Riccardo Bruni

Dialogare

compendio di logica

FIRENZE UNIVERSITY PRESS

Titoli pubblicati
Bruni R., *Dialogare*: compendio di Logica
Buratta D., *Dialogare*: compendio di Matematica
Frizzi F., *Dialogare*: compendio di Biologia
Lima M., *Dialogare*: compendio di Fisica
Peruzzini R., *Dialogare*: compendio di Chimica

Riccardo Bruni

Dialogare: compendio di logica

Firenze University Press
2017

Dialogare: compendio di logica / Riccardo Bruni. – Firenze : Firenze University Press, 2017.
(Strumenti per la didattica e la ricerca ; 185)

http://digital.casalini.it/9788864534756

ISBN 978-88-6453-475-6 (online)

Progetto grafico di copertina: Alberto Pizarro Fernández, PaginaMaestra snc
Immagine di copertina: © Lightzoom | Dreamstime.com

This book is printed on acid-free paper

Università degli Studi di Firenze
Firenze University Press
via Cittadella, 7, 50144 Firenze, Italy
www.fupress.com
Printed in Italy

Indice

R. Bruni, Dialogare: *compendio di logica*, ISBN (online) 978-88-6453-475-6, CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Introduzione

Sandra Furlanetto
Delegata all'Orientamento dell'Università di Firenze

I compendi di *Dialogare* nascono come parte del progetto di Orientamento alla scelta universitaria denominato *Scuola Università di Firenze in continuità*. Il progetto è stato sviluppato dall'Università di Firenze in collaborazione con l'Ufficio Scolastico Regionale per la Toscana allo scopo di facilitare la transizione Scuola-Università.

Questi compendi disciplinari traggono origine dal confronto tra docenti della scuola secondaria di secondo grado e docenti universitari e sono stati realizzati da assegnisti di ricerca dell'Università di Firenze che hanno svolto un progetto dal titolo: *DIALOGARE: promozione di forme di raccordo Scuola-Università per l'integrazione ed il potenziamento dello studio delle discipline scientifiche e della logica* finanziato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.

I compendi sono uno strumento ideato per integrare e potenziare le aree disciplinari di base, che sono presenti in numerosi test per la valutazione delle competenze in ingresso o nei test per l'accesso a corsi a numero programmato locale o nazionale: la logica, fondamentale per il ragionamento e l'argomentazione, e le discipline scientifiche di matematica, fisica, chimica e biologia.

Ogni compendio presenta una sua struttura specifica, legata al contenuto disciplinare. Tuttavia, in quanto parti di un progetto complessivo volto a favorire l'accesso all'Università, tutti condividono alcuni aspetti generali che gli assegnisti di ricerca, confrontandosi con gli studenti dei primi anni dell'Università, hanno desiderato segnalare ai futuri studenti affinché vivano al meglio il proprio periodo universitario.

Valutare le proprie competenze
In quasi tutti i corsi universitari argomenti noti possono essere trattati nuovamente per le loro diverse future applicazioni. È quindi importante saper applicare la teoria alla pratica: gli esercizi possono aiutare a raggiungere questo scopo. È importante inoltre saper valutare le proprie reali competenze e, se necessario, potenziarle.

Frequentare le lezioni
È importante partecipare attivamente alle lezioni, cercando di capire gli argomenti trattati, studiando con regolarità.

Curare il linguaggio
Ogni materia ha il proprio linguaggio specifico: conoscerlo e usarlo è essenziale.

Studiare confrontandosi
Il confronto con gli altri studenti e il colloquio con i professori nell'orario di ricevimento e con i tutor che sono presenti presso tutte le scuole di Ateneo è utile per studiare in modo proficuo.

R. Bruni, Dialogare: *compendio di logica*, ISBN (online) 978-88-6453-475-6, CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Organizzazione e sostenibilità
L'Università richiede organizzazione nello studio e quindi nella scelta degli esami da sostenere e nell'impegno quotidiano. Non devono essere sottovalutati anche gli aspetti burocratici (tasse, borse di studio, scadenze). Imparare a organizzarsi significa valutare in modo sereno le reali possibilità e progettare azioni sostenibili.

Passione e determinazione
L'alleato più forte, oltre alla determinazione, dovrà sempre essere l'entusiasmo per il percorso di studi scelto.

Vivere l'Università
L'Università non è solo lezioni ed esami: è una comunità che offre anche eventi culturali, sportivi e di divulgazione. Queste esperienze, se vissute con entusiasmo, facilitano la maturazione di competenze trasversali utili per una serena progressione di carriera.

Un ringraziamento a tutte le Scuole secondarie di secondo grado Toscane che dal 2012 collaborano con l'Università di Firenze.

Particolare riconoscenza va anche ai Delegati all'Orientamento dell'Università di Firenze per il loro straordinario impegno:

Marco Benvenuti, Giorgia Bulli, Mauro Campus, Carlo Carcasci, Daniela Catarzi, Alessandra De Luca, Annamaria Di Fabio, Chiara Fort, Emiliano Macinai, Daniela Manetti, Alessandro Merlo, Pietro Amedeo Modesti, Francesca Mugnai, Silvia Ranfagni, Stefano Rapaccini, Anna Rodolfi.

Guida all'uso del compendio

Il materiale del presente volume è stato suddiviso in 4 **parti** e viene presentato mediante delle **unità** didattiche che contengono lo svolgimento di un dato argomento. Al termine di ciascuna unità è possibile trovare degli **esercizi** di verifica dell'apprendimento. Al termine delle unità è posta una sezione dedicata alle **soluzioni degli esercizi**, seguita da un **glossario**.

Le **parti** raggruppano le **unità** per temi. Nel caso di questo volume, le parti replicano la suddivisione dell'indagine logica negli 'ambiti' nei quali tradizionalmente essa si articola: la logica enunciativa o proposizionale, la logica di predicati e relazioni o predicativa, la logica delle argomentazioni e le estensioni della logica. Per ciascuna di queste parti si è operata una selezione di temi, di ognuno dei quali si offre una presentazione teorica ed esercizi di verifica.

Le parti e le unità sono organizzate in modo tale che, seguendone il filo nell'ordine nel quale sono proposte, si passi da un argomento al successivo acquisendo di volta in volta i prerequisiti necessari per il prosieguo dello studio. Nulla vieta, tuttavia, di fare un uso diverso del materiale, adattandole alle proprie esigenze personali e scegliendo solo quegli argomenti che si ritiene siano davvero utili a colmare le proprie carenze. In questo caso, sarà comunque possibile rendersi conto delle 'dipendenze' di un argomento dagli altri seguendo il filo dei rimandi con i quali si è cercato di accompagnare l'esposizione e che hanno la forma: «*vedi* Parte *X*, Unità *y*, par. *z*» (dove «par.», se presente, indica il paragrafo specificamente dedicato alla trattazione dell'argomento a cui il rimando si riferisce, all'interno dell'unità indicata).

Gli **esercizi** posti al termine di ciascuna unità sono numerati in modo crescente e prevedono una consegna (riconoscibile dall'uso del **grassetto**), che è seguita dall'indicazione di 5 risposte, elencate mediante le corrispondenti lettere dell'alfabeto, tra le quali occorre indicare la sola risposta giusta (fa eccezione la sola Unità 7 della Parte C, dove le risposte tra le quali occorre scegliere la soluzione del quesito sono 4). Le **soluzioni** degli esercizi sono raccolte in fondo al volume, nella sezione omonima, suddivise per parti e unità. La soluzione di ciascun esercizio è indicata mediante il numero di quest'ultimo seguito dalla lettera corrispondente alla risposta corretta ed è corredata da una nota esplicativa che contiene i riferimenti per approfondire o ripassare nel volume le nozioni delle quali fa uso.

Al di là del ricorso a esso per indicare la consegna degli esercizi, il **grassetto** nel testo viene utilizzato per indicare i termini che fanno parte del linguaggio specialistico della disciplina. Nel caso della logica, che non fa parte delle materie di studio della scuola secondaria, la conoscenza di tale linguaggio 'tecnico' non può essere presupposta. Si è provveduto perciò a dotare questo compendio di un **glossario** contenente le definizioni dei termini più frequenti, alle quali si possono ritrovare i rimandi nel testo (indicati dalla formula: «*vedi* ***Glossario***»). L'uso del grassetto nelle definizioni delle voci del glossario indica i termini dei quali è presente una definizione nella stessa sezione del volume.

R. Bruni, Dialogare: *compendio di logica*, ISBN (online) 978-88-6453-475-6, CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Parte A – Logica proposizionale

R. Bruni, Dialogare: *compendio di logica*, ISBN (online) 978-88-6453-475-6, CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Unità 1

Generalità

Stabilire a quali condizioni un dato enunciato è vero o falso, chiarire in che modo la sua forma logica influisce su tali condizioni, determinare quali enunciati sono veri in virtù della sola forma logica e a prescindere dal significato delle espressioni che le compongono (quali siano cioè le **verità** o **leggi** della logica), sono alcune tra le motivazioni principali a cui è possibile ricondurre la nascita della disciplina. La **logica proposizionale** o **enunciativa** è l'ambito disciplinare che persegue questi obiettivi limitatamente a una parte delle operazioni logiche sugli enunciati: i cosiddetti **connettivi** (*vedi* ***Glossario***).

1. Gli enunciati dichiarativi

Di quale parte del linguaggio ordinario si occupa la logica? Di tutti quegli enunciati dei quali ha senso chiedersi se essi siano veri o falsi. Dunque, la logica non si occupa di interrogazioni, ordini, preghiere, e di tutte quelle altre forme espressive che non sono vere o false, ma vanno prese per quel che sono. La logica si occupa invece degli enunciati che fanno parte del **discorso dichiarativo**, che veicolano delle informazioni e che per questo motivo comportano un impegno sul mondo, anzi su 'un mondo', il cosiddetto **universo del discorso** (*vedi* ***Glossario***), ossia l'insieme di tutti gli oggetti e i concetti che vengono chiamati in causa da un dato enunciato dichiarativo o da un insieme di enunciati dichiarativi e delle cui proprietà o rapporti reciproci si disserta.

2. Enunciati atomici e complessi

Tra gli enunciati dichiarativi del linguaggio ve ne sono alcuni che possono essere viste come costruzioni fondamentali, non ulteriormente scomponibili in sottoenunciati e che si utilizzano invece nella costruzione di enunciati più complessi. Enunciati di questo tipo vengono detti **atomici** (*vedi* ***Glossario***) e corrispondono a quelle frasi mediante le quali si assegna una proprietà a un certo individuo del mondo o si stabilisce che dati individui stanno tra loro in una data relazione. Ad esempio, un'affermazione come

L'elettrone possiede carica elettrica negativa

oppure come

Dario è alto

Lo studio degli enunciati atomici pertiene alla **logica dei predicati** (*vedi* Parte B, Unità 1).

Gli enunciati atomici, come si diceva, concorrono alla costruzione degli enunciati complessi mediante il ricorso a certe operazioni, dette **connettivi logici**. Questi ultimi sono operazioni ben note, come la **negazione**, nella frase

Dario non è biondo

o la **congiunzione**, come nella frase

L'elettrone possiede carica elettrica negativa e spin semi-intero

L'individuazione delle operazioni di connessione logica tra gli enunciati consente di identificare la **forma logica** (*vedi* ***Glossario***) di un enunciato, che è determinata da come gli enunciati atomici che ne fanno parte si combinano tra loro per mezzo dei connettivi logici. L'idea della forma logica di un enunciato verrà ripresa e chiarita più avanti, introducendo il concetto di **formalizzazione** degli enunciati (*vedi* Parte A, Unità 6). La **logica proposizionale** o **enunciativa** si occupa tra le altre cose dello studio delle condizioni che rendono veri gli enunciati logicamente complessi sulla base della loro forma logica, dunque in rapporto alle operazioni che vi occorrono.

3. I connettivi logici

Contrariamente a quanto si potrebbe essere portati a pensare, i connettivi logici che concorrono alla formazione degli enunciati complessi di cui è necessario tenere conto ai fini dell'indagine logica sono un numero estremamente limitato: in aggiunta a quelli già citati di negazione e congiunzione, occorre prendere in esame la **disgiunzione** («Possiamo andare al cinema o a mangiare una pizza»), il **condizionale** («Se l'inflazione aumenta, allora diminuisce il potere d'acquisto dei salari») e il **bicondizionale** («Il colpo è stato messo a punto da una banda se e solo se ci sono tracce di due o più persone»). Perché limitare l'attenzione ai connettivi logici di questa lista? In fin dei conti, quelle indicate non sembrano affatto esaurire il novero delle operazioni a cui facciamo ricorso nella costruzione delle frasi del discorso dichiarativo. Sembrano diverse, ad esempio, le operazioni che danno vita agli enunciati seguenti: «Quando la temperatura scende sotto lo zero, in inverno, l'acqua del fiume ghiaccia», «C'è il sole ma fa freddo», «I rettili devono passare molte ore al sole, perché la loro temperatura corporea dipende dall'ambiente esterno». In realtà, è possibile convincersi facilmente che queste ultime costruzioni linguistiche, così come le altre dove non si fa uso dei connettivi logici sopraindicati, possono essere trasformate in altre che ne mantengono il senso (quindi, che 'dicono la stessa cosa'), e nelle quali si fa uso solo delle operazioni logiche basilari. Nel caso delle frasi citate, ad esempio, è facile rendersi conto che esse possono essere trasformate come segue: «Se la temperatura scende sotto lo zero, in inverno, allora l'acqua del fiume ghiaccia», «C'è il sole e fa freddo», «Se la temperatura corporea dei rettili dipende dall'ambiente esterno, allora essi devono passare molte ore al sole». Le frasi nella nuova veste 'dicono la stessa cosa' delle frasi corrispondenti del primo elenco perché sono vere alle stesse condizioni di queste ultime. Ad esempio, la frase «C'è il sole ma fa freddo» è vera se e solo se, nonostante ci sia il sole, fa freddo; dunque, se c'è il sole e fa freddo che è giusto la situazione nella quale è vera anche la frase che gli corrisponde nel secondo elenco, ovvero l'affermazione «C'è il sole e fa freddo». Come impareremo a dire (*vedi* Parte A, Unità 1, par. 5), le **condizioni di verità** (*vedi* ***Glossario***) delle frasi originarie sono le stesse delle frasi, opportunamente riformulate, che gli corrispondono nella seconda lista e dunque sono **logicamente equivalenti** (*vedi* ***Glossario***) a esse. Questa osservazione ci consente di concludere quindi che le operazioni logiche coinvolte nelle prime non sono 'nuove' rispetto a quelle comprese nel nostro elenco di connettivi, ma sono solo parafrasi di queste ultime.

La conclusione potrebbe essere restituita nella forma di un teorema matematico in un contesto più rigoroso, rispetto cioè a un **linguaggio formale** le cui espressioni siano costruite rispettando le norme della sintassi che gli è propria. Detto teorema, talvolta citato nella letteratura specialistica come il **teorema della completezza verofunzionale**, mostra come una qualunque frase del linguaggio in oggetto nella quale sia impiegata una qualunque operazione di connessione logica che rispetti i principi fondamentali della logica classica (*vedi*Parte A, Unità 1, par. 4), può essere trasformata in una frase logicamente equivalente e che contiene solo le operazioni di connessione logica che si sono indicate come fondamentali (in realtà, anche solo una parte di esse).

Meritano una menzione a parte alcune locuzioni del linguaggio che, pur essendo all'apparenza del tutto analoghe a quelle di connessione perché danno vita a enunciati dichiarativi complessi come queste ultime, non sono riducibili invece ai connettivi logici fondamentali. Si tratta dei cosiddetti **operatori modali** (*vedi* Parte D, Unità 1).

4. L'interpretazione classica dei connettivi

Consideriamo l'enunciato:

Pisa non è il capoluogo della Toscana

e chiediamoci a quali condizioni l'affermazione in questione è vera. Essa equivale a dire che «Non è vero che Pisa è il capoluogo della Toscana», dunque che «È falso che Pisa sia il capoluogo della Toscana». Quest'affermazione, d'altra parte, è corretta nel caso in cui il capoluogo della regione Toscana sia una città diversa da Pisa e dal momento che può essere presentata come un analogo dell'enunciato di partenza, questa stessa condizione è anche quella che rende vera quest'ultimo.

Per quanto le trasformazioni dell'affermazione originaria che si sono messe in atto e le osservazioni correlate possano sembrare del tutto pacifiche e persino banali, esse dipendono da alcuni assunti che banali non sono e che perciò conviene rendere espliciti. Intanto, dette osservazioni presuppongono che per determinare la verità o la falsità di un enunciato logicamente complesso si sia in grado dire innanzi tutto se è vera o falsa la sua componente più semplice. In effetti, non si è fatto altro che dire che l'affermazione «Pisa non è il capoluogo della Toscana» è vera giusto nel caso in cui è falsa l'asserzione «Pisa è il capoluogo della Toscana», ovvero nel caso in cui si dovesse scoprire che il capoluogo delle regione Toscana è una città diversa da quella chiamata «Pisa». Proprio questa asserzione è quella 'contenuta' nella frase di partenza, che la nega. Quindi, il valore di verità dell'enunciato logicamente più complesso, costruito in questo caso mediante l'operazione logica di negazione, dipende da quello dell'enunciato più semplice che si nega.

In secondo luogo, la nostra analisi presuppone che le condizioni possibili per un enunciato dichiarativo siano due, quella di essere vero e quella di essere falso in alternativa. In effetti, la lettura della negazione logica di un enunciato che si è proposto presuppone che se un'affermazione non è vera allora essa deve risultare falsa (quindi che «Pisa non è il capoluogo della Toscana» è vero se è falso che «Pisa è il capoluogo della Toscana»). Questa supposizione ha l'effetto di ridurre i **valori di verità** (*vedi **Glossario***) che un enunciato può assumere a due solamente: il «vero» e il «falso».

Infine, perché un'analisi come quella che si è prodotto abbia senso, occorre presupporre che ogni enunciato complesso del linguaggio si trovi in effetti in una delle due condizioni possibili, quella nella quale un enunciato è vero e quella in cui esso è falso, e che sia perciò sempre possibile stabilire in quale dei due 'stati' esso si trovi.

I tre principi menzionati, opportunamente generalizzati per tutte le altre operazioni logiche di connessione tra enunciati, sono alla base dell'**interpretazione classica dei connettivi** (*vedi **Glossario***), e sono noti, nella loro forma generale, come il **principio di vero-funzionalità**, il **principio di bivalenza** e il **principio di determinatezza** rispettivamente.

Per quanto queste assunzioni possano apparire naturali e vicine al modo comune di intendere e utilizzare le operazioni di connesione logica, esistono ragioni per ritenere che esse non racchiudano completamente il senso di tali operazioni. Queste ragioni emergono a un'analisi più attenta delle proprietà dei connettivi logici e dei loro molteplici usi, ai quali avremo modo di fare cenno nelle schede dedicati a ognuno di essi (*vedi* Parte A, Unità 2-5). Esse giustificano il tentativo di cambiare il quadro logico di riferimento e dare vita a delle logiche diverse, alternative a quella classica, e che per questa ragione prendono il nome di **logiche non classiche**.

5. Le condizioni di verità degli enunciati logicamente complessi

Stabilito che la negazione di un enunciato è vera nel caso in cui l'enunciato negato sia falso, si procede a determinare in modo del tutto analogo le condizioni che rendono veri e falsi gli enunciati costruiti a partire dagli altri connettivi logici che si sono indicati come fondamentali. Ad esempio, di una congiunzione come «Piove e fa freddo» si dirà che è vera nel caso in cui siano veri entrambi i **congiunti** (*vedi **Glossario***), dunque nel caso in cui piova e faccia freddo, e falsa nel caso in cui almeno uno dei due congiunti non risulti vero (e dunque sia falso per i principi di determinatezza e di bivalenza).

Di una disgiunzione, invece, si dirà che è vera se lo è almeno uno dei due **disgiunti** (*vedi **Glossario***) e falsa se i disgiunti sono entrambi falsi. Di un condizionale come «Se Elena viene eletta, allora diventerà parlamentare», invece, si fa prima a dire quando è falsa, il che accade solo nel caso in cui sia vero di essa l'**antecedente** (*vedi **Glossario***), la parte della frase che segue il «se», e sia falso il suo **conseguente** (*vedi **Glossario***), che segue l'«allora». Un enunciato di quella forma è vero in tutti gli altri casi possibili. Infine, il senso di un bicondizionale come «Un numero intero è pari se e solo se è divisibile per 2» è che se un numero intero è pari allora èdivisibile per due e, viceversa, che se un numero è divisibile per 2, allora è pari. In altri termini, un bicondizionale stabilisce che due condizioni sono logicamente equivalenti, dunque che si verifichi l'una ogni qual volta si verifica l'altra e, viceversa, l'altra si verifichi al verificarsi della prima.

Come si diceva, la determinazione delle condizioni di verità di un enunciato complesso nascondono delle insidie, di tipo logico e concettuale, che possono rimanere nascoste all'occhio inesperto e che meritano invece di essere rese esplicite (*vedi* Parte A, Unità 2-5).

6. Tautologie e contraddizioni logiche

Si consideri la frase:

Il supermercato è chiuso, oppure è ancora aperto

Supponiamo che sia tardi e il supermercato sia chiuso. Allora, l'enunciato è vero perché è vero il primo dei due disgiunti. Supponiamo invece che il supermercato non sia chiuso. Dunque, il supermercato è aperto e la frase è nuovamente vera (supponendo che se un negozio non è chiuso, allora è aperto al pubblico e, viceversa, che se non è aperto allora è chiuso e non vi si può acquistare niente). Questo significa che l'enunciato di partenza è vero in ogni circostanza, dato che dei due casi possibili, «Il supermercato è chiuso» e «Il supermercato è aperto», uno (e uno solo) è sempre vero.

Enunciati come quello preso in considerazione sono esempi di **verità logiche** (*vedi **Glossario***), talvolta indicate anche come «tautologie» o «leggi» della logica, dal momento che il loro essere sempre veri non dipende dal loro contenuto, da ciò che essi 'dicono', ma dalla loro forma logica (come risulta evidente provando a modificare l'enunciato di partenza in modo da ottenerne uno analogo, come «Il cielo è velato, oppure l'aria è tersa»).

Si prenda invece in esame l'enunciato:

Il supermercato è chiuso e ancora aperto

Che ci sia qualcosa che non va in questo caso appare subito evidente. Quale sia il problema lo si capisce meglio procedendo a un'analisi dell'affermazione analoga alla precedente: siccome ha la forma di una congiunzione, essa è vera se sono veri entrambi i congiunti; sfortunatamente, l'evenienza non può verificarsi nel caso in questione dato che, sempre sotto l'assunto che se il supermercato è chiuso allora non è aperto e, viceversa, se è aperto allora non è chiuso, un congiunto nega l'altro e dunque il caso che l'uno si realizzi esclude la possibilità che si realizzi anche l'altro. Se dunque lo stesso enunciato nella forma disgiuntiva considerata in precedenza è vero in ogni circostanza possibile, la variante 'congiuntiva' di esso è sempre falsa, non già per un problema contingente del supermercato a cui si riferisce la frase, ma per essere costruita congiungendo un enunciato e la sua negazione. In altre parole, la frase in questione è falsa a causa della sua struttura logica, così come la precedente era sempre vera per lo stesso motivo. Un enunciato di questo tipo si chiama una **contraddizione logica** (*vedi **Glossario***).

Verità e contraddizioni logiche sono categorie di enunciati che si contrappongono a quella più popolata e rappresentata dagli enunciati dichiarativi che sono veri in certe circostanze e falsi in altre. Appartengono a questa gruppo di enunciati **logicamente neutri** (*vedi **Glossario***), tutti quei pronunciamenti sul mondo che dipendono in modo essenziale da come 'stanno le cose', ovvero dal fatto che ciò che essi enunciano si verifichi o meno. Anche questi enunciati, si badi bene, sono veri o falsi come le tautologie e le contraddizioni logiche, ma il punto è che essi risultano tali con il concorso essenziale degli eventi e non sono, come nel caso di tautologie e contraddizioni, veri o falsi in virtù della sola struttura logica che possiedono. Ad esempio, un enunciato come:

Il re di Francia è biondo e alto

è sì falso oggi che la Francia è una repubblica, e continuerà a essere tale fin tanto che in quel paese non si decidesse di tornare alla monarchia ed eleggere allo stesso tempo un re con le caratteristiche che l'enunciato gli attribuisce. Quella stessa affermazione, tuttavia, potrebbe essere stata vera in passato, quando la Francia era una monarchia, qualora abbia ricoperto la carica di re un individuo biondo e alto. Ciò dimostra che la valutazione circa la sua verità o falsità non può prescindere dallo 'stato' del mondo e che dunque una risposta in merito possa cambiare al cambiare delle cose. Ne consegue che della verità o della falsità di un'affermazione di questo genere non si può dire nulla 'ora e per sempre', come è invece possibile fare nel caso delle tautologie e delle contraddizioni logiche.

7. Tautologie logiche e contraddizioni: un metodo di verifica

La logica proposizionale si occupa della verità e della falsità degli enunciati nel senso assoluto e atemporale di cui si è detto. Tautologie e contraddizioni logiche sono il prodotto delle assunzioni generali relative ai rapporti tra verità e falsità (i tre principi che caratterizzano l'interpretazione classica della logica) e di quelle relative a come questi rapporti possono essere influenzati dall'uso delle operazioni logiche di connessione. Come si è visto negli esempi presi in esame fin qui, queste assunzioni offrono elementi sufficienti a determinare il carattere tautologico o contraddittorio di certe affermazioni. Anzi, a dire il vero, i principi dell'interpretazione classica della logica e il significato attribuito alle operazioni logiche fondamentali consentono di dare vita a una procedura sistematica in questo senso, che si basa sul tentativo di mostrare la contraddittorietà di un enunciato prescelto. Vediamo come, attraverso un esempio.

Si consideri l'affermazione:

Se piove indosso i jeans, oppure se indosso i jeans, allora piove

Al di là dell'indubbia stranezza, l'affermazione appare un esempio legittimo di enunciato dichiarativo. Si supponga adesso che la frase sia falsa. Si sarà forse intuito già dalla lettura che l'affermazione ha la forma logica di una disgiunzione. Dunque, essa è falsa se lo sono entrambi i disgiunti. Questi sono a loro volta enunciati logicamente complessi, dato che si tratta di due enunciati di tipo condizionale: «Se piove, allora indosso i jeans» e «Se indosso i jeans, allora piove». Si è già accennato al fatto che un condizionale è falso in un unico caso, ovvero quello in cui è vero il suo antecedente e falso il conseguente. Dunque, il primo disgiunto è falso se è vero che piove e che non indosso i jeans. In questo caso, tuttavia, risulterebbe falso l'antecedente del secondo disgiunto e vero il conseguente, il che renderebbe vera la frase «Se indosso i jeans, allora piove» e con essa l'intera disgiunzione. Per un ragionamento del tutto analogo, la condizione che falsifica il secondo disgiunto rende vero il primo e l'affermazione di conseguenza, dal che si conclude che non c'è modo di rendere falso l'enunciato considerato (dato che per i principi su cui poggia l'interpretazione classica dei connettivi non c'è un terzo caso possibile oltre a quello che un enunciato sia vero e che sia falso), e che, contro ogni aspettativa, l'affermazione presa in esame risulta avere una natura tautologica. Con questa scoperta si rivela anche una prima sorpresa, per non dire una vera e propria incongruenza, del mondo della logica classica che si è cominciato a conoscere: dati due enunciati qualsiasi, o il primo implica il secondo, o il secondo implica il primo. La peculiarità della scoperta è tale da non poter passare inosservata e solleva dubbi sul senso che la logica classica assegna al connettivo di **implicazione materiale** o **filoniana** di cui si è fatto uso nell'analisi delle condizioni di verità dell'enunciato (*vedi* Parte A, Unità 4).

Il metodo che si è illustrato qui, e che consente di verificare appunto se un enunciato rappresenti l'istanza di una verità logica, può essere sostituito da una tecnica più raffinata, che offre la possibilità di calcolare il valore di verità di un enunciato complesso in relazione a tutti i possibili valori di verità degli enunciato componenti e alle loro combinazioni facendo fa uso delle **tavole di verità** (*vedi* Parte A, Unità 7). Tuttavia, rispetto a quest'ultimo strumento, il metodo informale preso in esame in questo paragrafo ha il vantaggio di poter essere generalizzato anche a un'altra famiglia di operazioni logiche, quella dei **quantificatori individuali**, che si studiano nell'ambito della **logica dei predicati** (*vedi* Parte B, Unità 9-10).

Esercizi Unità 1

1. Si considerino le due liste di enunciati seguenti, dove, nell'elenco numerico, *A* è l'affermazione «Dario è bravo con le operazioni» e *B* è l'affermazione «Dario non è bravo a risolvere i problemi»:

(a) Dario non è bravo con le operazioni o è bravo a risolvere i problemi.
(b) Dario è bravo con le operazioni e a risolvere i problemi.
(c) Dario è bravo con le operazioni e non è bravo a risolvere i problemi.
(d) Se Dario non è bravo con le operazioni, allora non è bravo a risolvere i problemi.
(e) Se Dario è bravo a risolvere i problemi, allora è bravo con le operazioni.

(1) È falso che non *A* o *B*.
(2) Se non *A*, allora *B*.
(3) *A* e non *B*.
(4) Se non *B*, allora *A*.
(5) Non *A* o non *B*.

Quale risposta accoppia correttamente l'enunciato in italiano corrente della lista alfabetica con la propria versione logicamente ineccepibile?

A. a1, b3, c5, d4, e2.
B. a2, b3, c1, d5, e4.
C. a5, b3, c1, d4, e2.
D. a5, b3, c1, d2, e4.
E. Nessuna delle precedenti.

2. Si considerino le due liste di enunciati seguenti, dove, nell'elenco numerico, *A* è l'affermazione «Luca parla bene l'inglese» e *B* è l'affermazione «Luca guarda i film in lingua originale».

(a) Luca guarda i film in lingua originale nonostante che non parli bene l'inglese.
(b) Condizione sufficiente perché Luca parli bene l'inglese è che guardi i film in lingua originale.
(c) Luca non parla bene inglese ma guarda i film in lingua originale.

(d) Luca non guarda i film in lingua originale o non parla bene l'inglese.
(e) Che Luca guardi i film in lingua originale è condizione necessaria perché parli bene l'inglese.

(1) Non A e B.
(2) Se B, allora A.
(3) A e non B.
(4) Se B, allora non A.
(5) Non A o B.

Quale risposta accoppia correttamente l'enunciato in italiano corrente della lista alfabetica con la propria versione logicamente ineccepibile?

A. a3, b5, c1, d4, e2.
B. a3, b2, c1, d4, e5.
C. a3, b2, c5, d4, e1.
D. a3, b2, c4, d1, e5.
E. Nessuna delle precedenti.

3. Confronta gli enunciati della lista alfabetica, proposti in italiano corrente, con quelli della lista numerica, scritti utilizzando solo combinazioni dei connettivi logici fondamentali. Queste ultime combinazioni possono essere utilizzate per riscrivere gli enunciati della lista alfabetica in modo logicamente ineccepibile, preservandone il senso:

(a) Non tutti coloro che frequentano la piscina sanno nuotare.
(b) Tanto Lorenzo quanto Alberto non amano andare al cinema.
(c) Uno tra Dario e Andrea deve andare a fare la spesa.
(d) È sufficiente che voti la metà più degli aventi diritto perché il referendum sia valido.
(e) Lorenzo si sveglia esattamente quando si addormenta suo fratello Cosimo.

(1) Michela non ha ancora finito di mangiare e Andrea non ha ancora finito di mangiare.
(2) Francesco ha superato l'esame o Lara ha superato l'esame.
(3) Paolo gioca se e solo se gioca anche Pietro.
(4) Se Paolo gioca, allora gioca anche Pietro.
(5) Non è vero che se Felix mangia, allora ha fame.

Quale risposta accoppia gli enunciati in modo corretto?

A. a5, b1, c3, d2, e4.
B. a5, b1, c2, d4, e3.
C. a5, b2, c1, d4, e3.
D. a3, b1, c2, d4, e5.
E. Nessuna delle precedenti.

4. In questo caso, le frasi logicamente corrette compaiono nella lista alfabetica, mentre quelle dell'elenco numerico sono scritte in linguaggio corrente. Rifletti su quali combinazioni dei connettivi logici fondamentali della prima lista possono essere utilizzate per riscrivere queste ultime in modo da farne emergere con chiarezza la forma logica:

(a) Se non si dà il caso che qualcuno accompagni la nonna, allora non si dà il caso che la nonna verrà al pranzo.
(b) Se un individuo è studente di questa scuola allora può mangiare a mensa e se non si dà il caso che un individuo sia studente di questa scuola, allora non può mangiare a mensa.
(c) Claudio ha una moneta da un euro oppure Claudio ha una moneta da due euro oppure Claudio ha una banconota da cinque euro.
(d) Claudio ha una moneta da un euro oppure Claudio una moneta due euro, e non si dà il caso che Claudio ha una moneta da un euro e una moneta da due euro.
(e) Claudio ha una moneta da euro oppure Claudio ha una moneta da due euro oppure Claudio ha una banconota da cinque euro e non si dà il caso che Claudio ha una moneta da un euro e una moneta da due euro e non si dà il caso che Claudio ha una moneta da un euro e una banconota da cinque euro e non si dàil caso che Claudio ha una moneta da due euro e una banconota da cinque euro.

(1) Maria ha almeno un «10» in pagella.
(2) Se nessuno lo chiama, Alberto non saprà che siamo qui.
(3) Ci sono al massimo cinque posti liberi.
(4) Piero ha giusto uno, due o tre fratelli.
(5) Solo i soci possono frequentare la palestra.

Quale risposta accoppia gli enunciati in modo corretto?

A. a2, b5, c3, d1, e4.
B. a2, b5, c1, d4, e3.
C. a2, b5, c1, d3, e4.
D. a5, b2, c1, d3, e4.
E. a5, b2, c1, d4, e3.

5. Analizza le seguenti affermazioni e prova a stabilire quali di esse sono tautologie, quali contraddizioni logiche e quali siano logicamente neutre.

(1) Se non è vero che la mia proposta non sia svantaggiosa, allora significa che è vantaggiosa.
(2) Se la mia proposta è vantaggiosa, Carlo la accetta.
(3) Se dall'ipotesi che $\sqrt{2}$ sia razionale, segue che deve essere un numero irrazionale, significa che $\sqrt{2}$ è irrazionale.
(4) Se è vero che piove se la temperatura cala, allora se non piove la temperatura non cala.

Se t=«tautologia», c=«contraddizione logica» e n=«logicamente neutra», quale risposta contiene le dichiarazioni corrette rispetto agli enunciati precedenti?

A. 1t, 2n, 3n, 4c.
B. 1n, 2n, 3t, 4c.
C. 1t, 2c, 3t, 4n.
D. 1c, 2n, 3t, 4t.
E. Nessuna delle precedenti.

Unità 2

La negazione

Il connettivo logico di negazione corrisponde al «non» della lingua italiana ed è tra tutti quello più evidentemente correlato alle nozioni di verità e di falsità degli enunciati, al punto che l'operazione di negare un enunciato può essere presentata come un analogo dell'asserire la falsità di quanto l'enunciato dice.

1. La negazione logica e l'interpretazione classica dei connettivi

L'**interpretazione classica dei connettivi** (*vedi* ***Glossario***) è caratterizzata tra l'altro dall'assunto che gli enunciati non possano che essere veri o falsi e che verità e falsità siano due 'stati' alternativi e incompatibili (dunque, che un enunciato non possa essere vero e falso allo stesso tempo). Questo assunto gioca un ruolo essenziale nell'uso della negazione logica, dal momento che negare il vero equivale perciò ad asserire il falso e, viceversa, negare il falso è lo stesso che asserire il vero. Il principio non è del tutto estraneo all'uso che dell'operazione logica si fa nel linguaggio ordinario. Anzi, lo si può presentare come una conseguenza di quest'ultimo. D'altronde, nell'uso comune dire di qualcosa che sia vero equivale a dire quella cosa stessa. Per cui, ad esempio, affermare che «È vero che Lara ha dei bellissimi capelli» è equivalente a dire che «Lara ha dei bellissimi capelli» (così come quest'ultima asserzione verrebbe considerata un analogo della prima).

L'interpretazione della negazione di cui si è detto può essere vista come l'altra faccia di questa medaglia. In altre parole, dire che «2 non è un numero primo» equivale a dire che «Non è vero che 2 sia un numero primo», oppure ancora a «È falso che 2 sia un numero primo», che è vero, appunto, nel caso in cui il numero 2 non possieda la proprietà caratteristica propria dei numeri primi. Questa relazione tra negare il vero e asserire il falso soggiacenti all'uso della negazione logica si ritrova, in una forma schematizzata che la rende particolarmente chiara, nella **tavola di verità** del connettivo (*vedi* Parte A, Unità 7).

