d_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x-x_L}{d_L} - \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_L}{d_L} - \frac{y-y_1}{d_1} \end{pmatrix}; \quad (3.11)$$

per la trilaterazione basata su RSSI:

$$\mathbf{f}_{RSSI}(\mathbf{x}) = -\alpha \begin{pmatrix} \frac{x-x_1}{d_1^2} & \frac{y-y_1}{d_1^2} \\ \frac{x-x_2}{d_2^2} & \frac{y-y_2}{d_2^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x-x_L}{d_L^2} & \frac{y-y_L}{d_L^2} \end{pmatrix}; \quad (3.12)$$

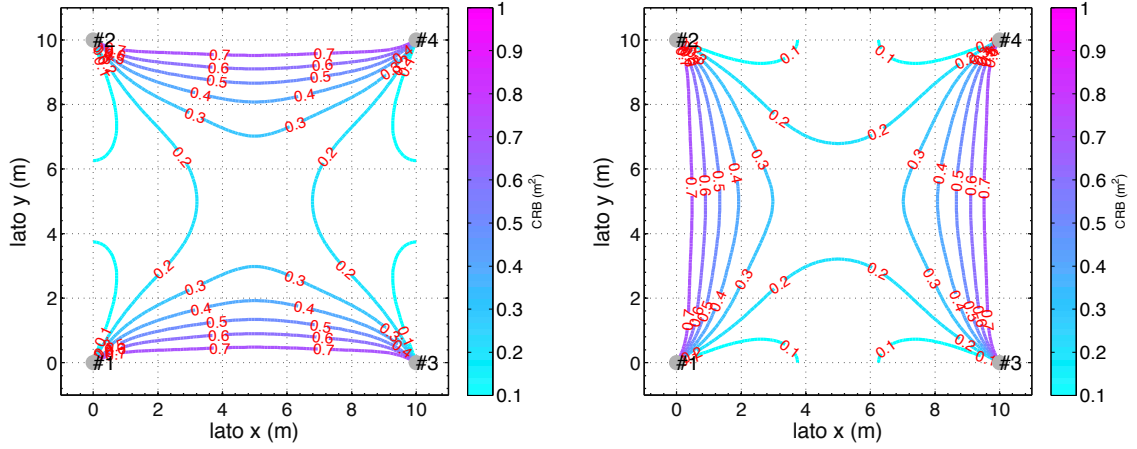
per la triangolazione:

$$\mathbf{f}_A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{y-y_1}{d_1^2} & \frac{x-x_1}{d_1^2} \\ -\frac{y-y_2}{d_2^2} & \frac{x-x_2}{d_2^2} \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{y-y_L}{d_L^2} & \frac{x-x_L}{d_L^2} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

e così via per ogni modello di osservazione.

### 3.2.1 Alcuni esempi di CRB per costellazioni semplici

Per valutare l'effetto della costellazione sulle prestazioni che ci si può attendere da un qualsiasi algoritmo di localizzazione si illustra qui l'effetto del CRB in accordo con le equazioni (3.9). Con riferimento alla Figura 3.5, il grafico a sinistra implementa il CRB per la coordinata  $x$  secondo l'equazione (3.9a), mentre il grafico a destra utilizza l'equazione (3.9b) per la coordinata  $y$ . Un'informazione riassuntiva si può avere osservando invece la Figura 3.6 che mostra i risultati del CRB totale come da equazione (3.10).



**Figura 3.5:** CRB per la coordinata  $x$ , a sinistra, e  $y$ , a destra, in accordo con la formula (3.9).

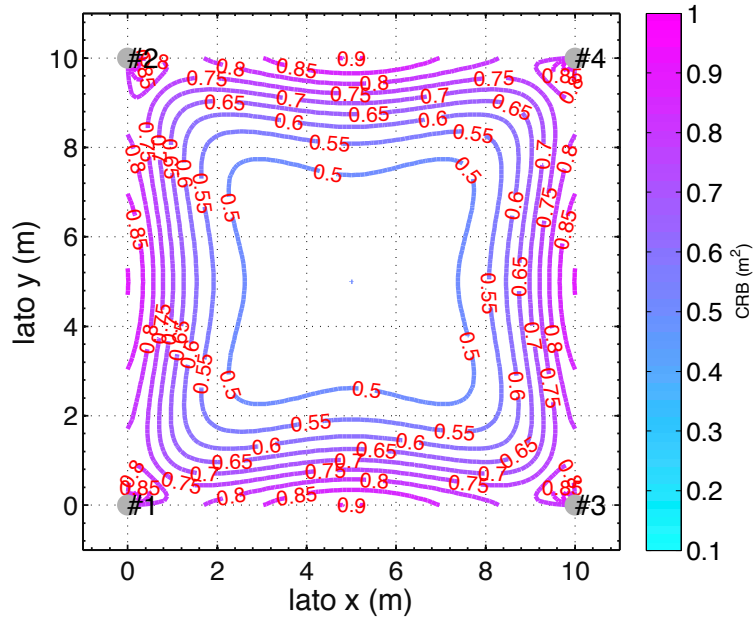
Confrontando la Figura 3.6 con la Figura 3.3 e la Figura 3.4 si conferma quanto anticipato nel paragrafo precedente: l'errore quadratico medio dell'algoritmo LLS in Figura 3.3 e WLLS a due passi in Figura 3.4 ricalca la struttura prevista dalla figura Figura 3.6. In particolare, si ha la conferma della qualità del metodo WLLS a due passi, il quale segue in maniera molto precisa il profilo previsto dalla funzione CRB (come si può osservare confrontando le regioni a metà dei lati del quadrato che definisce la costellazione). Si può affermare che questo algoritmo è *asintoticamente efficiente*, dal momento che ottiene le prestazioni limite previste dalla teoria dell'informazione. Si può quindi definire un'efficienza di localizzazione generalizzando il concetto con la seguente forma:

$$\eta(x, y) = \frac{E [(\hat{x} - x)^2 + (\hat{y} - y)^2]}{CRB(x, y)}, \quad (3.14)$$

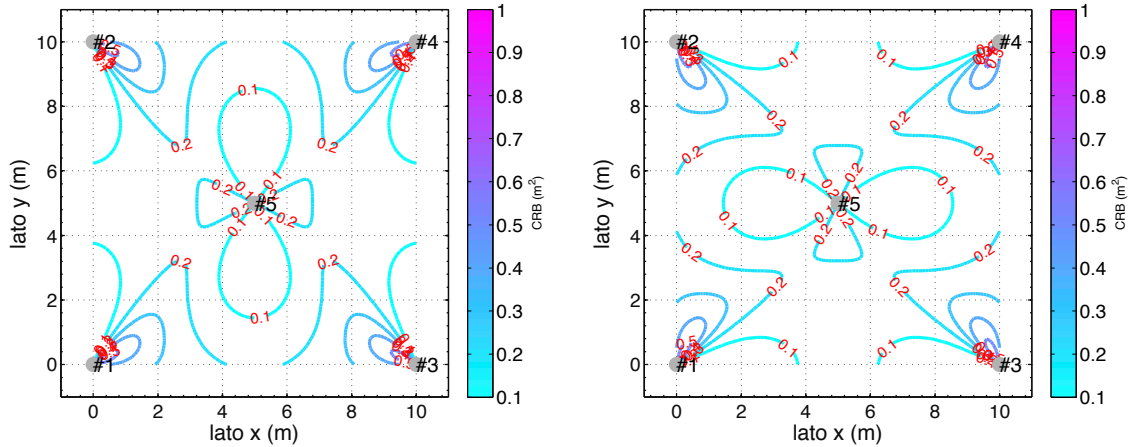
dove le stime  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  sono ottenute con lo specifico algoritmo di cui si sta valutando l'efficienza.

Dal momento che non si può ottenere un risultato migliore di quello previsto dal CRB (almeno nel caso di algoritmi non polarizzati), se le prestazioni ottenute non sono adeguate agli obiettivi dello specifico problema di localizzazione, l'unica alternativa è modificare la costellazione delle ancore. È infatti facile comprendere come il numero e la disposizione delle ancore sia infatti il punto chiave per ottenere prestazioni asintotiche migliori, dal momento che il denominatore delle (3.9) cresce con  $L$  più rapidamente di quanto faccia il numeratore.

In Figura 3.8 è mostrato il risultato ottenuto aggiungendo una singola ancora al centro del dominio da monitorare. La distribuzione della varianza limite si è chiaramente modificata di conseguenza e in particolare, confrontando Figura 3.8 con la corrispondente in Figura 3.6 si nota come il valore minimo sia molto diminuito. Elevati valori di CRB sono comunque presenti nelle regioni adiacenti alle boe: questo succede perché la propagazione di errore continua ad essere sfavorevole nonostante la densità di ancore.



**Figura 3.6:** CRB complessivo per la costellazione di 4 ancore, in accordo con (3.10). Questa distribuzione è valida per qualsiasi approccio basato sulla triangolazione che risponda al modello di osservazione in (1.12), indipendentemente dalla specifica implementazione utilizzata (lineare, pesata, non lineare, etc.).

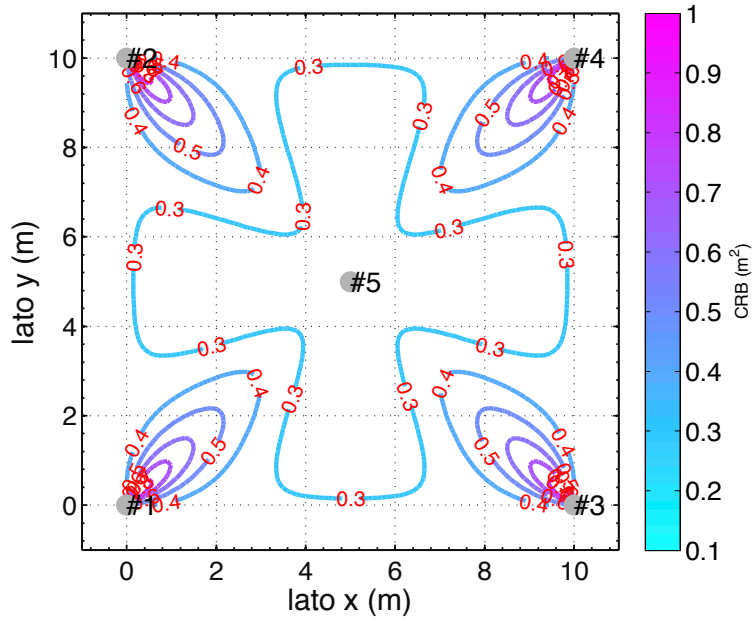


**Figura 3.7:** CRB per la coordinata  $x$ , a sinistra, e  $y$ , a destra, in accordo con (3.9), quando alla costellazione iniziale descritta in Figura 3.5 viene aggiunta una quinta ancora al centro del dominio.

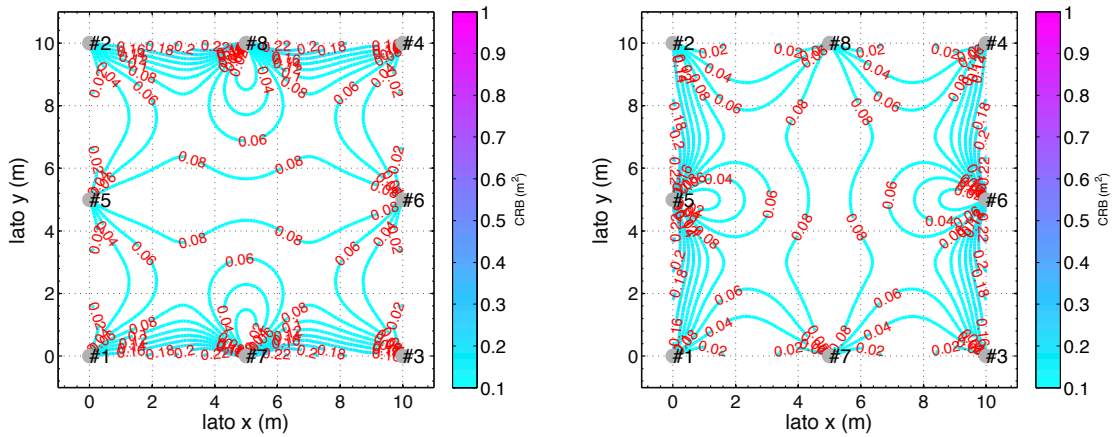
Una costellazione di 8 elementi produce i risultati mostrati in Figura 3.9 e in in Figura 3.10. Con questa configurazione si ottengono prestazioni asintotiche senza dubbio migliori, ma il prezzo da pagare è una densità di ancore per superficie monitorata molto elevata.

Modificando la posizione degli elementi della costellazione si può ottenere un risultato migliore senza ricorrere a eccessive densità delle ancore. Con riferimento alla Figura 3.11, 4 boe sono state posizionate sui punti medi dei lati piuttosto che sui vertici del quadrato. Si può osservare che, nell'area





**Figura 3.8:** CRB complessivo per la costellazione di 5 ancore, in accordo con la (3.10).



**Figura 3.9:** CRB per la coordinata  $x$ , a sinistra, e  $y$ , a destra, in accordo con (3.9), operando su una costellazione di 8 ancore distribuite lungo il contorno dell'area monitorata.

sottesa dalle 4 ancore, la distribuzione dell'errore è identica a quella del caso Figura 3.6, ma potendo contare su distanze ridotte di  $\sqrt{2}$ , la distribuzione dell'errore raggiunge al massimo la metà di quello del primo caso. Inoltre, anche nelle zone periferiche dell'area osservata l'errore non cresce eccessivamente. In definitiva la situazione risulta molto vantaggiosa se misurata con la metrica del massimo CRB per numero di ancore e per area monitorata.