2. La negazione e gli altri connettivi logici

L'osservazione precedente è sufficiente a chiarire il senso che soggiace all'uso dell'operazione di negazione nel caso degli enunciati logicamente più semplici, quelli **atomici** (*vedi* ***Glossario***). Tra gli aspetti più delicati legati a questa operazione, c'è però la questione di chiarirne gli effetti in contesti logicamente più 'sofisticati'. Proviamo a chiederci cosa significhi dire, ad esempio, che:

Non è vero che 2 sia primo e che sia un numero perfetto

Come avremo modo di vedere (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 2), l'interpretazione classica del connettivo di congiunzione coincide con l'assunto secondo il quale un enunciato che abbia questa forma, dunque che sia del tipo «A e B», è vero se e solo se sono veri entrambi i **congiunti** (*vedi* ***Glossario***). Negando una congiunzione, dunque dicendo di essa che non è vera, si intende affermare quindi che almeno uno dei due congiunti è falso, perciò che «2 non è primo oppure 2 non è un numero perfetto» (rimanendo possibile, data l'interpretazione classica della disgiunzione - *vedi* Parte A, Unità 3, par. 3 -, che entrambi i casi si verifichino e quindi che 2 non sia un numero primo e non sia un numero perfetto).

Considerazioni analoghe conducono a stabilire cosa significhi negare una disgiunzione, un'implicazione e un'equivalenza logica. Come nel caso della congiunzione, l'osservazione chiave dipende dal significato attribuito all'operazione di negazione come asserzione relativa alla falsità di un enunciato dichiarativo. Di conseguenza, le **condizioni di verità** della negazione di un enunciato logicamente complesso corrispondono a quelle che rendono false l'enunciato in questione.

Negare una disgiunzione, ad esempio, che come si ricordava è vera se almeno uno dei due **disgiunti** (*vedi* ***Glossario***) è vero, significa impegnarsi sul fatto che entrambi i disgiunti siano falsi. Dunque, dire che «Non è vero che possiamo andare al cinema o a mangiare una pizza», significa dire che «Non possiamo andare al cinema e non possiamo andare a mangiare una pizza». Negare un enunciato condizionale, dicendo ad esempio che «Non è vero che se l'inflazione aumenta, allora diminuisce il potere d'acquisto dei salari», significa affermare che il condizionale «Se l'inflazione aumenta, allora diminuisce il potere d'acquisto dei salari» è falso, il che avviene (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 2) nel caso in cui l'**antecedente** (*vedi* ***Glossario***) è vero e il **conseguente** (*vedi* ***Glossario***) è falso (dunque, se l'inflazione aumenta e non diminuisce il potere d'acquisto dei salari). Infine, dire che «Non è vero che il colpo è stato messo a punto da una banda se e solo se ci sono tracce di due o più persone», significa dire che il bicondizionale coinvolto nell'affermazione è falso. Ciò accade (*vedi* Parte A, Unità 5, par. 1) se gli enunciati «Il colpo è stato messo a punto da una banda» e «Ci sono tracce di due o più persone» non sono **logicamente equivalenti** (*vedi* ***Glossario***), dunque entrambi veri o entrambi falsi. Ne consegue che la negazione di cui sopra afferma che il primo enunciato è vero e il secondo è falso, o che è falso il primo ma non il secondo.

In attesa di esercitarsi al riguardo con le domande specifiche proposte a corredo della presente unità, può essere utile soffermarsi su quanto si è detto fin qui prendendo in esame qualche esempio ulteriore, oppure consultando già ora l'unità dedicata alle tavole di verità dei connettivi logici (*vedi* Parte A, Unità 7).

3. La legge di doppia negazione e altre leggi logiche notevoli

Date le osservazioni precedenti relative ai rapporti reciproci tra la negazione e le altre operazioni logiche, la questione, come si suol dire, sorge spontanea: cosa significa negare una negazione? È il caso, ad esempio, dell'enunciato:

Non è vero che 2 non sia un numero primo

Forti di quanto si è stabilito fin qui, è possibile ottenere una soluzione al quesito che abbia una valenza generale, dunque che sia tale da potersi applicare a tutti gli altri casi analoghi, facendo leva sul principio fondamentale che sta alla base dell'operazione logica di negazione: negare significa asserire il falso, dunque un'asserzione di tipo 'negativo' è vera alle condizioni che rendono falso l'enunciato negato. L'affermazione «2 non è un numero primo» è vera se il numero 2 non possiede la proprietà di essere primo, ovvero se è falsa l'affermazione che «2 è un numero primo». Lo stesso enunciato, «2 non è un numero primo», è dunque falso se «2 è un numero primo» è vero. Negarlo, allora, come si fa affermando che «Non è vero che 2 non sia un numero primo», significa quindi sostenere che «2 è un numero primo» è vero. Ciò significa allora che la condizione che rende vera la prima affermazione, la negazione della negazione, è la stessa che rende vera la seconda e coincide con il caso in cui il numero 2 possiede la proprietà di «essere un numero primo».

Quest'analisi, opportunamente generalizzata a tutti gli enunciati della forma «Non è vero che non A», ottenuti negando un enunciato che contiene anch'esso una negazione logica, rivela il tratto forse più caratteristico di questa operazione, che si riassume con il detto secondo cui «Due negazioni affermano». Al detto corrisponde una **verità logica** (*vedi* ***Glossario***), detta «della doppia negazione», secondo cui la negazione di un enunciato negato equivale all'affermazione dell'enunciato stesso. Attenzione, però: due enunciati come «Non è vero che non A» e «A» condividono sulla base del ragionamento le stesse condizioni di veritàe dunque sono **logicamente equivalenti** (*vedi* ***Glossario***); essi tuttavia non hanno la stessa **forma logica** (*vedi* ***Glossario***). Inoltre, dal momento che la legge si può giustificare mediante il ragionamento precedente e poiché quest'ultimo fa uso del principio di bivalenza secondo cui un enunciato che non è vero è falso e, viceversa, un enunciato che non è falso è vero, se ne ricava che la legge di doppia negazione è una **tautologia** (*vedi* ***Glossario***) classica, che dipende dunque dall'**impostazione classica dei connettivi** (*vedi* ***Glossario***), che non vale invece nei contesti nei quali cade il principio di bivalenza che la sostiene.

La 'legge' della doppia negazione non è l'unica verità logica caratteristica di questa operazione. Ne citiamo qui un'altra, che è alla base dell'uso della negazione nelle argomentazioni logiche di cui ci occuperemo più avanti (*vedi* Parte C, Unità 4). Si tratta del principio logico di «conseguenza mirabile», secondo cui se dalla negazione di un enunciato segue l'enunciato medesimo, allora quest'ultimo (e non la sua negazione) risulta essere valido. In altre parole, se da «2 non è un numero primo» si deduce invece che «2 è un numero primo», si conclude che quest'ultimo enunciato dev'essere vero. Di nuovo, la giustificazione della legge logica e della forma di argomentazione a essa conseguente discende dagli assunti fondamentali dell'interpretazione classica della logica. Infatti, se dalla negazione di un enunciato segue l'enunciato stesso, che lo contraddice perché un enunciato e la sua negazione sono incompatibili come il vero e il falso, significa che l'ipotesi di partenza, ovvero che della proposizione data valesse la negazione, dev'essere errata; dal momento che se un enunciato non vale, allora di esso vale la negazione per il principio della bivalenza e dato che negare una negazione significa affermare, si ricava da ciò che deve valere giusto l'enunciato nella sua veste 'positiva'.

4. I limiti dell'interpretazione classica della negazione

Si consideri la frase:

Daniele non sa che guidare parlando al cellulare è pericoloso

La si confronti con la seguente:

Daniele sa che guidare parlando al cellulare non è pericoloso

La differenza tra l'una e l'altra affermazione, sottile nella forma, è invece decisiva nella sostanza: nel primo caso si dice che Daniele non è a conoscenza di una norma del codice della strada e rischia così una multa, oltre che di mettere a rischio la propria sicurezza e quella degli altri; nel caso della seconda affermazione egli «sa», o crede di sapere, che guidare parlando al telefono non sia affatto pericoloso. Appurato che le due frasi hanno un senso diverso, la possibilità di restituire entrambi i sensi con le operazioni logiche usuali è preclusa dalla peculiare interpretazione dell'operazione di negazione che si è perseguito fin qui. Questa interpretazione ci porta a considerare la negazione come l'affermazione che l'enunciato che si nega è falso, dunque alla frase:

Non è vero che Daniele sa che dovrebbe evitare di guidare parlando al cellulare

Quest'ultima sembra cogliere il senso della prima versione dell'affermazione originale, ma manca del tutto di restituire anche solo parzialmente quello della seconda. L'esempio mostra un 'deficit espressivo' delle operazioni logiche fondamentali. In effetti, solo con il passaggio a un livello più sofisticato di analisi, che non corrisponde neanche a quello della **logica dei predicati** (Parte B, Unità 1), ma richiede il passaggio alla **logica modale** (Parte D, Unità 1), è possibile recuperare le differenze sottese dal caso proposto.

5. La negazione nelle argomentazioni

Le leggi logiche notevoli relative all'operazione di negazione e la loro giustificazione suggeriscono già, come si faceva notare, che la negazione possa svolgere un ruolo attivo nella ricerca (positiva) di conclusioni giustificate attraverso argomentazioni rigorose. La negazione è in effetti il 'motore' del **ragionamento indiretto**, che consente la dimostrazione di un dato enunciato supponendo che di esso valga la sua negazione. Lo scopo dell'argomento è mostrare che l'ipotesi negata è contraddittoria, per concludere così che vale di essa la versione 'positiva'. Il caso d'uso più noto di questa forma di ragionamento, largamente utilizzato ad esempio in campo matematico, è il ragionamento «per assurdo» che può essere impiegato per la dimostrazione di alcune conoscenze matematiche fondamentali, come ad esempio l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ (*vedi* Parte C, Unità 4).

Esercizi Unità 2

1. Supponiamo si dica che «Non è vero che il presidente del consiglio abbia negato il proprio appoggio alla mozione della maggioranza». Se l'affermazione è vera, allora:

A. Il presidente del consiglio ha negato il proprio appoggio alla mozione della maggioranza.
B. Il presidente del consiglio ha negato di non appoggiare la mozione della maggioranza.
C. Il presidente del consiglio non ha negato il proprio appoggio la mozione della maggioranza.
D. Il presidente del consiglio ha affermato di non appoggiare la mozione della maggioranza.
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

2. Claudio afferma: «Giulia non sapeva che guidare il motorino senza casco fosse proibito». Se l'affermazione è falsa, allora:

A. Giulia non sapeva che guidare il motorino con il casco fosse proibito.
B. Giulia sapeva che guidare il motorino senza casco fosse consentito.
C. Giulia non sapeva che guidare il motorino senza casco fosse consentito.
D. Giulia sapeva che guidare il motorino senza casco fosse proibito.
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

3. Supponiamo che si dica: «Non è vero che la scaletta del concerto non fosse adatta all'occasione». Se l'affermazione è falsa, allora:

A. È falso che la scaletta del concerto fosse adatta all'occasione.
B. È falso che la scaletta del concerto non fosse adatta all'occasione.
C. È vero che la scaletta del concerto fosse adatta all'occasione.
D. La scaletta del concerto era adatta all'occasione.
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

4. «Sara dice che Emanuele non sa che $\sqrt{2}$ non è razionale». Se l'affermazione è falsa, se ne deduce che:

A. Emanuele sa che $\sqrt{2}$ non è razionale.
B. Sara dice che Emanuele sa che $\sqrt{2}$ non è razionale.
C. Emanuele non sa che $\sqrt{2}$ non è razionale.
D. Sara non dice che Emanuele non sa che $\sqrt{2}$ non è razionale.
E. Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

5. Confronta gli enunciati della lista alfabetica, proposti in italiano corrente, con quelli della lista numerica, nei quali si fa uso solo di combinazioni logiche che coinvolgono la negazione. Rifletti su quali di esse possono essere utilizzate per riscrivere gli enunciati della lista alfabetica in modo logicamente ineccepibile, preservandone il senso:

(a) Piove.
(b) Non è vero che non piova.
(c) Quel diamante non è un falso!
(d) È vero!
(e) Non sto dicendo che non sia vero

(1) È falso che non mangi.
(2) È vero che sono solo!
(3) È falso che Luigi sia alto.
(4) Non è falso!
(5) È falso che Giulia creda che non si vada al mare.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a1, b2, c3, d4, e5.
B. a2, b1, c3, d4, e5.
C. a2, b1, c3, d5, e4.
D. Le risposte A, B e C.
E. La risposta A e la C.

6. In questo caso, le frasi logicamente corrette compaiono nella lista alfabetica, mentre quelle dell'elenco numerico sono scritte in linguaggio corrente. Di nuovo, rifletti su quali combinazioni dei connettivi logici fondamentali della prima lista possono essere utilizzate per riscrivere queste ultime in modo da farne emergere con chiarezza la forma logica:

(a) È falso che mangiare carne rossa faccia bene.
(b) È falso che abbia tempo.
(c) È falso che il presidente della Repubblica non abbia firmato il decreto legge.
(d) Anna dice che non è vero che Edoardo abbia finito i compiti.
(e) È falso che Anna dica che Edoardo non sa di aver finito i compiti.

(1) Non è vero che Anna dica che Edoardo ha finito i compiti.
(2) Non ho voglia di uscire.
(3) Non è vero che oggi sia freddo.
(4) Non è vero che la macchina non abbia problemi di accensione.
(5) Non è vero che i quotidiani non siano pieni di sciocchezze.

Quale risposta accoppia gli enunciati con la stessa forma logica?

A. a2, b3, c4, d2, e5.
B. a3, b1, c4, d2, e5.
C. a3, b2, c5, d1, e4.
D. Tutte le precedenti.
E. Nessuna delle risposte precedenti.

Unità 3

Congiunzione e disgiunzione

La congiunzione e la disgiunzione, l'«e» e l'«o» della lingua italiana, sono due connettivi logici basilari. Lo dimostra il fatto che a essi è possibile ricondurre numerose forme enunciative della lingua, diverse all'apparenza, ma che risultano invece equivalenti all'operazione di congiungere e disgiungere gli enunciati nella sostanza logica. Data la stretta relazione che lega congiunzione e disgiunzione, che si risolve nell'essere l'una operazione la **duale** dell'altra, come si è soliti dire nella letteratura specialistica, in questa unità procederemo a esaminarne le caratteristiche in parallelo.

1. La struttura degli enunciati congiunti e disgiunti

Si considerino le seguenti affermazioni:

Dario è tra i più alti della sua classe e anche tra i più magri
Ginevra è amica *o* è la coinquilina di Anna

Si tratta di affermazioni che esemplificano il modo in cui congiunzione e disgiunzione fanno la loro comparsa nel discorso dichiarativo ordinario. Da essi è possibile trarre indicazioni sulla struttura che possiedono le affermazioni nelle quali si fa uso di queste operazioni logiche, le quali risultano costituite da due o più **sottoenunciati** (*vedi* ***Glossario***) detti rispettivamente **congiunti** e **disgiunti** (le frasi «Dario è tra i più alti della sua classe» e «(Dario è) anche tra i più magri (della sua classe)» nel caso della prima affermazione, «Ginevra è amica (di Anna)» e «(Ginevra) è la coinquilina di Anna» nel caso della seconda). Questi sottoenunciati sono le affermazioni a cui si applicano le operazioni logiche di congiunzione «e» e di disgiunzione «o».

2. Le condizioni di verità della congiunzione

Si consideri di nuovo la frase:

Dario è tra i più alti della sua classe e anche tra i più magri

Cerchiamo di stabilire a quali condizioni risulta essere vera. In modo del tutto naturale, la si considera tale nel caso in cui Dario possieda entrambe le caratteristiche che gli si attribuiscono, quindi se egli è uno degli individui più alti e uno dei più magri al confronto con i suoi compagni di classe. Perchè l'affermazione sia vera non è sufficiente, dunque, sapere solo che una delle due condizioni indicate si realizzano (ad esempio, sapere solo che Dario è in effetti il più alto della classe). Queste considerazioni di buon senso, generalizzate a ogni enunciato che abbia la stessa forma logica di quello considerato, sono alla base dell'**interpretazione classica** dell'operazione logica di congiunzione: di un enunciato della forma «A e B» si dice che esso è vero se e solo se è vero l'enunciato A ed è vero anche l'enunciato B.

Segue da queste stesse osservazioni che un enunciato del tipo «A e B» è falso se è falso A oppure se è falso B, o se sono falsi entrambi. Sappiamo d'altra parte (*vedi* Parte A, Unità 2), che dire di un enunciato che è falso significa dire che è vera la sua negazione. Ciò dipende dal fatto che o un enunciato dichiarativo è vero, oppure esso è falso ed è vera di conseguenza la sua negazione (perché se è falso che «Dario è alto», ad esempio, allora è vero che «Dario non è alto»). Questo assunto è alla base dei principi fondamentali della negazione, come il principio della **doppia negazione** (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 3), ed è alla base della disciplina logica stessa nella forma del **principio di bivalenza** (*vedi* Parte A, Unità 1, par. 4). Quindi, per concludere il ragionamento, un'affermazione del tipo «*A* e *B*» è falsa se si dà il caso che sia vero «Non *A*», oppure se è vero «Non *B*», oppure se è vero tanto «Non *A*», quanto «Non *B*».

3. Le condizioni di verità della disgiunzione

Proviamo adesso a chiederci a quali condizioni è vero invece un enunciato come:

Ginevra è amica o è la coinquilina di Anna

Come dovrebbe apparire del tutto ovvio, l'affermazione è vera nel caso in cui Ginevra sia amica o sia la coinquilina di Anna. Dunque, nel caso in cui sia vero che «Ginevra è l'amica di Anna» oppure se è vero che «Ginevra è la coinquilina di Anna», senza escludere il caso che siano vere entrambe le affermazioni, dunque, che sia vero tanto che «Ginevra è l'amica di Anna» quanto che «Ginevra è la coinquilina di Anna». In modo del tutto simile al caso della congiunzione, si fa di questa osservazione di buon senso il principio che stabilisce la condizione alla quale risulta vera un'affermazione della forma «*A* o *B*», dunque se è vero «*A*», oppure se è vero «*B*», ma anche nel caso in cui siano veri tanto «*A*», quanto «*B*» (dunque, se è vero almeno uno dei due **disgiunti** - *vedi* ***Glossario***-, di cui essa si compone).

Di conseguenza, la frase considerata è falsa se ci si è sbagliati del tutto e Ginevra non è amica, né è la coinquilina di Anna, dunque se è falso tanto l'enunciato «Ginevra è l'amica di Anna», quanto l'enunciato «Ginevra è la coinquilina di Anna». Generalizzando anche questa osservazione, si dirà allora che una disgiunzione della forma «*A* o *B*» è falsa se è vera «Non *A*» (quindi se «*A*» è falsa) e se è vera anche «Non *B*».

4. La dualità di congiunzione e disgiunzione

Sulla base di quanto si è stabilito fin qui, una congiunzione è falsa se almeno uno dei due sottoenunciati di cui si compone è falso mentre una disgiunzione è falsa se sono falsi entrambi. Quindi, la condizione nella quale è falsa una congiunzione ha la forma di una disgiunzione o più precisamente una congiunzione è falsa se è vera la disgiunzione i cui sottoenunciati sono le negazioni dei suoi **congiunti** (in altri termini, «*A* e *B*» è falsa se «*A*» è falsa o se «*B*» è falsa o se sono false entrambe, dunque se «Non *A* o non *B*» è vera). In modo analogo, la condizione dalla quale dipende la falsità di una disgiunzione ha la forma di una congiunzione, in particolare una disgiunzione è false sa è vera la congiunzione delle negazioni dei due **disgiunti** («*A* o *B*» è falsa se «*A*» è falsa e «*B*» è falsa, dunque se «Non *A* e non *B*» è vera). Quindi:

1. negare una congiunzione equivale ad asserire la disgiunzione delle negazioni dei due congiunti («Non (è vero) *A* e *B*» **equivale logicamente** - *vedi* ***Glossario***-, a «Non *A* o non *B*»);

2. negare una disgiunzione equivale ad asserire la congiunzione delle negazioni dei disgiunti («Non (è vero) *A* o *B*» equivale logicamente a «Non *A* e non *B*»)

Questo peculiare rapporto tra congiunzione e disgiunzione, mediato attraverso l'operazione di negazione logica, si riassume talvolta dicendo che l'una operazione logica è la **duale** dell'altra.

5. La congiunzione nel linguaggio ordinario

Non sempre le operazioni logiche fanno la loro comparsa nel linguaggio ordinario con l'‘aspetto’ per il quale esse sono note. In particolare, è possibile che vengano sostituite da altre espressioni che sono scelte perché riflettono meglio una sfumatura espressiva a cui si aspira, ma che sono assimilabili ai connettivi logici usuali in quanto le frasi ottenute utilizzando le prime hanno le stesse **condizioni di verità** di affermazioni che contengono invece solo questi ultimi. Quello della congiunzione è un caso tipico. È facile rendersi conto ad esempio che una frase del tipo:

Oggi piove, ma fa caldo

sia del tutto equivalente, logicamente parlando, alla frase:

Oggi piove e fa caldo

Detta equivalenza dipende dall'osservazione che la prima affermazione è vera o falsa se e solo se lo è la seconda affermazione. In effetti, mettendo da parte la sfumatura avversativa della preposizione «ma», non si potrà fare a meno di notare che la frase che si è costruito a partire da essa è vera se e solo se è vero che piove e che fa caldo. Dunque, giusto nel caso che rende vera anche la frase corrispondente, costruita facendo uso dell'usuale operazione di congiunzione.

Esempi come quello presentato potrebbero essere costruiti a partire da congiunzioni di tipo concessivo («benché»), di tipo temporale («quando») e causale («perché»). Ai fini dell'indagine logica dunque, la congiunzione ordinaria è un valido sostituto per ciascuna di esse.

6. Le obiezioni all'interpretazione classica di congiunzione e disgiunzione

Per quanto possano apparire di buon senso, le considerazioni precedenti relative alle **condizioni di verità** di enunciati che hanno la forma di congiunzioni e disgiunzioni non sono esenti da critiche. In particolare, per quanto si possa pensare che dette condizioni siano del tutto coerenti con il modo in cui quelle operazioni vengono utilizzate, è possibile trovare contesti nei quali sembra che si faccia di esse un uso diverso. Di questi modi ‘non ortodossi’ di ricorrere a congiunzione e disgiunzione, ne menzioniamo tre che danno adito ad altrettante critiche all'interpretazione classica di esse che si è appena esposto. Infine, menzioniamo anche un'interpretazione più stringente dell'operazione logica di disgiunzione, anch'essa giustificata dall'uso che di essa si fa in certi contesti e che si discosta da quella proposta in precedenza.

6.1 L'obiezione delle risorse

Si consideri la frase:

Con un euro al distributore puoi prendere un espresso e un cappuccino

È ovvio che ciò che si vuole dire in questo caso è che un euro basta a prendere un caffè e basta anche per prendere un cappuccino, ma non è sufficiente a prendere entrambi. In questo modo, tuttavia, sembra si contravvenga alla proprietà caratteristica della congiunzione, di essere vera solo nel caso in cui sono veri entrambi i congiunti, e che sembra giustificare anche il fatto che dalla verità di un enunciato di quella forma discenda la verità dei due sottoenunciati che la compongono (e dunque, nel caso in questione, la possibilità di prendere tanto un caffè quanto un cappuccino con la stessa moneta da un euro).

Il punto è che con l'affermazione di partenza si vuole dire che:

Con un euro al distributore puoi prendere un espresso e con un euro puoi prendere un cappuccino che si ottiene dalla prima condividendo la 'risorsa' (l'euro che occorre per servirsi al distributore) tra i due congiunti. L'interpretazione classica della congiunzione, dunque, non si concilia con la descrizione di situazioni analoga a quella presa in esame in forma 'sintetica' (contraendo il riferimento alle risorse in un'unica menzione), e richiede invece di esse una descrizione 'estesa', per non dire pedissequa (dove le risorse sono esplicitamente distribuite sui congiunti).

6.2 L'obiezione dell'ordine

Supponiamo che qualcuno dica invece:

Una volta che ebbe spento il computer, Giuseppe prese la giacca e uscì di casa

La proprietà fondamentale della congiunzione lascia pensare che l'ordine dei suoi congiunti non abbia alcun rilievo. Infatti, «*A* e *B*» è vera se e solo se è vera «*A*» ed è vera «*B*», nel qual caso è vera anche la frase «*B* e *A*». Si conclude che, data l'interpretazione classica dei connettivi, «*A* e *B*» è logicamente equivalente a «*B* e *A*» e dunque che hanno lo stesso 'senso logico' pur non dicendo la stessa cosa (così come «Una volta che ebbe spento il computer, Giuseppe uscì di casa e prese la giacca» non dice la stessa cosa dell'affermazione originaria). La conclusione solleva più di un dubbio in casi come quello considerato, dove invece l'ordine dei congiunti sembra essenziale a mantenere intatto il senso della frase.

6.3 L'obiezione dell'onniscienza

Sappiamo che la verità di un'asserzione «*A*» è condizione sufficiente per la verità di una disgiunzione nella quale essa figuri come «*A* o *B*», a prescindere dal fatto che l'altro disgiunto sia vero o falso. Ciò significa che se «*A*» è vera, allora è vera in particolare la disgiunzione «*A* o non *A*». Tuttavia, se *A* è falsa vale di conseguenza la sua negazione. D'altra parte, la verità di «Non *A*» è anch'essa una condizione sufficiente affinché «*A* o non *A*» sia vero. Dunque, quest'ultima affermazione è una **verità logica** (*vedi* ***Glossario***), ossia un'asserzione che è vera indipendentemente dal fatto che «*A*» sia vera o falsa e a prescindere da quale sia l'enunciato «*A*» in questione.

Un'analisi di questo tipo appare giustificata solo in virtù dei rapporti reciproci tra verità e falsità che sono alla base dell'interpretazione classica dei connettivi: dato un qualsiasi enunciato «*A*», o questo vale o, se non vale, esso è falso e vale quindi la sua negazione. Da qui discende la radice del nome che talvolta si assegna al principio logico sotteso dal caso considerato e che èdetto **principio del terzo escluso** proprio perchè ai due casi possibili, che «*A*» sia vero o che esso sia falso e sia quindi vera la sua negazione, non se ne aggiunge un terzo. Tale principio, però, appare molto meno legittimo se si pensa alla verità o alla falsità degli enunciati non in astratto, bensì come il riflesso della capacità di un soggetto conoscente di stabilire che un enunciato è vero o che è falso attraverso giustificate motivazioni. Ad esempio, come si fa in matematica, attraverso una dimostrazione che una data proposizione «vale», dunque che è vera, o che vale invece la sua negazione. Se «essere vero» lo si interpreta come «dimostrare vero», è possibile che di un dato enunciato «*A*» non si sia in grado di dire se esso sia vero o se sia vera, invece, la sua negazione «Non *A*» perché ancora manca la dimostrazione per uno dei due casi. Dunque, per quanto possa essere comunque giustificato asserire che «*A* è vera o non *A* è vera», intendendo con ciò che non sarà certo possibile dimostrare veri entrambi gli enunciati in questione, non sembra corretto affermare, perdurando lo stato di incertezza che si è ipotizzato, che «*A* è dimostrata vera o non *A* è dimostrata vera». Ciò è sufficiente di per sé a sollevare qualche dubbio sull'inoppugnabilità dei rapporti logici a cui si è fatto menzione. In aggiunta a questo, tuttavia, supponiamo che, a un certo punto, si riesca a stabilire che l'asserzione «*A*» è falsa. Il principio del terzo escluso legittima la conclusione che di conseguenza debba essere vera la sua negazione. Ma è davvero così? Si potrebbe obiettare in realtà che le due cose, l'aver dimostrato che un'affermazione è falsa e aver dimostrato che la sua negazione è vera, sono del tutto diverse. Questo tipo di osservazione, più sottile della precedente se si vuole, rientra nel novero delle critiche al **ragionamento per assurdo**, una forma di ragionamento che ha il proprio fondamento nei presupposti logici relativi ai rapporti tra verità e falsità dell'interpretazione classica dei connettivi. Riprenderemo l'argomento con maggiori dettagli al momento opportuno (*vedi* Parte C, Unità 4).

6.4 La disgiunzione di tipo 'esclusivo'

Si consideri la seguente variante di una delle affermazioni citate in precedenza:

Con un euro al distributore puoi prendere un espresso o un cappuccino

In questa forma, l'affermazione che poteva risultare discutibile se formulata in forma congiuntiva appare più accettabile rispetto al senso che si vuole che abbia. Ci informa infatti che un euro basta a prendere un espresso oppure un cappuccino. Non entrambi, però, si vorrebbe aggiungere. Ecco, questo «non entrambi» non è garantito neanche dall'affermazione in questa forma, perché la 'nostra' disgiunzione è vera sì se uno dei due disgiunti è vero, ma lo è anche se sono veri entrambi. In altre parole, l'affermazione nella forma precedente sottende un uso diverso dell'operazione di disgiunzione da quello codificato dall'interpretazione classica, un uso secondo cui «A o B» è vera se «A» è vero, o «B» è vero ma non se sono veri entrambi. Questa disgiunzione di tipo 'esclusivo' rappresenta una variante della disgiunzione ed è dunque distinta da quella 'inclusiva' della logica classica. Tuttavia, è possibile ovviare a questa carenza espressiva, combinando in modo opportuno disgiunzione e congiunzione (classiche). Ad esempio, riformulando la frase di partenza nel modo seguente:

Con un euro al distributore puoi prendere un espresso o un cappuccino e non entrambi

Esercizi Unità 3

1. Su un cartello posto di fronte all'ingresso di un'attrazione del luna park si legge il seguente avviso: «I bambini di età inferiore a 8 anni e di altezza non superiore a 1m e 35cm devono essere accompagnati da un adulto». Dario, Francesco e Lara hanno 10, 8 e 5 anni e sono alti rispettivamente 1m e 48cm, 1m e 35cm e 1m e 20cm. Chi dei tre può entrare senza accompagnatore?

A. Dario e Francesco
B. Nessuno dei tre.
C. Tutti e tre i bambini.
D. Francesco e Lara.
E. Solo Dario.

2. Secondo l'esperto del meteo «La temperatura subirà un calo nei prossimi giorni ma senza un aumento delle precipitazioni nevose». L'affermazione è falsa se:

A. nevica tanto quanto nei giorni precedenti;
B. la temperatura cala o non aumentano le nevicate;
C. la temperatura cala e non aumentano le nevicate;
D. la temperatura cala;
E. la temperatura non cala o nevica più abbondatemente che nei giorni precedenti.

3. Supponiamo che sia vero che «Lucia non ha attivato la suoneria del telefono o lo ha lasciato a casa». Se ne deduce che:

A. Lucia non ha il telefono con sé;
B. il telefono di Lucia è spento;
C. se Lucia non ha attivato la suoneria del telefono, allora lo ha lasciato a casa;
D. se Lucia ha lasciato il telefono a casa, allora non ha attivato la suoneria;
E. è falso che la suoneria del telefono di Lucia sia attiva e che lo abbia con sé.

4. Michele dice: «Il compito di matematica e quello di italiano sono andati bene. Il compito di storia e quello di geografia non sono andati bene, o il compito di scienze non è andato bene». Quindi:

A. Il compito di matematica è andato bene, quello di storia non è andato bene.
B. Il compito di storia, o il compito di geografia o quello di scienze non è andato bene.
C. Se il compito di scienze è andato male, allora quelli di storia e geografia sono andati bene.
D. Uno tra il compito di storia e quello di geografia non è andato bene.
E. Nessuna delle risposte è corretta.

5. Confronta gli enunciati della lista alfabetica, proposti in italiano corrente, con quelli della lista numerica, scritti utilizzando solo combinazioni di congiunzione e disgiunzione. Queste ultime combinazioni possono essere utilizzate per riscrivere gli enunciati della lista alfabetica in modo logicamente ineccepibile, preservandone il senso:

(a) Benché sia giorno, c'è poca luce.
(b) Sebbene abbiano pagato il biglietto entrambi, Anna e Marco non hanno assistito allo spettacolo.
(c) Almeno uno tra Filippo e Maria Grazia deve ancora mangiare la pasta.
(d) Tenere il tuo comportamento è incompatible con lo svolgersi della lezione.
(e) Né Piero, né Carlo, né Vieri hanno visto la partita ieri sera.
(f) Potrà vincere la partita al massimo uno tra Dario e Tommaso.
(g) Uno e uno solo tra Andrea, Matilde o Lavinia può essere il colpevole.

(1) Federico ha vinto al gioco o Luigi ha vinto al gioco.
(2) Piove e c'è il sole.
(3) Andrea non va al compleanno di Lavinia e Matilde non va al compleanno di Lavinia, o Andrea non va al compleanno di Lavinia e Matilde va al compleanno di Lavinia o Andrea va al compleanno di Lavinia e Matilde non va al compleanno di Lavinia.
(4) Piero ha ordinato il pesce e Piero non ha finito il pesce e Carlo ha ordinato il pesce e Carlo non ha finito il pesce.
(5) Filippo non ha mangiato la pasta e Maria Grazia non ha mangiato la pasta e Vieri non ha mangiato la pasta.
(6) Dario vince la partita o Tommaso vince la partita ed è falso che Dario e Tommaso vincono la partita.
(7) Piove e non c'è il sole o non piove e c'è il sole.

Prestando molta attenzione ai trabocchetti, indica quale risposta accoppia gli enunciati in modo corretto:

A. a2, b1, c6, d3, e5, f7, g6.
B. a2, b4, c1, d7, e5, f3, g6.

C. a7, b2, c1, d7, e5, f6, g3.
D. a2, b1, c4, d3, e6, f5, g7.
E. Nessuna delle precedenti.

6. In questo caso, le frasi logicamente corrette compaiono nella lista alfabetica, mentre quelle dell'elenco numerico sono scritte in linguaggio corrente. Di nuovo, rifletti su quali combinazioni di congiunzione e disgiunzione possono essere utilizzate per riscrivere queste ultime in modo da farne emergere con chiarezza la forma logica:

(a) Kurt Gödel nacque a Brno e Kurt Gödel studiò a Vienna e Kurt Gödel si trasferì a Princeton, New Jersey e Kurt Gödel morì a Princeton, New Jersey.
(b) Lorenzo è sposato con Olga, o Lorenzo è sposato con Francesca, o Mattia è sposato con Olga, o Mattia è sposato con Francesca.
(c) Matilde ha preso 8 a scienze, o Matilde ha preso meno di 8 a scienze ed è falso che Matilde ha preso più di 8 a scienze.
(d) Matilde ha preso 8 a scienze, o Matilde ha preso più di 8 a scienze ed è falso che Matilde ha preso meno di 8 a scienze.
(e) Matilde ha preso 8 a scienze, ed è falso Matilde ha preso più di 8 a scienze ed è falso che Matilde ha preso meno di 8 a scienze.

(1) Una tra Laura e Beatrice ha collaborato con uno tra Andrea e Pierluigi.
(2) Lorenzo ha almeno due figli.
(3) Daniele ha al massimo tre fratelli.
(4) Mattia ha esattamente 18 euro.
(5) Dario è slanciato e scuro di capelli. Studia alla scuola sotto casa, dove frequenta la prima media.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a5, b3, c4, d2, e3.
B. a1, b5, c3, d2, e4.
C. a5, b3, c1, d2, e4.
D. a5, b1, c3, d2, e4.
E. Nessuna delle precedenti.

Unità 4

Il condizionale

Il condizionale, anche noto come **implicazione logica**, è l'operazione che corrisponde all'espressione della lingua italiana «Se *A*, allora *B*». Essa possiede una natura 'argomentativa' per il fatto di stabilire un rapporto tra **antecedente** e **conseguente** (*vedi **Glossario***) che ricorda quello tra le ipotesi e la conclusione di un ragionamento (rapporto, quest'ultimo, che infatti si restituisce in italiano mediante un'affermazione che possiede la forma di un condizionale: «Se le ipotesi *A* e *B* valgono, allora da esse segue *C*». Questo fatto la rende una delle più significative e, come avremo modo di notare, anche una delle più discusse tra le operazioni di connessione logica degli enunciati.

1. La forma condizionale e le sue varianti

Un enunciato della forma «Se *A*, allora *B*» è composto da due **sottoenunciati** (*vedi **Glossario***): «*A*», che segue il «se» e che viene detto **antecedente** del condizionale, e «*B*», che segue l'«allora» e che viene chiamato il **conseguente** del condizionale.

Come nel caso degli altri **connettivi** (*vedi **Glossario***), anche il condizionale può 'nascondersi' dietro a espressioni comuni nel linguaggio ordinario e apparentemente del tutto diverse nella forma. Ne citiamo qui alcuni esempi rilevanti. Si consideri la frase:

Condizione sufficiente per passare l'esame è che il voto finale sia uguale o superiore a diciotto trentesimi

Essa informa che solo chi dovesse prendere un voto uguale o superiore a 18 su 30 passa l'esame. Dunque, equivale ad affermare che:

Se si ottiene un voto uguale o superiore a diciotto trentesimi, allora si passa l'esame

Si consideri invece l'affermazione secondo la quale:

Condizione necessaria per sostenere l'esame è presentare il libretto universitario

La frase informa che non si può sostenere l'esame a meno che non ci si presenti con il libretto universitario, ovvero che:

Se si vuole sostenere l'esame, allora occorre presentare il libretto universitario

Si confronti questo caso con il precedente. Presentare il libretto universitario è una condizione necessaria per sostenere l'esame, ma non sufficiente a passarlo, perché non tutti coloro che si presenteranno il libretto il giorno dell'esame lo supereranno dato che occorre anche portare a termine la prova in modo soddisfacente. D'altra parte, prendere almeno 18 è una condizione sufficiente a passare l'esame ma non necessaria a sostenerlo, perché prima ancora di rispondere alle domande della prova occorre essersi presentati con i documenti in regola.