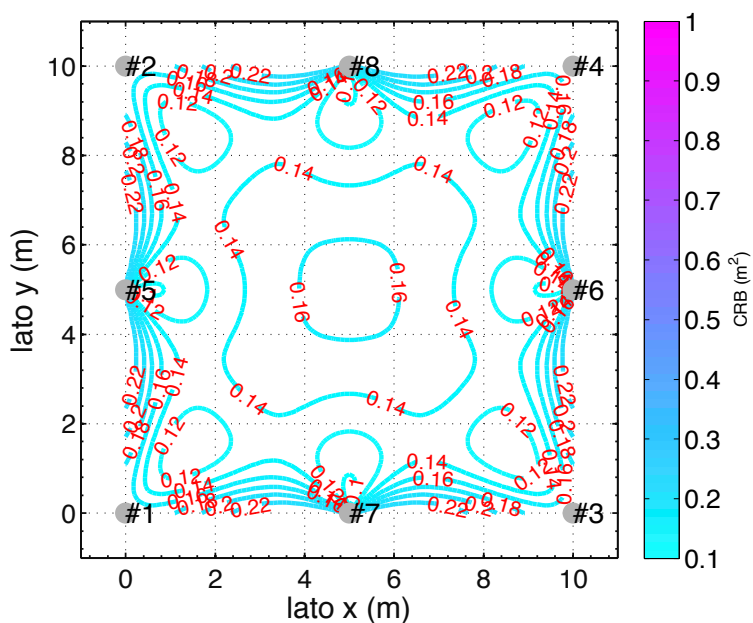


Figura 3.10: CRB complessivo per la costellazione di 8 ancore, in accordo con (3.10).

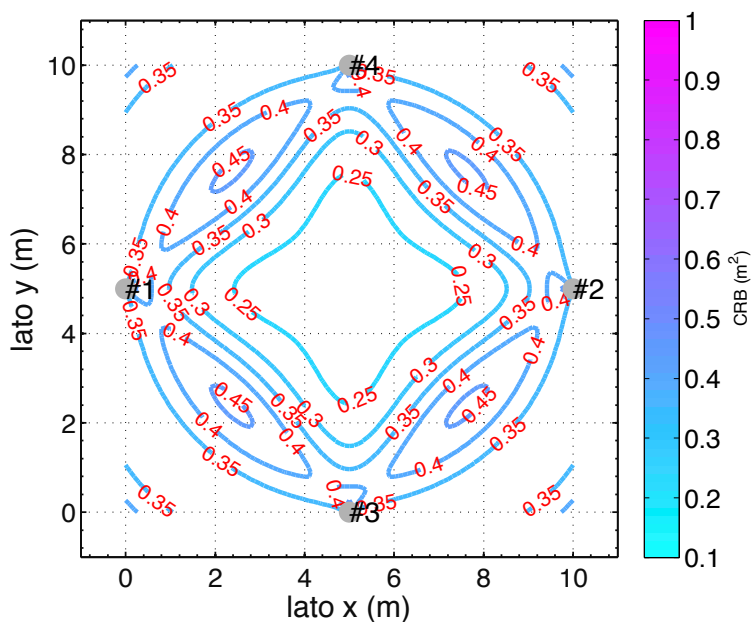


Figura 3.11: CRB di una costellazione di 4 ancore posizione sui punti medi del bordo dell'area monitorata.

### 3.3 Analisi di media e varianza: l'approccio ottimo

Nei casi analizzati, ogni metodo di stima posizionale si riconduce alla massimizzazione (o minimizzazione) di una funzione continua. In questo contesto, è possibile valutare la media e la varianza

della posizione stimata  $\hat{\boldsymbol{x}}$  utilizzando gli strumenti dello sviluppo in serie nell'intorno del massimo (o minimo) del relativo funzionale. Si indichi con  $J(\tilde{\boldsymbol{x}})$  una generica funzione continua di  $\tilde{\boldsymbol{x}}$  e  $\hat{\boldsymbol{x}}$  sia il suo massimo (o minimo), [37]. In queste condizioni si può certamente affermare che:

$$\left. \frac{\partial J(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \right|_{\tilde{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{x}}} = 0. \quad (3.15)$$

Ipotizzando che, in presenza di errori di stima contenuti,  $\hat{\boldsymbol{x}}$  sia ragionevolmente vicino alla soluzione esatta  $\boldsymbol{x}$ , l'espansione di Taylor attorno a questo valore fornisce la seguente espressione:

$$\mathbf{0} = \left. \frac{\partial J(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \right|_{\tilde{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{x}}} \approx \left. \frac{\partial J(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \right|_{\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}} + \left. \frac{\partial^2 J(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}} \partial \tilde{\boldsymbol{x}}^\top} \right|_{\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}} (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}). \quad (3.16)$$

Da questa uguaglianza, ancorché approssimata, si desume che

$$-\left. \frac{\partial J(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \right|_{\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}} \approx \left. \frac{\partial^2 J(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}} \partial \tilde{\boldsymbol{x}}^\top} \right|_{\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}} (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}), \quad (3.17)$$

che può essere convenientemente riscritta come

$$-\nabla(J(\boldsymbol{x})) \approx \mathbf{H}(J(\boldsymbol{x}))(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}), \quad (3.18)$$

dove  $\mathbf{H}(J(\boldsymbol{x}))$  e  $\nabla(J(\boldsymbol{x}))$  sono rispettivamente la matrice Hessiana e il vettore gradiente del funzionale  $J(\boldsymbol{x})$ , valutati nella posizione reale. Nel caso in cui le derivate seconde della matrice Hessiana siano abbastanza regolari nell'intorno di  $\boldsymbol{x}$ , si può porre, [38]:

$$\mathbf{H}(J(\boldsymbol{x})) \approx \mathbf{E}[\mathbf{H}(J(\boldsymbol{x}))]. \quad (3.19)$$

Utilizzando la (3.15) e valutando il valore medio dei due membri di (3.16), si perviene alla stima del valore medio di  $\hat{\boldsymbol{x}}$ , che assume la seguente forma:

$$\mathbf{E}[\hat{\boldsymbol{x}}] = \boldsymbol{x} - [\mathbf{E} \mathbf{H}(J(\boldsymbol{x}))]^{-1} \mathbf{E}[\nabla(J(\boldsymbol{x}))]. \quad (3.20)$$

Se  $\hat{\boldsymbol{x}}$  è una stima non polarizzata – ovvero *unbiased* – di  $\boldsymbol{x}$ , si ha che  $\mathbf{E}[\hat{\boldsymbol{x}}] = \boldsymbol{x}$ , e di conseguenza l'ultimo termine in (3.20) è pari a zero. Utilizzando di nuovo le equazioni (3.18) e (3.19) e le proprietà di simmetria delle matrice Hessiana, si può determinare la covarianza di  $\hat{\boldsymbol{x}}$ , qui indicata con il nome di  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{x}}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\boldsymbol{x}} &= \mathbf{E}[(\hat{\boldsymbol{x}} - \mathbf{E}[\hat{\boldsymbol{x}}])(\hat{\boldsymbol{x}} - \mathbf{E}[\hat{\boldsymbol{x}}])^\top] \approx \mathbf{E}[(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})^\top] \approx \\ &[\mathbf{E}[\mathbf{H}(J(\boldsymbol{x}))]]^{-1} \mathbf{E}[\nabla J(\boldsymbol{x}) \nabla^\top J(\boldsymbol{x})] [\mathbf{E}[\mathbf{H}(J(\boldsymbol{x}))]]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A partire da questa matrice, le varianze delle stime di  $x$  e  $y$  sono date dalle componenti diagonali  $[\mathbf{C}_{\boldsymbol{x}}]_{1,1}$  e  $[\mathbf{C}_{\boldsymbol{x}}]_{2,2}$ .