Alla luce di queste osservazioni,«Presentare il libretto universitario e prendere almeno 18» è una condizione necessaria e sufficiente per sostenere e superare la prova. Il che è vero, esercitando una certa 'generosità logica' che è sempre necessaria con i fatti empirici, perché l'affermazione presuppone che le due condizioni indicate siano tutte e sole quelle che è necessario soddisfare per superare l'esame (e dunque, in particolare, che si consideri superfluo soddisfare le altre condizioni più banali da cui dipende la realizzazione di questo fatto, come ad esempio che il docente non risulti impossibilitato a svolgere la prova, che un evento catastrofico non impedisca alla prova di avere luogo, e chissàcos'altro).

2. Le condizioni di verità del condizionale

Si consideri adesso l'affermazione:

Se consegui il diploma di scuola media superiore, allora puoi iscriverti all'università

Supponiamo di voler determinare le condizioni alle quali detto enunciato è vero e a quali condizioni, invece, risulta essere falso. Come si diceva in precedenza, si tratta dell'affermazione secondo la quale il conseguimento del diploma della scuola secondaria è condizione sufficiente per poter accedere agli studi universitari. Questa lettura suggerisce che non sia possibile che, avendo conseguito il diploma, ci venga negata la possibilitàdi iscriversi al corso di studi universitario prescelto. Se questa condizione dovesse darsi, dunque se fosse vero l'antecedente e falso il conseguente del condizionale, l'affermazione sarebbe falsa. L'osservazione relativa al caso in questione ha carattere generale: dato un enunciato condizionale «Se *A*, allora *B*» questo è falso nel caso in cui sia vera «*A*» e falsa «*B*».

Quando vale, invece, che un enunciato di quella forma è vero? La caratteristica del condizionale nella sua versione classica, detta **implicazione materiale** o **filoniana** (*vedi* ***Glossario***), è che un'affermazione condizionale sia falsa solo nel caso indicato precedentemente, quindi se l'antecedente è vero e il conseguente è falso, e sia vera invece in tutti gli altri casi possibili (dunque, sia vera se «*A*» è vera e «*B*» è vera, se «*A*» è falsa e «*B*» è falsa e se «*A*» è falsa e «*B*» è vera). Questo assunto è in parte giustificato dall'intuizione. Ad esempio, che un'affermazione della forma «Se *A*, allora *B*» sia vera nel caso in cui «*A*» e «*B*» sono entrambe vere è piuttosto naturale. In particolare, è compatibile con l'idea che «*A*» sia condizione sufficiente al realizzarsi di «*B*» e che «*B*» sia la condizione necessaria al realizzarsi di «*A*» che soggiacciono all'interpretazione di un enunciato condizionale che si è proposto. D'altra parte, che «*B*» è la condizione necessaria al realizzarsi di «*A*» significa che non è possibile che «*A*» sia vero venendo meno «*B*». Dunque, se tanto «*B*» quanto «*A*» sono falsi rimane plausibile ritenere che sia vera l'affermazione secondo cui «Se *A* allora *B*». Infine, che «*A*» sia la condizione sufficiente al realizzarsi di «*B*» significa che se è vero «*A*» allora deve essere vero «*B*», ma ciò non esclude che quest'ultima condizione possa realizzarsi anche in assenza di «*A*» (così come la frase «Se piove, allora il cielo è nuvoloso» significa che non è possibile che piova e che il cielo sia terso, ma rimane possibile che il cielo sia nuvoloso senza che piova). Ne consegue che è plausibile che l'affermazione «Se *A*, allora *B*» continui a essere vera anche nel caso in cui «*A*» sia falso e «*B*» sia vero.

Sebbene queste considerazioni dimostrino che le condizioni di verità assegnate a un enunciato costruito utilizzando il condizionale secondo l'**interpretazione classica** (*vedi* ***Glossario***) siano legittime, in quanto risultano coerenti con l'interpretazione secondo cui attraverso di esso si realizza un nesso di condizione sufficiente e di condizione necessaria tra l'antecedente e il conseguente, sarà bene anticipare qui, in attesa di menzionarlo più diffusamente nel seguito, che questo non significa però che non ci siano difficoltà concettuali al riguardo (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 5).

3. Le leggi logiche del condizionale: alcuni esempi

Dal momento che un enunciato della forma «Se *A* allora *B*» è falso solo nel caso in cui «*A*» sia vera e «*B*» sia falsa, se «*A*» è falsa o se «*B*» è vera quell'unico caso non può realizzarsi e l'affermazione «Se *A* allora *B*» deve essere vera. In altri termini, tenuto conto del fatto che dire che un'enunciato è falso equivale ad asserire di esso la negazione (*vedi* Parte A, Unità 2), se è vero l'enuciato «Non *A* o *B*» allora è vero anche

«Se A, allora B». D'altra parte, se quest'ultimo è vero, allora non si realizza l'unico caso che lo renderebbe falso e quindi deve essere vero di conseguenza anche che «A» è falso o «B» è vero, quindi che è vero «Non A o B». Ciò significa che le affermazioni «Se A, allora B» e «Non A o B» condividono le stesse condizioni di verità (dato che la prima è vera se è vera la seconda e, viceversa, quest'ultima è vera se è vera la prima) e che sono quindi **logicamente equivalenti** (*vedi* ***Glossario***). Ciò significa che uno dei principi che discendono dall'intuizione che sta alla base di un enunciato condizionale del tipo filoniano, consiste nell'assunto che il 'senso logico' di un condizionale possa essere restituito in modo equivalente attraverso la combinazione di negazione e disgiunzione.

Supponiamo adesso che l'affermazione «Se A, allora B» sia vera. Segue che o «A» è falso, e quindi è vera l'affermazione «Non A», oppure «B» è vero e quindi è falso che valga invece «Non B». Se quel condizionale è vero, allora, è vero anche che «Non (è vero) non B o non (è vero) A». Per la corrispondenza tra disgiunzione econdizionale che si è appena stabilito, ciò significa che, nel caso in cui l'affermazione «Se A allora B» sia vera è vero anche l'enunciato condizionale che abbia «Non B» quale antecedente e «Non A» come conseguente, ovvero l'asserzione «Se non (è vero) B, allora non (è vero) A». In altre parole, dalla verità di ogni affermazione di tipo condizionale è lecito desumere la verità di un condizionale che le si **contrapponga** per il fatto di avere la negazione del suo conseguente come antecedente e la negazione dell'antecedente come conseguente (da cui il nome di **legge logica di contrapposizione**).

4. Ragionare con il «Se. . . , allora. . . »

Partiamo nuovamente dal presupposto che «Se A, allora B» sia vero e che sia vero l'antecedente «A». Il fatto che «B» non possa essere falso (perché altrimenti sarebbe falso anche l'enunciato condizionale, contrariamente a quanto si è supposto) consente di concludere che, alle condizioni date, «B» è vero. Quindi, posto che sia vero che:

Se il carburatore è rotto, allora la macchina non può partire

dal fatto che:

Il carburatore è rotto

si deduce che:

La macchina non può partire

L'osservazione ha carattere generale e rappresenta un tipico esempio di deduzione logica che coinvolge una **premessa** (*vedi* ***Glossario***) di tipo condizionale. Il senso del ragionamento si riassume col dire che se di un condizionale vero vale l'antecedente, allora se ne deduce la verità del conseguente.

Si noti invece che data la stessa assunzione «Se A allora B» e supposto che sia vero «B» non si hanno ragioni sufficienti a ritenere che sia vero l'antecedente «A». Infatti, posto sia vera l'asserzione secondo la quale «Se il carburatore è rotto, allora la macchina non può partire», dal fatto che «La macchina non può partire» non si può concludere allora che «Il carburatore è rotto», dato che la causa dell'inconveniente potrebbe un'altra (ad esempio, che manchi la benzina). Contrariamente al caso illustrato in precedenza, questa forma di ragionamento, che non rispetta la logica del condizionale, non è corretto ed è un esempio di **fallacia logica** (*vedi* Parte C, Unità 8). Al contrario, se un'asserzione della forma «Se A, allora B» è vera ed è vera la negazione del conseguente (quindi, se è falso «B»), deve essere falso anche l'antecedente dal momento che la verità di quest'ultimo renderebbe falso l'enunciato condizionale, contrariamente all'ipotesi. Nel caso dell'esempio di cui si è fatto uso fin qui, ciò significa che posto che sia vero che:

Se il carburatore è rotto, allora la macchina non può partire e supponendo anche che:

La macchina parte

è corretto dedurre anche che:

Il carburatore non è essere rotto

(dato che se lo fosse, la macchina non partirebbe per la prima assunzione contrariamente a quanto si ravvisa). Si tratta anche in questo caso di una forma di ragionamento corretto che coinvolge l'uso del condizionale e che si riassume col dire che se di un condizionale vero è falso il conseguente, allora è falso anche l'antecedente.

Avremo modo di approfondire l'analisi delle forme corrette e scorrette di ragionamenti che coinvolgono il condizionale affrontando il tema nell'unità dedicata agli *argomenti* (*vedi* Parte C, Unità 1 e seguenti).

5. L'obiezione della rilevanza

Si consideri l'enunciato:

Il carburatore della macchina di Lucia è rotto

e anche l'affermazione:

Il cielo è nuvoloso

Supponiamo che il carburatore della macchina di Lucia non abbia nulla che non va o che il cielo sia davvero nuvoloso. Ne consegue che un'affermazione come:

Se il carburatore della macchina di Lucia è rotto, allora il cielo è nuvoloso

per quanto priva di senso, risulta essere vera (poiché sarebbe falso l'antecedente o vero il conseguente). Supponiamo invece che il carburatore della macchina di Lucia sia davvero rotto o che il cielo sia sereno. In questo caso è vera invece l'affermazione, altrettanto priva di senso:

Se il cielo è nuvoloso, allora il carburatore della macchina di Lucia è rotto

Non è difficile rendersi conto allora che sotto l'ipotesi della **bivalenza**, ovvero che tanto «*A*» quanto «*B*» possano essere solo vere o false, si realizza talvolta l'una o in alternativa la seconda condizione e che dunque è vero «Se *A*, allora *B*» o, in alternativa, «Se *B*, allora *A*» (dove «*A*» e «*B*» indicano l'uno o l'altro dei due **enunciati atomici** - *vedi* ***Glossario***- di cui si compone l'esempio). L'osservazione si presta a essere generalizzata: prese due affermazioni qualsiasi «*A*» e «*B*», o accade che l'una 'implica' l'altra (cioè, è vero il condizionale «Se *A*, allora *B*»), o, in alternativa, che la seconda 'implica' la prima (quindi, che «Se *B*, allora *A*»). Ciò contravviene l'intuizione che, prima ancora che essere vero o falso, un enunciato condizionale abbia senso solo se esiste un 'legame' tra ciò che si dichiara nell'antecedente e ciò che invece si dice nel conseguente: quindi se si dice «Se *A*, allora *B*» per dire che «Se vale *A*, allora vale *B*» e dunque per anteporre il realizzarsi «*A*» come 'causa' del realizzarsi di «*B*». Così non è, invece, come mostra l'esempio preso in esame, nel caso dell'implicazione materiale (che è tale perché tiene conto solo delle condizioni di verità di antecedente e conseguente e non di ciò che essi 'dicono').

Questa osservazione ha dato vita a una critica dell'interpretazione classica del condizionale basata una lettura alternativa, una **logica della rilevanza** fondata sull'idea che il nesso condizionale rifletta un legame di significato tra antecedente e conseguente.

Esercizi Unità 4

1. Si supponga che valga la seguente affermazione: «Se Piero prende la macchina e passa a prendere Marco, allora verranno alla festa e porteranno le bibite». Supponiamo anche che alla festa in questione le bibite sono mancate del tutto. Se ne deduce che:

A. Piero non ha preso la macchina;
B. Piero e Marco non sono andati alla festa;
C. Piero e Marco sono andati alla festa e non hanno portato le bibite;
D. Se Piero ha preso la macchina, allora non è passato a prendere Marco;
E. Piero ha preso la macchina ma non è passato a prendere Marco.

2. Secondo quanto l'insegnante dice a Vanessa «Prendendo il massimo dei voti all'esame di maturità o superando il test di accesso con un punteggio superiore a 100, è possibile iscriversi a un corso di alta formazione universitaria e usufruire di una borsa di studio». Se Vanessa non riesce ad avere il massimo dei voti alla maturità e totalizza un punteggio di 99 al test di accesso, allora:

A. Vanessa non potrà iscriversi al corso di alta formazione.
B. Vanessa potrà iscriversi al corso ma senza usufruire di una borsa di studio.
C. Vanessa non potrà iscriversi al corso o non potrà usufruire della borsa.
D. Vanessa non potrà iscriversi al corso e quindi non potrà usufruire della borsa.
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

3. Dario dice: «Se è falso che Tommaso e Andrea hanno portato via le carte, allora possiamo fare una partita a scopa o a briscola». Se l'affermazione di Dario è falsa, allora:

A. Possiamo giocare a scopa ma non a briscola.
B. Tommaso o Andrea hanno portato via le carte.
C. Tommaso non ha portato via le carte.
D. Possiamo giocare a briscola ma non a scopa.
E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

4. Secondo Francesca: «Se la richiesta dei biglietti per il concerto non cala o si decide di tenerlo in un teatro piccolo, allora non è vero che i prezzi scenderanno e che riusciremo a trovare dei buoni posti». Se l'affermazione è vera, allora:

A. Se i prezzi scenderanno e troveremo buoni posti, allora la richiesta dei biglietti cala.
B. Il concerto si terrà in un grande teatro e la richiesta dei biglietti calerà.
C. I prezzi non scenderanno oppure non riusciremo a trovare buoni posti.
D. Il prezzo dei biglietti è destinato a scendere.
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

5. Sia *A* l'affermazione «Si è verificato un buon accumulo di pioggia e un soleggiamento diffuso» e sia *B* l'affermazione «I funghi nascono». Dire che «*A* è condizione necessaria di *B*» significa dire che «*A*» è vero:

A. Solo se è vero «*B*».
B. Se è vero «*B*».

C. Se e solo se «B».
D. Se valgono tutte le risposte precedenti.
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

6. Siano A B come da consegna dell'esercizio precedente. Dire che «A è condizione sufficiente di B» significa dire che «A» è vero:

A. Se è vero «B».
B. Solo se è vero «B».
C. Se e solo se «B».
D. Se valgono tutte le risposte precedenti.
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

7. Confronta gli enunciati della lista alfabetica, proposti in italiano corrente, con quelli della lista numerica, nei quali si fa uso solo di combinazioni logiche che coinvolgono negazione e implicazione. Rifletti su quali di esse possono essere utilizzate per riscrivere gli enunciati della lista alfabetica in modo logicamente ineccepibile, preservandone il senso:

(a) Basta piova, che la strada diventa subito pericolosa.
(b) Condizione sufficiente per partecipare al concorso è non avere procedimenti penali a carico.
(c) Condizione necessaria per frequentare la piscina è presentare un certificato medico di buona salute.
(d) A meno di ulteriori ritardi, sarò presente alla cena.
(e) L'ipotesi di chiudere le frontiere contraddice la validità del trattato di Schengen.

(1) Se Lucia è al concerto, allora non viene alla cena.
(2) Se il governo dovesse alzare le tasse, allora vi sarebbe una contrazione dei consumi.
(3) Se non è vero che hai preso tu le chiavi di casa, allora deve essere stato Dario.
(4) Se il telefono si accende, allora la batteria è carica.
(5) Se non cambi tono, allora possiamo anche smettere di discutere.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a2, b3, c4, d5, e1.
B. a4, b3, c2, d5, e1.
C. a2, b5, c4, d3, e1.
D. La A e la C.
E. La A, la B e la C.

8. In questo caso, la lista alfabetica contiene asserti che fanno uso solo di combinazioni logiche dei connettivi fondamentali, mentre quelle dell'elenco numerico sono scritte in linguaggio corrente. Rifletti su quali tra le forme logiche presentate sono adatte per riscrivere queste ultime in modo ineccepibile:

(a) Se non A implica A, allora A.
(b) Se A allora B e se B allora C, allora se A allora C.
(c) Se A allora non B e se B allora non A.
(d) Se A allora non B e se B allora non A e se B allora non C e se C allora non B e se A allora non C e se C allora non A.
(e) Se A allora B e C, oppure se B allora A e C, oppure se C allora A o B.

(1) Gli amici di Lorenzo sono miei amici e i miei amici sono amici di Rocco; dunque, gli amici di Lorenzo sono amici di Rocco.
(2) Da una tra le ipotesi che l'omicida sia un familiare della vittima, che la vittima non fosse sola in casa e che conoscesse il suo assassino seguono le due ipotesi rimanenti.
(3) Essere d'accordo con Luigi, con Patrizia e con Antonio sono a due a due incompatibili.
(4) Se il fatto che $\sqrt{2}$ è irrazionale segue dalla propria negazione, allora è vero.
(5) Essere cittadino extracomunitario disoccupato e possedere il permesso di soggiorno sono condizioni incompatibili.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a4, b1, c4, d2, e5.
B. a5, b2, c3, d5, e1.
C. a4, b1, c5, d3, e2.
D. a5, b3, c5, d1, e2.
E. Nessuna delle precedenti.

Unità 5

Il bicondizionale

L'operazione logica detta bicondizionale, talvolta indicata anche come **doppia implicazione** o **equivalenza logica**, corrisponde all'espressione della lingua italiana «*A* se e solo se *B*». Si tratta di un'operazione che collega tra loro asserzioni che sono **logicamente equivalenti** (*vedi **Glossario***), dunque asserzioni che hanno lo stesso valore di verità e perciò tali che non si dà il caso che l'una sia vera e l'altra falsa, così come che l'una sia falsa e l'altra vera.

1. Il senso logico del bicondizionale

Si consideri l'enunciato:

Aldo viene alla festa se e solo se viene Beatrice

L'informazione che è possibile ricavare da questa affermazione è duplice. Da un lato, infatti, ci dice che se Aldo viene alla festa, allora viene anche Beatrice e dunque, analizzando il **condizionale** come abbiamo imparato a fare (*vedi* Parte A, Unità 4), che non è possibile che Beatrice sia alla festa se non c'è anche Aldo. Dall'altro lato, quella stessa affermazione dice che se Beatrice viene alla festa allora viene anche Aldo, dunque non è possibile che alla festa ci sia Aldo ma non Beatrice. Mettendo insieme le due osservazioni, se ne deduce che l'affermazione di partenza è vera se Aldo è alla festa e c'è anche Beatrice oppure se né Aldo, né Beatrice sono alla festa. Questo significa dire che un'affermazione della forma «*A* se e solo se *B*» è vera se le due affermazioni di cui si compone quella di partenza, *A* e *B*, sono entrambe vere o entrambe false (quindi se hanno lo stesso **valore di verità** - *vedi **Glossario***).

L'analisi del bicondizionale appena proposta rivela in quale senso un enunciato della forma «*A* se e solo se *B*» sia un 'doppia implicazione': perché da un lato 'contiene' l'affermazione che «Se *A*, allora *B*», dall'altro quella per cui «Se *B*, allora *A*». Seguendo il ragionamento precedente, in effetti, è facile convincersi che se l'affermazione bicondizionale è vera allora è vera la doppia implicazione e, viceversa, che se quest'ultima è vera è vera anche l'affermazione di partenza.

Data la relazione che sussiste tra una frase della forma «Se *A*, allora *B*» e l'affermazione secondo cui «*A* è condizione sufficiente affinché si realizzi *B*» e con l'affermazione che «*B* è condizione necessaria per il realizzarsi di *A*», l'enunciato bicondizionale «*A* se e solo se *B*» può essere visto come la versione logicamente ineccepibile di quello secondo cui: «*A* è la condizione necessaria e sufficiente di *B*».

2. L'uso del bicondizionale

Se, come si è detto, un'affermazione bicondizionale stabilisce che una certa condizione descritta dall'enunciato «*A*» è necessaria e sufficiente al realizzarsi di una seconda condizione, descritta dall'enunciato «*B*», non dovrebbe essere difficile comprendere perchè il bicondizionale sia un'operazione logica alla quale si ricorre tipicamente nella clausole delle definizioni dei concetti. Si consideri ad esempio l'affermazione:

Un numero intero si dice perfetto se e solo se è uguale alla somma dei suoi divisori propri

Con essa si intende dire appunto che la condizione necessaria e sufficiente perché un numero possa dirsi «perfetto» è che esso sia pari alla somma aritmetica dei divisori diversi dal numero stesso, i «divisori propri» della frase. In altre parole, la definizione legittima a considerare vera un'affermazione del tipo «*n* è perfetto» per tutti e soli i numeri interi *n* che soddisfano la condizione che il bicondizionale 'connette' al concetto in questione, dunque agli *n* che sono la somma dei loro divisori propri.

Dal momento che di due enunciati «*A*» e «*B*» si dice che essi sono logicamente equivalenti (dunque, tali che è vera per essi l'affermazione «*A* se e solo se *B*») nel caso in cui l'uno sia vero se è vero l'altro e l'altro sia vero se lo è il primo, «*A*» può essere sostituito a «*B*» in qualsiasi **argomento** (*vedi **Glossario***) nel quale compaia quest'ultimo salvaguardandone la **validità logica** (*vedi **Glossario***). Analogamente, «*B*» può essere sostituito ad «*A*» in un argomento preservandone la validità. Supponiamo, ad esempio, che qualcuno svolga il ragionamento seguente:

Bruno viene alla festa solo se viene Anna
Anna viene se e solo se non viene Beatrice.
Dunque, se Beatrice viene alla festa, allora non viene Bruno

Supponiamo poi che:

Aldo viene alla festa se e solo se viene Beatrice

Dovrebbe risultare chiaro, esercitando l'intuizione, che la versione del breve argomento che si è presentato può essere riformulato sostituendo alla frase «Beatrice viene alla festa» l'affermazione «Aldo viene alla festa». Dal momento che questi due asserti sono logicamente equivalenti, dunque sono entrambi veri o entrambi falsi, la sostituzione non inficia la bontà del ragionamento e vale allora che l'argomento nella prima forma è valido (ovvero comporta 'per logica' che se ne sottoscriva la conclusione, se si concedono le premesse) se e solo se risulta tale nella seconda forma. La piena comprensione del tema, qui solo accennato per ragioni di spazio e opportunità, presuppone la conoscenza delle nozioni fondamentali relative alla logica dell'argomentazione, trattata più avanti nel volume (*vedi* Parte C).

Esercizi Unità 5

1. Supponiamo che si affermi: «Le temperature caleranno se e solo se l'anticiclone si indebolirà». Se l'affermazione è falsa, se ne deduce che:

A. Le temperature non caleranno oppure l'anticiclone si indebolirà.
B. Le temperature caleranno ma l'anticiclone non si indebolirà.
C. Le temperature caleranno o l'anticiclone non si indebolirà.
D. Le temperature non caleranno e l'anticiclone si indebolirà.
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

2. «Chiamo se e solo se non vengo». Se l'affermazione è vera, se ne deduce che:

A. È falso che se vengo allora non chiamo.
B. Se non chiamo allora non vengo ma se non vengo allora chiamo.
C. O vengo, o non chiamo.
D. Se vengo, allora non chiamo.
E. Nessuna delle risposte precedenti è vera.

3. Sia «*A*» l'affermazione «Si è verificato un buon accumulo di pioggia e un soleggiamento diffuso» e sia «*B*» l'affermazione «I funghi nascono». Dire che «*A* è condizione necessaria e sufficiente di *B*» significa che «*A*» è vero:

A. Se è vero «*B*».
B. Se e solo se «*B*».
C. Solo se è vero «*B*».
D. In tutti i casi precedenti.
E. In nessuno dei casi precedenti.

4. Siano «*A*» e «*B*» come nella consegna dell'esercizio precedente. Dire che «*A* è condizione necessaria e sufficiente di *B*» significa dire che «*B*» è falso:

A. Se è vero «*A*».
B. Solo se «*A*» è falso.
C. Se e solo se è falso «*A*».
D. In tutti i casi precedenti.
E. Solo nei casi delle risposte A e B.

5. Siano «*A*», «*B*», «*C*», «*D*» affermazioni qualsivoglia. Confronta gli enunciati della lista alfabetica, proposti in italiano corrente, con quelli della lista numerica nei quali si fa uso solo di combinazioni logiche dei connettivi fondamentali. Rifletti su quali di esse possono essere utilizzate per riscrivere gli enunciati della lista alfabetica in modo logicamente ineccepibile, preservandone il senso:

(a) *A* è vera esattamente nel caso in cui è falsa *B*.
(b) *A* e *B* sono condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia falso che *D* e *C* valgono.
(c) *A* è vera esattamente nel caso in cui è vera *B*, che vale se e solo se valgono *D* o *C*.
(d) Due tra *A*, *B* e *C* si implicano a vicenda.
(e) *A* è falso se *B* è falso e viceversa ma *B* vale esattamente se vale *C*.

(1) *A* e *B* se e solo se non è vera *D* o non è vera *C*.
(2) *A* se e solo se *B* se e solo se *D* o *C*.
(3) Non è vera *A* se e solo se non è vera *B*, e *B* se e solo se *C*.
(4) *A* se e solo se *B* o *A* se e solo se *C* o *B* se e solo se *C*.
(5) *A* se e solo se non *B*.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a5, b1, c2, d4, e3.
B. a5, b2, c1, d4, e3.
C. a2, b5, c4, d3, e1.
D. a3, b1, c3, d2, e4.
E. a5, b2, c1, d3, e4.

6. In questo caso, la lista alfabetica contiene asserti che fanno uso solo di combinazioni logiche dei connettivi fondamentali, mentre quelle dell'elenco numerico sono scritte in linguaggio corrente. Rifletti su quali tra le forme logiche presentate sono adatte per riscrivere queste ultime in modo ineccepibile:

(a) Se *A* allora *B* e se non *A* allora non *B*.
(b) Se non *A* allora *B* e se *B* allora non *A*.
(c) *A* se e solo se *B* o *C* e *A* se e solo se non è vero che *B* e *C*.
(d) *A* se e solo se *B* o *A* se e solo se *C* o *B* se e solo se *C* ed è falso che *A* se e solo se *B* e *A* se e solo se *C* e *B* se e solo se *C*.
(e) *A* se e solo se *B* o *A* se e solo se *B* o *B* se e solo se *C* ed è falso *A* ed è falso *B* ed è falso *C*.

(1) Due e solo due tra *A*, *B* e *C* si implicano a vicenda.
(2) *A* (vale) se e solo se *B* (vale).
(3) Due tra gli enunciati *A*, *B* e *C* si implicano a vicenda ma sono tutti e tre falsi.
(4) *A* vale se e solo se uno e uno solo tra *B* e *C* vale.
(5) *A* è falso se e solo se *B* è vero.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a5, b2, c4, d1, e5.
B. a5, b2, c3, d4, e1.
C. a2, b5, c4, d1, e3.
D. a2, b5, c1, d4, e5.
E. a5, b2, c5, d3, e1.

Unità 6

Formalizzare i connettivi

Nelle unità precedenti, abbiamo già avuto modo di notare come i **connettivi** (*vedi* ***Glossario***) che abbiamo indicato come fondamentali si nascondono talvolta dietro a locuzioni che svolgono perlopiù una funzione 'retorica', ovvero servono a dare una certa enfasi alle nostre affermazioni e alle loro sottoparti, ma non rispondono a un'esigenza di natura logica. Da questo punto di vista, quindi, queste locuzioni sono operazioni assimilabili ai connettivi di base o alle loro combinazioni. Così, ad esempio, un'affermazione come «Enrico non è un musicista di talento ma possiede tanta disciplina», risponde alla stessa logica della frase «Enrico non è un musicista di talento e possiede tanta disciplina», in quanto le **condizioni di verità** (*vedi* ***Glossario***) dell'una, sono le stesse dell'altra. Questo fatto suggerisce che per individuare meglio la logica soggiacente al discorso dichiarativo, occorre talvolta modificare il modo in cui le affermazioni vengono formulate nella pratica quotidiana della lingua.

1. Formalizzare gli enunciati: cosa vuol dire, a cosa serve

Delle espressioni appartenenti a un linguaggio ordinario, o a una **lingua naturale** come avremo modo di dire nel seguito per contrapporre le lingue d'uso comune a quelle simboliche o **formali** che ci apprestiamo a introdurre, occorre distinguere la **sintassi** dalla loro **semantica**. Appartengono alla sintassi le caratteristiche delle espressioni che riguardano la loro 'costruzione', in particolare il numero dei **sottoenunciati atomici** (*vedi* ***Glossario***) e come questi siano legati tra loro dai **connettivi**. Appartengono alla semantica, le relazioni che le espressioni intrattengono con il 'mondo' di cui esse 'parlano', il loro **universo del discorso** (*vedi* ***Glossario***), e che dipendono da ciò che dette espressioni 'dicono' (*vedi* anche il par. 5 di questa Unità). Con il termine **formalizzazione** ci si riferisce al processo in base al quale, individuate le componenti logiche e sintattiche delle affermazioni appartenenti a una lingua naturale, si procede a sostituirle con i simboli di un alfabeto opportunamente scelto al fine di eliminare la relazione di significato tra le espressioni linguistiche e il 'mondo' per evidenziare invece solo le caratteristiche di quelle espressioni che concorrono a determinarne la **forma logica** (*vedi* ***Glossario***).

Formalizzando un enunciato è possibile così ottenere di esso una versione che ne esalti le caratteristiche relative alla sua struttura logica. Vengono messe in risalto in questo modo quali sono le proprietà dell'espressione linguistica da cui si è preso le mosse che prescindono dal significato delle sue parti e ci si mette in condizione di stabilire cosa si può dire di essa sulla base delle sole caratteristiche logiche che presenta.

2. Il procedimento per passi successivi

Al fine di formalizzare correttamente un enunciato del linguaggio ordinario, occorre essere in grado di portare a termine i passaggi preliminari indicati qui di seguito:

1. identificare numero e tipologia dei **sottoenunciati** (*vedi* ***Glossario***) della frase: come tutti gli enunciati dichiarativi, anche la frase prescelta sarà costituita da sottoparti enunciative, i suoi sottoenunciati, combinate tra loro per mezzo dei connettivi logici; al fine di formalizzare l'enunciato dato, occorre essere in grado di individuarle tutte e di stabilire quali di esse siano **enunciati atomici**, non

ulteriormente scomponibili, e quali siano quelli ove occorrono connettivi logici (e che sono tali, dunque, da possedere a loro volta dei sottoenunciati);

2. **identificare il connettivo principale della frase**: tra tutte le operazioni logiche di connessione dei suoi sottoenunciati, ve n'è una in particolare che determina la natura logica dell'asserzione presa in esame ed è pertanto quella **principale** (da cui dipende il fatto che l'affermazione abbia la forma di una negazione, o di una congiunzione, ecc.);

3. **definire l'alfabeto simbolico**: «formalizzare» significa letteralmente «ricondurre alla forma»; per portare a compimento tale 'riconduzione' occorre disporre di un **alfabeto simbolico** quantitativamente e qualitativamente adeguato alle parti della frase; un alfabeto, che possieda dunque una tipologia di simboli per i sottoenunciati, di un'altra tipologia per i connettivi, nonché di simboli utili a risolvere le ambiguità come le parentesi (*vedi* il par. 4 di questa Unità).

3. Il procedimento all'opera

Si consideri la frase:

Oggi splende il sole e non fa eccessivamente caldo

Supponiamo di voler individuare la forma logica della proposizione, dunque di evidenziare quanto di essa prescinde dal suo significato (ovvero da ciò che la proposizione 'dice') e dipende invece solo dalla sua composizione sintattica (da come essa 'è fatta'). Seguendo la prescrizione del paragrafo precedente, si nota innanzi tutto che la frase prescelta possiede due sottoenunciati, «Oggi splende il sole» e «Non fa eccessivamente caldo», dei quali il primo è atomico e il secondo no. Inoltre, appare evidente come l'affermazione abbia la forma di una congiunzione, che è dunque il connettivo principale della frase. In virtù di ciò si stabilisce che per formalizzare la frase considerata è necessario disporre di un alfabeto simbolico che possieda un simbolo A per la proposizione «Oggi splende il sole»; di un simbolo B per la proposizione «Fa eccessivamente caldo»; di un simbolo, che stabiliamo essere «$\neg$», per l'operazione logica negazione «non»; infine, di un simbolo, «$\wedge$», per la congiunzione «e».

Si procede poi a ricomporre la struttura della frase originaria sostituendone le parti mediante i simboli scelti. Si ottiene così una nuova espressione, una **formula** (*vedi* ***Glossario***), che appartiene al linguaggio simbolico individuato:

$$A \wedge \neg B$$

Quest'ultima si stabilisce essere la **versione formalizzata** dell'enunciato di partenza. Si noterà certamente che, nella nuova veste, l'affermazione originaria ha perduto del tutto il senso che gli era proprio in quanto espressione della lingua italiana, poiché non 'parla più del sole e del caldo, mentre è del tutto chiaro quale fosse la struttura logica che ne 'supportava' il senso e che risalta più chiaramente nella nuova forma.

Si consideri invece la frase:

Se ti sentirai meglio e il tempo lo consente, domani andremo al mare

Per isolare come in precedenza la struttura logica dell'enunciato, si nota che è costituita dalle sottoparti «Ti sentirai meglio e il tempo lo consente» e «Domani andremo al mare» (dunque, possiede tre sottoenunciati atomici, di cui due risultano connessi tra loro mediante una congiunzione). Si nota inoltre che la frase ha la forma di un condizionale, seppure l'«allora» sia sottinteso, il cui **antecedente** (*vedi* ***Glossario***) è la congiunzione «Ti sentirai meglio e il tempo lo consente», mentre il **conseguente** (*vedi* ***Glossario***) è l'affermazione «Domani andremo al mare». Supponiamo di utilizzare il simbolo «$\to$» per il connettivo «Se…, allora…». L'alfabeto simbolico di cui si ha bisogno per formalizzare l'affermazione data dovrà prevedere in aggiunta i simboli A, B e C per i sottoenunciati atomici della frase e il simbolo $\wedge$ per la congiunzione «e» come in precedenza. A questo punto si procede alla sostituzione delle parti della frasi con i simboli, ottenendo l'espressione seguente:

$$(A \wedge B) \rightarrow C$$

Si sarà certamente notato l'intervento delle parentesi tonde, che non si sono menzionate tra i simboli del nostro alfabeto. Su di esse e sul ruolo fondamentale che rivestono nel processo di formalizzazione degli enunciati, converrà soffermarci a questo punto.

4. L'importanza delle parentesi

Nella ricerca della versione formalizzata corretta delle espressioni di una lingua naturale, le parentesi vengono utilizzate per delimitare il 'raggio d'azione' dei connettivi (della congiunzione, nel caso passato in rassegna nel paragrafo precedente). Esse contribuiscono a restituire il 'senso logico' della frase originaria in modo non dissimile a come le parentesi sono usate in matematica per la corretta lettura delle espressioni, delimitando il raggio d'azione delle operazioni matematiche. L'uso delle parentesi è necessario nel caso in cui si abbia a che fare con un'affermazione nella quale si combinano tra loro connettivi diversi, onde evitare errori e ambiguità. Ad esempio, per riprendere l'esempio con il quale si è chiuso il paragrafo precedente, si rifletta sul fatto che se non si fossero utilizzate le parentesi tonde, l'espressione formale:

$$A \wedge B \rightarrow C$$

potrebbe essere 'letta' alternativamente come corrispondente all'affermazione «A e se B, allora C», o a quella desiderata «Se A e B, allora C».

L'uso delle parentesi è consigliato, seppure talvolta non sia strettamente necessario, in un contesto nel quale ci si limita a iterare l'applicazione dello stesso connettivo logico. In effetti, se si dice che «Lara è bionda, è alta 1 metro e 65 centimetri e ha gli occhi azzurri» e se si pone A per «Lara è bionda», B per «Lara è alta 1 metro e 65 centimetri» e C per «Lara ha gli occhi azzurri», non sembra esserci una differenza decisiva tra le espressioni:

$$(A \wedge B) \wedge C$$

e:

$$A \wedge (B \wedge C)$$

al punto che si potrebbe omettere del tutto l'uso delle parentesi e formalizzare l'affermazione originale più semplicemente con:

$$A \wedge B \wedge C$$

Questa regola tuttavia non ha valenza generale e, nel dubbio, il ricorso alle parentesi è sempre una soluzione lecita.

5. Sintassi e semantica

Occorre distinguere il legame che sussiste tra le espressioni di una lingua e il loro significato (il legame tra un nome come «Dario», ad esempio, e l'individuo del mondo che si chiama così), dal legame che si crea tra i simboli dell'alfabeto che si scelgono per formalizzare una frase e le espressioni che la compongono: perché in questo secondo caso si sceglie un simbolo o un sistema di simboli che rappresenti un'espressione in modo coerente con la funzione sintattica che essa e altre espressioni a essa analoghe svolgono nel contesto della frase. Quindi, ad esempio, si sceglie di utilizzare il simbolo «$\wedge$» non già per indicare la «e» della lingua italiana, bensì per indicare l'operazione di congiunzione tra due enunciati (sia essa la «e» o l'«and» della lingua inglese). Per comprendere meglio questo aspetto, si noti come versione formale dell'enunciato proposto per secondo nel paragrafo 3 rappresenti una soluzione anche del problema di formalizzare la versione inglese della frase: «If you feel better and the wheather is good, we can go to the sea tomorrow».

Esercizi Unità 6

1. Scelto A per «Rocco arriva da Roma in macchina» e B per «Nico arriva da Milano in aereo», quale espressione tra quelle proposte rappresenta la versione formale corretta della frase: «È falso che Rocco arrivi da Roma in macchina e che Nico non arrivi da Milano in aereo»?