### 3.3.1 Analisi del metodo Maximum Likelihood

Alla luce dell'analisi del paragrafo precedente, si riprende adesso in considerazione il metodo di localizzazione ML (massima verosimiglianza), espresso dall'equazione (2.96). Dal momento che  $\mathbf{E}[r_{R,l}] = d_l$ , il valore atteso della matrice Hessiana può essere facilmente calcolato a partire dalle equazioni (2.100), e risulta pari a:

$$\mathbf{E}[\mathbf{H}(J_{ML,R}(\boldsymbol{x}))] \approx 2 \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)^2}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} & \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)(y-y_l)}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} \\ \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)(y-y_l)}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} & \sum_{l=1}^L \frac{(y-y_l)^2}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} \end{pmatrix}; \quad (3.22)$$

inoltre, il valore atteso del gradiente risulta:

$$\mathbf{E}[\nabla(J_{ML,R}(\mathbf{x}))] = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Dal momento che  $\mathbf{H}(J_{ML,R}(\mathbf{x}))$  è non singolare, è chiaro dall'equazione (3.20) che la stima di tipo ML è non polarizzata. Inoltre, considerando l'equazione (2.101) e ricordando che, per definizione, risulta  $\mathbf{E}[(r_{R,l} - d_l)^2] = \sigma_{R,l}^2$ , si ha:

$$\mathbf{E}[J_{ML,R}(\mathbf{x})J_{ML,R}^\top(\mathbf{x})] = 4 \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)^2}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} & \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)(y-y_l)}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} \\ \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)(y-y_l)}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} & \sum_{l=1}^L \frac{(y-y_l)^2}{\sigma_{R,l}^2 d_l^2} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Sostituendo le uguaglianze in (3.23) e (3.24) nell'equazione (3.21) si osserva che:

$$\mathbf{C}_x = 2 \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)^2}{\sigma_{T \circ A,l}^2 d_l^2} & \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)(y-y_l)}{\sigma_{T \circ A,l}^2 d_l^2} \\ \sum_{l=1}^L \frac{(x-x_l)(y-y_l)}{\sigma_{T \circ A,l}^2 d_l^2} & \sum_{l=1}^L \frac{(y-y_l)^2}{\sigma_{T \circ A,l}^2 d_l^2} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_R^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.25)$$

Quest'ultima uguaglianza dimostra come lo stimatore di tipo *Maximum Likelihood* sia ottimo, nel senso che la sua varianza coincide con il valore del CRB. In altre parole l'approccio ML *satura* tutta l'informazione disponibile ottenendo la migliore stima possibile in senso statistico, nel caso in cui il rumore segua una distribuzione gaussiana a valor medio nullo.

### 3.3.2 Analisi del metodo *Weighted Linear Least Square*

La stessa analisi di media e varianza può essere applicata anche agli approcci lineari. Considerando la funzione di costo di tipo pesato, ovvero il funzionale WLLS definito dall'equazione (2.53) e il suo successivo svolgimento, si procede anche in questo caso con il definire la corrispondente matrice hessiana:

$$\left. \frac{\partial J_{WLLS,R}(\hat{\mathbf{p}})}{\partial \theta \partial \mathbf{p}^\top} \right|_{\hat{\mathbf{p}}=\mathbf{p}} = \mathbf{H}(J_{WLLS,R}(\mathbf{p})) = 2\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A}, \quad (3.26)$$

e quindi il vettore gradiente:

$$\left. \frac{\partial J_{WLLS,R}(\hat{\mathbf{p}})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\hat{\mathbf{p}}=\mathbf{p}} = \nabla(J_{WLLS,R}(\mathbf{p})) = 2\mathbf{A}^\top \mathbf{W} (\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{b}). \quad (3.27)$$

Sfruttando i risultati delle equazioni e (2.12) e (2.17), il valore atteso del gradiente  $\nabla(J_{WLLS,R}(\boldsymbol{\theta}))$  risulta:

$$\mathbf{E}[\nabla(J_{WLLS,R}(\mathbf{p}))] = 2\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{E}[\mathbf{q}] = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Dalle equazioni (3.20), (3.26) e (3.28) si può evincere come il metodo WLLS fornisca stime non polarizzate per la posizione  $\mathbf{x}$ . Inoltre, utilizzando l'equazione (2.56) è possibile calcolare il valore dell'espressione  $\nabla(J_{WLLS,R}(\mathbf{p}))\nabla^\top(J_{WLLS,R}(\mathbf{p}))$  in forma esplicita, che risulta:

$$\mathbf{E}[\nabla(J_{WLLS,R}(\mathbf{p}))\nabla^\top(J_{WLLS,R}(\mathbf{p}))] = 4\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{E}[\mathbf{q}\mathbf{q}^\top] \mathbf{W} \mathbf{A} = 4\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A}; \quad (3.29)$$

sostituendo l'equazione (3.26) e l'equazione (3.28) nell'equazione (3.21), si ottiene la matrice di covarianza per  $\hat{\mathbf{p}}$ , indicata con  $\mathbf{C}_p$ , pari a:

$$\mathbf{C}_p = (\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1}. \quad (3.30)$$

Questa espressione è in perfetto accordo con l'analisi prevista dalla teoria BLUE [32] nella forma dell'equazione (2.65).

### 3.4 Considerazioni finali sulla costellazione di ancore

Per riassumere i vari aspetti discussi in questo capitolo, in figura Figura 3.12 è descritto il setup di un esperimento di localizzazione simulato caratterizzato da una costellazione variabile di ancore. Utilizzando questo schema, si vogliono mettere a confronto le prestazioni dei vari algoritmi con il limite sancito dal CRB al variare della configurazione e della densità delle ancore. In particolare, fissato il punto  $\mathbf{x} = (4, 1)$ , si eseguono i vari algoritmi di localizzazione aumentando progressivamente le ancore attive nella costellazione.

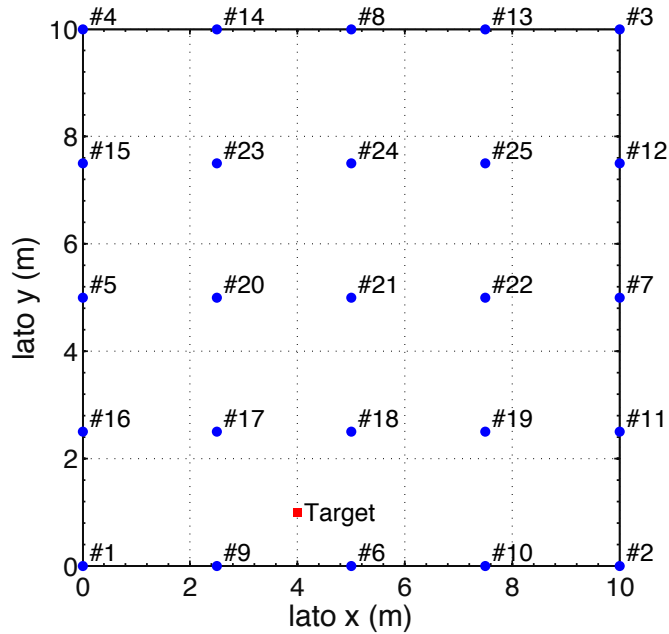


Figura 3.12: Costellazione variabile delle ancore.