A. $\neg(A \vee B)$.
B. $\neg A \wedge \neg B$.
C. $\neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B)$.
D. Tutte le precedenti.
E. Nessuna delle precedenti.

2. Scelto A per «La luce si accende» e B per «C'è corrente elettrica», quale espressione tra quelle proposte rappresenta la versione formale corretta della frase: «Che vi sia corrente elettrica è condizione necessaria, ma non sufficiente, perché la lampadina si accenda»?

A. $(A \to B) \wedge (\neg B \to A)$.
B. $(B \to A) \wedge (\neg B \to A)$.
C. $(A \to B) \wedge \neg(B \to A)$.
D. La A e la C.
E. Nessuna delle precedenti.

3. Scelto A per «La benzina manca», B per «L'auto parte» e C per «È guasto il carburatore», quale espressione tra quelle proposte rappresenta la versione formale corretta della frase: «Supponiamo che non manchi la benzina. Allora se l'auto non parte sarà guasto il carburatore»?

A. $\neg A \to (\neg B \to C)$.
B. $\neg A \to (\neg B \wedge C)$.
C. $\neg(A \wedge B) \to C$.
D. La A e la B.
E. Nessuna delle precedenti.

4. Sia A la frase «Dario ha nove anni», B «Dario frequenta la prima media» e C «Dario guida uno scooter rosso». Quale tra quelle proposte rappresenta la versione formale corretta dell'affermazione: «A, B, C sono a due a due incompatibili; inoltre, sono tutte false»?

A. $\neg(A \wedge B \wedge C) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$.
B. $(A \to \neg B) \wedge (B \to \neg A) \wedge (A \to \neg C) \wedge (C \to \neg A) \wedge (B \to \neg C) \wedge (C \to \neg B) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$.
C. $\neg(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C) \wedge \neg(A \wedge B \wedge C)$.
D. La B e la C.
E. La A e la B.

5. Confronta gli enunciati della lista alfabetica, proposti in italiano corrente, con quelli formalizzati della lista numerica.

(a) Non è vero che non piova.
(b) Quel diamante non è un falso!
(c) Almeno uno tra Filippo e Maria Grazia deve ancora mangiare la pasta.
(d) Né Piero, né Carlo, né Vieri hanno visto la partita ieri sera.
(e) Condizione sufficiente per partecipare al concorso è non avere procedimenti penali a carico.

(1) $\neg A$.
(2) $A \vee B$.
(3) $\neg\neg A$.
(4) $\neg A \rightarrow B$.
(5) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$.

Quale risposta accoppia ciascun enunciato con l'espressione che ne rappresenta la versione formalizzata corretta?

A. a3, b1, c4, d2, e5.
B. a4, b1, c2, d5, e3.
C. a3, b2, c1, d4, e5.
D. a1, b3, c2, d4, e5.
E. a3, b1, c2, d5, e4.

6. Confronta adesso le espressioni formali della lista alfabetica (dove $\leftrightarrow$ è il simbolo prescelto per il bicondizionale), con quelli della lista numerica, proposti in italiano corrente.

(a) $\neg A \rightarrow B$.
(b) $(A \leftrightarrow B) \vee (A \leftrightarrow C) \vee (B \leftrightarrow C)$.
(c) $(\neg A \leftrightarrow \neg B) \wedge (B \leftrightarrow C)$.
(d) $((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)$.
(e) $((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow B$.

(1) Due tra A, B e C si implicano a vicenda.
(2) A è falso se B è falso e viceversa ma B vale esattamente se vale C.
(3) Se vinciamo questa mano abbiamo vinto la partita ma se non la vinciamo, abbiamo vinto lo stesso. Dunque, vinciamo comunque.
(4) A meno di ulteriori ritardi, sarò presente alla cena.
(5) Se piove prendo l'ombrello e se fa freddo metto il cappello. Dunque, se piove e fa freddo prendo l'ombrello e metto il cappello.

Quale risposta accoppia ciascun enunciato con l'espressione che ne rappresenta la versione formalizzata corretta?

A. a3, b1, c4, d2, e5.
B. a3, b1, c2, d5, e4.
C. a5, b2, c1, d4, e3.
D. a3, b1, c2, d5, e4.
E. a4, b1, c2, d5, e3.

Unità 7

Le tavole di verità

Le **tavole di verità** sono tabelle riassuntive delle **condizioni di verità** (*vedi* ***Glossario***) degli enunciati logicamente complessi mediante le quali è possibile calcolare il **valore di verità** (*vedi* ***Glossario***) di un enunciato qualsiasi, a partire dai valori attribuiti ai propri **sottoenunciati** (*vedi* ***Glossario***) e sulla base della sua **forma logica** (*vedi* ***Glossario***).

1. Le tavole di verità e gli obiettivi dell'indagine logica

La **logica proposizionale** è la disciplina che studia le condizioni che rendono vere o false le proposizioni, validi o invalidi gli argomenti, a partire dalla struttura sintattica di queste costruzioni linguistiche e delle loro componenti (*vedi* Parte A, Unità 1). Data una qualsiasi espressione dichiarativa del linguaggio, ovvero un enunciato del quale abbia senso chiedersi se esso è vero o falso, occorre innanzi tutto individuarne le componenti enunciative, i sottoenunciati da cui esso è composto, e i **connettivi logici** (*vedi* ***Glossario***), le operazioni logiche di connessione tra sottoenunciati. Ad esempio, un'affermazione del tipo:

Se prendi la macchina, accertati di aver preso le chiavi e che ci sia benzina

ha la forma di un **condizionale** (*vedi* Parte A, Unità 4), costituito dall'enunciato «Prendi la macchina» in posizione **antecedente** (*vedi* ***Glossario***) e dall'enunciato «Accertati di aver preso le chiavi e che ci sia benzina» come **conseguente** (*vedi* ***Glossario***). Il metodo delle tavole di verità consente di stabilire per questo come per qualsiasi altro enunciato dichiarativo, in modo preciso e con metodologia calcolistica quando, cioè sotto quali condizioni di verità e falsità degli enunciati componenti, l'enunciato da composto è vero o falso.

2. Formalizziamo

Dal momento che il presupposto dell'indagine logica relativa alle condizioni di verità delle proposizioni è che la forma che esse hanno in virtù delle operazioni logiche sia determinante, occorre procedere innanzi tutto a evidenziarne la forma logica per mezzo della procedura di **formalizzazione** (*vedi* Parte A, Unità 6). Applicandola al caso dell'enunciato scelto in precedenza, ad esempio, si ottiene l'espressione:

$$A \rightarrow (B \wedge C)$$

quale risultato della sostituzione delle frasi «Prendi la macchina», «Accertati di aver preso le chiavi», «(Accertati) che ci sia benzina» mediante i simboli «A», «B», «C» rispettivamente, nonché del condizionale «Se ..., allora ...» e della congiunzione «e» mediante i simboli «$\rightarrow$» e «$\wedge$». Le parentesi sono simboli ausiliari che hanno lo scopo di delimitare il 'raggio d'azione' dei connettivi logici, stabilendo con precisione quali siano gli enunciati coinvolti nell'uso di una data operazione logica quando ce ne sia bisogno (*vedi* Parte A, Unità 6, par. 4).

La scelta dei simboli per i sottoenunciati di un'affermazione data dipendono com'è ovvio dalla struttura logica di quest'ultima. I connettivi logici fondamentali, come si è avuto modo di dire (*vedi* Parte A, Unità 1, par. 3) sono un numero finito. Ciò consente di stabilire l'alfabeto simbolico per questi ultimi una volta per tutte. La tabella seguente riassume le scelte d'uso comune al riguardo, che seguiamo anche in questo volume, illustrando la corrispondenza tra le operazioni logiche e i simboli che li rappresentano nelle formule usate per applicare il metodo delle tavole di verità:

Connettivo logico	**Simbolo**
non	$\neg$
e	$\wedge$
o	$\vee$
se…allora…	$\rightarrow$
…se e solo se…	$\leftrightarrow$

3. Calcoliamo

Una volta che di un enunciato si è individuata la forma logica, è possibile procedere alla determinazione delle condizioni che rendono l'enunciato vero o falso in modo del tutto 'calcolistico'. A tal fine, si fa uso delle tabelle che contengono l'informazione generale su quale sia l''effetto' che il ricorso ai cinque connettivi logici fondamentali ha sui valori di verità di enunciati che possiedano questi ultimi quale **connettivo principale** (*vedi* ***Glossario***). Riportiamo innanzi tutto quella relativa alla negazione, che commentiamo brevemente in modo da spiegare come va letta la tabella.

Conveniamo innanzi tutto per brevità di utilizzare il simbolo 0 per indicare il caso in cui un enunciato sia falso e il simbolo 1 per quello in cui sia vero. La tavola di verità per l'operazione di negazione logica è allora la seguente tabella:

A	$\neg A$
0	1
1	0

La colonne della tabella che si trovano alla sinistra di quella dove nella prima riga è riportato l'enunciato logicamente più complesso, che potremmo indicare nel seguito la **formula principale** della tavola («$\neg A$» nel caso in esame), contengono informazioni relative ai sottoenunciati di quest'ultima. Di queste, si riportano tutti i casi possibili relativi alle combinazioni dei rispettivi valori di verità nelle righe sottostanti. Dal momento che la tavola di verità in oggetto si riferisce all'operazione di negazione logica di una formula, la formula principale possiede un unico sottoenunciato, quello che viene negato, rispetto alla quale occorre considerare solo i due casi che sono possibili relativamente ai valori di verità che questo può assumere, ovvero il caso in cui è falso (0) e quello in cui è vero (1).

La seconda colonna, dove compare nella prima riga la formula principale della tavola, riporta nelle righe sottostanti i valori che l'enunciato logicamente complesso assume in corrispondenza ai valori di verità corrispondenti dei suoi sottoenunciati. Dunque, la negazione logica di un enunciato è vera nel caso in cui questo sia falso ed è falsa nel caso in cui sia vero: detta operazione ha in altre parole l'effetto di 'scambiare' il vero e il falso (da cui la relazione tra negare il vero e asserire il falso di cui si è discusso ampiamente - *vedi* Parte A, Unità 2, par. 1).

Tavole analoghe si danno anche nel caso degli altri connettivi logici fondamentali. Dato che si tratta sempre di connettivi **binari**, ossia di operazioni logiche che coinvolgono due sottoenunciati alla volta, occorre costruire la tabella con l'accortezza di considerare, nella parte sinistra, tutti i casi possibili derivanti dalla combinazione dei valori di verità degli enunciati componenti, dunque il caso in cui essi sono entrambi falsi, quelli in cui è vero l'uno e l'altro è falso, il caso in cui sono entrambi veri. Come nel caso della tavola della negazione, viene indicato il valore che l'enunciato complesso assume in corrispondenza a essi nella colonna in cui compare in alto la formula principale:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

A	B	$A \to B$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Date le tavole di verità per i connettivi logici singolarmente presi, è possibile costruire tavole analoghe per qualsiasi enunciato che sia ottenuto combinando tra loro le proposizioni del linguaggio per mezzo di quelle operazioni logiche. Prendiamo ad esempio l'enunciato considerato in precedenza, «Se prendi la macchina, accertati di aver preso le chiavi e che ci sia benzina», o meglio la sua versione formalizzata:

$$A \to (B \wedge C)$$

La prima cosa da notare è il fatto che delle due **sottoformule** (*vedi* ***Glossario***) che compongono l'enunciato il cui connettivo principale è un condizionale, una ha la forma di un enunciato semplice, non ulteriormente scomponibile in sottoformule, o **atomico** come si suol dire (*vedi* Parte B, Unità 1), mentre l'altro ha la forma di una congiunzione tra l'enunciato indicato mendiante il simbolo «B» e quello indicato con «C». Questo significa che per calcolare il valore di verità della formula principale mediante la tavola di verità del condizionale, occorrerà determinare prima il valore di verità di questa sottoformula utilizzando quella della congiunzione.

Il secondo aspetto notevole del caso preso in esame è dato dal fatto che le sottoformule di cui esso si compone sono tre, il che naturalmente aumenta proporzionalmente le combinazioni dei loro valori di verità e dunque il numero di casi che occorre inserire nella parte sinistra della tavola al fine di calcolare il valore di verità della formula principale in quella di destra. In generale, dato che i valori di verità possibili di ogni formula sono 2, il vero e il falso, segue che il numero totale delle combinazioni di cui occorre tenere conto nella costruzione della tavola di verità di una data formula è 2^n, dove n è il numero delle sue sottoformule atomiche.

Al di là di queste specificità la struttura della tabella è esattamente la stessa delle precedenti, come si può vedere qui di seguito. Per convenienza e per illustrare meglio il metodo, sono stati indicati, in una colonna sottostante il connettivo che la determina, i valori di verità che, in corrispondenza a ogni caso considerato, possiede la sottoformula di forma congiuntiva. I valori di verità dell'enunciato nel suo complesso compaiono invece in colonna sotto al suo connettivo principale, quello che ne determina la forma logica e che in questo caso è l'implicazione, e sono racchiusi in un box per rendere più immediata la lettura della tavola:

A	B	C	A	$\boxed{\to}$	$(B$	$\wedge$	$C)$
0	0	0		1		0	
0	0	1		1		0	
0	1	0		1		0	
1	0	0		0		0	
0	1	1		1		1	
1	0	1		0		0	
1	1	0		0		0	
1	1	1		1		1	

4. Valutiamo

Se si è avuto modo di leggere l'unità didattica introduttiva dedicata alla logica proposizionale (*vedi* Parte A, Unità 1), si ricorderà che si sono suddivisi gli enunciati dichiarativi in tre categorie a seconda del 'comportamento' che hanno rispetto alla verità o alla falsità dei loro sottoenunciati. In particolare si distingue tra le **verità logiche**, gli enunciati che sono veri per qualsiasi attribuzione di un valore di verità ai propri sottoenunciati, le **contraddizioni logiche**, che invece sono sempre false, e gli enunciati **logicamente neutri**, che sono talvolta veri e talvolta falsi.

Il metodo delle tavole di verità consente di riconoscere facilmente la categoria di appartenenza di un dato enunciato. Ad esempio, quello che si è esaminato al paragrafo precedente appartiene chiaramente al novero degli enunciati logicamente neutri, dal momento che nella sua veste formale risulta essere vero per alcune combinazione di valori di verità delle sottoformule e falso per altre. Le tavole di verità che si riportano qui di seguito, invece, sono esempi del caso in cui si sia sottoposto a valutazione l'**istanza** (*vedi* ***Glossario***) di una verità e di una contraddizione logica rispettivamente. Come utile esercizio ricapitolativo della scheda, si consiglia al lettore di verificare la correttezza dei valori inseriti in tabella, cercando di determinarli passo dopo passo e calcolando prima il valore di verità delle sottoformule per ognuno dei casi considerati;

A	B	$(A \to B)$	$\vee$	$(B \to A)$
0	0		1	
1	0		1	
0	1		1	
1	1		1	

A	B	$(A \to B)$	$\to$	$(\neg A \to \neg B)$
0	0		0	
1	0		0	
0	1		0	
1	1		0	

5. Ancora sull'interpretazione classica dei connettivi

Le tavole di verità si prestano a una lettura informale dalla quale emergono le assunzioni fondamentali che spiegano i valori in esse riportati. È il caso della tavola per il connettivo di negazione, dalla quale emerge come questa operazione scambi il vero con il falso e viceversa. In effetti, i valori della tavola rivelano come «non è vero» corrisponda a «falso» e analogamente come «non è falso» corrisponda a «vero». Prima ancora di questo genere di considerazioni, che si riferiscono al contenuto 'analitico' della tavola, frutto dell'applicazione del metodo delle tavole di verità al fine di analizzare le proprietà delle formule derivanti dalla loro forma logica, un'altra osservazione cruciale riguarda la parte 'descrittiva' di essa, quella di sinistra, dove sono indicati in una lista esaustiva tutti i casi possibili a cui sottoporre la disamina. In essa, infatti, si riportano come detto solo i casi derivanti dall'assunto che gli enunciati possono essere veri o falsi al più e che essi si trovano sempre in uno di questo due 'stati'. Assunzioni come queste costituiscono il fondamento dell'**interpretazione classica dei connettivi**, di cui si è già avuto modo di illustrare ampiamente la natura insieme agli aspetti più critici (*vedi* Parte A, Unità 1, par. 4).

Esercizi Unità 7

1. Formalizza la seguente affermazione:

($\star$) È falso che Luca abbia deciso di raggiungerci e Nicola invece no.

Con l'aiuto delle tavole di verità stabilisci quale tra le seguenti affermazioni dà vita a una verità logica una volta formalizzata e posta a conseguente di un condizionale di cui ($\star$) sia l'antecedente:

A. Luca non ci raggiunge e Nicola sì;
B. se Luca non ci raggiunge, allora Nicola ci raggiunge;
C. se Luca non ci raggiunge, allora Nicola non ci raggiunge;
D. se Nicola ci raggiunge, allora Luca ci raggiunge;
E. se Nicola non ci raggiunge, allora Luca non ci raggiunge.

2. Formalizza le affermazioni seguenti:

(1) Andiamo al cinema oppure non andiamo a mangiare una pizza.
(2) Andiamo a prendere un aperitivo se e solo se andiamo a mangiare una pizza.
(3) Non possiamo andare a prendere un aperitivo e al cinema ma faremo l'una cosa o l'altra.

Con l'aiuto delle tavole di verità stabilisci quale, tra le seguenti affermazioni, dà vita a una verità logica una volta formalizzata e posta a conseguente di un condizionale di cui la congiunzione di (1), (2) e (3) sia l'antecedente:

A. se non andiamo a mangiare una pizza allora andiamo a prendere un aperitivo;
B. se andiamo a prendere un aperitivo, allora andiamo a mangiare una pizza;
C. non è vero che andiamo a prendere un aperitivo o a mangiare una pizza, ma andremo al cinema;
D. andiamo a prendere un aperitivo o andiamo a mangiare una pizza;
E. andiamo al cinema se e solo se andiamo a prendere un aperitivo.

3. Sia data la seguente formula:

($\star$) $(A \to (B \to C))$.

Quale tra i seguenti enunciati, posto a conseguente di un condizionale di cui ($\star$) è l'antecedente, dà vita a una verità logica?

A. $(A \to (C \to \neg B))$.
B. $(A \to (C \to B))$.
C. La congiunzione di 1 e 2.
D. La disgiunzione di 1 e 2.
E. $(\neg B \vee (A \to C))$.

4. Siano date le formule seguenti:

(1) $(A \to B)$.
(2) $(A \to C)$.

Quale tra i seguenti enunciati, posto a conseguente di un condizionale di cui la congiunzione di (1) e (2) è l'antecedente, dà vita a una verità logica?

A. $(\neg A \to (\neg B \lor \neg C))$.
B. $(A \to (B \leftrightarrow C))$.
C. $(A \to \neg(\neg B \lor \neg C))$.
D. $(B \land C)$.
E. $((B \land C) \to \neg A)$.

5. Si consideri la formula:

$(\star)$ $(A \to B)$.

Quale tra i seguenti enunciati, posto a conseguente di un condizionale di cui $(\star)$ è l'antecedente, dà vita a una verità logica?

A. $(\neg A \to \neg B)$.
B. $(B \lor \neg A)$.
C. $\neg(A \lor B) \land (\neg A \land \neg B)$.
D. La congiunzione di 1 e 2.
E. La B e la D.

6. Siano date le formule:

(1) $(A \to B)$.
(2) $(B \to A)$.

Quale tra i seguenti enunciati, posto a conseguente di un condizionale di cui la formula $(1) \to (2)$ è l'antecedente, dà vita a una verità logica?

A. $(\neg A \lor \neg B)$.
B. $(B \to A)$.
C. La congiunzione di 1 e 2.
D. $(A \leftrightarrow B)$.
E. La A e la C.

7. Sia data la formula:

$(\star)$ $\neg(A \land B)$.

Quali delle seguenti formule è *logicamente equivalente* a $(\star)$?

A. $(\neg A \land \neg B)$.
B. $(\neg A \to B)$.
C. $(A \lor B)$.
D. $(A \to \neg B)$.
E. $(A \leftrightarrow \neg B)$.

Parte B – La logica di predicati e relazioni

R. Bruni, Dialogare: *compendio di logica*, ISBN (online) 978-88-6453-475-6, CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Unità 1

Gli enunciati atomici

Come suggerisce il nome, gli enunciati atomici sono enunciati dichiarativi che non sono ulteriormente scomponibili in **sottoenunciati** (*vedi* ***Glossario***) e che quindi non presentano alcuna occorrenza dei **connettivi logici** (*vedi* ***Glossario***). Detto in modo forse un po' brutale ma efficace, gli enunciati atomici coincidono con quelle affermazioni del linguaggio ordinario attraverso le quali si assegnano proprietà a oggetti o individui, oppure si stabilisce che tra un gruppo di oggetti o di individui sussiste una data relazione che li lega.

Si consideri la frase:

Dario è simpatico

Si tratta di un'affermazione attraverso la quale si assegna all'individuo denominato «Dario» la proprietà di «essere simpatico». Che si tratti di un enunciato atomico dipende dal fatto che non è possibile ravvisare 'parti' dell'affermazione in esame che siano a loro volta delle frasi di senso compiuto. Un segno evidente della natura 'atomica' dell'affermazione è l'assenza di connettivi logici, che sono invece un ingrediente essenziale degli enunciati composti (*vedi* Parte A, Unità 2-5).

1. Il senso degli enunciati atomici: l'universo del discorso

Per poter comprendere il senso di un enunciato atomico, prima ancora di essere in grado di dire di esso se sia vero o meno, occorre partire dal nesso che le sue parti intrattengono con il 'mondo' a cui l'enunciato fa riferimento, e che viene usualmente denominato come l'**universo del discorso**. Questo 'universo' è popolato dagli individui e dagli oggetti a cui fanno riferimento i nomi del linguaggio. Mediante un enunciato atomico si attribuisce a uno di essi una qualche proprietà o si stabilisce che valgono tra alcuni di essi determinate relazioni.

Il primo presupposto perché un enunciato atomico abbia senso, dunque, è che gli individui e gli oggetti dell'universo del discorso siano stati 'battezzati', ricevendo ciascuno un nome che consenta di identificarli in modo univoco e non ambiguo, e il presupposto essenziale affinché questo senso sia compreso è che si conosca questa relazione che sussiste tra i nomi e gli individui dell'universo, in modo che si sappia stabilire, ad esempio, quale tra essi sia il «Dario» a cui si riferisce la frase considerata in precedenza.

Oltre che alla 'popolazione' dell'universo, gli enunciati atomici fanno riferimento alle proprietà dei suoi elementi e alle relazioni tra questi ultimi. Proprietà e relazioni sono oggetto di un battesimo analogo a quello degli individui, tale quindi che vi sia per ognuna di esse almeno una espressione linguistica che la identifica. Conoscere dunque a quale proprietà individuale del mondo corrisponde una data espressione linguistica come l'«essere simpatico» dell'esempio è il secondo presupposto essenziale per comprendere il senso gli enunciati atomici. Una volta che questo senso è stato compreso, dunque una volta che si sia in grado di stabilire quale tra tutti gli individui dell'universo è quello oggetto dell'affermazione data e quale sia la proprietà che essa chiama in causa, si è nella posizione di stabilire se l'enunciato è vero, ovvero se la proprietà in questione fa parte degli attribuiti dell'individuo menzionato (quindi, per usare il modo di esprimersi dei logici al riguardo, se l'individuo **gode** di essa), o se ciò non accade e l'enunciato è quindi falso.

2. Una precisazione su individui, predicati e relazioni

Chiamare «individui» gli elementi dell'universo del discorso di un'affermazione potrebbe erroneamente far pensare che di esso facciano parte solo persone, per indicare le quali si fa uso di quel termine nel linguaggio ordinario. Come si è già cercato di sottolineare, invece, tale termine va inteso nella sua accezione più generale di «soggetti» e può indicare elementi di qualsiasi genere, persone, oggetti, animali, che siano considerati negli enunciati di tipo dichiarativo e che abbiano una natura individuale (cioè che possiedano un'identità, il che può valere anche di gruppi di individui - «i compagni di classe di Dario», «gli amici di Maria», «gli assiomi della geometria euclidea», ecc.). La sua accezione ha quindi la stessa generalità della varietà di «cose» che possono essere fatte oggetto di affermazioni del tipo dichiarativo di cui si occupa la logica. La 'natura' degli individui di cui si parla, il genere a cui essi appartengono (che sia umano, animale o inanimato), è una delle proprietà che viene data per scontata nel discorso ordinario, dove si lascia che essa emerga dal contesto, ma che dovrebbe essere precisata sempre a rigor di logica.

La stessa elasticità è richiesto che la si eserciti di conseguenza rispetto ai predicati e alle relazioni, i quali non potranno limitarsi a quelli che pertengono agli 'individui' in un senso ristretto del termine, ma dovranno inevitabilmente tenere conto dell'accezione più ampia con la quale lo si intende in questo contesto.

3. Gli enunciati atomici e le relazioni tra individui

Si consideri adesso l'affermazione:

Riccardo è il padre di Dario

La frase in questo caso menziona due individui, «Riccardo» e «Dario», e una relazione, «essere il padre di», che lega il primo dei due al secondo. Anche in questo caso, che l'enunciato sia atomico non vi sono dubbi: come per il precedente, infatti, non c'è una parte di esso che costituisce un enunciato dichiarativo a sé stante, né si ravvisa la presenza di operazioni logiche di connessione al suo interno.

La novità è costituita invece dalla presenza di una **relazione** al posto del **predicato** utilizzato in precedenza, dunque di una proprietà che dipende dai rapporti reciproci tra più individui, invece che dagli attributi di un individuo solo. Di una relazione è importante saper determinare l'**arietà**, ovvero il numero di individui che essa coinvolge. Della relazione «essere padre di» menzionata nell'esempio si dirà allora che essa è una relazione che possiede arietà 2, oppure che è **binaria**, dato che coinvolge due individui. Di una relazione come quella menzionata nella frase «Andrea presenta Stefano a Sergio», si dirà invece che essa ha arietà 3, o che è **ternaria**, perchè coinvolge tre individui e così via. Come nel caso precedente, tuttavia, per comprendere il senso di un enunciato atomico dove occorra una relazione a più 'posti' e per poter stabilire se esso sia vero o falso, occorre 'risolvere' tanto il nesso tra i nomi presenti nella frase e gli individui dell'universo del discorso quanto quello tra l'espressione che identifica la relazione con un certo 'legame' tra gli individui del 'mondo' (nell'esempio, il nesso tra l'espressione «essere padre di» e la relazione tra il genitore di sesso maschile e il proprio figlio/a o i propri figli/e), per stabilire poi se esso sussiste o meno tra quelli menzionati.

4. I nomi negli enunciati atomici

Nelle frasi d'esempio considerate fin qui, gli individui dell'universo del discorso sono richiamati esclusivamente da nomi propri. Non è difficile rendersi conto tuttavia che questa non è l'unica modalità attraverso la quale si fa riferimento agli individui nelle espressioni del linguaggio ordinario. Si pensi ad esempio all'affermazione:

Il gatto di Silvia ha il pelo lungo

L'individuo a cui la frase si riferisce (il soggetto del quale si dice che possiede l'attributo di «avere il pelo lungo») non è menzionato direttamente attraverso il suo nome, ma in modo indiretto attraverso l'espressione «il gatto di Silvia». La possibilità di recepire il senso di un'affermazione come quella citata e di offrire una valutazione circa la sua veridicità, passa dalla capacità di identificare gli individui chiamati in causa di volta in volta da espressioni analoghe a quella in uso nell'esempio («la madre di Chiara», «il vicino di casa di Manuela», «il bicchiere di Gianni», ecc.).

Una prima osservazione che è possibile fare rispetto a un'espressione quale «il gatto di Silvia», che svolge il ruolo nell'esempio in esame ricoperto dai nomi propri in quelli considerati in precedenza, è che esso menziona sì un individuo mediante il suo nome proprio, «Silvia», per indicarne un altro che è legato a esso. L'esistenza di questo legame fa sì che l'espressione in questione svolga il ruolo più frequentemente assunto dai nomi propri, ossia quello di riferirsi in modo univoco a un individuo dell'universo del discorso (nell'esempio, all'individuo che è «il gatto» di cui Silvia «è padrona»). Il legame tra due o più individui dell'universo del discorso, come quello che lega Silvia al «suo» gatto, non è esclusivo ma può essere lo stesso che sussiste tra altri individui. Lo si adatta di caso in caso, cambiando il riferimento agli individui coinvolti («il gatto di Elena», «gatto di Bernardo», ecc.) e con ciò si modifica anche il riferimento indiretto all'individuo così menzionato (posto che il gatto di Elena, ad esempio, non sia il gatto di Silvia). In altri termini, espressioni come «il gatto di x» sono **schemi di nomi** (o **descrizioni definite**, come si usa chiamarli nel linguaggio specialistico), che danno vita a dei nomi veri e propri, ovvero espressioni utilizzate per riferirsi agli individui dell'universo che possono così essere coinvolti nella formulazione degli enunciati atomici, sostituendo opportunamente la x (in modo del tutto analogo a come l'espressione $(2+x)$ indica la funzione matematica che somma 2 a ogni numero x, dalla quale scaturisce, assegnando a quest'ultima un valore, un modo alternativo per indicare i numeri maggiori o uguali a 2 senza fare uso del loro 'nome proprio': $2 + 0$, $2 + 1$, $2 + 2$, $2 + 3$, ecc.).

Anche le descrizioni definite, così come predicati e relazioni, possiedono una loro arietà che corrisponde al numero di riferimenti agli individui che sono necessari a 'completare' la descrizione: un'espressione come «il gatto di x», ad esempio, possiede arietà 1 perché è sufficiente sostituire la sola x per ottenerne il 'valore'; un'espressione come «il figlio di x e y» avrà invece arietà 2, e così via.

Esercizi Unità 1

1. Si considerino gli enunciati atomici:

(1) Il fratello di Francesco frequenta la stessa classe della sorella di Maria Sofia.
(2) Francesco è più piccolo di suo fratello.
(3) La sorella di Maria Sofia frequenta la quinta elementare.

Quale delle seguenti affermazioni relative al loro universo del discorso è corretta?

A. Francesco non frequenta la quinta elementare.
B. Francesco è più piccolo di Maria Sofia.
C. Maria Sofia è più grande del fratello di Francesco.
D. Il fratello di Francesco e Maria Sofia non possono avere la stessa età.
E. Tutti gli individui dell'universo del discorso frequentano le elementari.

2. Si considerino gli enunciati atomici:

(1) Il numero di cui si parla è maggiore della somma tra il prodotto di 2 e 3 e il prodotto dei loro quadrati.

(2) Il numero di cui si parla è minore della differenza tra il successore del quadrato di 7 e la somma di 2 con 3.
(3) Il numero di cui si parla è maggiore del successore del prodotto di 7 e del successore della somma di 2 con 3.

Quale delle seguenti affermazioni relative al loro universo del discorso è corretta?

A. Il «numero di cui si parla» è 42.
B. Il «numero di cui si parla» è 44.
C. Il «numero di cui si parla» è 45.
D. Il «numero di cui si parla» è maggiore di 40 e minore di 43.
E. Il «numero di cui si parla» è dispari.

3. Si considerino gli enunciati atomici:

(1) Giorgio presenta la sorella della madre di Laura al figlio di Marco.
(2) Marco presenta Giorgio alla madre di suo figlio.
(3) Laura presenta il figlio di Marco alla sorella di Giorgio.

Quale delle seguenti affermazioni relative al loro universo del discorso è corretta?

A. Gli individui dell'universo del discorso si conoscono tutti.
B. Giorgio ora conosce la sorella del figlio di Marco.
C. Marco conosce la sorella della madre di Laura.
D. La sorella di Giorgio e la sorella della madre di Laura ora conoscono la stessa persona.
E. Il figlio di Marco non conosceva Laura.

4. Si considerino gli enunciati atomici appartenenti alla lista numerica e le sequenze di numeri indicate nella lista alfabetica:

(1) La madre del fratello di Filippo ha 63 anni.
(2) Il compagno di banco del fratello di Dario conosce il migliore amico della sorella di Francesco.
(3) La radice quadrata di 2 e minore del prodotto di 5 con 4 ma è maggiore della loro differenza.
(4) Il vincitore della partita tra David e Lorenzo sfiderà il perdente di quella tra Giulio e Raffaele.
(5) Il litigio tra Giuseppe, Lucia e Roberto riguardava la pagella del figlio di quest'ultimo.
(6) La distanza tra Firenze e Prato è circa il doppio della lunghezza del percorso.
(7) Il successore del numero delle pedine del gioco è giusto la somma dell'eta di Dante e di Remo.

(a) 3, 1, 1.
(b) 1, 2, 2.
(c) 2, 1, 1.
(d) 1, 1.
(e) 2, 2.
(f) 1, 1, 1, 1.
(g) 1, 1, 1, 2, 1.

Quale risposta accoppia l'enunciato con la sequenza che indica in modo corretto la successione delle arietà delle descrizioni definite che vi occorrono?

A. 1e, 2g, 3b, 4d, 5a, 6c, 7f.
B. 1d, 2f, 3b, 4e, 5a, 6c, 7g.
C. 1d, 2f, 3c. 4a, 5e, 6b, 7g.
D. 1e, 2f, 3a, 4d, 5b, 6g, 7c.
E. Nessuna delle precedenti.

5. Si considerino gli enunciati atomici appartenenti alla lista numerica e le sequenze di numeri indicate nella lista alfabetica:

(1) La giacca del fratello di Bernardo è lisa.
(2) Giorgio presenta la madre di Dario alla sua.
(3) La somma di 2 con il prodotto tra 3 e 6 è maggiore di 19.
(4) L'uguaglianza tra la somma di 3 e 6 e il quadrato di 3 segue dalle definizioni.
(5) L'occupante dell'appartamento al terzo piano ha avertito i rumori dei ladri.
(6) La madre del padre di Caterina è francese.
(7) La madre francese del padre di Caterina parla lo spagnolo.

(a) 1.
(b) 2.
(c) 2.
(d) 2.
(e) 1.
(f) 2.
(g) 3.

Quale risposta accoppia l'enunciato con la sequenza che indica in modo corretto le arietà dei predicati e delle relazioni che vi occorrono?

A. 1e, 2g, 3b, 4f, 5d, 6a, 7c.
B. 1a, 2g, 3f, 4b, 5c, 6e, 7d.
C. 1e, 2g, 3d, 4b, 5f, 6a, 7c.
D. Tutte le precedenti.
E. Nessuna delle precedenti.

Unità 2

I quantificatori individuali: l'universale

I **quantificatori individuali** sono le operazioni caratteristiche della logica dei predicati. Data la collezione di individui chiamata in causa dagli enunciati, l'**universo del discorso** (*vedi* ***Glossario***), si **quantifica individualmente** su di essi ogni volta che di una certa proprietà si afferma che essa è presente tra gli individui che ne fanno parte (ovvero che tale proprietà è 'goduta' da uno o più individui). In particolare, si 'quantifica' secondo due modalità: **esistenzialmente**, se si dice che tra gli individui prescelti ne esiste almeno uno che gode o che non gode della proprietà in questione; **universalmente** se invece si dice che detta proprietà è goduta da tutti o da nessuno di quegli individui.

1. La quantificazione di tipo universale

Si consideri l'affermazione:

Tutti i compagni di classe di Dario praticano sport

Con essa si intende dire, relativamente a quegli individui che sono compagni di classe di Dario, che ognuno di essi, senza eccezioni, pratica un'attività sportiva. Dunque, che se un dato individuo è «compagno di classe Dario», cioè se esso 'gode' di questa proprietà, allora esso gode anche di quella di «praticare sport». Ciò significa che il senso dell'affermazione originaria corrisponde a quello della frase:

Per ogni individuo, se esso è compagno di classe di Dario, allora pratica sport

Questa lettura rivela in modo più chiaro la struttura logica soggiacente a un'affermazione che, come quella di partenza, abbia la forma di una **quantificazione universale** su un dato gruppo di individui. In particolare, rivela che nel caso generale l'operazione di quantificazione universale si combina con l'uso del **condizionale** (*vedi* Parte A, Unità 4). Di quest'ultimo, l'**antecedente** (*vedi* ***Glossario***) contiene l'informazione relativa alla collezione di individui a cui 'si applica' il quantificatore universale (la collezione di cui si dice che tutti i membri «praticano sport») e ci dice quindi quale sia il suo **dominio** di applicazione. Il **conseguente** (*vedi* ***Glossario***), invece, contiene l'informazione su quale proprietà si attribuisce attraverso il quantificatore a tutti gli individui del dominio.

Si consideri invece la frase:

Nessuno dei compagni di classe di Dario studierà tedesco alla scuola media

Non è difficile rendersi conto del fatto che, al di là delle differenze nella formulazione di questo enunciato rispetto al precedente, ci si trovi sempre di fronte a un caso di quantificazione di tipo univerdale: dei compagni di classe di Dario, di ciascuno di essi, la frase dice che non studierà la lingua tedesca alla scuola media. Essa dunque corrisponde all'affermazione secondo la quale:

Per ogni individuo, se esso è compagno di classe di Dario, allora non studierà tedesco alla scuola media

Di nuovo, si noti la combinazione tra il quantificatore universale, il «Per ogni…», con il condizionale. In aggiunta a ciò, l'esempio serve a chiarire come la differenza tra una quantificazione universale 'positiva', quella dell'esempio precedente, e questo caso 'negativo', corrispondente all'uso dell'espressione «Nessuno dei...» dell'italiano corrente, dipenda dal ricorso implicito alla **negazione logica** (*vedi* Parte A, Unità 2) nel conseguente del condizionale: dato che quest'ultimo veicola l'informazione sulla proprietà che si attribuisce agli individui del dominio, se ha una forma logica negativa, allora consente di affermare che «Tutti gli *A* non hanno *B*», quindi che «Nessun *A* ha *B*».