Fissato il rapporto segnale rumore al valore di 30 dB, la Figura 3.13 mostra i risultati ottenuti con gli algoritmi LLS, WLLS, WLLS a 2 fasi, NLS di tipo Newton-Raphson e ML di tipo Newton-Raphson. Le varie stime sono ottenute passando da  $L = 3$ , il minimo per identificare la posizione, fino a  $L = 25$ .

Per ogni costellazione è stato calcolato il corrispondente valore del CRB. Osservando la figura si può apprezzare come, ancora una volta, sono gli algoritmi Maximum Likelihood e Weighted Least Square a due fasi a eguagliare il limite asintotico del CRB. Si conferma altresì che l'approccio LLS ha le peggiori prestazioni a parità di condizioni iniziali. È inoltre interessante come algoritmi diversi reagiscano diversamente alla disposizione delle ancore. Per esempio, l'algoritmo WLLS ha un netto miglioramento all'introduzione della 17<sup>ma</sup> e 18<sup>ma</sup> ancora, mentre l'algoritmo NLS è poco influenzato da questo incremento di densità.

La stessa analisi è stata compiuta di nuovo, andando a posizionare però casualmente le 25 ancore nella stessa area. La disposizione risultante è mostrata in Figura 3.14, mentre i relativi risultati in Figura 3.15. Data la natura casuale delle posizioni delle ancore è più difficile trarre conseguenze sull'ottima costellazione delle stesse, ma allo stesso tempo è ancor più neutrale il giudizio sulla qualità dei metodi risolutivi. Analizzando quindi i risultati si conferma ancora una volta come il metodo ML e il metodo WLLS a due passi producano risultati paragonabili al limite del CRB.

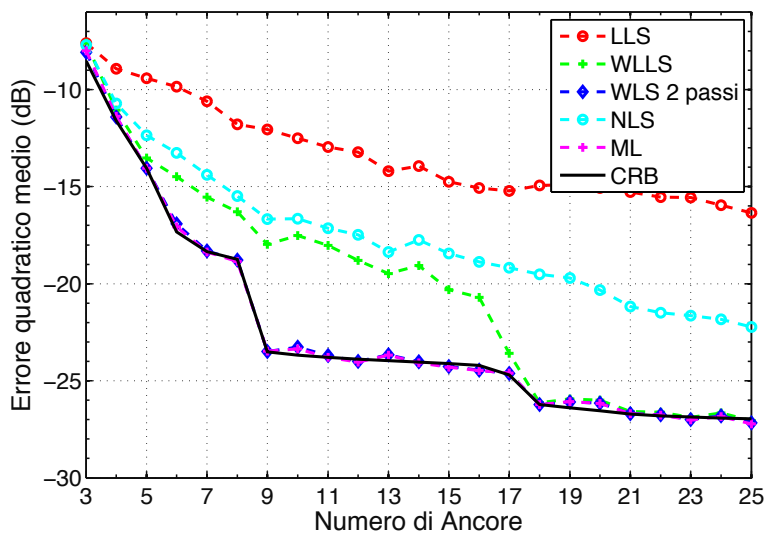


Figura 3.13: Costellazione variabile delle ancore.

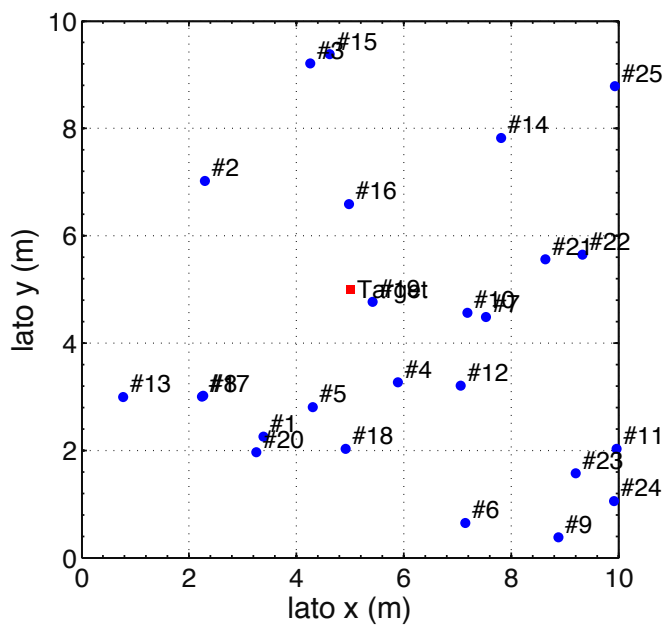
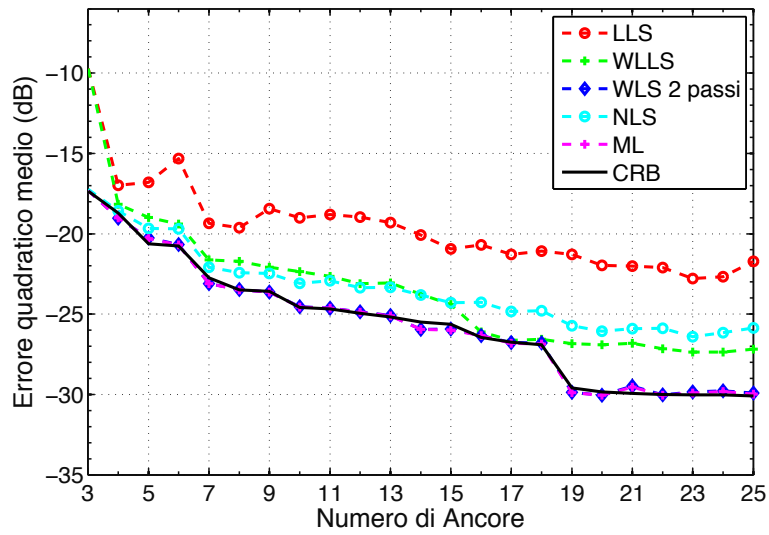


Figura 3.14: Costellazione variabile delle ancore.



**Figura 3.15:** Costellazione variabile delle ancore.





## GUIDA AL MATERIALE DI APPROFONDIMENTO

In questo capitolo viene fornita una guida al materiale di autoapprendimento sugli innumerevoli temi implicati nel mondo della localizzazione. Questo elenco non ha la pretesa di essere esaustivo, e si propone come riferimento per il lettore in modo che possa approfondire i moltissimi aspetti solamente accennati nel presente testo, che, come dichiarato fin dall'inizio, aveva come scopo quello di essere soltanto una guida introduttiva a un mondo estremamente vasto e in costante divenire.

- S. Sand, A. Dammann, C. Mensing, *Positioning in Wireless Communications Systems*. Wiley & Sons, 2014.

Questo testo è incentrato sulle principali differenze e somiglianze tra sistemi di comunicazione wireless e sistemi di navigazione. Vengono discussi scenari che sono critici per i sistemi di navigazione, come il sistema di posizionamento globale (GPS), e che motivano l'uso di sistemi di posizionamento basati sui sistemi di comunicazione wireless terrestri. Il libro introduce diversi approcci per la determinazione dei parametri che dipendono dalla posizione del terminale mobile e offre una disamina di algoritmi per la stima della posizione del target. Vengono inoltre proposti modelli per il canale radio e la mobilità degli utenti, aspetti importanti da tenere sotto controllo nel caso di esperimenti in ambienti reali e dunque per implementare simulazioni più indicative. Scritto da esperti del settore che lavorano all'avanguardia dello stesso, gli autori forniscono una visione eccellente su questo argomento, consentendo una copertura approfondita degli attuali sviluppi in questo campo in rapida espansione.

- R. Mannings, *Ubiquitous Positioning*. Artech House, 2008.

Questo testo innovativo è un'ottima introduzione per il campo emergente della consapevolezza spaziale, con speciale riferimento al campo sensoristico, dove sistemi di posizionamento che permettono di localizzare oggetti, veicoli o persone stanno diventando realtà. Il futuro e la crescita di questa tecnologia risulterà dalla convergenza di molti altri settori, tra cui la telematica mobile, la tecnologia dell' *Internet of Things*, il web semantico e così via. Questo testo, prima del suo genere, il volume lungimirante, che esplora il mondo della consapevolezza spaziale da una prospettiva di convergenza, offrendo una *road map* per questo settore in rapida crescita.

- T. E. Tuncer, B. Friedlander, *Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation*. Academic Press, 2009.

Il testo, scritto da esperti del settore, presenta in maniera esaustiva la teoria e la pratica della stima della direzione di arrivo di segnali arbitrari, fondamento delle tecniche di triangolazione. Questa commistione unica di tecniche utilizzate nell'ambito di sistemi commerciali e di metodi super-risolutivi allo stato dell'arte è una preziosissima fonte di informazioni per ingegneri e ricercatori che si vogliono cimentare nel campo della localizzazione indoor.

I principali argomenti trattati sono: metodi classici per la stima della direzione di arrivo, soluzioni adottate nei sistemi commerciali, calibrazione di sistemi di array di antenne, algoritmi per segnali a banda larga, distribuzione della direzione d'arrivo nel dominio tempo-frequenza, stima della direzione di arrivo a soglia, localizzazione con reti di sensori.

- Alan Bensky, *Wireless positioning technologies and applications*, Artech House, 2016.

Nonostante il successo del GPS, sono i metodi basati su comunicazioni a corto raggio ad avere davanti a se la maggiore prospettiva di crescita, e in particolare le reti di sensori per applicazioni industriali e domotiche.

Questo testo raccoglie tutti questi metodi insieme fornendo un riferimento unificato, analizzando vantaggi e svantaggi, e le procedure di attuazione per tutti i principi di funzionamento considerati. Si tratta di un valido aiuto per la scelta della tecnologia per chi si affaccia per la prima volta in questo mondo, aiutando il lettore a soppesare i costi in relazione ai migliori risultati possibili. Questa risorsa copre i principi fondamentali dei metodi basati sul tempo di volo (ToA, TDoA), i metodo basati sulla potenza del segnale (RSSI), e quelli basati sull'angolo di arrivo (DoA).

- S.A. Zekavat, R. M. Buehrer, *Handbook of Position Location, Theory, Practice, and Advances*. Wiley, 2011.

I sistemi radio in grado di offrire una stima della posizione dell'utente rappresentano un'applicazione emergente in molti campi, tra i quali sicurezza e monitoraggio ambientale, sorveglianza e applicazione della legge, interventi di emergenza e di protezione civile, coordinamento interveicolare per il rilevamento del rischio di collisione e in molti altri campi ancora.

Sebbene la rapida ascesa di queste tematiche, gli ambienti universitari e accademici sono tuttora impreparati alla divulgazione delle conoscenze teoriche e degli strumenti necessari alla base di queste moderne applicazioni. Il testo in esame si propone come guida per colmare questo vuoto tra le richieste sempre più attuali del mercato e la carenza di informazioni relativi a questo campo. In particolare, il testo si propone come manuale adatto all'autoapprendimento, fornendo un'ampia scelta di algoritmi e modelli implementati in MATLAB per una rapida fruizione degli argomenti trattati.

- S. Chandran, *Advances in Direction-of-Arrival Estimation*. Artech House, 2005.

Determinare la direzione di arrivo (DOA) di un segnale arbitrario è di importanza critica per gli ingegneri elettronici ed elettromagnetici che lavorano nel campo delle applicazioni civili ma anche nel campo militare. L'importanza della direzione di arrivo è insita nel fatto che su questa grandezza si fondano i sistemi di triangolazione, i quali stanno rapidamente soppiantando i sistemi di trilaterazione, specialmente in ambito radar per la rilevazione rapida di bersagli. Questa testo all'avanguardia presenta gli ultimi sviluppi nella stima dell'angolo di arrivo presentati dai principali ricercatori operanti nel campo. Il testo è un riferimento approfondito per i moderni approcci operativi e copre una vasta gamma di argomenti chiave, da metodi di stima alle applicazioni specifiche di stima DOA e la configurazione sperimentale e risultati.

- James Bao-Yen Tsui, *Fundamentals of global positioning system receivers: a software approach*. John Wiley & Sons, 2005.

Sebbene complementare ai temi trattati nel presente testo, la conoscenza del sistema GPS risulta comunque fondamentale per comprendere la necessità degli approcci indoor. Questo testo consente ai lettori di comprendere e applicare i complessi principi di funzionamento del sistema di posizionamento GPS. L'autore, una delle principali autorità nel campo GPS, presenta il materiale secondo l'approccio della *software defined radio* applicato al ricevitore GPS, un approccio che aiuta i lettori a comprendere meglio il funzionamento e che riflette l'integrazione del ricevitore nei dispositivi di uso quotidiano, come i telefoni cellulari.

Il libro fornisce gli strumenti e le informazioni necessarie per comprendere e sfruttare tutti gli aspetti della tecnologia dei ricevitori, nonché schemi di navigazione rilevanti: panoramica delle basi GPS e la costellazione di satelliti che compongono il sistema GPS, esame dettagliato dei segnali coinvolti e loro acquisizione e contestuale tracciamento, presentazione e analisi degli algoritmi necessari a calcolare la posizione sulla base dei segnali acquisiti, dimostrativo software del sistema dei passi descritti.

- Steven M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing*, Prentice Hall, 2013.

In questo testo, l'autore, uno dei massimi esperti mondiali sull'argomento, offre una delle più complete panoramiche sul rilevamento e al stima del segnale, sulla sua elaborazione e sullo sviluppo di algoritmi efficienti, coprendo un ampio spettro di aspetti, dalla propagazione dell'errore e relativa simulazioni al computer, fino alla valutazione delle prestazioni. L'autore propone strategie e algoritmi che hanno "superato la prova del tempo," e offre esempi reali mutuati da diverse aree applicative.