Delle osservazioni fatte fin qui occorrerà tenere conto nel seguito per valutare meglio le proprietà logiche dell'operazione di quantificazione universale.

2. Gli individui oggetto delle operazioni di quantificazione

Converrà ricordare a questo punto, avendo già menzionato la questione introducendo gli enunciati atomici (*vedi* Parte B, Unità 1, par. 2), che il termine «individuo» a livello logico non possiede connaturazioni se non quello di indicare un certo elemento appartenente all'universo del discorso, qualunque 'cosa' esso sia. Nel discorso ordinario si lascia che la natura degli individui di cui si parla emerga dal contesto. A rigor di termini, questa natura dovrebbe essere sempre specificata nel momento in cui si riformula un'affermazione in un modo che sia logicamente più corretto. Ad esempio, riformulando l'affermazione precedente dicendo:

Per ogni individuo, se esso appartiene al genere umano ed è compagno di classe di Dario, allora non studierà tedesco alla scuola media

Può essere d'aiuto al proposito fare uso già a questo livello informale di quella che è una consuetudine nel processo di formalizzazione degli enunciati quantificati (*vedi* Parte B, Unità 5), ovvero l'uso delle **variabili** $x, y, z, \ldots$ per indicare gli individui generici appartenenti all'universo del discorso e dire, ad esempio:

Per ogni individuo x, se x appartiene al genere umano ed è compagno di classe di Dario, allora x non studierà tedesco alla scuola media

Quest'eventualità diviene una necessità nel caso in cui si quantifichi nella stessa frase su più individui diversi, come nell'affermazione:

I due soci dell'azienda dividono le spese

Non è difficile rendersi conto che volendo essere logicamente più precisi, quanto si sostiene con questa affermazione corrisponde a quanto dice la frase seguente, nella quale è di fatto impossibile fare a meno delle variabili senza comprometterne la comprensione:

Per ogni individuo x, per ogni individuo y, se x appartiene al genere umano e y appartiene al genere umano e x è socio dell'azienda di y, allora x e y dividono le spese

Di questo aspetto, tuttavia, avremo modo di parlare a tempo debito, nell'unità dedicata alle combinazioni dei quantificatori individuali (*vedi* Parte B, Unità 4).

3. Le condizioni di verità degli enunciati quantificati universalmente

Come nel caso delle operazioni logiche che si utilizzano al livello della connessione tra enunciati, anche nel caso delle operazioni di quantificazione individuale e in particolare per ciò che riguarda l'operazione di quantificazione universale la questione fondamentale da risolvere è la seguente: in che modo il ricorso all'operazione logica in questione influisce sulle condizioni di verità di un enunciato? Si pensi allora alla prima delle affermazioni esaminate fin qui e si provi a stabilire a quali condizioni è vera. L'enunciato:

Tutti i compagni di classe di Dario praticano sport

vale nel caso in cui, presi uno a uno i compagni di classe di Dario, risulta che ognuno di essi si dedica a una qualche attività sportiva e dunque se nessuno degli elementi del **dominio** (*vedi* ***Glossario***) del quantificatore universale offre un esempio per contraddire l'affermazione che li riguarda. Nell'esempio, il dominio del quantificatore universale è rappresentato dai compagni di classe di Dario e si tratta di un sottoinsieme dell'**universo del discorso** dell'enunciato (*vedi* ***Glossario***), il quale contiene anche Dario in aggiunta. L'osservazione sulla condizione che rende vera la frase possiede una valenza generale rispetto alle affermazioni determinate da un quantificatore universale e si riassume dicendo che ciascuna di esse è vera se e solo se tutti gli individui appartenenti al dominio del quantificatore possiedono la proprietà che l'enunciato assegna loro.

Che dire invece della seconda frase d'esempio? L'affermazione:

Nessuno dei compagni di classe di Dario studierà tedesco alla scuola media

è vera se preso un qualunque compagno di classe di Dario, non è vero che studierà tedesco alla scuola media e dunque, di nuovo, se nessuno di essi contraddice la frase (con l'accortezza di considerare la natura 'negativa' della proprietà che essa contiene). Un altro modo a noi più familiare di considerare la questione, e che rimanda all'**interpretazione classica** di un enunciato del tipo «Non *A*» come «È falso che *A* (è vera)» (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 1), è dire quindi che un'affermazione come quella in esame è vera se per tutti gli individui che appartengono al dominio del quantificatore universale l'affermazione che «studierà tedesco alla scuola media» è falsa. Volendo generalizzare l'osservazione come in precedenza, si potrà dire allora che un'affermazione quantificata universalmente di questo tipo 'negativo' è vera se e solo se nessuno degli individui appartenenti al dominio del quantificatore universale possiede la proprietà oggetto della frase, dunque se e solo se l'enunciato che attribuisce loro questa proprietà è falso per ciascuno degli individui in questione.

Cerchiamo invece di stabilire a quali condizioni un enunciato quantificato universalmente è falso. Le condizioni alle quali un'affermazione risulta falsa sono le stesse alle quali risulta vera la sua negazione (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 1). Quindi, ad esempio, cercare di stabilire quando l'enunciato «Tutti i compagni di classe di Dario praticano sport» è falso significa stabilire a quali condizioni è vero l'enunciato che lo nega, ovvero l'affermazione secondo cui «Non è vero che tutti i compagni di classe di Dario praticano sport». D'altra parte, avendo stabilito quale condizione deve verificarsi affinchè quell'enunciato risulti vero, non è difficile risolvere l'arcano: esso sarà falso se detta condizione non può realizzarsi, quindi, in particolare, se esiste almeno un compagno di classe di Dario che non pratica sport.

Facendo tesoro dell'osservazione nel caso specifico per ricavarne una conclusione di carattere generale, si potrà allora dire che: un'affermazione quantificata universalmente è falsa se e solo se, di tutti gli individui che fanno parte del dominio del quantificatore universale, ne esiste almeno uno che non possiede la proprietà che l'enunciato assegna loro, oppure se ne esiste uno che la possiede nel caso in cui l'enunciato quantificato stabilisca, al contrario, che tutti gli individui del dominio non possiedono la proprietà in questione.

Data l'importanza della questione, cerchiamo di riassumere in una forma più schematica le osservazioni che si sono raccolte fin qui esercitando intuizione e buon senso. Supponiamo quindi di indicare con *A* un enunciato qualsivoglia, mediante il quale si attribuisce una proprietà a un dato individuo. In particolare, *A* potrà essere una frase che, come nei casi considerati in precedenza, dice di un individuo che pratica sport, o che studia il tedesco. Supponiamo invece di indicare con *D* una proprietà analoga che identifichi il dominio di un quantificatore universale (come l'«essere compagno di classe di Dario»), cosicché scrivendo:

Per ogni *D*, *A*

sia chiaro che si intende abbreviare un'affermazione mediante la quale si dice, di tutti gli individui per i quali vale «*D*», che per essi vale «*A*» (quindi una frase del tutto analoga a «Tutti i compagni di classe di Dario praticano sport»); mentre scrivendo:

Per ogni *D*, non *A*

si vuole rappresentare in modo sintetico un'affermazione quantificata universalmente mediante la quale si dice, di tutti gli individui per i quali vale «*D*», che per essi non vale «*A*» (dunque che vale «Non *A*» per ciascuno, come nella frase «Nessuno dei compagni di classe di Dario studierà tedesco alla scuola media»).

Supponiamo poi per semplicità di indicare con **D** il dominio del quantificatore universale 'nel mondo', ovvero la collezione degli individui dell'universo del discorso per i quali vale la condizione *D*, e con $a, b, c, \ldots$ i suoi elementi, cioè gli individui in questione. Quanto detto finora relativamente alla verità e alla falsità delle affermazioni quantificate universalmente, allora, lo si può riassumere mediante lo schema seguente:

«Per ogni *D*, *A*»	è **vera** se per ogni *a* in **D** è vera «*A*». è **falsa** se esiste un *a* in **D** per cui è falsa «*A*».
«Per ogni *D*, non *A*»	è **vera** se per ogni *a* in **D** è falsa «*A*». è **falsa** se esiste un *a* in **D** per cui è vera «*A*».

La tabella contiene un'informazione importante relativamente agli enunciati quantificati universalmente e alle loro negazioni logiche. Di questa ci occuperemo appena dopo aver fatto un'altra osservazione, che riguarda invece il dominio di un quantificatore.

4. Il 'paradosso' del dominio vuoto

Se, come si è stabilito, date due condizioni *A* e *B*, un'affermazione del tipo:

Per ogni individuo per cui vale *A*, vale (non) *B*

deve intendersi come l'affermazione:

Per ogni individuo, se per esso vale *A*, allora per esso vale (non) *B*

si sarà forse intuito che è possibile trovare una condizione paradossale che rende sempre vera la frase e che si cela nelle 'pieghe' delle proprietà logiche di un enunciato di tipo condizionale. Di un'affermazione della forma «Se *A*, allora *B*» sappiamo che è vera se l'antecedente è falso o se il conseguente è vero (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 2). Supponiamo che *A* sia una condizione che non vale per nessun individuo del dominio del quantificatore universale. Ad esempio, supponiamo che *A* rappresenti una proprietà intuitivamente contraddittoria come «essere un quadrato rotondo». È chiaro che un'affermazione della forma:

Se *a* è *A*, allora *a* è *B*

è vera per ogni individuo *a* e per ogni scelta della proprietà *B* (dato che ogni scelta in questo senso dà vita a un condizionale il cui antecedente è falso a causa della paradossalità di *A*). Per lo stesso motivo dovrebbe essere chiaro che anche l'affermazione:

Per ogni individuo per cui vale *A*, vale (non) *B* è vera in virtù della sola scelta di A. Dato che il dominio del quantificatore è vuoto, le ricadute 'pratiche' della situazione che si realizza in questo modo sono limitati (in particolare, per nessuno degli individui a per cui vale A segue che vale o non vale B, dal momento che non c'è nessun a siffatto). Tuttavia, di questa osservazione si dovrà tenere conto a tempo debito, affrontando il tema della costruzione degli argomenti nei quali figurino affermazioni di questa forma logica (*vedi* Parte C, Unità 3).

5. Il quantificatore universale e la sua negazione logica

Come dovrebbe risultare evidente da quanto si è appena detto e come si evince confrontando la tabella relativa condizioni di verità di un enunciato quantificato universalmente con quella analoga che è possibile costruire relativamente agli enunciati nei quali si fa uso dell'operazione logica di **quantificazione esistenziale** (*vedi* Parte B, Unità 3, par. 3), la condizione che rende falsa la quantificazione universale di un enunciato «A» rende vera la quantificazione esistenziale della negazione di «A» e, viceversa, la condizione che rende falsa la quantificazione esistenziale di «A» rende vera la quantificazione universale di «Non A». Così, ad esempio, dire che:

Non è vero che tutti i compagni di classe di Dario praticano sport

è **logicamente equivalente** (*vedi **Glossario***) ad affermare che:

Esiste un compagno di classe di Dario che non pratica sport

(perché, in linea con quanto si è stabilito in precedenza, la condizione che rende vera quest'ultima affermazione è la stessa rende vera la negazione di cui sopra). Estendendo al quantificatore esistenziale le convenzioni sulla notazione adottate in precedenza, vale in altre parole che:

«Per ogni D, A» **è falsa** se e solo se «Esiste un D, non A» **è vera**.
«Per ogni D, non A» **è falsa** se e solo se «Esiste un D, A» **è vera**.

Per chi ha presente le considerazioni che si sono spese al riguardo, insomma, sembra che l'operazione di quantificazione universale intrattenga grazie alla negazione logica una relazione con l'operazione di quantificazione esistenziale che è analoga a quella che sussiste tra l'operazione di congiunzione e quella di disgiunzione logica (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 4). L'analogia è resa più evidente dall'osservazione che, relativamente a un dominio che contenga solo un numero finito di individui, la quantificazione universale coincide di fatto con una congiunzione generalizzata. Infatti, dire dei compagni di classe di Dario che «Tutti praticano sport» significa dire, sulla base di quanto si osservava in precedenza, che «Matteo pratica sport e Emma pratica sport e Tommaso pratica sport e...», fino a esaurirne la lista. Nel caso di un dominio finito di individui, cioè, il quantificatore universale può essere considerato a ragion veduta come una via più breve per esprimere ciò che potremmo esprimere attraverso una lunga e noiosa congiunzione.

La differenza tra l'operazione di quantificazione universale e il connettivo logico di congiunzione si apprezza appieno, invece, rispetto a un dominio infinito di individui. Infatti, è vero che dire:

Per ogni numero dispari x, il quadrato di x è dispari

significa ancora dire che: «Il quadrato di 1 è dispari e il quadrato di 3 è dispari e il quadrato di 5 è dispari...». Tuttavia, al contrario del caso dei compagni di classe Dario, non è possibile pensare di sostituire l'affermazione in questa seconda forma alla prima perché i '' compagni di classe' dell'1 sono troppi e, anche volendo, non saremmo in grado di elencarli tutti. L'osservazione ci offre quindi l'occasione di segnalare uno degli aspetti notevoli relativi all'uso della quantificazione universale, ovvero la possibilità di esprimere attraverso un singolo enunciato il senso di una congiunzione infinita di affermazioni.

Esercizi Unità 2

1. Si consideri l'affermazione: «Tutti i bambini ubbidienti fanno quello che dicono i genitori». Se è falsa, allora:

A. qualche bambino non ubbidiente fa quello che diconi i genitori;
B. se Carlo non è ubbidiente, non fa quello che dicono i genitori;
C. ci sono bambini ubbidienti che non fanno quello che dicono i genitori;
D. ci sono bambini ubbidienti che sono disubbidienti;
E. se Carlo fa quello che gli dicono i genitori, allora non è ubbidiente.

2. Secondo quanto sostiene Antonella: «Gli amici degli amici di Luca sono miei amici». Se la frase è falsa allora:

A. Antonella non è amica di almeno un amico di un amico di Luca;
B. qualche amico di Luca non è amico di Antonella;
C. Antonella è amica di tutti i nemici degli amici di Luca;
D. gli amici degli amici di Luca sono nemici di Antonella;
E. c'è un nemico di un amico di Luca di cui Antonella è amica.

3. Supponiamo che si dica che «Nessun uomo che non sia in malafede può pensare che tu sia nel giusto» e che l'affermazione sia vera. Allora:

A. ci sono uomini in malafede che possono pensare che tu sia nel giusto;
B. gli uomini che non sono in malafede possono pensare che tu sia nel giusto;
C. qualche uomo che non è in malafede può pensare che tu sia nel giusto;
D. un uomo in malafede non può pensare che tu non sia nel giusto;
E. se un uomo non è in malafede non può pensare che tu sia nel giusto.

4. Paola afferma che «Non tutti gatti che non hanno il naso umido hanno qualcosa che non va». Paola si sbaglia, quindi:

A. i gatti col naso umido hanno qualcosa che non va;
B. ci sono gatti che non hanno il naso umido e non hanno qualcosa che non va;
C. ci sono gatti che hanno il naso umido e hanno qualcosa che non va;
D. ci sono gatti con il naso umido e va tutto bene;
E. i gatti che non hanno il naso umido hanno qualcosa che va bene.

5. Confronta gli enunciati della lista alfabetica, proposti in italiano corrente, con quelli della lista numerica, nei quali si fa uso solo di combinazioni logiche che coinvolgono il quantificatore universale e i connettivi logici fondamentali (e dove con «A (non) vale di x» si intende che la proprietà espressa da A (non) vale dell'individuo generico x). Rifletti su quali di esse possono essere utilizzate per riscrivere gli enunciati della lista alfabetica in modo logicamente ineccepibile, preservandone il senso:

(a) Tutto scorre.
(b) Claudio è l'ultimo della classe a consegnare il tema.
(c) Un bambino è abituato a essere oggetto di massima attenzione.
(d) Un numero intero è pari o è dispari.

(e) Se non ci si allena duramente, si finisce in panchina la domenica.
(f) Se tutti pagano le tasse, allora si pagano meno tasse.
(g) Un triangolo isoscele ha due lati uguali e se ha tre lati uguali è equilatero.

(1) Per ogni x, se B non vale di x, allora A vale di x.
(2) Per ogni x, se A vale di x, allora B vale di x.
(3) Per ogni x, se A vale di x allora B non vale di x.
(4) Per ogni x, per ogni y, se A vale di x, allora B vale di y.
(5) Per ogni x, se non è vero che B vale di x allora A non vale di x.
(6) Per ogni x, se A vale di x e B vale di x, allora C vale di x e se A vale di x e D vale di x, allora E vale di x.
(7) Per ogni x, se A vale di x allora B vale di x o C vale di x.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a2, b1, c3, d5, e6, f1, g4.
B. a5, b3, c2, d7, e1, f6, g4.
C. a1, b2, c6, d7, e4, f1, g5.
D. a2, b3, c5, d7, e1, f4, g6.
E. La B e la D.

6. In questo caso, la lista alfabetica contiene asserti che fanno uso solo di combinazioni tra il quantificatore universale e i connettivi fondamentali (e dove con «A (non) vale di x» si intende che la proprietà espressa da A (non) vale dell'individuo generico x). Le frasi dell'elenco numerico, invece, sono scritte in linguaggio corrente. Rifletti su quali tra le forme logiche presentate sono adatte per riscrivere queste ultime in modo ineccepibile:

(a) Per ogni x, se A vale di x, allora non è vero che B vale di x.
(b) Per ogni x, se A vale di x, allora B vale di x se e solo se C vale di x.
(c) Per ogni x, se non è vero che B non vale di x allora A non vale di x.
(d) Per ogni x, se A vale di x, allora B vale di x e non è vero che se B vale di x, allora A vale di x.
(e) Per ogni x, se A non vale vale di x o B non vale di x, allora non è vero che C vale di x.
(f) Non è vero che per ogni x, se A vale di x, allora B vale di x.
(g) Per ogni individuo x, per ogni individuo y, se A vale di y e x, allora B vale di x e y.

(1) Non tutti i logici sono noiosi.
(2) Non essere incensurati o non possedere la laurea è condizione sufficiente per non partecipare al concorso.
(3) Essere incensurati è condizione necessaria ma non sufficiente per partecipare al concorso.
(4) Un numero naturale è minore del suo successore.
(5) Un numero si dice 'perfetto' se e solo se è uguale alla somma dei suoi divisori interi diversi da esso.
(6) Nessun gatto ama bagnarsi.
(7) Nessuna persona adulta si comporterebbe in questo modo.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a3, b6, c1, d7, e2, f5, g4.
B. a7, b6, c2, d5, e7, f4, g1.
C. a7, b5, c6, d3, e2, f1, g4.
D. a6, b3, c1, d2, e5, f4, g7.
E. a3, b7, c2, d5, e6, f4, g1.

Unità 3

I quantificatori individuali: l'esistenziale

Dopo aver affrontato il tema del quantificatore individuale di tipo universale, ci dedichiamo in questa unità alle caratteristiche della quantificazione di tipo esistenziale. Questa operazione logica è alla base delle affermazioni mediante le quali si stabilisce, di una data proprietà e rispetto a un certo **dominio** di individui, che tra essi ce n'è almeno uno che ne gode.

1. La quantificazione di tipo esistenziale

Si consideri l'affermazione:

Una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari

In modo analogo a quanto si fa nel caso della **quantificazione universale** (*vedi* Parte B, Unità 2), il senso di questa affermazione lo si misura rispetto al **dominio** di individui di riferimento. Come si ricorderà, tale dominio è costituito dalla collezione degli individui dell'**universo del discorso** (*vedi* ***Glossario***) oggetto dell''azione' del quantificatore. Nel caso in esame, si tratta dell'insieme delle sorelle di Anna, a proposito del quale si dice che esiste almeno un individuo che ne fa parte che ha concluso gli studi universitari. Data questa analisi, un modo alternativo di formulare l'affermazione in modo da farne emergere la struttura logica soggiacente è quello di dire che:

C'è un individuo che è sorella di Anna e che ha concluso gli studi universitari

L'osservazione rivela come il ricorso all'operazione di quantificazione esistenziale sugli individui sia legato all'operazione logica di **congiunzione** (*vedi* Parte A, Unità 3), nello stesso senso in cui la quantificazione di tipo universale è connessa al **condizionale** (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 1). Volendo riproporre qui quanto si è avuto modo di dire nell'unità precedente, si dovrebbe notare allora che uno dei due congiunti individua il dominio del quantificatore, mentre il secondo contiene il riferimento alla proprietà posseduta da (almeno) un individuo del dominio. La difficoltà a riproporre nella sua interezza le considerazioni relative al dominio di un quantificatore nel caso esistenziale sono legate al fatto che la congiunzione logica gode della proprietà 'commutativa' e, per ogni coppia di enunciati «*A*» e «*B*» l'affermazione «*A* e *B*» è vera se e solo se è vera l'affermazione «*B* e *A*». Ciò significa che avremmo potuto scegliere di riformulare in modo del tutto equivalente l'affermazione in esame come:

C'è un individuo che ha concluso gli studi universitari e che è sorella di Anna

Alla luce di questo fatto, stabilire quale delle proprietà associate agli individui da un'affermazione su cui insiste un quantificatore esistenziale sia quella che ne identifica il dominio appare arbitrario. Ciò nonostante, la terminologia introdotta insieme al quantificatore universale può risultare conveniente per l'esposizione nel seguito. Dunque, conveniamo di dire che la prima proprietà della congiunzione (comunque essa sia scritta) identifica il dominio del quantificatore esistenziale, purché sia chiaro che ciò riflette una scelta arbitraria, rispetto alla quale è necessario esercitare la cautela di cui si è appena detto. A questa cautela avremo quindi la necessità di appellarci di quando in quando nel seguito.

Stabilito comunque che la **forma logica** (*vedi* ***Glossario***) sottesa da un'affermazione quantificata esistenzialmente è più complessa di quanto potrebbe sembrare a un primo sguardo, sarà il caso di dire qualcosa anche su ciò che accade nel caso in cui la quantificazione si combina con una negazione come nella frase:

C'è qualcuno tra voi che non ha capito quello che ho appena detto

Alla luce dell'analisi precedente, la versione logicamente più corretta dell'affermazione è quella che si usa dicendo:

C'è almeno un individuo che è uno di voi e non ha capito quello che ho appena detto

Compatibilmente con la cautela di cui sopra, la negazione logica non insiste sulla quindi proprietà che si è convenuto stabilire che identifichi il dominio del quantificatore, bensì, come nel caso del quantificatore universale, su quella che si sostiene che non sia 'posseduta' da almeno un individuo che ne fa parte.

2. Gli individui oggetto delle operazioni di quantificazione

Anche nel caso dell'operazione logica di quantificazione esistenziale vale quanto si è avuto modo di dire a proposito degli individui a cui si applica l'operazione di quantificazione di tipo universale (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 2), e prim'ancora quanto si è detto introducendo il tema relativo agli enunciati di tipo atomico (*vedi* Parte B, Unità 1, par. 2): gli «individui» del discorso dichiarativo riflettono la varietà delle 'cose' oggetto delle nostre considerazioni e dunque non necessariamente si tratta di «persone», nel senso di «individui appartenenti al genere umano». La precisazione è resa necessaria dal fatto che questa è l'accezione a cui si tende a limitare l'uso dell'espressione «individuo» nel linguaggio ordinario. Nel caso dell'indagine relativa alla forma logica degli enunciati dichiarativi il termine perde questa connotazione e risponde invece all'uso che di esso si può fare nel senso più generale.

3. Le condizioni di verità degli enunciati quantificati esistenzialmente

Stabilito che la formulazione di una quantificazione individuale di tipo esistenziale 'nasconde' una congiunzione, dovrebbe anche risultare evidente come questo fatto influisca sulle condizioni che devono essere soddisfatte affinchè un'affermazione del genere risulti vera. Ad esempio, nel caso di quella presa in esame per prima sulle sorelle di Anna, occorre che una tra esse abbia preso la laurea. Più precisamente, per riconciliarsi con la lettura rigorosa dell'affermazione che si è offerto, occorre che un individuo dell'**universo del discorso** possieda entrambe le proprietà coinvolte nell'enunciato: che sia quindi sorella di Anna e che abbia conseguito la laurea. Nel caso generale, ciò significa dunque che un'affermazione quantificata esistenzialmente è vera se e solo se, di tutti i componenti del dominio del quantificatore ce n'è almeno uno che possiede la proprietà indicata nell'enunciato. L'arbitrarietà con cui si è convenzionalmente identificato il dominio del quantificatore esistenziale con il primo congiunto non ha effetti di sorta sulla regola. In effetti, comunque si fissi tale dominio, la condizione che si è enunciato richiede che esista un individuo che possiede entrambe le proprietà richieste, quindi che è «sorella di Anna» e che «ha concluso gli studi universitari». Dunque, l'affermazione è vera tanto se si identifica il dominio del quantificatore con la prima proprietà e c'è un individuo in esso che possiede la seconda, quanto se si identifica il dominio con quest'ultima e c'è un individuo che gli appartiene e che possiede la prima proprietà.

La regola appena stabilita continua a essere valida nel caso in cui il quantificatore esistenziale sia utilizzato per dire che c'è un individuo che non possiede una data proprietà, come nella frase «C'è qualcuno tra voi che non ha capito quel che ho appena detto», con la sola differenza che l'individuo in questione dovrà possedere l'una proprietà e non l'altra (ovvero, seguendo la convenzione, dovrà appartenere al dominio, quindi «essere tra voi», e non aver capito quanto è stato detto).

Cerchiamo adesso di stabilire quando uno dei nostri enunciati di riferimento è falso, dunque quale sia la situazione nella quale risulta vera la sua negazione:

Non è vero che una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari

Dato quanto si è stabilito fin qui, ciò accade quando nessuna delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari. Volendo dare all'osservazione carattere generale, si dovrebbe allora dire, compatibilmente con la terminologia fin qui utilizzata, che un'affermazione quantificata esistenzialmente è falsa se e solo se nessun componente del dominio del quantificatore possiede la proprietà indicata nella frase. Anche in questo caso, l'ambiguità legata al dominio di un quantificatore esistenziale non inficia la generalità della regola testé enunciata: se per ogni individuo che è «sorella di Anna» è falso che «ha concluso gli studi universitari», è ovvio anche che nessun individuo per il quale «ha concluso gli studi universitari» è vero può essere «sorella di Anna». Vale quindi che l'affermazione è falsa se non esiste un individuo che possiede entrambe le proprietà che gli si attribuiscono, a prescindere da quale di esse indichi il dominio del quantificatore.

Fatta salva la generalità della regola con la quale si stabilisce che un enunciato quantificato esistenzialmente è falso, c'è un elemento combinatorio di cui occorre tenere conto a questo riguardo e che è legato alla presenza di una congiunzione 'nascosta' dall'uso del quantificatore esistenziale. Questo elemento emerge in modo più chiaro rispetto a un esempio più complesso, come quello della frase:

Una delle sorelle bionde di Anna ha concluso gli studi universitari

Coerentemente con quanto si è detto fin qui, si può riformulare l'affermazione dicendo che:

C'è un individuo che è biondo, è sorella di Anna e che ha concluso gli studi universitari

La frase è falsa in ciascuno dei tre casi seguenti:

1. se per ogni individuo che è «sorella di Anna», è falso che sia «biondo» o è falso che abbia «ha concluso gli studi universitari»;

2. se per ogni individuo che è «biondo», è falso che sia «sorella di Anna» o è falso che «ha concluso gli studi universitari»;

3. se per ogni individuo che «ha concluso gli studi universitari», è falso che sia «sorella di Anna» o è falso che sia «biondo».

Come si notava in precedenza, valutando la regola generale rispetto alla situazione più semplice, i tre casi sono equivalenti nel senso che il caso 1 si verifica se e solo se si verifica il caso 2, il quale si dà se e solo se si dà il caso 3. Questo significa anche che la frase è falsa anche se vale uno dei casi seguenti:

1. se ogni individuo che è «sorella di Anna» ed è «biondo», «non ha concluso gli studi universitari»;

2. se ogni individuo che è «sorella di Anna» e che «ha concluso gli studi universitari», «non è biondo»;

3. se ogni individuo che è «biondo» e che ha «ha concluso gli studi universitari», «non è sorella di Anna».

Di nuovo, i tre casi sono equivalenti (e sono equivalenti ai tre casi precedenti) dal momento che l'uno si realizza se e solo se si realizzano gli altri due. Essi consentono di porre l'attenzione sul fatto che un enunciato esistenziale più complesso, come quello appena preso in esame, risulta falso anche nel caso in cui esista un individuo che possiede due delle proprietà richieste (ad esempio, quella di essere «biondo» e quella di essere «sorella di Anna»), ma non la terza (di «aver concluso gli studi universitari»). Di questa osservazione sarà importante tenere conto per la soluzione dei quesiti che coinvolgono affermazioni quantificate esistenzialmente come quelli proposti al termine di questa scheda. Perché la situazione risulti chiara fino in fondo, è necessario possedere strumenti di analisi legati alla formalizzazione degli enunciati quantificati (*vedi* Parte B, Unità 5) o quelli legati all'uso di diagrammi che consentano di visualizzare i rapporti reciproci tra le collezioni di individui coinvolte nelle combinazioni in questione (*vedi* Parte C, Unità 8).

Fatta la precisazione, torniamo alle regole relative alle condizioni di verità degli enunciati quantificati esistenzialmente. È possibile riproporre una tabella riassuntiva sulla falsariga di quanto si è fatto per il caso del quantificatore universale, adottando le semplificazioni nella notazioni introdotte in quell'occasione (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 3). Detta tabella, alla luce di quanto si è detto, risulta essere la seguente:

«Esiste un *D* tale che *A*»	è **vera** se c'è almeno un *a* in **D** per cui è vera «*A*». è **falsa** se per ogni *a* in **D** è falsa «*A*».
«Esiste un *D* tale che non *A*»	è **vera** se esiste un *a* in **D** per cui è falsa «*A*». è **falsa** se per ogni *a* in **D** è vera «*A*».

4. Il quantificatore esistenziale e la sua negazione logica

La tabella precedente consente di ribadire il concetto già espresso nella disamina dell'operazione di quantificazione di tipo universale sul rapporto che essa intrattiene, attraverso la negazione di logica con quella di tipo esistenziale. Risulta infatti che la condizione per cui è falso un enunciato quantificato esistenzialmente (dunque quella che ne rende vera la negazione) corrisponde alla condizione che rende vera la quantificazione universale della sua negazione. In effetti, la frase:

Non è vero che una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari

è vera se e solo se è vera la frase:

Tutte le sorelle di Anna non hanno concluso gli studi universitari

Più in generale, il rapporto tra le due operazioni logiche di quantificazione visto dal punto di vista di quella di tipo esistenziale, ammonta a quanto segue:

«Esiste un *D* tale che *A*» è **falsa** se e solo se «Per ogni *D*, non *A*» è **vera**
«Esiste un *D* tale che non *A*» è **falsa** se e solo se «Per ogni *D*, *A*» è **vera**

Le considerazioni che si sono fatte seguire a questa osservazione nel caso universale, secondo cui quest'ultima forma di quantificazione può essere in effetti accostata alla congiunzione (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 5), lasciano presumere che vi sia una relazione simile tra il quantificatore esistenziale e la **disgiunzione** (l'operazione logica **duale** della congiunzione – *vedi* Parte A, Unità 4). In effetti, la condizione che rende vera l'affermazione secondo cui:

Una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari

è la stessa che rende vera la frase:

Lucia ha concluso gli studi universitari o Giulia ha concluso gli studi universitari o Vanessa ha concluso gli studi universitari supponendo che Lucia, Giulia e Vanessa siano le tre sorelle di Anna.

Come nel caso universale, anche in quello esistenziale la differenza tra il connettivo logico e l'operazione di quantificazione si apprezza facendo il confronto rispetto ai domini infiniti di individui. Ad esempio, dicendo che:

Esiste un numero perfetto maggiore di 3

(dove di un numero intero si dice che è perfetto. se, come ad esempio il numero 6, è la somma dei suoi divisori propri, diversi da esso), si riesce a dire quello che sarebbe impossibile fare ricorrendo alla disgiunzione, dato che la frase «4 è un numero perfetto, oppure 5 è un numero perfetto, oppure…» sarebbe composta da un numero infinito di disgiunti.

5. «Almeno uno», «Uno ma non tutti», «Più di uno», «Esattamente uno»

Già che abbiamo menzionato i rapporti tra il quantificatore esistenziale e la disgiunzione, varrà la pena aggiungere a questo proposito aggiungere un'osservazione utile. Sulla base di quanto si è detto fin qui ma che non si è finora sottolineato con la dovuta precisione, un'affermazione come:

Una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari

è vera se almeno una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari. Ora, non è importante che la sorella di Anna ad aver concluso gli studi universitari sia esattamente una, due o tutte e tre. Quell'affermazione è vera infatti in ciascuno di questi casi (perchè in ognuno di essi c'è un individuo del dominio del quantificatore che possiede la proprietà che gli si attribuisce con la frase).

D'altra parte, esercitandoci con congiunzione e disgiunzione abbiamo imparato come esprimere il fatto che, delle tre sorelle di Anna, Lucia, Giulia e Vanessa, sia solo una ad aver concluso gli studi universitari. Lo si può fare ad esempio dicendo che:

Lucia ha concluso gli studi universitari e Giulia non ha concluso gli studi universitari e Vanessa non ha concluso gli studi universitari, oppure Lucia non ha concluso gli studi universitari e Giulia ha concluso gli studi universitari e Vanessa non ha concluso gli studi universitari, oppure Lucia non ha concluso gli studi universitari e Giulia non ha concluso gli studi universitari e Vanessa ha concluso gli studi universitari

Certo, non si può dire che si tratti di un modo sintetico di esprimersi, ma abbiamo incontrato fin troppi casi in cui la precisione logica si scontra con la sintesi. Tuttavia, è vero anche che possiamo esprimere in quel modo logicamente ineccepibile il concetto dell'affermazione «Esattamente una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari» solo nel caso in cui si conoscano i nomi degli individui appartenenti al dominio del quantificatore. Se questa condizione non è soddisfatta, è necessario fare uso dei quantificatori per esprimere quel concetto. Sì, ma come? Il quantificatore esistenziale da solo evidentemente non è sufficiente. In effetti, un'analisi più approfondita della situazione rivela non solo che è necessario combinare la sua azione con quella del quantificatore universale, ma che occorre anche adeguare il nostro vocabolario in modo da includervi la relazione di identità tra gli individui dell'universo del discorso. Su questa questione torneremo a tempo debito, nella scheda dedicata alle combinazioni dei due quantificatori individuali (*vedi* Parte B, Unità 4, par. 5).

Esercizi Unità 3

1. La mamma dice a Giulia: «C'è almeno una maglietta pulita nel tuo armadio che ti puoi mettere». Se l'affermazione è falsa allora:

A. Le magliette pulite che Giulia può mettersi non sono nel suo armadio.
B. Giulia non può mettersi le magliette pulite che stanno nel suo armadio.
C. Le magliette nell'armadio che Giulia può mettersi non sono pulite.
D. Tutte le risposte precedenti sono vere.
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

2. Pietro dice a Paolo: «Non ce n'è una delle cose che hai detto che non sia falsa». Se l'affermazione è vera e se, in linea con l'interpretazione classica dei connettivi, un enunciato A non è falso se e solo se è vero, allora:

A. Paolo ha detto solo cose vere;
B. Pietro crede a tutto quello che ha detto Paolo, tranne una cosa sola;
C. ci sono più cose che Paolo ha detto che sono vere;
D. non cè nessuna cosa che Paolo ha detto che sia falsa;
E. Pietro ritiene che tutto quello che ha detto Paolo sia falso.

3. Il Professore di matematica dice: «Non è vero che l'equazione numero 3 ammette almeno una soluzione reale trascendente». Il Professore ha ragione, quindi:

A. L'equazione numero 3 non ammette soluzioni.
B. L'equazione numero 3 non ammette soluzioni reali.
C. L'equazione numero 3 non ammette soluzioni reali trascendenti.
D. Tutte le risposte precedenti sono vere.
E. Una delle risposte 1-3 è vera.

4. Barbara dice: «C'è un esercizio del compito di matematica che non è risolto da Matilde ed è risolto da Lavinia». Se l'affermazione di Barbara è falsa allora:

A. c'è un esercizio del compito di matematica che non è risolto da Lavinia ed è risolto da Matilde;
B. nessun esercizio del compito di matematica non risolto da Matilde è risolto da Lavinia;
C. c'è più di un esercizio del compito non risolto da Matilde che Lavinia risolve;
D. tutti gli esercizi del compito sono risolti da Matilde e non da Lavinia;
E. Lavinia risolve gli esercizi del compito di matematica non risolti da Matilde.