Gli argomenti trattati in questo testo, che si compone di più volumi, comprendono: approccio graduale alla progettazione di algoritmi, il confronto e la scelta di modelli di segnale e rumore, la valutazione delle prestazioni, gli approcci ottimali utilizzando i "grandi teoremi", gli algoritmi per la stima, la rilevazione e stima spettrale. Infine l'autore propone casi di studio completi: il radar doppler, il rilevamento del segnale magnetico, e il monitoraggio della frequenza cardiaca.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Misra and P. Enge, *Global Positioning System: Signals, Measurements and Performance*. Lincoln, MA: Ganga-Jamuna Press, 2006.
- [2] B. W. Parkinson, *Progress in astronautics and aeronautics: Global positioning system: Theory and applications*. Washington, DC: American Institute of Astronautics and Aeronautics, 1996, vol. 2.
- [3] A. El-Rabbany, *Introduction to GPS: the global positioning system*. Norwood, MA: Artech House, 2002.
- [4] S. Hara, D. Zhao, K. Yanagihara, J. Taketsugu, K. Fukui, S. Fukunaga, and K.-i. Kitayama, "Propagation characteristics of IEEE 802.15. 4 radio signal and their application for location estimation," in *Vehicular Technology Conference, 2005. VTC 2005-Spring. 2005 IEEE 61st*, vol. 1. IEEE, 2005, pp. 97–101.
- [5] M. Sugano, T. Kawazoe, Y. Ohta, and M. Murata, "Indoor localization system using RSSI measurement of wireless sensor network based on ZigBee standard," in *IASTED Int. Conf. WSN*, 2006, pp. 1–6.
- [6] O. G. Adewumi, K. Djouani, and A. M. Kurien, "RSSI based indoor and outdoor distance estimation for localization in WSN," in *Industrial Technology (ICIT), 2013 IEEE International Conference on*. IEEE, 2013, pp. 1534–1539.
- [7] B. Mukhopadhyay, S. Sarangi, and S. Kar, "Novel RSSI evaluation models for accurate indoor localization with sensor networks," in *Communications (NCC), 2014 Twentieth National Conference on*. IEEE, 2014, pp. 1–6.
- [8] M. Srbinovska, C. Gavrovski, and V. Dimcev, "Localization estimation system using measurement of RSSI based on ZigBee standard," in *Conference Proceedings of the 17th International Scientific and Applied Science Conference (Electronics 2008)*, 2008, pp. 48–50.
- [9] S. Mazuelas, A. Bahillo, R. M. Lorenzo, P. Fernandez, F. A. Lago, E. Garcia, J. Blas, and E. J. Abril, "Robust indoor positioning provided by real-time RSSI values in unmodified WLAN networks," *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, vol. 3, no. 5, pp. 821–831, 2009.
- [10] H. Koyuncu and S. H. Yang, "A survey of indoor positioning and object locating systems," *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, vol. 10, no. 5, pp. 121–128, 2010.
- [11] S. Feldmann, K. Kyamakya, A. Zapater, and Z. Lue, "An Indoor Bluetooth-Based Positioning System: Concept, Implementation and Experimental Evaluation." in *International Conference on Wireless Networks*, 2003, pp. 109–113.
- [12] P. Barsocchi, S. Lenzi, S. Chessa, and G. Giunta, "A novel approach to indoor RSSI localization by automatic calibration of the wireless propagation model," in *Vehicular Technology Conference, 2009. VTC Spring 2009. IEEE 69th*. IEEE, 2009, pp. 1–5.

- [13] L. Cheng, C.-D. Wu, and Y.-Z. Zhang, "Indoor robot localization based on wireless sensor networks," *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. 57, no. 3, 2011.
- [14] H.-L. Song, "Automatic vehicle location in cellular communications systems," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 43, no. 4, pp. 902–908, 1994.
- [15] E. L. Crow and K. Shimizu, *Lognormal distributions: Theory and applications*. New York, NY: CRC Press, 1988, vol. 88.
- [16] J. Smith and J. Abel, "Closed-form least-squares source location estimation from range-difference measurements," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 35, no. 12, pp. 1661–1669, 1987.
- [17] R. Schmidt, "Least squares range difference location," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, no. 1, pp. 234–242, 1996.
- [18] H. C. So, Y. T. Chan, and F. K. W. Chan, "Closed-form formulae for time-difference-of-arrival estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 6, pp. 2614–2620, 2008.
- [19] D. Silver, B. Sofman, N. Vandapel, J. A. Bagnell, and A. Stentz, "Experimental analysis of overhead data processing to support long range navigation," in *Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*. IEEE, 2006, pp. 2443–2450.
- [20] T. E. Tuncer and B. Friedlander, *Classical and Modern Direction of Arrival Estimation*. Burlington, MA: Academic Press, 2009.
- [21] S. Chandran, *Advances in Direction-of-arrival Estimation*. Norwood, MA: Artech House, 2005.
- [22] S. Sand, A. Dammann, and C. Mensing, *Positioning in Wireless Communications Systems*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2014.
- [23] A. Cidronali, S. Maddio, G. Giorgetti, and G. Manes, "Analysis and performance of a smart antenna for 2.45-GHz single-anchor indoor positioning," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 58, no. 1, pp. 21–31, 2010.
- [24] S. Maddio, M. Passafiume, A. Cidronali, and G. Manes, "A distributed positioning system based on a predictive fingerprinting method enabling sub-metric precision in IEEE 802.11 networks," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 63, no. 12, pp. 4567–4580, 2015.
- [25] S. Maddio, A. Cidronali, and G. Manes, "Smart Antennas for Direction-of-Arrival Indoor Positioning Applications," in *Handbook of Position Location: Theory, Practice, and Advances*, R. Zekavat and R. M. Buehrer, Eds. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011, vol. 27, ch. 10, pp. 319–355.
- [26] J. C. Chen, R. E. Hudson, and K. Yao, "Maximum-likelihood source localization and unknown sensor location estimation for wideband signals in the near-field," *IEEE transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 8, pp. 1843–1854, 2002.
- [27] A. Fenwick, "Algorithms for position fixing using pulse arrival times," *IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation*, vol. 146, no. 4, pp. 208–212, 1999.
- [28] F. K. Chan, H. So, J. Zheng, and K. W. Lui, "Best linear unbiased estimator approach for time-of-arrival based localisation," *IET signal processing*, vol. 2, no. 2, pp. 156–162, 2008.
- [29] Y. T. Chan and K. Ho, "A simple and efficient estimator for hyperbolic location," *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 42, no. 8, pp. 1905–1915, 1994.

- [30] K. W. Cheung, H.-C. So, W.-K. Ma, and Y.-T. Chan, "Least squares algorithms for time-of-arrival-based mobile location," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 4, pp. 1121–1130, 2004.
- [31] —, "A constrained least squares approach to mobile positioning: algorithms and optimality," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2006, no. 1, pp. 1–23, 2006.
- [32] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [33] M. Marks and E. Niewiadomska-Szynkiewicz, "Two-phase stochastic optimization to sensor network localization," in *Sensor Technologies and Applications, 2007. SensorComm 2007. International Conference on*. IEEE, 2007, pp. 134–139.
- [34] P.-J. Chuang and C.-P. Wu, "An effective pso-based node localization scheme for wireless sensor networks," in *2008 Ninth International Conference on Parallel and Distributed Computing, Applications and Technologies*. IEEE, 2008, pp. 187–194.
- [35] C. Mensing and S. Plass, "Positioning algorithms for cellular networks using tdoa," in *2006 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings*, vol. 4. IEEE, 2006, pp. IV–IV.
- [36] B. R. Frieden, *Science from Fisher information: a unification*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [37] K. W. Cheung and H.-C. So, "A multidimensional scaling framework for mobile location using time-of-arrival measurements," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 53, no. 2, pp. 460–470, 2005.
- [38] V. H. MacDonald and P. M. Schultheiss, "Optimum passive bearing estimation in a spatially incoherent noise environment," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 46, no. 1A, pp. 37–43, 1969.