5. Confronta gli enunciati della lista alfabetica, proposti in italiano corrente, con quelli della lista numerica, nei quali si fa uso solo di combinazioni logiche che coinvolgono il quantificatore esistenziale e i connettivi logici fondamentali. In queste ultime, con «A (non) vale di x» si intende che la proprietà espressa da A (non) vale dell'individuo generico x, mentre le lettere minuscole $a, b, c, \ldots$ indicano individui specifici dell'universo del discorso. Rifletti su quali combinazioni logiche possono essere utilizzate per riscrivere gli enunciati della lista alfabetica in modo ineccepibile, preservandone il senso:

(a) C'è vita su Marte.
(b) Nessun logico è ricchissimo.
(c) Qualche logico è ricco, ma non è famoso.
(d) Qualche animale è vegetariano. Il gatto di Marco no.
(e) Carlo conosce qualche amica di Sandra.
(f) Carlo non conosce le amiche di Sandra.

(g) C'è una mela che puoi mangiare, se Claudia non ha potuto farlo.

(1) C'è un individuo x tale che A e B valgono di x.
(2) Esiste un x tale che A vale di x e B vale di x e A vale di a e B non vale di a.
(3) Esiste un x tale che A vale di x e a e B vale di x e b.
(4) Esiste un x tale che A vale di x e non è vero che B vale di x.
(5) Esiste un x tale che A vale di x e se non è vero che B vale di a e x, allora C vale di x e b.
(6) Non è vero che esiste un x tale che A vale di x e a e B vale di x e b.
(7) Non è vero che esiste un x tale che A e B valgono di x.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a2, b1, c4, d3, e6, f7, g5.
B. a5, b1, c3, d2, e4, f6, g7.
C. a1, b7, c4, d2, e3, f6, g5.
D. a1, b4, c3, d2, e6, f7, g5.
E. a7, b2, c6, d5, e3, f4, g1.

6. In questo caso, la lista alfabetica contiene asserti che fanno uso solo di combinazioni tra il quantificatore universale e i connettivi fondamentali. In esse, con «A (non) vale di x» si intende che la proprietà espressa da A (non) vale dell'individuo generico x e le lettere minuscole $a, b, c, \ldots$ indicano individui specifici dell'universo del discorso. Le frasi dell'elenco numerico, invece, sono scritte in linguaggio corrente. Rifletti su quali tra le forme logiche presentate sono adatte per riscrivere queste ultime in modo ineccepibile:

(a) Esiste un x tale che A vale di x e non è vero che B vale di x.
(b) Esiste un x tale che A vale di x e a e B vale di x e b.
(c) Esiste un x tale che A vale di x e B vale di a e x e C vale di a e x.
(d) Se esiste un x tale che A vale di x e B vale di a e x, allora C vale di a e x.
(e) Esiste un x tale che A non vale di x e B vale di x.
(f) Se esiste un x tale che A vale di x e B vale di x, allora esiste un y tale che A vale di y e esiste un z tale che B vale di z.
(g) Non è vero che se esiste un x tale che A vale di x ed esiste un y tale che B vale di y, allora esiste un z tale che A e B valgono di z.

(1) Aldo ha un gatto e lo cura come un figlio.
(2) Non è vero che se esiste un logico ricco ed esiste un logico famoso, allora esiste un logico ricco e famoso.
(3) Se c'è un logico ricco e famoso allora c'è un logico ricco e c'è un logico famoso.
(4) Non tutto il male viene per nuocere.
(5) Non sempre chi non è alto non è bello.
(6) Tra i numeri n e m si trova almeno un altro numero.
(7) Se c'è qualcosa che desideri, puoi comprarla.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a4, b6, c1, d7, e5, f3, g2.
B. a5, b7, c1, d6, e4, f2, g3.
C. a6, b4, c2, d1, e5, f3, g7.
D. a4, b2, c6, d5, e7, f3, g2.
E. a5, b6, c1, d7, e4, f2, g3.

Unità 4

Combinare i quantificatori individuali

Si consideri l'affermazione:

Ogni persona ha la propria anima gemella

Guardando a essa con quell'attenzione che abbiamo imparato ad affinare e che occorre per farne emergere la struttura logica, appare chiaro come il senso della frase rimanga inalterato, ma si combini con una maggiore correttezza logica se essa viene riformulata mediante l'affermazione secondo cui:

Per ogni persona ne esiste un'altra che ne è l'anima gemella

Volendo poi esercitare fino in fondo la sensibilità logica che si è acquisito nei confronti delle operazioni di quantificazione individuale, cioè la **quantificazione di tipo universale** e quella **di tipo esistenziale**, si potrebbe persino offrire una versione più raffinata di quest'ultima modificandola nel modo seguente:

Per ogni individuo, se questo è una persona, allora esiste un individuo che è anch'esso una persona ed è la sua anima gemella

Secondo quanto si è stabilito in precedenza sulle condizioni che rendono veri gli enunciati quantificati universalmente (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 3), sulle condizioni che rendono veri invece gli enunciati quantificati esistenzialmente (*vedi* Parte B, Unità 3, par. 3), nonché su quanto rende vero gli enunciati costruiti mediante il **condizionale** (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 2) e la **congiunzione** (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 2), si tratta di una frase che è vera nel caso in cui, per ogni individuo appartenente all'universo del discorso che sia «una persona» (dunque, che appartenga al **dominio** del quantificatore universale - *vedi* ***Glossario***), è possibile trovare un altro individuo analogo (dunque, che appartenga al dominio del quantificatore esistenziale) che stia con il primo nella relazione di «essere l'anima gemella». La rilettura della frase e l'analisi della condizione che la rende vera rivelano chiaramente che essa nasce quindi dalla combinazione dell'operazione di quantificazione universale con quella di quantificazione esistenziale sugli individui dell'universo del discorso, in modo non dissimile dai casi che si sono esaminati nella prima parte del volume, nati dalle combinazioni delle operazioni logiche di connessione tra gli enunciati.

1. Le combinazioni base dei quantificatori

La combinazione tra quantificatori dalla quale nasce l'affermazione considerata in precedenza, non è ovviamente l'unica. In effetti, si tratta di una delle quattro **combinazioni base** a cui è possibile dare vita. Un'altra, di tipo diverso, è quella in cui il quantificatore esistenziale si combina con l'universale, come nella frase:

C'è un commensale che paga per tutti gli altri

A una lettura più attenta, si tratta dell'affermazione secondo cui:

Esiste un individuo che è un commensale e per ogni individuo, se questo è un altro commensale, allora il primo paga per lui

Come nel caso della combinazione presa in esame precedentemente e come nel caso delle altre combinazioni base, le **condizioni di verità** (*vedi **Glossario***) di un'affermazione come questa, si ottengono combinando in modo da riflettere la costruzione della frase le condizioni di verità degli enunciati quantificati con quelle degli enunciati più semplici che hanno la forma logica connessa all'uso delle operazioni di quantificazione (il condizionale, legato al quantificatore universale, e la congiunzione, legata a quello esistenziale). Ad esempio, nel caso in esame, occorre tenere conto innanzi tutto della condizione che rende vero il quantificatore esistenziale con cui si apre l'affermazione, da cui dipende la forma logica dell'enunciato quantificato, che è una congiunzione. Per stabilire le condizioni di verità di quest'ultima, occorrerà tenere poi conto del quantificatore universale e del condizionale ad esso collegato.

Gli esempi presi in esame fin qui, illustrano le due possibili combinazioni tra quantificatori diversi: una nella quale un quantificatore di tipo universale si combina con, e precede un quantificatore di tipo esistenziale, l'altra in cui un quantificatore di tipo esistenziale si combina con, e precede un quantificatore di tipo universale. Le altre due combinazioni base si ottengono utilizzando quantificatori dello stesso tipo. Ad esempio, combinando due quantificatori di tipo universale, come nella frase:

La somma di due numeri interi è un numero maggiore di entrambi

Si converrà in effetti come essa non sia altro che l'affermazione (l'uso delle variabili, che è un'esigenza a cui occorre abituarsi - *vedi* Parte B, Unità 2, par. 2 -, crediamo sia particolarmente intuitiva e dunque pacifica nel caso di questo esempio 'numerico'):

Per ogni x, per ogni y, se x è un numero intero e y è un numero intero, allora $x + y$ è un numero intero e $x + y$ è maggiore di x e $x + y$ è maggiore di y

Infine, si possono combinare tra loro due quantificatori esistenziali, come nell'affermazione:

Ci sono almeno due numeri dispari la cui somma è un numero pari

Con essa si intende dire in effetti che:

Esiste un x, esiste un y tali che x è un numero dispari e y è un numero dispari e $x + y$ è un numero pari

Ovviamente, le combinazioni base non esauriscono le combinazioni possibili delle operazioni di quantificazione individuale dal momento che si potrebbe provare a combinare tra loro tre quantificatori universali o due quantificatori universali con un quantificatore esistenziale, ad esempio. È facile rendersi conto, tuttavia, che questi e tutti gli altri casi facilmente immaginabili nascono come combinazioni tra quantificatori individuali e combinazioni base o tra due o più combinazioni base diverse.

3. Combinare i quantificatori con cura

La possibilità di combinare tra loro le operazioni di quantificazione richiede una certa cura, tanto nella formulazione delle affermazioni nelle quali figurano quanto nella loro interpretazione. Si consideri ad esempio la frase:

Tutti i ragazzi amano una ragazza

La lettura più ovvia della frase è la seguente:

Per ogni ragazzo esiste una ragazza che egli ama

con la quale si intende dire che, con qualche eccezione, ogni ragazzo ama una ragazza diversa. Tuttavia, non sarà forse sfuggita la possibilità di offrire un'altra interpretazione della stessa affermazione, meno verosimile ma altrettanto legittima, secondo cui:

Tutti i ragazzi amano una certa ragazza

ovvero, per essere ancora più chiari:

Tutti i ragazzi amano la stessa ragazza

La differenza tra le due letture della frase emerge con chiarezza al livello delle condizioni sugli individui dell'universo del discorso che rendono vera l'una e l'altra. Nel caso della prima interpretazione, l'affermazione è vera se per ogni individuo dell'universo del discorso che sia un «ragazzo» (quindi, per ogni individuo del dominio del quantificatore universale), ne esiste un'altro che è una «ragazza» ed è tale che il primo individuo la ama. Come abbiamo già visto, tuttavia, il quantificatore esistenziale non consente di andare oltre la semplice espressione dell'esistenza di un individuo del proprio dominio di riferimento e dare a essa dei contorni più definiti (*vedi* Parte B, Unità 3, par. 4). Ad esempio, non sappiamo se la ragazza che un qualunque individuo del dominio del quantificatore universale ama sia solo una o più di una. In particolare, come dimostra la seconda lettura dell'affermazione originale, non sappiamo stabilire se la ragazza che due individui amano sia la stessa o meno. In effetti, l'affermazione che «Per ogni ragazzo esiste una ragazza che egli ama» è vera se ognuno ama una ragazza diversa, se due o più ragazzi amano la stessa ragazza e persino nel caso limite in cui tutti amino la stessa ragazza: la logica dei quantificatori in questo caso richiede infatti che per ogni individuo scelto nel dominio del quantificatore universale ne esista uno appartenente al dominio dell'esistenziale che è amato dal primo, ma non che che a ogni scelta fatta nel primo dominio corrisponda un individuo diverso nel secondo.

A partire questa ambiguità trova legittimazione la seconda interpretazione della frase. Dicendo che «Tutti i ragazzi amano la stessa ragazza» si sta dicendo però che ogni «ragazzo» del domino del quantificatore universale ama lo stesso individuo, che è una certa «ragazza». In questa versione la frase è vera solo e soltanto a questa condizione: che per ogni coppia di individui del dominio del quantificatore universale esista un individuo appartenente al dominio di quello esistenziale che sia amata da entrambi.

Le diverse condizioni alle quali frase nelle due versioni risulta vera, dà la misura della differenza che passa tra proferire la prima affermazione o proferire la seconda. In effetti, non è difficile rendersi conto del fatto che la condizione che giustifica la seconda affermazione e che la rende vera sia anche quella che rende vera l'affermazione secondo la quale:

C'è una ragazza che tutti i ragazzi amano

frase che invece non è vera se tutti i ragazzi del dominio amano ragazze diverse, dunque se è vera soltanto la prima versione dell'affermazione originaria ma non la seconda. Queste due letture della stessa affermazione corrispondono, potremmo dire, a due 'situazioni logiche' del tutto diverse: la prima dove un quantificatore universale precede un quantificatore esistenziale, l'altra nella quale l'ordine tra le due operazioni è invertito ed è il quantificatore esistenziale che precede quello universale.

Casi come quello proposto suggeriscono quindi la necessità di procedere con cautela nel tentativo di risolvere le ambiguità derivanti dall'uso combinato dei due quantificatori individuali nel linguaggio quotidiano.

4. Attenzione alla negazione!

Nelle schede dedicate alle due modalità di quantificare sugli individui dell'universo del discorso si è già posto l'attenzione su cosa significhi negare affermazioni quantificate universalmente o esistenzialmente (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 5 e Parte B, Unità 3, par. 3). Un'attenzione simile, se non addirittura maggiore, sarà richiesta allora nel caso in cui si neghi un'affermazione nella quale figurano entrambe le operazioni di quantificazione individuale. Si pensi ad esempio alla frase:

Non è vero che tutti i ragazzi amano una ragazza

ovvero, per essere più precisi rispetto all'ambiguità rilevata in precedenza, alla frase:

Non è vero che per ogni ragazzo esiste una ragazza che egli ama

La frase è vera se è falsa l'affermazione che vi si nega (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 1), quindi se non si realizza al livello dei domini di individui dei quantificatori la condizione che rende vera quest'ultima. Questa condizione, dato quanto si è detto in precedenza, corrisponde al fatto che, per ogni «ragazzo» del dominio del quantificatore universale, esista un individuo che sia una «ragazza» e che sia tale che egli la ami. Quindi, questa condizione non si realizza se esiste un «ragazzo» che non ama alcuna «ragazza». Per il «ragazzo» in questione, infatti, non è possibile soddisfare la condizione precedente (quindi, trovare una ragazza che gli ama) e dal momento che tale condizione deve verificarsi per tutti i «ragazzi» affinché la frase negata sia vera, quest'ultima è falsa ed è vera di conseguenza la sua negazione.

Si noti che la condizione di cui si è detto è esattamente quella che rende vera l'affermazione:

Esiste un ragazzo che non ama nessuna ragazza

che descrive al livello del linguaggio quanto accade al livello dei domini dei quantificatori nella situazione precedentemente descritta. Per giungere finalmente all'osservazione che si voleva sottoporre all'attenzione del lettore, si noti che quest'ultima affermazione si presta a un'ulteriore formulazione, la seguente, che ne evidenza più chiaramente la forma logica:

C'è un individuo che è un ragazzo ed ètale che, per ogni ragazza, non è vero che egli la ami

Questa disamina della situazione, forse persino eccessivamente pedante, ha lo scopo di mostrare come i rapporti tra quantificatore universale ed esistenziale determinati dall'intervento della negazione logica sono rispettati anche nel caso del loro uso combinato. Nel ricapitolare qui di seguito i passaggi interpretativi che si sono proposti in precedenza, si vuole evidenziare come da essi emerga un 'percorso' che intraprende il connettivo di negazione, dall''esterno' dell'affermazione verso il suo 'interno':

Non è vero che **per ogni** ragazzo esiste una ragazza che egli ama.
Esiste un ragazzo tale che **non è vero** che **esiste** una ragazza che egli ama.
Esiste un ragazzo tale che **per ogni** ragazza **non è vero** che egli la ami.

I tre enunciati indicati sono modi logicamente equivalenti di riflettere il senso dell'uso della negazione in un contesto nel quale è presente la combinazione di quantificatori individuali indicata. Si noti come ciascuno di essi contribuisca in effetti a 'spingere' la negazione verso l'enunciato su cui si quantifica, utilizzando proprio le regole che si sono stabilite riguardo ai rapporti tra negazione logica e quantificazione individuale, dunque come si passi ad esempio dalla negazione di un quantificatore universale alla quantificazione esistenziale di una negazione e dalla negazione di un quantificatore esistenziale alla quantificazione universale di una negazione.

Adottando le convenzioni sulla notazione che si sono introdotte in precedenza, in occasione della trattazione del problema relativo all'intervento della negazione in situazioni nelle quali sono in uso le due operazioni di quantificazione sugli individui prese separatamente, è possibile riassumere gli 'effetti' che la negazione logica produce sulle combinazioni base dei quantificatori. Supponiamo quindi di indicare con A, B e C tre condizioni che descrivono una certa classe di individui dell'universo del discorso (la classe «degli A», quella «dei B» e quella «dei C»). La morale di quanto si è illustrato in precedenza ammonta quindi a quanto segue:

«Per ogni A, per ogni B, vale C» è **falsa** se e solo se «Esiste un A, esiste un B tale che non vale C» è **vera**.

«Esiste un *A*, esiste un *B*, tale che vale *C*» è **falsa** se e solo se «Per ogni *A*, per ogni *B* non vale *C*» è **vera**.
«Per ogni *A*, esiste un *B* tale che vale *C*» è **falsa** se e solo se «Esiste un *A* tale che per ogni *B* non vale *C*» è **vera**.
«Esiste un *A* tale che per ogni *B*, vale *C*» è **falsa** se e solo se «Per ogni *A*, esiste un *B* tale che non vale *C*» è **vera**.

5. Quantificatori numerici

Nella scheda dedicata al quantificatore esistenziale si notava (*vedi* Parte B, Unità 3, par. 4) come da solo questo non fosse sufficiente a esprimere concetti che pure lo coinvolgono, ad esempio quelli legati a un'affermazione del tipo:

Esattamente una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari

La ragione, si diceva, è legata al fatto che un'affermazione esistenziale 'semplice', come la frase:

Una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari

è vera tanto nel caso in cui una e una sola delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari quanto nel caso in cui più di una delle sorelle di Anna lo ha fatto. L'osservazione offre uno spunto, a dire il vero, per provare ad avvicinarsi al concetto che si vuole esprimere dicendo che «esattamente un individuo» dell'universo del discorso possiede una data proprietà. Ad esempio, si potrebbe provare a precisare l'affermazione precedente dicendo:

Una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari, ma non è vero che tutte le sorelle di Anna hanno concluso gli studi universitari

In effetti, adesso stiamo dicendo che una o più di una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari, ma non tutte lo hanno fatto.

Siamo ancora lontani, tuttavia, dal poter precisare il numero delle sorelle di Anna che hanno conseguito la laurea come vorremmo. Un passo decisivo verso la soluzione del caso è offerto dalla seguente variante della frase precedente:

Una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari, ma le altre non lo hanno fatto

Non sarà forse sfuggito che il passaggio proposto ha un costo: la necessità di adeguare il bagaglio concettuale di cui si fa uso così da poter esprimere la relazione di **identità** tra gli individui dell'universo del discorso. In effetti, una versione logicamente più rigorosa dell'affermazione precedente è data dalla frase:

Una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari e le sorelle di Anna diverse da essa non hanno concluso gli studi universitari

La frase in effetti è vera se, degli individui che appartengono al dominio del quantificatore esistenziale, rappresentato dalle sorelle di Anna che si è supposto in precedenza essere tre, uno ha concluso gli studi universitari e tutti gli altri individui del dominio diversi da quello in questione non lo hanno fatto. L'analisi logica più accurata rivela così come, oltre all'identità, anche il quantificatore universale giochi un ruolo essenziale nella precisazione del numero degli individui dell'universo del discorso che godono (o non godono) di una certa proprietà. In effetti, non dovrebbe essere difficile rendersi conto che la condizione in questione corrisponde a quella che rende vera l'affermazione:

C'è un individuo che è sorella di Anna e ha concluso gli studi universitari e per ogni individuo, se questo è sorella di Anna ed è diverso dall'individuo precedente, allora non ha concluso gli studi universitari

Il nostro peregrinare alla ricerca del senso dell'affermazione originaria tra varianti più o meno logicamente raffinate sembra concluso. È quest'ultima, dunque, la versione più corretto della frase «Esattamente una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari», il che significa che è la combinazione del quantificatore esistenziale con quello universale che ci mette in grado di esprimere il concetto che soggiace all'uso dell'espressione «Esattamente un individuo x gode della proprietà A» nel linguaggio ordinario. Non soprendenetemente, difficoltà simili si incontrano nel tentativo di stabilire quale sia la logica che soggiace all'uso di altre espressioni analoghe, come quella che dà vita all'affermazione:

Almeno due delle sorelle di Anna hanno concluso gli studi universitari

La frase infatti è vera a condizione che non solo una ma almeno due sorelle di Anna (due sorelle diverse) abbiano concluso gli studi universitari, mantenendosi in piedi la possibilità che a farlo siano state però tutte e tre. Quest'ultima osservazione suggerisce che, delle due operazioni di quantificazione individuale, possa bastare quella esistenziale stavolta, dato che questa consente di precisare il numero minimo di individui del dominio che godono di una certa proprietà, ma non il loro numero massimo. Come illustra il caso trattato in precedenza, è solo la combinazione con il quantificatore di tipo universale che mette in grado di esprimere quest'ultimo. In effetti, non è difficile rendersi conto che il senso dell'affermazione è mantenuto e inserito in un contesto logicamente più chiaro dall'affermazione seguente:

Cé un individuo che è sorella di Anna e concluso gli studi universitari e c'è un individuo che è sorella di Anna, è diverso dall'individuo precedente e ha concluso gli studi universitari

Le difficoltà incontrate fino a questo punto si ripropongono e si combinano tra loro nel caso si abbia la necessità di esprimere concetti come «Esattamente due individui godono della proprietà A», «Almeno tre individui godono della proprietà A», ecc. Quanto si è detto al proposito dei casi trattati fin qui in modo esplicito dovrebbe suggerire anche come si possano risolvere questi esempi ulteriori. In ogni caso, data la natura di livello 'superiore' delle nozioni in gioco, dovuta all'intervento del concetto non banale di «identità» tra due individui e a certe sottigliezze sui domini legate all'uso combinato delle operazioni di quantificazione, quanto si è avuto modo di dire qui dovrà servire come un'introduzione per la trattazione più precisa dell'argomento che avremo modo di fare nella scheda dedicata alla formalizzazione dei quantificatori logici e delle loro combinazioni (*vedi* Parte B, Unità 5).

6. Combinazioni di quantificatori celebri

Al di là dei casi estrapolati dall'uso ordinario del linguaggio che si è menzionato in precedenza, è possibile trovare esempi di combinazioni delle operazioni logiche di quantificazione individuale nella definizione di concetti importanti per la pratica scientifica. È il caso, ad esempio, della definizione matematica della proprietà di «essere il limite» di una successione infinita di numeri reali $a_0, a_1, \dots$ e che identifica l'unico numero reale l tale che «preso comunque un numero reale $\epsilon > 0$, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N \mid a_n - l \mid < \epsilon$». In questo caso, i quantificatori individuali si combinano tra loro in un modo che è persino più complesso di quanto non facessero negli esempi proposti fin qui: a un quantificatore di tipo universale, segue infatti un quantificatore esistenziale a cui segue di nuovo un universale.

Un altro caso tratto dalla matematica è tuttavia particolarmente illuminante sui rapporti tra la versione di un enunciato in cui un quantificatore universale si combina con un esistenziale e quella in cui l'esistenziale si alterna all'universale. È il caso dell'**assioma di scelta**, che rappresenta uno dei principi fondamentali della teoria matematica degli insiemi. In una delle sue innumerevoli varianti, il principio in questione recita infatti: «Per ogni insieme X e Y non vuoti e per ogni relazione $R \subseteq X \times Y$, se per ogni $x \in X$ esiste un $y \in Y$ tale che xRy, allora esiste una funzione f con dominio X e codominio Y tale che, per ogni $x \in X$, $xRf(x)$».

Per essere ben compreso l'esempio richiede tuttavia una dimestichezza logica, prima ancora che matematica, che non si può ancora presupporre a questo livello. Si rimanda perciò alla scheda relativa alla formalizzazione dei quantificatori per l'acquisizione di quegli strumenti minimi che possono aiutare nella sua piena comprensione (*vedi* Parte B, Unità 5, par. 6).

Esercizi Unità 4

1. Michele afferma: «Non è vero che due coniugi che fanno lo stesso lavoro non hanno conseguenze negative per il loro rapporto». Se la frase di Michele è vera, allora:

A. due coniugi che non fanno lo stesso lavoro hanno solo conseguenze positive per il loro rapporto;
B. solo uno di due coniugi che fanno lo stesso lavoro ha conseguenze negative per il suo rapporto con l'altro;
C. almeno una coppia di coniugi che fanno lo stesso lavoro hanno conseguenze negative per il loro rapporto;
D. ci sono almeno due coniugi che fanno lavori diversi e non hanno conseguenze negative per il loro rapporto;
E. ci sono due coniugi che non possono fare lo stesso lavoro.

2. Andrea afferma che «Non è vero che conosco giusto due persone che sanno risolvere il cubo di Rubik». Quindi:
A. Andrea conosce solo una persona che sa risolvere il cubo di Rubik.
B. Andrea conosce più di due persone che sanno risolvere il cubo di Rubik.
C. Andrea non conosce nessuno che sappia risolvere il cubo di Rubik.
D. Tutte le risposte precedenti sono vere.
E. Almeno una delle risposte 1-3 è vera.

3. Secondo il presidente della commissione esaminatrice: «C'è almeno un candidato che possiede tutti i requisiti per vincere il concorso». Ma il presidente si sbaglia, quindi:

A. a ogni candidato manca almeno un requisito per vincere il concorso;
B. c'è almeno un candidato che non possiede alcun requisito per vincere il concorso;
C. tutti i candidato non possiedono alcun requisito per vincere il concorso;
D. nessun candidato possiede almeno un requisito per vincere il concorso;
E. ci sono almeno due candidati che possiedono tutti i requisiti per vincere il concorso.

4. Mattia sostiene che: «Se tutti danno un passaggio a qualcuno per andare alla festa, allora c'è qualcuno che dà un passaggio a tutti». Mattia si sbaglia, quindi:

A. se tutti danno un passaggio a qualcuno per andare alla festa, allora nessuno rimane a piedi;
B. se tutti danno un passaggio a qualcuno per andare alla festa, allora qualcuno non dà un passaggio a nessuno;
C. se tutti danno un passaggio a qualcuno per andare alla festa, allora per ciascuno esiste qualcun'altro a cui egli non dà un passaggio;
D. se tutti danno un passaggio a qualcuno per andare alla festa, allora qualcuno non viene portato da nessuno;
E. se tutti danno un passaggio a qualcuno per andare alla festa, allora nessuno dà un passaggio a tutti.

5. Nel corso di una discussione con gli amici, Matteo dice: «Almeno una delle affermazioni di Giuseppe non è vera». Dal canto suo, Giuseppe sostiene che: «Tutto quello che ha detto Matteo è vero». Supponiamo che a parte la frase citata le affermazioni di Giuseppe siano tutte indubbiamente vere e supponiamo anche che tutto ciò che Matteo ha detto non possa essere contraddetto e dunque che sia vero. Dall'analisi logica delle due frasi segue allora che:

A. sono entrambe false;
B. sono entrambe vere;
C. solo la frase di Matteo è vera;
D. la frase di Giuseppe è vera e quella di Matteo è falsa;
E. di entrambe le frasi, non si può dire se esse siano vere o false.

6. Confronta gli enunciati della lista alfabetica, proposti in italiano corrente, con quelli della lista numerica, nei quali si fa uso solo di combinazioni logiche che coinvolgono il quantificatore esistenziale e i connettivi logici fondamentali. In queste ultime, con «A (non) vale di x» si intende che la proprietà espressa da A (non) vale dell'individuo generico x, mentre le lettere minuscole $a, b, c, \ldots$ indicano individui specifici dell'universo del discorso. Inoltre, visto il ruolo essenziale che ricopre per esprimere i quantificatori numerici (*vedi* Parte B, Unità 4, par. 5), si suppone che I stia per «essere identico a». Rifletti su quali combinazioni logiche possono essere utilizzate per riscrivere gli enunciati della lista alfabetica in modo ineccepibile, preservandone il senso:

(a) Tutto ciò che esiste ha una causa.
(b) Ci sono persone che non hanno una casa di proprietà.
(c) Non è vero che due fratelli abbiano gli stessi genitori.
(d) Tutti i candidati eccetto uno hanno superato la prova.
(e) Ogni avente diritto al voto esprime almeno una preferenza.
(f) Ogni avente diritto al voto esprime al massimo una preferenza.
(g) Ogni avente diritto al voto esprime esattamente una preferenza.

(1) Non è vero che per ogni individuo x, per ogni individuo y, se A vale di x e y, allora per ogni z, C vale di z e x se e solo se C vale di z e y.
(2) Per ogni x, se A vale di x allora non è vero che esiste un y ed esiste z tale che B vale di y e B vale di z e I non vale di y e z e C vale di x e y e C vale di x e z.
(3) Per ogni x, se A vale di x allora esiste un y tale che B vale di y e C vale di x e y e non è vero che esiste z tale che B vale di z e I non vale di y e z e C vale di x e z.
(4) Per ogni x, se A vale di x allora esiste un y tale che B vale di y e C vale di x e y.
(5) Per ogni x, se A vale di x allora esiste un y tale che B vale di y e x.
(6) Esiste un x tale che A vale di x e non è vero che B vale di x e a e per ogni y se A vale di y e non è vero che I vale di x e y allora B vale di y e a.
(7) Esiste un x tale che A vale di x e per ogni y se B vale di y, allora C non vale di x e y.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a1, b6, c4, d7, e5, f3, g2.
B. a5, b7, c1, d6, e4, f2, g3.
C. a2, b7, c4, d1, e5, f3, g6.
D. a1, b2, c6, d5, e7, f3, g4.
E. a5, b6, c1, d4, e7, f2, g3.

7. In questo caso, la lista alfabetica contiene asserti che fanno uso solo di combinazioni tra il quantificatore universale e i connettivi fondamentali. In esse, con «A (non) vale di x» si intende che la proprietà espressa da A (non) vale dell'individuo generico x e le lettere minuscole $a, b, c, \ldots$ indicano individui specifici dell'universo del discorso e «I (non) vale di x e y» è un'abbreviazione per «x (non) è identico a y». Le frasi dell'elenco numerico, invece, sono scritte in linguaggio corrente. Rifletti su quali tra le forme logiche presentate sono adatte per riscrivere queste ultime in modo ineccepibile:

(a) Non è vero che esiste un x tale che A vale di x e B vale di a e x ed esiste un y tale che A vale di y e I non vale di x e y e B vale di a e y.
(b) Per ogni x, per ogni y, se A vale di x e y, allora per ogni individuo z, se B vale di z e x, allora C vale di z e y.
(c) Esiste un x, esiste un y tali che A vale di x e A vale di y e per ogni z, se B vale di x, y e z allora A non vale di z.
(d) Per ogni x, per ogni y, per ogni z, se A vale di y e x e A vale di z e y, allora B vale di z e x.
(e) Per ogni x, se A vale di x allora esiste y tale che B vale di y e x e C vale di y e non è vero che esiste z tale che B vale di z e x e I non vale di y e z e C vale di z.
(f) Non è vero che per ogni x, se A vale di x allora esiste y ed esiste z tali che I non vale di y e z e B vale di y e x e B vale di z e x e C vale di y e C vale di z.
(g) Per ogni x, se non è vero che esiste un y tale che A vale di y e x, allora non esiste z tale che A vale di z e x.

(1) Il genitore di un cugino è uno zio.
(2) Ogni esercizio ha una e una sola risposta esatta.
(3) I figli dei figli sono nipoti.
(4) Ci sono almeno due numeri primi la cui somma non è un numero primo.
(5) Gli ultimi saranno i primi.
(6) Carlo non possiede due automobili.
(7) Ogni esercizio ha al più una risposta esatta.

Quale risposta accoppia correttamente gli enunciati?

A. a6, b1, c4, d3, e2, f7, g5.
B. a3, b1, c5, d2, e4, f6, g7.
C. a5, b6, c4, d2, e3, f7, g1.
D. a1, b4, c3, d2, e5, f7, g6.
E. a7, b2, c5, d6, e3, f4, g1.

Unità 5

Formalizzare enunciati atomici e quantificatori individuali

Nelle unità precedenti abbiamo visto che le espressioni del linguaggio ordinario possono talvolta nascondere o rendere ambigua la lettura delle affermazioni dove figurano le operazioni di **quantificazione** sugli individui in aggiunta alle operazioni logiche di connessione tra gli enunciati. Come si è già avuto modo di mostrare nel caso della logica enunciativa, l'adozione di un **linguaggio simbolico** e il processo di **formalizzazione** (*vedi* ***Glossario***) opportunamente esteso alle operazioni di quantificazione può servire per superare le ambiguità e mettere in evidenza la **forma logica** (*vedi* ***Glossario***) corretta degli enunciati che le contengano.

1. Formalizzare gli enunciati atomici: i predicati

Come si ricorderà per aver visto il meccanismo della formalizzazione all'opera nel caso enunciativo (*vedi* Parte A, Unità 6), un passo essenziale del processo consiste nella scelta di un **alfabeto simbolico** appropriato che consenta di isolare, degli enunciati presi in esame, tutto il contenuto rilevante al fine di determinarne le proprietà logiche. Nel passaggio alle operazioni di quantificazione individuale, ma già al livello degli **enunciati atomici** (*vedi* ***Glossario***) che ne sono un ingrediente fondamentale, la novità consiste nell'importanza che assume il riferimento agli individui dell'**universo del discorso** (*vedi* ***Glossario***).

Si consideri, ad esempio, l'enunciato (atomico):

Dario è simpatico

L'affermazione attribuisce a un individuo di nome «Dario» la proprietà di «essere simpatico». L'alfabeto simbolico di cui abbiamo bisogno dovrà di conseguenza contenere un simbolo che rappresenti quel nome, ad esempio la lettera corsiva minuscola d, e un altro simbolo, ad esempio la lettera maiuscola S, che rappresenti quella proprietà. Resta da stabilire come esprimere il fatto che la proprietà S «appartiene» all'individuo d, o che essa «è goduta» da quest'ultimo, come si è stabilito di dire. Nella letteratura logica ha finito per prevalere la convenzione, che seguiamo anche qui, di adattare a individui e proprietà la notazione 'funzionale' in uso in matematica e scrivere quindi $S(d)$ per formalizzare il concetto secondo cui «l'individuo d gode della proprietà S».

2. Formalizzare gli enunciati atomici: le relazioni

Si consideri invece l'affermazione:

Riccardo è il padre di Dario

La novità sta nel fatto che gli individui menzionati dall'affermazione sono due, «Riccardo» e «Dario», e dunque la proprietà «essere padre di» si dovrebbe supporre che sia attribuita a entrambi. In realtà, la situazione la si comprende meglio diversificando il lessico e pensando all'enunciato atomico in questione come a un'affermazione mediante la quale si sancisce l'esistenza di una **relazione** tra i due individui menzionati (*vedi* ***Glossario***). Come nel caso precedente, formalizzare l'enunciato richiede che si disponga di simboli per gli individui dell'universo del discorso, dunque almeno di un simbolo r per «Riccardo» e di un d per «Dario», nonché di un simbolo P per la relazione che si dice li leghi, «essere padre di», il quale, estendendo a questo caso la convenzione introdotta in precedenza, si 'applica' come fosse una funzione matematica ai simboli per gli individui. Ne consegue che la versione formale dell'enunciato considerato è la **formula** seguente:

$$P(r, d)$$

Si noti che in questo modo si introduce un'altra convenzione tacita, che saremo tenuti a considerare nel seguito per non generare confusione, ovvero quella di scrivere, nell'espressione che rappresenta formalmente la relazione presa in esame, al primo posto il simbolo che indica il «padre» e al secondo quello del «figlio». Così che, se «Lorenzo è il padre di Olmo», non vi siano dubbi che sia l'espressione $P(l, o)$ a corrispondergli formalmente, e non $P(o, l)$ (la quale formalizza, sulla base della convezione testé introdotta, l'enunciato «Olmo è il padre di Lorenzo»).

3. Formalizzare gli enunciati atomici: i funtori

Nella scheda dedicata agli enunciati atomici, abbiamo avuto modo di sottolineare come gli individui possano essere menzionati direttamente, attraverso il loro nome, oppure per via indiretta, attraverso una descrizione che li qualifica (*vedi* Parte B, Unità 1, par. 4). Si consideri ad esempio l'affermazione:

Il padre di Dario si chiama Riccardo

Posto che si tratti della stessa persona, l'individuo che nella frase precedente veniva menzionato col suo nome proprio e di cui si sottolineava il legame con l'individuo di nome «Dario» dato dalla relazione «essere il padre di», in questo caso viene menzionato in virtù di quella relazione stessa e di lui si dice che ha la proprietà di «chiamarsi Riccardo». La locuzione «il padre di» svolge un ruolo diverso dalla relazione «essere il padre di». La prima, infatti, è una forma nominale e serve per indicare un individuo che in questo caso è il soggetto della frase. L'altra, presuppone che ci siano due individui, il soggetto e il complemento della frase, menzionati attraverso due forme nominali indipendenti.

Il corrispettivo di una forma nominale come «il padre di» al livello del linguaggio simbolico che si sta definendo è individuato dal concetto di **funtore**, che ricopre in una formula lo stesso ruolo delle funzioni matematiche come la somma aritmetica. Queste ultime, in effetti, possono essere viste come un modo per identificare i numeri interi senza menzionarli direttamente: così, ad esempio, 2 + 3 è 5, 4 + 7 è 11, ecc. La similitudine giustifica la notazione scelta per i funtori, che riprende il modello funzionale impiegato già per predicati e relazioni. Dunque, se p è il simbolo per il funtore «il padre di» e d è «Dario», $p(d)$ formalizza «il padre di Dario» e:

$$C(p(d), r)$$

formalizza la frase precedente se $C(x, y)$ è il simbolo per la relazione «x si chiama (o ha nome) y».

I funtori, come predicati e relazioni, e come le funzioni matematiche peraltro, possono avere diverse **arietà** (*vedi* ***Glossario***). Si consideri, ad esempio, la frase:

La persona seduta tra Matilde e Lavinia si chiama Tommaso

In essa l'indicazione del soggetto è ancora reso possibile da una descrizione, **istanza** (*vedi* ***Glossario***) dell'espressione «colui che è seduto tra x e y». A differenza del caso precedente, quest'ultima nasce da una relazione che coinvolge tre individui: i due seduti ai lati e il terzo seduto al centro. Per formalizzare l'affermazione in questione si avrà bisogno perciò di un simbolo funtoriale di arietà 2 come $s(x, y)$, il quale consente di ottenere:

$$C(s(m, l), t)$$

(dove m è «Matilde», l «Lavinia», t «Tommaso» e il simbolo $C(x, y, z)$ ha lo stesso significato che gli si è attribuito trattando il caso precedente).

Esattamente come le funzioni matematiche, i funtori possono essere combinati tra loro, ad esempio nella frase:

La sorella del padre di Dario si chiama Silvia

che, utilizzando le scelte dell'alfabeto fatte fin qui, diventa:

$$C(so(p(d)), s)$$

se $so(x)$ è il simbolo per l'espressione «la sorella di x».

4. Enunciati atomici e connettivi logici

Una volta individuata la via per estendere agli enunciato atomici il processo di formalizzazione introdotto per studiare le proprietà logiche enunciative, i due strumenti possono essere combinati tra loro per formalizzare le affermazioni nelle quali i connettivi logici vengono applicati agli enunciati atomici. Così, l'affermazione composita:

Riccardo è il padre di Dario mentre Lorenzo è il padre di Olmo

diviene facilmente formalizzabile tenendo conto del fatto che la locuzione «mentre» non è altro che uno dei modi possibili per esprimere nel linguaggio ordinario l'operazione logica di congiunzione. Alla luce dell'osservazione, la formula che isola in modo corretto la forma logica dell'affermazione si ottiene combinando la versione formale dei due enunciati atomici che vi occorrono con il simbolo prescelto (*vedi* Parte A, Unità 7, par. 2) per indicare la congiunzione:

$$P(r, d) \wedge P(l, o)$$

Soluzioni analoghe si attuano in circostanze nelle quali agli enunciati atomici sono applicati i connettivi logici di negazione, disgiunzione, il condizionale e il bicondizionale.

5. Formalizzare gli enunciati quantificati

Il passaggio successivo consiste nell'illustrare come il processo di formalizzazione si estenda a enunciati nei quali occorrano le operazioni di quantificazione sugli individui dell'universo del discorso. Innanzi tutto, occorrerà dotare il nostro alfabeto di due simboli che le rappresentino formalmente. In linea con quanto accade nella letteratura specialistica, scegliamo di utilizzare il simbolo $\forall$ per il quantificatore universale e il simbolo $\exists$ per quello esistenziale.

Questo arricchimento dell'alfabeto simbolico, tuttavia, non è il solo passaggio che occorre espletare per portare a termine il procedimento. Si pensi infatti a un'affermazione come:

Tutti i compagni di classe di Dario praticano sport

Il senso della frase, per come lo si è analizzato nella scheda dedicata al quantificatore universale (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 1), è che preso un qualunque individuo che stia nella classe di Dario, dovrà risultare vero dire di lui che pratica uno sport. Fino a questo momento abbiamo imparato come associare a ogni individuo specifico un nome dell'alfabeto in modo da formalizzare un'affermazione che lo riguardi. La frase che si sta esaminando, però, non fa riferimento a un individuo solo ma a una collezione di individui (quella dei «compagni di classe di Dario»). Di tutti questi, si dice che essi godono di una certa proprietà.

Lo strattagemma sotteso dall'uso del quantificatore e che permette di esprimere questo fatto attraverso una sola affermazione anziché mediante una lista di affermazioni congiunte che enuncino come quella proprietà è goduta da ciascun individuo delsuo **dominio** (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 5), sfrutta la possibilità di fare riferimento a un individuo generico che gli appartiene. D'altra parte questa linea interpretativa non dovrebbe risultare del tutto nuova, essendo quella che si segue abitualmente nel caso delle affermazioni della matematica. Alla richiesta di restituire il senso di una frase come:

Tutti i numeri primi maggiori di 2 sono dispari

si direbbe che, preso un *qualunque numero* x, se questo è primo e maggiore di 2, allora esso possiede la proprietà di «essere dispari».

Proprio la matematica, in effetti, è la fonte a cui ci si ispira per formalizzare il riferimento 'generico' a un individuo che appartiene al dominio di un quantificatore individuale. L'idea consiste nell'utilizzare delle **variabili individuali** come la x dell'esempio precedente. Come per i numeri, quindi, si stabilisce di utilizzare i simboli di variabile $x, y, z, \ldots$ per riferirsi in modo generico agli individui del dominio del quantificatore. In questo modo, la lettura della frase relativa ai compagni di classe di Dario finisce per essere del tutto analoga a quella che si è dato dell'affermazione sui numeri primi maggiori di 2: preso un qualunque individuo x, se questo è un compagno di classe di Dario, allora sarà vero che x pratica uno sport.

Arrivati a questo punto, il processo di formalizzazione dell'affermazione originaria procede spedito. Supponiamo di scrivere stavolta $C(x, y)$ nel caso in cui un individuo x è «compagno di classe» di y e $S(x)$ se x «pratica uno sport». Supponiamo infine di indicare con d, come in precedenza, l'individuo di nome Dario. La versione formale della frase considerata, dunque, è la formula seguente:

$$\forall x(C(x, d) \to S(x))$$

Scorrendone le parti e assegnando a ciascuna il proprio senso sulla base di quanto convenuto, risulta infatti che essa 'dice': per ogni individuo generico x, se x è compagno di classe di Dario, allora x pratica sport.

Come nel caso dei connettivi logici (*vedi* Parte A, Unità 6, par. 4), si ricorre alle parentesi per delimitare con precisione l'azione del quantificatore universale. Anche nel caso delle operazioni di quantificazione individuale, in effetti, quest'uso finisce per essere fondamentale al fine di restituire in modo chiaro e senza ambiguità il senso delle affermazioni del linguaggio ordinario da cui si è preso le mosse (vedi il paragrafo successivo).

6. Combinazioni di quantificatori, identià e ancora parentesi

Il processo di formalizzazione che si è descritto fin qui può essere facilmente esteso alle affermazioni nelle quali compare la quantificazione di tipo esistenziale, così come ai casi più complessi derivanti dalla combinazione dei quantificatori individuali (*vedi* Parte B, Unità 4). Si consideri, ad esempio, l'affermazione:

Esattamente una delle sorelle di Anna ha concluso gli studi universitari

che si è già avuto modo di considerare introducendo i quantificatori 'numerici' (*vedi* Parte B, Unità 4, par. 5). Secondo quanto si è stabilito in quell'occasione, il senso della frase può essere restituito in un modo logicamente più corretto dicendo:

C'è un individuo che è sorella di Anna e ha concluso gli studi universitari e per ogni individuo, se questo è sorella di Anna ed è diverso dall'individuo precedente, allora non ha concluso gli studi universitari

Proviamo a determinare intanto l'alfabeto necessario a produrre di esso una versione formale corretta. Occorre innanzi tutto un simbolo a per indicare l'individuo «Anna». Inoltre, occorre un simbolo di relazione S di arietà 2 per «essere sorella di» e un simbolo di predicato U per «aver concluso gli studi universitari», sempre di arietà 1. Infine, occorre un simbolo per la relazione di identità tra gli individui (la cui negazione logica utilizzeremo per interpretare la relazione di «diversità» menzionata nella frase). Seguendo il paradigma matematico come si è fatto fin qui, utilizziamo la notazione $x = y$ per «l'individuò x è identico all'individuo y».

A questo punto invitiamo il lettore, forte di quanto si è detto finora, a verificare che la formula seguente:

$$\exists x(S(x,a) \wedge U(x) \wedge \forall y(S(y,a) \wedge \neg(x = y) \rightarrow \neg U(y)))$$

è l'espressione cercata. Si noti la disposizione delle parentesi, in particolare si noti il fatto che le parentesi che delimitano il raggio d'azione del quantificatore esistenziale contengono il quantificatore universale e tutta la parte della frase su cui 'agisce' quest'ultimo. In effetti questo è l'unico modo per far sì che l'individuo y su cui insiste il quantificatore universale possa essere messo in relazione con l'individuo x su cui insiste invece il quantificatore esistenziale, preservando il senso della frase: ovvero, in modo tale che l'x che si dice essere diverso da y sia proprio quello che esiste grazie all'uso del quantificatore esistenziale. Di questo fatto non si avrebbe alcuna certezza se formalizzassimo la frase in modo diverso, facendo 'terminare prima' l'azione del quantificatore esistenziale:

$$\exists x(S(x,a) \wedge U(x)) \wedge \forall y(S(y,a) \wedge \neg(x = y) \rightarrow \neg U(y))$$

La x che compare nel secondo congiunto, in effetti, è, come si suol dire nel gergo logico, **libera** dall'azione del quantificatore esistenziale (perché non è compresa nel suo 'raggio d'azione') e rappresenta un individuo generico del tutto indipendente dalla 'dichiarazione di esistenza' associata all'uso del quantificatore nella prima parte della formula (e anche dall'azione del quantificatore universale, a dire il vero, che insiste solo sulla variabile y). Dato che le variabili rappresentano tutte allo stesso modo un individuo generico dell'universo del discorso, la formula precedente è del tutto equivalente a una formula che differisca da essa solo per il nome di questa **occorrenza libera** della x come:

$$\exists x(S(x,a) \wedge U(x)) \wedge \forall y(S(y,a) \wedge \neg(z = y) \rightarrow \neg U(y))$$

Si noti, invece, che se volessimo cambiare il 'nome' dell'individuo generico in quell'espressione che abbiamo indicato come la versione formale corretta della frase, non potremmo cambiare la seconda occorrenza della x e non cambiare anche tutte le altre dato che ricadono sotto l'azione del quantificatore esistenziale (e quindi rappresentano lo stesso individuo, benché generico). Dunque, si sarebbe potuto certamente scrivere quella formula fin dall'inizio come:

$$\exists z(S(z,a) \wedge U(z) \wedge \forall y(S(y,a) \wedge \neg(z = y) \rightarrow \neg U(y))$$

perchè, per ribadire il punto, i 'nomi' degli individui generici sono tutti uguali (o meglio hanno tutti la stessa funzione). Invece, non si sarebbe potuto scriverla come:

$$\exists x(S(x,a) \wedge U(x) \wedge \forall y(S(y,a) \wedge \neg(z = y) \rightarrow \neg U(y))$$

cambiando un'occorrenza della variabile su cui insiste il quantificatore esistenziale ma non le altre, senza commettere anche un plateale errore di sintassi e perdere con esso anche il nesso con l'affermazione originaria.

Esercizi Unità 5

1. Posto l per «Luca», c per «Claudia», $P(x, y)$ per «x è il padre di y», $A(x, y)$ per «x è amico di y» e $C(x, y)$ per «x conosce y», si individui tra le proposte seguenti la formalizzazione corretta della frase «Non è vero che un amico di Luca non conosce il padre di Claudia»:

A. $\forall x(\neg A(x, l) \vee C(x, p(c)))$.
B. $\forall x(C(x, p(c)) \rightarrow \neg A(x, l))$.
C. $\forall x(A(x, l) \rightarrow C(x, p(c)))$.
D. $\neg\exists x(A(x, l) \wedge \neg C(x, p(c)))$.
E. Una tra le risposte A, C, D.

2. Posto $N(x)$ per «x è un numero», $P(x)$ per «x è primo» e $D(x)$ per «x è dispari», si individui tra le proposte seguenti la formalizzazione corretta dell'affermazione (falsa) «Perchè un numero sia primo è necessario che sia dispari»:

A. $\forall x(\neg D(x) \rightarrow N(x) \wedge \neg P(x))$;
B. $\forall x(\neg D(x) \rightarrow \neg N(x) \vee \neg P(x))$;
C. $\neg\exists x(N(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg D(x))$;
D. $\exists x\neg(N(x) \wedge P(x) \wedge \neg D(x))$;
E. $\forall x(D(x) \rightarrow \neg N(x) \vee \neg P(x))$.

3. Si consideri la frase: «Ogni confezione contiene due penne a sfera». Posto $P(x)$ per «x è una penna a sfera», $C(x)$ per «x è una confezione (di penne)», $In(x, y)$ per «x contiene y» e $x = y$ per «x è identico a y», si individui tra le proposte seguenti quale rappresenta una formalizzazione corretta dell'enunciato:

A. $\forall x(C(x) \rightarrow \neg\exists y\exists z\exists w(P(y) \wedge P(z) \wedge P(w) \wedge In(x, y) \wedge In(x, z) \wedge In(x, w)))$;
B. $\forall x(C(x) \rightarrow \exists y\exists z(P(y) \wedge P(z) \wedge \neg(y = z) \wedge In(x, y) \wedge In(x, z) \wedge \forall w(P(w) \wedge In(x, w) \rightarrow w = x \vee w = y)))$;
C. $\neg\exists x(C(x) \wedge \forall y\forall z\forall w(P(y) \wedge P(z) \wedge P(w) \rightarrow \neg In(x, y) \vee \neg In(x, y) \vee \neg In(x, y)))$;
D. $\forall x(C(x) \rightarrow \exists y\exists z(P(y) \wedge P(z) \wedge \neg(y = z) \wedge In(x, y) \wedge In(x, z)) \wedge \neg\exists w(P(w) \wedge \neg In(x, w)))$;
E. $\forall x(C(x) \rightarrow \exists y\exists z(P(y) \wedge P(z) \wedge In(x, y) \wedge In(x, z)))$.

4. Scelto s per «Silvia», $G(x)$ per «x è un gatto», $N(x)$ per «x è nero», $D(x, y)$ per «x è alla destra di y» e $Gr(x, y)$ per «x è più grande di y» e $x = y$ per «x è identico a y», si indichi, tra le proposte seguenti, la corretta formalizzazione della frase «C'è un gatto nero alla destra di Silvia ed è il più grande degli altri»:

A. $\exists x(G(x) \wedge D(x, s) \wedge \neg\exists y(G(x) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg Gr(x, y)))$;
B. $\exists x(G(x) \wedge D(x, s) \wedge \forall y(G(y) \wedge Gr(y, x) \rightarrow \neg D(y, s)))$;
C. $\exists x(G(x) \wedge D(x, s) \wedge \forall y(Gr(y, x) \rightarrow \neg G(x))$;
D. $\exists x(G(x) \wedge D(x, s) \wedge \forall y\neg(G(x) \wedge \neg(x = y) \wedge D(y, s) \wedge Gr(y, x)))$;
E. $\forall x(G(x) \rightarrow (D(x, s) \wedge \forall y(\neg(x = y) \wedge G(y) \rightarrow Gr(y, x))))$.

5. Si individui nella lista numerica l'espressione simbolica che formalizza correttamente gli enunciati della lista alfabetica:

(a) La madre di Sofia insegna.

(b) Il padre di Carlo ama Ginevra.
(c) La sorella di Ginevra esce con il fratello di Carlo.
(d) La sorella del padre di Giulio ama il fratello della madre di Francesco.
(e) La madre di Beatrice presenta il padre di Carlo alla sorella della madre di Lucia.
(f) La somma di 2 con la differenza tra 20 e 3 è un numero dispari.
(g) Il prodotto di 2 con la somma di 5 e 4 è minore del prodotto di 5 con la somma di 2 e 4 .
(h) Il vincitore della partita del campo alla sinistra di Edoardo affronta il perdente della partita del campo alla destra di Edoardo.
(i) La distanza tra a e b è minore della somma della distanza tra a e c con la distanza tra b e d.
(j) Il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

(1) $E(so(g)), fr(c))$.
(2) $D(s(2, d(20, 3)))$.
(3) $I(m(s))$.
(4) $A(so(p(g)), fr(m(f)))$.
(5) $U(q(i), s(q(c_1), q(c_2))$.
(6) $G(v(pa(cs(e)), p(pa(cd(e))))$.
(7) $Min(d(a, b), s(d(a, c), d(b, d)))$.
(8) $P(m(b), p(c), so(m(l)))$.
(9) $A(p(c), g)$.
(10) $Min(p(2, s(5, 4)), p(5, s(2, 4)))$.

Quale risposta accoppia correttamente enunciati e formule?

A. a3, b9, c6, d4, e10, f2, g1, h7, i5, j8.
B. a9, b6, c4, d2, e3, f8, g1, h10, i5, j7.
C. a9, b3, c6, d8, e4, f2, g10, h1, i7, j5.
D. a3, b9, c1, d4, e8, f2, g10, h6, i7, j5.
E. a9, b1, c6, d8, e2, f4, g3, h10, i7, j5.

6. Si individui nella lista numerica l'espressione simbolica che formalizza correttamente gli enunciati della lista alfabetica:

(a) Piero conosce qualcuno che ripara caldaie.
(b) Tutti i presenti hanno sostenuto almeno un esame.
(c) È falso che qualcuno dei presenti non sappia la logica.
(d) C'è un amico di Francesca che sta simpatico a tutti gli amici di Gianni.
(e) Nessuno conosce l'inglese che parla con Riccardo.
(f) La persona con cui parla Riccardo è inglese ed è il più alto dei presenti.
(g) Se ognuno ha un padre e una madre, allora è falso che qualcuno non abbia neanche un nonno.
(h) Sono rimasti al massimo tre assi nel mazzo.
(i) Ci sono almeno due numeri primi minori di 4.
(j) C'è solo una persona che occupa la carica di Presidente della Repubblica d'Italia.

(1) $\forall x(P(x) \to \exists y(E(y) \land S(x, y)))$.
(2) $\exists(A(x, f) \land \forall y(A(y, g) \to S(x, y))$.
(3) $\exists x \exists y(\neg(x = y) \land N(x) \land N(y) \land P(x) \land P(y) \land Min(x, 4) \land Min(y, 4))$.
(4) $\exists x(Pe(x) \land P(x, r) \land I(x) \land \forall y(Pr(y) \to A(x, y)))$.

(5) $\exists x(Ca(x, pr(I)) \wedge \forall y(Ca(y, pr(I)) \rightarrow x = y))$.
(6) $\neg\exists x(P(x) \wedge \neg L(x))$.
(7) $\forall x\exists y\exists z(P(y, x) \wedge M(z, x)) \rightarrow \neg\exists w\neg\exists j(N(j, w))$.
(8) $\exists x(I(x) \wedge P(x, r) \wedge \forall y\neg C(y, x))$.
(9) $\exists x(Rc(x) \wedge C(p, x))$.
(10) $\exists x\exists y\exists z(A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \wedge M(x) \wedge M(y) \wedge M(z) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge \forall w(A(w) \wedge M(w) \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))$.

Quale risposta accoppia correttamente enunciati e formule?

A. a3, b9, c1, d4, e10, f2, g6, h8, i5, j7.
B. a9, b6, c8, d4, e3, f2, g1, h5, i10, j7.
C. a10, b1, c6, d8, e4, f2, g9, h3, i7, j5.
D. a9, b1, c6, d2, e8, f4, g7, h10, i3, j5.
E. a3, b9, c1, d8, e2, f4, g10, h6, i7, j5.

Parte C – La logica dell'argomentazione

R. Bruni, Dialogare: *compendio di logica*, ISBN (online) 978-88-6453-475-6, CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Unità 1

Gli argomenti

Le parti precedenti hanno dato conto di un primo obiettivo alla base dell'indagine logica, ovvero quello di determinare le **condizioni di verità** (*vedi **Glossario***) degli enunciati del linguaggio sulla base della loro **forma** (*vedi **Glossario***). A partire da questa unità iniziamo a dare conto di un secondo obiettivo fondamentale, quello di determinare le ragioni logiche alla base della cogenza di una struttura argomentativa. **Verità** e **contraddizioni logiche** (*vedi **Glossario***), che abbiamo iniziato a conoscere perseguendo la prima linea di ricerca, possono essere viste come il prodotto del modo 'statico' con cui la conoscenza si manifesta: attraverso affermazioni 'ben costruite', quindi inevitabilmente vere, o costruite 'male' e dunque certamente false. Per contro, gli **argomenti** rappresentano il mezzo attraverso il quale la conoscenza può essere raggiunta in modo 'dinamico', mettendo la verità 'in moto'.

1. La forma degli argomenti

Nell'uso quotidiano, si riserva il termine «argomento» per indicare un ragionamento che si adduce a sostegno di una tesi o di un'affermazione.

Supponiamo, ad esempio, che Laura si rechi in banca per controllare l'andamento delle rate di un prestito che ha contratto per acquistare la casa e sincerarsi che non ci siano variazioni rispetto a quanto ha dovuto pagare finora. Per lei non ci sono buone notizie. Nell'informarla che la rata di restituzione del mutuo che dovrà sostenere nel prossimo futuro è destinata a salire, il bancario con cui Laura parla le offre la seguente spiegazione: «In generale, se aumenta il costo del denaro, salgono anche le rata dei mutui come il Suo. Il superamento dello stato di stagnazione economica ha suggerito alla Banca Centrale Europea di aumentare i tassi di interesse e quindi il costo del denaro. Di conseguenza, la prossima rata del mutuo che ha contratto sarà più alta dell'ultima». Il problema di Laura è stabilire se l'argomento che gli viene offerto è una spiegazione ragionevole della differenza che si ritroverà a dover pagare.

Il ragionamento del bancario parte da un presupposto che lega l'aumento dell'importo della rata del prestito bancario all'aumento del costo del denaro. Vi è poi una seconda premessa, secondo la quale il costo del denaro è destinato ad aumentare per effetto dell'intervento della Banca Centrale Europea sui tassi di interesse. Accettando la prima premessa, si accetta la relazione tra il costo del denaro e l'importo della rata che essa stabilisce. Accettando la seconda, si accetta che il costo del denaro aumenterà e dunque si dovrà convenire che la condizione destinata a determinare un aumento della rata si è verificata. La conclusione, dunque, appare inevitabile dato quanto si è disposti a concedere al nostro interlocutore e Laura sembra debba rassegnarsi a veder lievitare i costi del suo mutuo.

Cerchiamo di fare tesoro di quanto si è detto fin qui a proposito della nozione intuitiva e informale di argomento nel tentativo di rendere l'esame di questo concetto un po' più rigoroso. Intanto, si può cercare di precisare meglio l'oggetto dei nostri studi. Con il termine **argomento** si intende indicare un insieme di affermazioni, costituito da uno o più **premesse** dell'argomento e, per ultima, dalla sua **conclusione**. Il ruolo delle premesse è quello di fornire le informazioni necessarie e sufficienti affinché la conclusione sia legittima. In generale, un argomento nel quale questo accade, tale quindi che accettando le premesse non si possa non sottoscrivere anche la conclusione, si dice **corretto**.

Che le premesse di un argomento corretto siano quelle necessarie a rendere legittima la conclusione, significa che di tutte le condizioni che giustificano quest'ultima non ne deve mancare nessuna. Supponiamo, ad esempio, che il presidente di una commissione giudicatrice di un concorso pubblico dica:

Il candidato ha risolto correttamente i test relativi alle competenze di matematica.
Il candidato ha risolto correttamente i test relativi alle competenze di logica.
Dunque, il candidato ha superato la prova relativa alle competenze di matematica, di logica e di lingua straniera.

Dovrebbe risultare ovvio come la conclusione raggiunta non sia legittimata dalle premesse, dato che manca del tutto l'informazione relativa a come il candidato abbia svolto i test di conoscenza della lingua straniera. Ciò significa che l'argomento non è corretto, nel senso dell'espressione indicato in precedenza.

Che le premesse di un argomento corretto siano quelle sufficienti a rendere legittima la conclusione, significa che tra esse non deve esserci nessuna informazione in più oltre a quanto è richiesto dalla conclusione. Supponiamo si affermi:

Il candidato ha risolto correttamente i test relativi alle competenze di matematica.
Il candidato ha risolto correttamente i test relativi alle competenze di logica.
Il candidato ha risolto correttamente i test relativi alla conoscenza della lingua straniera.
Dunque, il candidato ha superato la prova relativa alle competenze di matematica e di logica.

È altrettanto ovvio che le premesse dell'argomento in questo caso dicono più di quello che è sufficiente sapere per giustificarne la conclusione, dal momento che quest'ultima non 'fa uso' dell'informazione relativa ai risultati del candidato nei test sulle conoscenza della lingua straniera.

Per riassumere quanto detto fin qui, in modo che la morale sia colta senza equivoci, in un argomento corretto le premesse stabiliscono quanto serve perché la conclusione 'stia in piedi', né più né meno. La correttezza di un argomento, in realtà, fa leva su un'altra caratteristica 'strutturale' a cui è opportuno dedicare un po' di attenzione. Il legame che si stabilisce tra le premesse di un argomento e la sua conclusione è il momento nel quale si consuma un 'passaggio' che prende il nome di **inferenza**. La natura di quest'ultima o di queste ultime, nel caso in cui l'argomento si sviluppi attraverso più di un'inferenza, determina la natura dell'argomento. Analizzando con maggiore perizia il caso considerato in precedenza, ad esempio, non è difficile rendersi conto che il passaggio tra le premesse e la conclusione sfrutta in modo essenziale la forma logica delle premesse oltre che le informazioni che esse veicolano. Con la prima delle due premesse dell'esempio, infatti, posto:

A = «Aumenta il costo del denaro»
B = «Sale la rata del mutuo»

si afferma che:

Se A si verifica, allora si verifica B

La conclusione «B» del ragionamento del bancario segue da questa premessa per il fatto che la condizione espressa da «A» si verifica, fatto, questo, che è stabilito dalla seconda premessa dell'argomento. L'argomento ci appare corretto, allora, perché riflette il senso logico del condizionale, che lega il verificarsi di «B» al fatto che si sia realizzata la condizione antecedente «A» in modo che, dandosi quest'ultima, sia lecito aspettarsi la prima. Il passaggio tra premesse e conclusione in un caso come questo si dice sia regolato da un'**inferenza logica**, in quanto si basa sui rapporti logici tra gli enunciati coinvolti. Di un argomento come quello del bancario si dice allora che è **logicamente corretto** se accettare le premesse come vere comporta necessariamente accettarne anche la conclusione perché essa segue 'per logica' dalle prime, visto che si fa uso solo di inferenze logiche **valide**. Data l'importanza di questi concetti, a essi dedicheremo uno spazio adeguato per assicurarci di trattarli con la dovuta attenzione (*vedi* Parte C, Unità 2).

Tuttavia, le inferenze logiche non sono l'unica tipologia di 'unità di ragionamento' mediante le quali si può dare vita ad argomenti corretti. Avremo modo di citarne altri esempi notevoli nelle schede a venire (*vedi* Parte C, Unità 3-5).

2. Ancora sugli argomenti logicamente corretti

Si consideri un altro esempio di argomento, per ribadire il punto:

Se l'imputato avesse un alibi per l'ora in cui è stato commesso il delitto, allora sarebbe vero che egli è rimasto a lavoro venerdì pomeriggio e che è andato da lì al centro commerciale come da lui dichiarato nell'interrogatorio.
È stato appurato tuttavia che o è falso che egli si trovasse sul posto di lavoro quel giorno, o è falso che egli sia andato a fare spese.
Dunque, l'imputato non ha un alibi per l'ora del delitto.

Si analizzi il ragionamento come si è fatto con quello precedente ponendo:

A = «L'imputato ha un alibi»
B = «L'imputato è rimasto a lavoro venerdì pomeriggio»
C = «L'imputato è andato al centro commerciale»

La prima premessa dell'argomento comporta allora che se A è vero allora sono vere anche B e C. La seconda premessa, invece, stabilisce che o è falso A o è falso B. Quindi, A e B non possono essere vere entrambe e dunque il conseguente della prima premessa deve essere falso. Da questo segue anche che è falso l'antecedente, dunque è falso che l'imputato abbia un alibi per l'ora del delitto (dato che se A fosse vera, sarebbe vera anche la congiunzione di B e C contrariamente a quanto si è stabilito). Dal che segue, correttamente e di nuovo per logica, la conclusione.

3. Correttezza logica e verità

Com'è ovvio che sia, gli argomenti possono essere costruiti mediante affermazioni che fanno uso delle operazioni di quantificazione sugli individui dell'universo del discorso (*vedi* Parte B, Unità 2-3), oltre ai connettivi logici. Questo accade, ad esempio, nel ragionamento seguente:

Tutti i plantigradi, che camminano appoggiando la pianta del piede sul terreno, sono carnivori.
Il brontosauro era un sauropode erbivoro.
Quindi, qualche sauropode non era plantigrado.

La prima premessa stabilisce allora che, preso un qualunque individuo a appartenente al **dominio** (*vedi **Glossario***) del quantificatore di tipo universale, se questo ha una locomozione di tipo plantigrado, dunque se si muove appoggiando tutta la pianta del piede sul terreno, allora a si ciba di carne. Dalla seconda premessa segue che qualche sauropode, come ad esempio tutti gli esemplari appartenenti alla specie dei brontosauri, era erbivoro. Si conclude correttamente che sono esistiti dei sauropodi che non avevano la locomozione plantigrada: se al contrario i sauropodi fossero stati plantigradi, i brontosauri sarebbero dovuti essere carnivori sulla base della prima premessa, il che è un fatto escluso dalla seconda assunzione del ragionamento.
Tutto bene quindi? No, affatto! La conclusione raggiunta, infatti, per quanto sia logicamente ineccepibile è falsa. Questo accade perché un argomento è logicamente corretto se, in linea con quanto stabilito

in precedenza, accettandone le premesse si è portati ad accettarne la conclusione che segue da esse logicamente. Tuttavia, questo fa sì che la conclusione di un argomento corretto sia anche vera solo se sono vere le premesse di cui si è fatto uso, ma non impedisce che una conclusione falsa segua in modo ineccepibile da premesse altrettanto false. Nel caso in esame, il problema si annida nella prima premessa perché è falso che tutti i plantigradi siano carnivori: il coniglio, ad esempio, ha una locomozione di tipo planitgrado, ma è un animale erbivoro. Così come il brontosauro che, pur non cibandosi di carne, camminava appoggiando tutta la pianta al suolo.

La morale della storia è che ragionare in modo ineceppibile logicamente parlando, non mette di per sé al riparo dal prendere qualche cantonata. Gli argomenti sono il motore della conoscenza perché mettono in moto le verità acquisite e consentono di ottenerne di nuove, ma solo se sono riforniti con il 'carburante' giusto. Ciò significa che l'analisi della correttezza dei passaggi logici di un ragionamento non è meno importante del controllo sulla verità delle premesse di cui esso fa uso.

Esercizi Unità 1

1. Le affermazioni seguenti fanno tutte parte dello stesso ragionamento, ma sono proposte alla rinfusa facendo perdere qualsiasi efficacia all'argomentazione:

(1) Il telefono cellulare non si accende.
(2) Il caricabatteria funziona.
(3) Se la batteria è scarica, allora il telefono cellulare non si accende.
(4) La batteria è scarica.
(5) La batteria è scarica oppure il caricabatteria non funziona.

Quale tra le seguenti rappresenta la sequenza corretta di premesse e conclusione dell'argomento?

A. 4, 3, 1, 2, 5.
B. 5, 2, 4, 3, 1.
C. 5, 2, 4, 1, 3.
D. 4, 3, 1, 5, 2.
E. 5, 4, 2, 1, 3.

2. Le affermazioni seguenti fanno tutte parte dello stesso ragionamento, ma sono proposte alla rinfusa facendo perdere qualsiasi efficacia all'argomentazione:

(1) Il governo non approva la legge e il tasso di disoccupazione è destinato ad aumentare.
(2) Il tasso di disoccupazione è destinato ad aumentare.
(3) Se il governo approva la legge, la coalizione che lo sostiene vince le elezioni.
(4) La coalizione che sostiene il governo non vince le elezioni.
(5) Il governo non approva la legge.
(6) Se il governo non approva la legge, il tasso di disoccupazione è destinato ad aumentare.

Quale tra le seguenti rappresenta la sequenza corretta di premesse e conclusione dell'argomento?

A. 3, 5, 4, 1, 6, 2.
B. 6, 5, 2, 3, 4, 1.
C. 3, 5, 4, 1, 6, 2.
D. 1, 2, 6, 5, 3, 4.

E. 3, 4, 5, 6, 2, 1.

3. Si consideri l'argomento seguente:

(1) Se il colpevole non avesse indossato i guanti, la polizia avrebbe trovato delle impronte sul luogo del delitto.
(2) Se la polizia avesse trovato delle impronte sul luogo del delitto, avrebbe preso il colpevole.
(3) Se il colpevole non avesse indossato i guanti, la polizia lo avrebbe preso.
(4) Il colpevole indossava dei guanti.

Perché funzioni, il ragionamento manca di una premessa. Quale tra le seguenti?

A. Il colpevole indossava i guanti oppure no.
B. La polizia ha trovato delle impronte sul luogo del delitto.
C. La polizia non ha preso il colpevole.
D. La polizia ha trovato un guanto sul luogo del delitto.
E. La polizia ha preso il colpevole.

4. Si consideri l'argomento seguente:

(1) Se il cibo del buffett fosse stato avariato, si sarebbero sentiti male diversi ospiti della festa.
(2) Nessun ospite eccetto la vittima si è sentito male.
(3) Il cibo del buffett non era avariato.
(4) La vittima è stata avvelenata.

Perché funzioni, il ragionamento manca di una premessa. Quale tra le seguenti?

A. Se la vittima fosse stata avvelenata, nessun ospite eccetto la vittima si sarebbe sentito male.
B. Il cibo del buffett era avariato, oppure la vittima è stata avvelenata.
C. Se il cibo era avariato, la vittima non è stata avvelenata.
D. Se la vittima è stata avvelenata, il cibo del buffett non era avariato.
E. Se qualche ospite eccetto la vittima si fosse sentito male, allora il cibo del buffett sarebbe stato avariato.

5. Si considerino le affermazioni seguenti:

(1) Una tra Lucia e Serena viene alla festa.
(2) Se non viene Serena, viene Francesca.
(3) Se non viene Giovanni o se viene Serena, allora non viene Lucia.
(4) Se non viene Lucia, viene Francesca.
(5) Giovanni non viene alla festa.
(6) Lucia non viene alla festa ma Francesca e Serena sì.

Con esse è possibile costruire un argomento di cui (6) sia la conclusione. Una delle frasi riportate, tuttavia, non serve ai fini della correttezza del ragionamento. Quale?

A. 4.
B. 1.
C. 5

D. 3.
E. 2.

6. Si considerino le affermazioni seguenti:

(1) Condizione necessaria affinché Giulio cucini un secondo e un dolce, è che abbia almeno 6 uova.
(2) Se Giulio cucina un primo di pesce, non usa uova per cucinare il primo piatto.
(3) Se Giulio non cucina un primo di pesce, allora usa un uovo per cucinare il primo piatto.
(4) Giulio ha 6 uova.
(5) Giulio non cucina un primo di pesce.
(6) Giulio non cucina un secondo oppure non cucina un dolce.

Con esse è possibile costruire un argomento di cui (6) sia la conclusione. Una delle frasi riportate, tuttavia, non serve ai fini della correttezza del ragionamento. Quale?

A. 2.
B. 5.
C. 4.
D. 1.
E. 3.

Unità 2

Le inferenze logiche

Se come si è detto gli **argomenti** sono il motore della conoscenza (*vedi* Parte C, Unità 1), le inferenze logiche di cui ci occupiamo in questa unità sono le sue parti fondamentali. Un argomento può comporsi di vari 'passi' grazie ai quali, a partire da certe premesse, si ottengono delle conclusioni parziali che vengono utilizzate ai fini dell'effettiva conclusione del ragionamento. Un'**inferenza** è proprio una di queste 'unità argomentative', che insieme ad altre unità costituisce un argomento. Tra le inferenze, quelle di tipo **logico** sono le unità argomentative nelle quali si fa uso dei principi fondamentali della logica. In altre parole, un'inferenza logica è l'analogo dinamico di una **verità logica** (*vedi **Glossario***) nel quale le proprietà delle operazioni logiche di base sono 'messe al servizio' del processo di deduzione di una conclusione da un appropriato insieme di premesse. Le inferenze logiche di cui si compone un argomento ne riproducono la struttura in scala minore, essendo composte anch'esse da premesse e conclusione come l'argomento nella sua interezza. Come vedremo, scomporre un argomento nelle sue unità è un primo passo utile a stabilire se esso sia corretto o meno.

1. Le inferenze logiche negli argomenti

Consideriamo nuovamente il ragionamento che si è proposto nell'unità precedente in una forma lievemente modificata:

Se aumentasse il costo del denaro, salirebbe anche la rata del nostro mutuo. Il superamento dello stato di stagnazione economica ha suggerito alla Banca Centrale Europea di aumentare i tassi di interesse e quindi il costo del denaro. Quindi, la prossima rata del mutuo sarà più alta dell'ultima. Se la prossima rata del mutuo dovesse essere più alta della precedente, non potremo permetterci il viaggio a Parigi che abbiamo programmato. Quindi, non andremo a Parigi.

L'argomento in questione, che prosegue laddove finiva la parte di esso che si è già avuto modo di analizzare (*vedi* Parte C, Unità 1, par. 1), appare costituito da due inferenze distinte, che conviene mettere in evidenza per comprenderne meglio natura e tipo di relazione che intrattengono con il ragionamento di cui fanno parte. In una forma più schematica e semplificata che discorsiva, la prima delle due inferenze può essere vista come un analogo della seguente:

> Se aumenta il costo del denaro, sale anche la rata del nostro mutuo.
> Il costo del denaro aumenterà.
> Quindi, la prossima rata del mutuo sarà più alta dell'ultima.