## L'AUTORE

**Stefano Maddio** è assegnista di ricerca (*post-doc*) presso il Laboratorio *RF, Microonde ed Elettromagnetismo* del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione dell'Università di Firenze.

La sua attività di ricerca scientifica comprende le antenne in tecnologia planare a singolo strato e multistrato, sia attive che passive, per applicazioni di comunicazioni e per reti di sensori. In particolare è autore di molti articoli relativi alle antenne intelligenti (*smart antennas*) per applicazioni di localizzazione indoor basate su segnali radio. Ha collaborato con alcune industrie per il trasferimento tecnologico di metodologie avanzate di progetto per comunicazioni radio a breve distanza (Autostrade Tech., Roma), per applicazioni radar (Rheinmetall Italia, Roma) e radio-goniometria (Elettronica Group, Roma). Ha inoltre partecipato a progetti sul territorio finalizzati alla localizzazione per la fruizione dei beni culturali [stefano.maddio@unifi.it].



## MANUALI

### BIOMEDICA

- Branchi R., *Le impronte nel paziente totalmente edentulo*
- Branchi R., *Riabilitazione protesica del paziente oncologico testa-collo*
- Martinelli E., *Rieducazione del piede. Problematiche biomeccaniche e posturali statiche e dinamiche*
- Martinelli E., *Sviluppo del dolore rachideo in gravidanza. Mutamenti della biomeccanica rachidea, problematiche posturali, prevenzione e attività fisica adattata pre e post parto*
- Martinelli E., *Rieducazione posturale. Fondamenti per la progettazione della postura*
- Martinelli E., *Prevenzione del mal di schiena di origine meccanica con attività motoria e comportamentale. Approfondimenti di patomeccanica e biomeccanica rachidea*
- Rossetti R., *Manuale di batteriologia clinica. Dalla teoria alla pratica in laboratorio*
- Rucci L., *Testo Atlante di embriologia clinica della Laringe. La chirurgia conservativa compartimentale della regione glottica*
- Rucci L., *Clinical Embryology of Human Larynx for Conservative Compartmental Surgery. A Text and Atlas*

### SCIENZE

- Bart J.C.J., *Polymer Additive Analytics. Industrial Practice and Case Studies*
- Caramelli D., *Antropologia molecolare. Manuale di base*
- Lo Nostro P., Peruzzi N., *Spontaneamente. Esercizi Risolti di Chimica Fisica*
- Ricci R., *Lezioni di Sistemi Dinamici*, a cura di Lorenzo Barletti, Angiolo Farina, Lorenzo Fusi, Federico Talamucci
- Scialpi A., Mengoni A. (a cura di), *La PCR e le sue varianti. Quaderno di laboratorio*
- Simonetta M.A., *Short history of Biology from the Origins to the 20th Century*
- Spinicci R., *Elementi di chimica* (nuova edizione)

### SCIENZE SOCIALI

- Ciampi F., *Fondamenti di economia e gestione delle imprese*
- Giovannini P. (a cura di), *Teorie sociologiche alla prova*
- Maggino F., *L'analisi dei dati nell'indagine statistica. Volume 1. La realizzazione dell'indagine e l'analisi preliminare dei dati*
- Maggino F., *L'analisi dei dati nell'indagine statistica. Volume 2. L'esplorazione dei dati e la validazione dei risultati*

Magliulo A., *Elementi di economia del turismo*

Visentini L., Bertoldi, M., *Conoscere le organizzazioni. Una guida alle prospettive analitiche e alle pratiche gestionali*

### SCIENZE TECNOLOGICHE

- Borri C., Pastò S., *Lezioni di ingegneria del vento*
- Borri C., Betti M., Marino E., *Lectures on Solid Mechanics*
- Cidronali A., Paolo Colantonio P. e Lucci L., *Antenne Integrate Attive*
- Gulli R., *Struttura e costruzione / Structure and Construction*
- Maddio S., *Introduzione ai Sistemi di Localizzazione Indoor*
- Policicchio F., *Lineamenti di infrastrutture ferroviarie*

### UMANISTICA

- Bertini F., *Risorse, conflitti, continenti e nazioni. Dalla rivoluzione industriale alle guerre irachene, dal Risorgimento alla conferma della Costituzione repubblicana*
- Bombardieri L., Graziadio G., Jasink A.M., *Preistoria e Protostoria egea e cipriota*
- Bombi A.S., Pinto G., Cannoni E., *Pictorial Assessment of Interpersonal Relationships (PAIR). An analytic system for understanding children's drawings*
- Baldini S., Marini D., Vorrei. *Corso di lingua italiana di livello elementare 1. Libro di testo e libro degli esercizi*
- Borello E., Mannori S., *Teoria e tecnica delle comunicazioni di massa*
- Brandi L., Salvadori B., *Dal suono alla parola. Percezione e produzione del linguaggio tra neurolinguistica e psicolinguistica*
- Coniglione F., Lenoci M., Mari G., Polizzi G. (a cura di), *Manuale di base di Storia della filosofia*
- Marcialis N., *Introduzione alla lingua paleoslava*
- Michelazzo F., *Nuovi itinerari alla scoperta del greco antico. Le strutture fondamentali della lingua greca: fonetica, morfologia, sintassi, semantica, pragmatica*
- Peruzzi A., *Il significato inesistente. Lezioni sulla semantica*
- Peruzzi A., *Modelli della spiegazione scientifica*
- Sandrini M.G., *Filosofia dei metodi induttivi e logica della ricerca*
- Trisciuzzi L., Zappaterra T., Bichi L., *Tenersi per mano. Disabilità e formazione del sé nell'autobiografia*



# Quaderni del Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell'Informazione dell'Università di Firenze

Introduzione ai Sistemi di Localizzazione Indoor costituisce il secondo numero della collana «Quaderni del Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell'Informazione» dell'Università di Firenze, a supporto didattico dell'omonimo corso di dottorato. Questo quaderno è pensato come testo introduttivo per chi voglia cimentarsi nel campo emergente della localizzazione di mezzi mobili in ambienti indoor, dove i servizi di posizionamento satellitari sono assenti o inaffidabili. Nello spazio di quattro capitoli, il presente testo passa in rassegna i metodi principali di localizzazione, i corrispondenti algoritmi, e la propagazione dell'errore associata a questi ultimi.

**Stefano Maddio** è assegnista di ricerca (postdoc) presso il Laboratorio RF, Microonde ed Elettro-magnetismo del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione dell'Università di Firenze. È autore di molti articoli relativi alle antenne intelligenti per applicazioni di localizzazione indoor.