Come si è avuto modo di dire in apertura, un'inferenza replica la struttura dell'argomento preso nella sua interezza ed è costituita come quest'ultimo da premesse e conclusione. Nel caso in esame, dei tre enunciati di cui l'inferenza si compone i primi due sono le premesse dell'inferenza mentre il terzo rappresenta la conclusione che discende da esse.

Il senso della seconda inferenza che compare nell'argomento descritto in precedenza, invece, è la seguente:

La prossima rata del mutuo sarà più alta dell'ultima.
Se il mutuo aumenta non potremo andare a Parigi.
Quindi, non andremo a Parigi.

La struttura di questa seconda inferenza è analoga alla precedente, essendo costituita da due premesse e dalla conclusione. Delle due premesse, tuttavia, la prima ha la caratteristica di essere giusto la conclusione dell'argomento precedente. Essa fa quindi da 'giuntura' tra le due inferenze che finiscono così per essere parte di un unico argomento, dove la prima inferenza legittima questa affermazione relativa all'aumento della rata del mutuo in quanto discende dalle sue premesse. La seconda inferenza fa uso della conclusione parziale raggiunta in modo da ottenere l'affermazione conclusiva del ragionamento, relativa all'impossibilità di svolgere il viaggio a Parigi.

2. Validità e non validità di un'inferenza logica

Le inferenze non si limitano a replicare la struttura di un argomento, ma ne riflettono anche delle proprietà. Di un argomento si dice che esso è **logicamente valido** se, assunte come vere le premesse, non è possibile che non si ritenga vera la conclusione dal momento che discende dalle prime 'per logica' (*vedi* Parte C, Unità 1, par. 1-2). In modo del tutto analogo, si dice che un'inferenza è **logicamente valida** se, accettate le sue premesse come vere, risulta vera per logica anche la conclusione.

Le inferenze logicamente valide sono quindi quelle che 'trasmettono' la verità dalle premesse alla conclusione e che riflettono le assunzioni mediante le quali si giustificano i principi classici della logica. Su questo aspetto, in particolare sulla relazione che sussiste tra la validità logica di un'inferenza e l'esistenza di una verità logica della quale l'inferenza in questione riflette il 'senso logico' in forma deduttiva, avremo modo di tornare nell'unità dedicata alla formalizzazione delle inferenze logiche (*vedi* Parte C, Unità 6, par. 3).

3. Il 'passo argomentativo' e la sua natura logica

Da quanto si è avuto modo di dire fin qui, un'inferenza rappresenta il passaggio da alcune delle premesse di un'argomento a una conclusione parziale, o alla sua conclusione definitiva. Ma in cosa consiste in effetti questo passaggio e in che senso esso è di tipo logico? Consideriamo nuovamente la prima delle due inferenze esaminate in precedenza:

Se aumenta il costo del denaro, sale anche la rata del nostro mutuo.
Il costo del denaro aumenterà.
Quindi, la prossima rata del mutuo sarà più alta dell'ultima.

La prima delle due premesse di cui l'inferenza si compone è un enunciato che abbiamo a imparato a riconoscere avere la forma di un **condizionale** (*vedi* Parte A, Unità 4). Il senso di un'affermazione di questa forma implicativa è stabilire un nesso tra il suo **antecedente** (*vedi* ***Glossario***) e il suo **conseguente** (*vedi* ***Glossario***) tale che realizzandosi il primo, ne consegue che si realizza quest'ultimo. La seconda premessa dell'inferenza considerata è giusto l'affermazione che la condizione che costituisce l'antecedente del condizionale si realizza. La conclusione dell'inferenza, ossia l'affermazione che di quell'implicazione si realizza il conseguente, è la 'conseguenza logica' di quanto stabiliscono le premesse.

Ricapitolando: la prima premessa dell'inferenza considerata pone un nesso logico, di tipo condizionale, tra due enunciati; la seconda premessa stabilisce che il primo di essi si realizza e consente di 'risolvere' quel nesso; la conclusione afferma che si realizza il secondo dei due enunciati per effetto di questa 'risoluzione'.

Il 'passaggio' da premesse a conclusione che si consuma mediante questa inferenza è proprio questa 'risoluzione' dell'operazione logica che vi è coinvolta. A sua volta, la risoluzione in questione riflette il 'senso' di quell'operazione (che nel caso di un condizionale consiste proprio nel porre la realizzazione dell'antecedente come condizione per la realizzazione del conseguente), ed è di tipo logico perché prescinde dal significato delle affermazioni in gioco e dipende invece solo dalla loro **forma** (*vedi* ***Glossario***).

Stabilito che un'inferenza come quella in esame dipende solo dalla forma logica degli enunciati che essa coinvolge, l'esame delle **condizioni di verità** (*vedi* ***Glossario***) di premesse e conclusione conseguente a detta forma deve essere sufficiente a stabilire se essa sia valida o meno. Si ricordi intanto che un'inferenza è valida se assunte le premesse come vere, risulta vera anche la conclusione. Si supponga allora che le due premesse dell'inferenza in esame siano vere. La prima di esse, che ha la forma di un condizionale, è vera nel caso in cui sia falso l'antecedente o sia vero il conseguente (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 2). Dal momento che l'antecedente dell'implicazione non può essere falso, perché figura come seconda premessa dell'inferenza e si è supposto che sia vero, non resta altra possibilità che sia vero il suo conseguente. Questo, tuttavia, è giusto la conclusione dell'inferenza, rispetto alla quale dunque accade che assunta la verità delle premesse se ne deduce, per la logica del condizionale, la verità della conclusione. Dal che segue che l'inferenza in questione è logicamente valida come volevasi dimostrare.

3. Varietà delle inferenze logiche

Proviamo a testare i concetti e il metodo di verifica della validità delle inferenze basato sulla logica in altri casi. Si consideri allora l'esempio seguente di inferenza:

Piove e fa freddo.
Quindi piove.

Si tratta di un'inferenza che possiede un'unica premessa, che ha la forma di una **congiunzione**. L'inferenza è logicamente valida se, supponendo che la sua premessa sia vera, segue che è vera anche la conclusione. Dal momento che la premessa dell'inferenza è la congiunzione di due enunciati, essa è vera se e solo se sono veri entrambi i **congiunti** (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 2), dunque, se è vero in particolare quello che conclude l'inferenza presentata che è quindi logicamente valida.

Come nel caso precedente, il passaggio argomentativo che l'inferenza realizza consiste nella risoluzione della forma logica della premessa, in accordo con il senso che si attribuisce all'operazione logica che la caratterizza. Il senso che la logica (nella sua interpretazione classica - *vedi* Parte A, Unità 3, par. 6) attribuisce a un'affermazione attraverso la quale si congiungono due enunciati, infatti, consiste proprio nel sostenere che essi si realizzano 'congiuntamente'. In effetti, la stessa premessa giustifica un'inferenza analoga, della forma seguente:

Piove e fa freddo.
Quindi fa freddo.

mediante la quale dalla stessa premessa della precedente si deduce il secondo congiunto.

Avendo presentato fin qui esempi di inferenze logiche nelle quali si passa da premesse logicamente complesse (ad esempio, enunciati che hanno la forma di un condizionale o di una congiunzione) a conclusioni più semplici (negli esempi presentati fin qui, **enunciati di tipo atomico** - *vedi* ***Glossario***), si potrebbe pensare che queste caratteristiche vengano conservate in tutte le inferenze logicamente valide e che quindi esse si riducano alla 'risoluzione' del nesso logico che compare nelle premesse, come si è detto fin qui.

Per fugare un'idea del genere è sufficiente considerare un altro semplice esempio di inferenza logica, basata stavolta sull'operazione di **disgiunzione**, che rompe lo schema rispettato dagli esempi proposti fino a questo momento:

Piove.
Quindi piove o fa freddo.

Si supponga che la premessa dell'inferenza sia vera. Se così è, è vero anche uno dei due **disgiunti** (*vedi* ***Glossario***) della conclusione dell'inferenza ed è vera anche quest'ultima in conseguenza del fatto che una disgiunzione è vera giusto nel caso in cui almeno uno dei due enunciati disgiunti è vero (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 4). L'inferenza è dunque logicamente valida, così come è logicamente valida la sua variante seguente:

Fa freddo
Quindi piove o fa freddo

Come si diceva, entrambe queste inferenze rappresentano una novità rispetto alla consuetudine rispettata dagli esempi precedenti secondo cui la conclusione di un'inferenza è logicamente più 'semplice' delle premesse. In questo caso, infatti, si assiste alla comparsa di un **connettivo logico** tra enunciati (*vedi* ***Glossario***) proprio nella conclusione dell'inferenza, laddove l'unica premessa esistente ha la forma di un enunciato atomico. Inferenze di questo genere, a dire il vero, possono essere costruite anche per le altre operazioni logiche di connessione, così che, a rigor di termini, si dovrebbe distinguere queste regole di **introduzione** dei connettivi, nelle quali l'informazione contenuta nelle premesse consente di ottenere una conclusione logicamente più complessa, da regole come le precedenti nelle quali i connettivi si **eliminano** dalle premesse e si giunge a conclusioni logicamente più semplici. Uno studio sistematico in questo senso, tuttavia, va al di là delle finalità più modeste che ci si propone di raggiungere. In questo contesto, l'esempio vuole servire lo scopo di mantenere viva l'attenzione sul concetto di inferenza e su quello di inferenza logicamente valida in particolare, sul quale conviene esercitarsi un po'.

Esercizi Unità 2

1. Si supponga che «Non si può guardare la partita senza pagare il biglietto» e che Luca affermi che: «Non esistono palazzi più alti dello stadio». Quali tra gli enunciati seguenti, insieme all'ipotesi, consente di ottenere l'affermazione di Luca come conclusione di un'inferenza logicamente valida?

A. Se si potesse guardare la partita senza pagare il biglietto, allora esisterebbero palazzi più alti dello stadio.
B. Se non esistessero palazzi più alti dello stadio, allora si potrebbe guardare la partita senza pagare il biglietto.
C. Se non si può guardare la partita senza pagare il biglietto, allora esisterebbero palazzi più alti dello stadio.
D. Se esistessero palazzi più alti dello stadio, allora si potrebbe guardare la partita senza pagare il biglietto.
E. Nessuna delle precedenti

2. Tutti sanno che «Se il motore si guasta, la macchina si ferma». Gianna sostiene che «Se la benzina finisce o il motore si guasta, la macchina si ferma». Quali tra gli enunciati seguenti, insieme all'altra affermazione, consente di ottenere quanto dice Gianna come la conclusione di un'inferenza logicamente valida?

A. Se la macchina si ferma, la benzina finisce.
B. Se la macchina non si ferma, la benzina finisce.
C. Se la benzina non finisce, la macchina non si ferma.
D. Se la benzina finisce, il motore non si guasta.
E. Se la macchina non si ferma, la benzina non finisce.

3. Riccardo afferma: «Se il numero sette segna il tiro libero, l'Italia batte la Francia». Dario dice: «Quindi, l'Italia batte la Francia». Se Riccardo ha detto il vero, quale tra gli enunciati seguenti occorre aggiungere per far sì che l'affermazione di Dario sia la conclusione di un'inferenza logica?

A. Il numero sette segna il tiro libero.
B. Se il numero sette non segna il tiro libero, allora l'Italia batte la Francia.
C. Il numero sette segna il tiro libero e il tempo scade.
D. Se l'Italia non batte la Francia, il numero sette segna il tiro libero.
E. Una qualunque delle precedenti.

4. Si assuma che:

(1) Condizione sufficiente per passare l'esame è superare due compiti scritti su tre.
(2) Condizione sufficiente per superare due compiti scritti su tre è risolvere il 75% degli esercizi proposti.

Quali delle seguenti affermazioni segue per logica da (1) e (2)?

A. Condizione necessaria e sufficiente per superare l'esame è superare due compiti scritti su tre e risolvere il 75% degli esercizi proposti.
B. Se non si passa l'esame, allora si è superato un compito scritto su tre e non si è risolto il 75% degli esercizi proposti.
C. Se si passa l'esame, si superano due compiti scritti su tre e si risolve il 75% degli esercizi proposti.
D. Se si risolve il 75% degli esercizi proposti, allora si passa l'esame.
E. Se si superano due compiti scritti su tre, allora si è risolto il 75% degli esercizi proposti.

5. Si assuma che:

(1) È falso che se non ci sono ostacoli sui binari, allora il treno rischia di deragliare.

Quali delle seguenti affermazione segue da (1) per logica?

A. Se ci sono ostacoli sui binari, allora il treno rischia di deragliare.
B. Non ci sono ostacoli sui binari e il treno non rischia di deragliare.
C. Non ci sono ostacoli sui binari oppure il treno rischia di deragliare.
D. Se ci sono ostacoli sui binari, allora il treno rischia di deragliare.
E. Se il treno rischia deraglia, allora ci sono ostacoli sui binari

6. Si supponga che:

(1) Il frigorifero non funziona oppure è mancata la corrente elettrica.
(2) Non è vero che la corrente elettrica è mancata.

Quali delle seguenti affermazioni segue da (1) e (2) per logica?

A. Il frigorifero funziona.
B. Se il frigorifero non funziona, allora non è mancata la corrente elettrica.
C. Il frigorifero non funziona.
D. Se non è vero che la corrente elettrica non è mancata, allora il frigorifero funziona.
E. Non è vero che la corrente elettrica non è mancata.

Unità 3

Argomenti notevoli: i sillogismi

Nell'unità precedente, dedicata alle inferenze logiche, si sono prese in esame quelle 'unità argomentative' che riflettono il senso dei **connettivi logici** (*vedi **Glossario***). Un **sillogismo** è un tipo particolare di **argomento** (*vedi **Glossario***) costituito da due premesse e da una conclusione, nelle quali occorrono le operazioni di **quantificazione individuale** (*vedi **Glossario***). Si tratta dunque di una tipologia di argomento nel quale le affermazioni coinvolte fanno riferimento essenziale agli **individui** (*vedi **Glossario***) dell'**universo del discorso** (*vedi **Glossario***) e alle loro proprietà. Questa tuttavia è solo la più generale delle caratteristiche che possiedono i sillogismi, che sono accumunati da altri 'fattori strutturali' notevoli.

1. Un cenno ai sillogismi nella storia della logica

Lo studio dei sillogismi risale agli «Analitici primi», una delle opere del filosofo greco Aristotele, vissuto tra il 384 e il 322 a.C. Si tratta del primo tentativo di individuare e catalogare i modi validi di argomentazione in maniera sistematica. L'opera condotta da Aristotele in questo senso è stata studiata e integrata nel corso dei secoli successivi e ha rappresentato un contributo essenziale per lo sviluppo della logica. Basti pensare che per molti secoli, fino alla 'svolta matematica' che ha interessato la disciplina a partire dalla seconda metà dell'Ottocento, la sillogistica aristotelica rappresentava l'argomento centrale degli studi di carattere logico.

2. I sillogismi: caratteristiche generali

Consideriamo il ragionamento seguente:

Tutti gli uomini sono mortali.
Socrate è un uomo.
Quindi, Socrate è mortale.

Le affermazioni danno vita a un **argomento**, come abbiamo imparato a dire (*vedi* Parte C, Unità 1), costituito da due **premesse** (*vedi **Glossario***) e da una **conclusione** (*vedi **Glossario***). Un primo 'elemento strutturale' su cui occorre soffermarsi in quanto caratteristico dell'intera gamma dei sillogismi, riguarda la struttura grammaticale delle proposizioni che lo compongono. Esse risultano costituite da un **soggetto** («gli uomini» nella prima premessa, «Socrate» nella seconda premessa e nella conclusione), da un **predicato** («mortale» e «uomo») e dalla **copula** («è»/«sono») mediante la quale si attribuisce il predicato al soggetto della frase. Proposizioni di questa forma vengono tradizionalmente dette **categoriche**.

I soggetti che occorrono nel ragionamento considerato sono di tipo 'generale', nel caso degli «uomini» che indica una collezione di individui, e di tipo 'singolare' nel caso di «Socrate» che si riferisce a un individuo solo. La tipologia del soggetto determina la 'natura' della proposizione categorica nella quale occorre e si dice di conseguenza che essa è **singolare** se contiene un soggetto di questo tipo o **generale** altrimenti.

I predicati che occorrono nelle proposizioni categoriche, invece, sono accumunati dall'avere tutti **arietà** 1 (*vedi **Glossario***), ovvero sono tutti predicati a 'un posto', che si predicano cioè di un individuo per volta (come «essere mortale» che si predica di un individuo singolare alla volta o di ciascun individuo che ricada sotto un termine generale come «uomo»). In altre parole, nelle proposizioni categoriche non occorrono **relazioni** nel senso logico del termine (*vedi* ***Glossario***), che invece riguardano i rapporti tra più soggetti (come «essere fratello di», «stare accanto a», «parlare con», ecc.).

Una caratteristica ulteriore dei sillogismi e che riguarda i soggetti di tipo generale e i predicati delle proposizioni categoriche è che essi sono interscambiabili, cosicché per ogni proposizione categorica della forma «S è P», anche «P è S» è una proposizione categorica legittima (come nel caso di «Tutti gli uomini sono mortali», che possiede come variante l'affermazione secondo cui «Tutti i mortali sono uomini»). L'osservazione è tutt'altro che sorprendente se si adotta un punto di vista attento alla logica, oltre che alla grammatica. I «soggetti» della grammatica rientrano nel novero degli «individui» della logica, ovvero elementi generici dell'universo del discorso dei quali occorre precisare la natura (*vedi* Parte B, Unità 1, par. 2). Dunque, parlare degli «uomini» in modo logicamente corretto significa parlare di «individui che sono uomini», ovvero di «individui che hanno la proprietà di essere uomini», il che mostra perché non ci sian una sostanziale differenza tra il parlare degli «uomini» e il parlare dei «mortali» e spiega la ragione della loro interscambiabilità. Si noti invece che questa caratteristica delle proposizioni categoriche generali non si estende a quelle singolari data la specifica natura del soggetto: per cui «Socrate è mortale» non può dare vita, com'è ovvio che sia, a «Mortale è Socrate».

Volendo a questo punto introdurre un po' di terminologia, il soggetto della conclusione del sillogismo viene detto **termine minore**, mentre il predicato è il **termine maggiore**. Così, la premessa che contiene il predicato della conclusione anche se non necessariamente in posizione di predicato (nell'esempio, «Tutti gli uomini sono mortali»), viene detta **premessa maggiore**, mentre l'altra, che contiene il soggetto della conclusione, eventualmente anche in posizione di predicato, è la **premessa minore**.

3. Qualità e quantità delle proposizioni categoriche

Un altro elemento di cui occorre tenere conto nell'esame di un sillogismo è la forma logica che possono assumere le proposizioni categoriche. Quelle singolari, infatti, possono presentarsi sotto due forme: **affermativa**, come nella frase «Socrate è mortale» di cui sopra, in cui si attribuisce il predicato al soggetto, o **negativa**, come nell'affermazione «La luna non è un pianeta», in cui si dichiara che il soggetto non possiede la proprietà espressa dal predicato.

Anche le proposizioni categoriche generali possono presentarsi in forma affermativa e in forma negativa, ma prima ancora di questa loro 'qualità' occorre parlare della 'quantità' che esse esprimono. Infatti, una proposizione categorica generale può avere forma **universale**, come nella frase «Tutti gli uomini sono mortali» del ragionamento precedente, grazie alla quale si attribuisce la proprietà espressa dal predicato a ciascun membro della collezione che costituisce il soggetto della proposizione, oppure può avere forma **particolare**, come nel caso dell'affermazione «Qualche greco è ateniese», in cui il predicato è attribuito solo ad alcuni individui che possiedono la proprietà espressa dal soggetto.

Si sarà forse notato la relazione tra le due forme di proposizioni categoriche e l'occorrenza in esse dei **quantificatori individuali** (*vedi* ***Glossario***), cosicché una proposizione categorica particolare corrisponde a un'affermazione quantificata **esistenzialmente** (*vedi* Parte B, Unità 3) e una proposizione categorica universale a un'affermazione che è quantificata **universalmente** (*vedi* Parte B, Unità 2).

Come si diceva, le proposizioni categoriche generali possono presentarsi in forma affermativa o negativa come quelle singolari. Quindi, le proposizioni categoriche generali possiedono quattro forme logiche distinte: quella **universale affermativa**, la **particolare affermativa**, l'**universale negativa** e la **particolare negativa**.

Nel caso delle proposizioni categoriche singolari, la forma negativa di un'affermazione è quella mediante la quale si dichiara che un certo individuo non possiede una data proprietà. Quindi, per fare riferimento all'esempio che si è scelto, la forma negativa dell'affermazione «La luna è un pianeta» è la sua **negazione**

logica, ovvero la frase «La luna non è un pianeta». In virtù dell'**interpretazione classica** di questo connettivo (che è all'origine anche di quello che potrebbe essere visto come un suo 'limite espressivo' - *vedi* Parte A, Unità 2, par. 4), quest'ultima frase equivale all'affermazione «È falso che la luna sia un pianeta» (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 1). L'analogia con il caso singolare, potrebbe far pensare che la forma negativa di una proposizione categorica qualsivoglia si ottenga negando la corrispondente proposizione affermativa. Se ciò fosse vero, tuttavia, non sarebbe rispettata la relazione di cui si è appena detto tra le 'quantità' espresse da una proposizione categorica generale e l'occorrenza in esse dell'operazione di quantificazione individuale corrispondente: perché la negazione logica di un'affermazione del tipo «Tutti gli uomini sono mortali» è «Qualche uomo non è mortale» (*vedi* Parte B, Unità 5), che è una proposizione categorica negativa sì, ma particolare e non universale come si desiderava. Dunque, il rapporto che sussiste tra una proposizione categorica generale affermativa e la sua corrispondente negativa non è quello che sussiste tra un enunciato categorico e la sua negazione logica.

Come nel caso singolare, la versione negativa di una proposizione categorica generale è quella che dice del soggetto che esso non possiede la qualità espressa dal predicato. In più, essa esprime la stessa 'quantità' della sua corrispettiva affermativa. Ciò significa che, data la frase «Tutti gli uomini sono mortali», l'affermazione universale negativa che gli corrisponde è la frase «Nessun uomo è mortale» che dice, di ciascun «uomo», che esso non possiede la proprietà di «essere mortale». In modo del tutto analogo, la versione negativa dell'affermazione che «Qualche greco è ateniese» è la frase «Qualche greco non è ateniese».

4. Il termine medio e le figure sillogistiche

Tra le caratteristiche proprie del sillogismo scelto come esempio nel par. 2 a cui non si è ancora fatto cenno, c'è quella relativa alla presenza di un termine, «uomo», che compare in entrambe le premesse ma non nella conclusione. Si tratta del cosiddetto **termine medio**, così chiamato perché rappresenta il 'mezzo' grazie al quale si stabilisce il legame tra il soggetto e il predicato della conclusione: dato che ogni uomo è mortale e dato che Socrate è un uomo, se ne deduce che Socrate è mortale.

Il termine medio, essendo uno dei termini che occorrono nelle premesse del sillogismo, può occupare la posizione di soggetto o di predicato. Le possibili combinazioni delle due eventualità danno vita a quattro 'configurazioni' possibili:

1. il termine medio è il soggetto della prima premessa e il predicato della seconda;
2. il termine medio è il predicato sia della prima premessa che della seconda;
3. il termine medio è il soggetto di entrambe le premesse;
4. il termine medio è Il predicato della prima premessa e il soggetto della seconda.

I sillogismi vengono raggruppati in **figure** a seconda della posizione occupata dal termine medio nelle premesse e sono detti sillogismi di **prima figura** quelli dove il termine medio occupa le posizioni descritte al punto 1 dell'elenco, di **seconda figura** quelli in cui il termine medio occorre nelle premesse secondo la configurazione del punto 2, di **terza figura** se coerenti con il punto 3 e di **quarta figura** se corrispondono alla quarta configurazione indicata.

5. Ricapitolando

- I sillogismi sono argomenti composti da **due premesse** e **una conclusione**.
- Premesse e conclusione del sillogismo sono **proposizioni categoriche** (della forma soggetto-copula-predicato).

- Le proposizioni categoriche possono essere **singolari** o **generali** a seconda che il soggetto sia un termine singolare (un nome proprio di cosa o di persona) o un termine generale (un nome comune).
- Le proposizioni categoriche possono essere **affermative** o **negative** a seconda che in esse si attribuisca o non si attribuisca il predicato al soggetto.
- Le proposizioni categoriche generali possono essere **universali** o **particolari** a seconda che in esse si attribuisca/non si attribuisca il predicato a ciascun individuo che ricade sotto il soggetto (che è un termine generale e quindi 'vale' di molti individui o cose), oppure soltanto a qualcuno degli individui che ricadono sotto di esso.
- Premesse e conclusione di un sillogismo contengono tre termini: il soggetto della conclusione `S`, il predicato della conclusione `P` e il **termine medio** `M` che è l'unico a comparire in entrambe le premesse.

6. I modi sillogistici

Sulla base di quanto si è detto, gli elementi che concorrono a diversificare un sillogismo da un'altro sono sostanzialmente due: la posizione che il termine medio occupa nelle premesse e la natura delle proposizioni che lo compongono. Il primo fattore determina, come si è detto, la figura sillogistica di appartenenza del ragionamento che si sta considerando. Il secondo fattore, cioè la natura delle proposizioni categoriche che compongono ragionamento, determina invece il **modo** del sillogismo.

Per tradizione, quando si parla di 'natura' di una proposizione categorica si intende riferirsi al fatto se essa sia universale o particolare. Sono queste forme di proposizioni categoriche a determinare i modi sillogistici e non le proposizioni di tipo singolare, che sono un caso di proposizioni categoriche particolari (quelle in cui il predicato della frase viene attribuito giusto a un individuo). Natura universale o particolare delle proposizioni categoriche si indicano tradizionalmente facendo riferimento alle prime due vocali delle parole latine «a*df irmo*» e «*ne*go», dove le vocali «a» e «i» vengono usate per indicare le due forme affermative delle proposizioni categoriche, universale e particolare rispettivamente (dal momento che «*adfirmo*» significa «affermo»), mentre le vocali «e» e «o» si riservano per le due forme negative. Così, ad esempio, con la notazione `S a P` si intenderà indicare una proposizione categorica universale affermativa come «Tutti gli uomini sono mortali», `S e P` potrà invece indicare la corrispondente forma negativa «Nessun uomo è mortale», `S i P` una proposizione particolare affermativa come «Qualche greco è ateniese» e `S o P` la sua versione negativa «Qualche greco non è ateniese».

La notazione introdotta può essere utilizzata per indicare anche i modi sillogistici. Ad esempio, scrivendo:

$$\begin{array}{c} \mathtt{M\ a\ P} \\ \underline{\mathtt{S\ a\ M}} \\ \mathtt{S\ a\ P} \end{array}$$

si vuole indicare un sillogismo di prima figura (vedi sopra), in cui la premessa maggiore `M a P` è universale affermativa, la premessa minore `S a M` è universale affermativa e la conclusione `S a P` è ancora una proposizione universale affermativa. Vale quindi la seguente corrispondenza tra la forma generale e l'esempio che segue:

$$\begin{array}{ll} \mathtt{M\ a\ P} & \text{Tutti i toscani sono italiani.} \\ \underline{\mathtt{S\ a\ M}} & \underline{\text{Tutti i fiorentini sono toscani.}} \\ \mathtt{S\ a\ P} & \text{Tutti i fiorentini sono italiani.} \end{array}$$

7. I modi sillogistici validi

Come si è già avuto modo di accennare trattando il concetto di argomento in generale (*vedi* Parte C, Unità 1), lo scopo di un'indagine sistematica sulle modalità di ragionamento consiste nell'isolare le forme corrette, laddove la correttezza di un ragionamento consiste nel rendere inevitabile il consenso alla sua conclusione per chi sia disposto ad accettarne le premesse. A questa nozione informale di correttezza per un ragionamento, ne corrisponde una rigorosa di **validità logica** che si applica anche ai sillogismi. Di tutti i modi sillogistici, dunque, ci interessa isolare quelli validi, ossia quelli nei quali alla verità delle premesse segue necessariamente, per logica, la verità della conclusione. In un sillogismo valido, non è possibile che scegliendo come premesse delle proposizioni categoriche vere si ottenga una conclusione falsa. Quello considerato in precedenza, ovvero:

$$\begin{array}{c} \texttt{M a P} \\ \underline{\texttt{S a M}} \\ \texttt{S a P} \end{array}$$

è un esempio di modo sillogistico valido.

L'altra faccia della medaglia dei modi sillogistici validi è rappresentata da quelle forme di ragionamento rispetto alle quali accada che scegliendo premesse vere si giunga invece a una conclusione falsa. Si consideri:

$$\begin{array}{c} \texttt{M i P} \\ \underline{\texttt{S a M}} \\ \texttt{S a P} \end{array}$$

e di questo modo se ne consideri l'esempio seguente:

$$\begin{array}{ll} \texttt{M i P} & \text{Qualche toscano è fiorentino} \\ \texttt{S a M} & \text{Tutti gli aretini sono toscani} \\ \hline \texttt{S a P} & \text{Tutti gli aretini sono fiorentini} \end{array}$$

Le due premesse sono chiaramente vere ma la conclusione è drammaticamente falsa. Verificato che l'istanza considerata 'replica' correttamente la forma del sillogismo (quindi che soggetto, predicato e termine medio sono al loro posto e la forma delle proposizioni categoriche coinvolte è quella dovuta), si conclude che il modo sillogistico in questione non è valido e dunque non è uno 'strumento' affidabile per ottenere proposizioni categoriche vere a partire da premesse vere.

8. L'assioma di Aristotele

Si consideri l'affermazione:

Tutti i draghi sono animali volanti

Analizzandola come abbiamo imparato a fare introducendo il quantificatore universale (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 1 e Parte B, Unità 5, par. 5), l'affermazione si riscrive più corretamente come:

Per ogni x, se x è un drago, allora x è un animale volante

In questa veste, appare più chiaro che l'affermazione è vera se, preso un qualunque «drago», ossia un qualunque individuo dell'universo del discorso che appartiene al **dominio** del quantificatore, allora esso risulta essere «un animale volante». Si dirà: ma i draghi non esistono! L'osservazione è legittima ed è anche pertinente, ma non ancora decisiva a questo livello: perché che i draghi non esistono significa che il dominio del quantificatore universale è vuoto e dunque che la frase «x è un drago» è sempre falsa. Tuttavia, stando così le cose, è vera l'affermazione «Se x è un drago, allora x è un animale volante» perchè il suo antecedente è comunque falso. Se ne deduce che è vera anche l'affermazione di partenza secondo cui «Tutti i draghi sono animali volanti» (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 4).

Dunque? Abbiamo detto che l'osservazione sul fatto che i draghi non esistono è legittima e pertinente. Diventa anche decisiva nel contesto di un ragionamento come il seguente:

`M a P`	Tutti gli animali volanti sono dotati di ali.
`S a M`	Tutti i draghi sono animali volanti.
`S i P`	Qualche drago è dotato di ali.

Perché il modo sillogistico sia valido, si è detto che non deve mai accadere che le premesse del ragionamento siano vere e la conclusione falsa. Le premesse dell'istanza del modo sillogistico in esame sono vere sulla base di quanto si è osservato in precedenza. La conclusione, sulla base di quanto si è detto nell'introduzione al quantificatore esistenziale (*vedi* Parte B, Unità 3, par. 1), è l'affermazione secondo la quale «Esiste un x tale che x è un drago e x è dotato di ali». Se, come si è detto, i draghi non esistono, ovvero se il dominio del quantificatore esistenziale è vuoto, è facile rendersi conto che non ci può essere alcun x che soddisfi entrambe le condizioni di cui si compone la congiunzione in questione e dunque che l'affermazione per cui «Qualche drago è dotato di ali» è falsa per questo motivo. Il modo sillogistico corrispondente non sarebbe dunque valido, seppur non già per ragioni logiche, bensì per il fatto di fare riferimento a un concetto 'irreale' (intendendo con ciò, un concetto al quale non corrisponde alcun individuo nella realtà fisica). L'affermazione sui draghi, tuttavia, può diventare del tutto legittima in certi contesti 'fiabeschi' e nulla vieta (anzi, tutto lascia pensare che è ciò che si dovrebbe fare) di adattare l'universo degli individui presi in esame al 'tipo' di discorso che si sta facendo. Per evitare che la ricerca sulle ragioni squisitamente logiche che fanno sì che certi modi di argomentare siano validi e altri no venga inficiata da considerazioni di carattere contingente come quella relativa a quali concetti è lecito o meno prendere in esame nelle nostre affermazioni, si procede allo studio dei sillogismi sotto un'assunzione, talvolta fatta in modo indebitamente tacito e che è nota in letteratura come l'**assioma di Aristotele**, secondo la quale si assume che nessuno dei termini utilizzati nelle affermazioni sia vuoto. Dunque, secondo l'assioma si suppone che per ogni termine `T` di cui si fa uso per formulare proposizioni di tipo categorico esista sempre almeno un individuo del dominio dell'universo del discorso che appartiene alla «collezione dei `T`».

Fatta questa doverosa premessa, possiamo adesso dedicarci alla ricerca dei sillogismi validi, sapendo che per ogni figura sillogistica ci sono 6 modi sillogistici validi, dunque un totale di $6 \times 4 = 24$ modi sillogistici validi (di cui 9 richiedono l'assunzione dell'assioma di Aristotele), su un totale di 256 modi sillogistici possibili.

Esercizi Unità 3

1. Considera il sillogismo:

Nessun parlamentare è disonesto
Tutti i filosofi sono disonesti
Nessun filosofo è parlamentare

Quale tra le seguenti è la rappresentazione schematica corretta del modo sillogistico a cui appartiene?

A. `P e M`
`S a M`
`S e P`

B. `P a M`
`S e M`
`S a P`

C. P i M
S a M
S i P

D. P e M
S i M
S e P

E. M e P
S a M
S e P

2. Considera il sillogismo:

Nessun ingenuo è cattivo
Qualche cattivo è adulto
Qualche adulto non è ingenuo

Quale tra le seguenti è la rappresentazione schematica corretta del modo sillogistico a cui appartiene?

A. P e M
M a S
S e P

B. P e M
S i M
S o P

C. P e M
M i S
S o P

D. P e M
M o S
S i P

E. P o M
S i M
S o P

3. Considera il sillogismo:

Tutti i cretesi sono bugiardi
Qualche biondo è cretese
Qualche biondo è bugiardo

Quale tra le seguenti è la rappresentazione schematica corretta del modo sillogistico a cui appartiene?

A. M i P
S a M
S a P

B. P a M
S i M
S i P

C. M a P
S i M
S i P

D. $$\begin{array}{l} M\ a\ P \\ \underline{M\ e\ S} \\ S\ e\ P \end{array}$$

E. $$\begin{array}{l} M\ a\ P \\ \underline{M\ i\ S} \\ S\ i\ P \end{array}$$

4. Si supponga che:

Tutti gli incidenti sono fortuiti
Nessun errore è fortuito

Assumendo che le due premesse siano date nell’ordine secondo il quale la premessa maggiore precede quella minore, se ne deduce che:

A. qualche incidente non è un errore;
B. nessun incidente è un errore;
C. qualche errore non è un incidente;
D. nessun errore è un incidente;
E. tutti gli errori sono incidenti.

5. Si supponga che:

Qualche cura è dolorosa
Tutte le cure sono mali necessari

Assumendo che le due premesse siano date nell’ordine secondo il quale la premessa maggiore precede quella minore, se ne deduce che:

A. tutte le cure sono dolorose;
B. qualche cura non è dolorosa;
C. qualche male necessario è doloroso;
D. qualche (cosa) dolorosa è una cura;
E. tutti i mali necessari sono dolorosi.

6. Si supponga che:

Nessun cavallo è oviparo
Tutti gli ovipari sono animali

Assumendo che le due premesse siano date nell’ordine secondo il quale la premessa maggiore precede quella minore, se ne deduce che:

A. qualche oviparo non è un cavallo;
B. nessun cavallo è un animale;
C. qualche cavallo è un animale;
D. tutti gli animali sono cavalli;
E. qualche animale non è cavallo.

Unità 4

Argomenti notevoli: il ragionamento per assurdo

Il ragionamento «per assurdo» è una forma di argomentazione piuttosto diffusa, soprattutto in matematica. Si tratta di un tipo di ragionamento che consente di dare sostegno a una certa affermazione «*A*», senza che si sia in possesso di un argomento che dimostri che «*A*» vale per via 'diretta'. Si dimostra invece «*A*» per via 'indiretta', mostrando come l'assunzione, 'per assurdo' appunto, che valga la negazione di «*A*» conduce a una contraddizione. Si tratta di una forma di ragionamento che richiede si dia il consenso a uno dei pilastri dell'**interpretazione classica** della logica (*vedi* ***Glossario***) e che dunque 'funziona' solo nel quadro di questa impostazione.

1. Ragionare per assurdo

Alessandro, Beatrice, Dario e Camilla sono un gruppo di conoscenti che deve decidere se andare o meno al mare. Le simpatie e le antipatie reciproche che si sono sviluppate tra di loro nel corso del tempo sono ben note. Questo fa sì che si sappia che:

1. se non parte Alessandro, parte Beatrice;
2. se parte Dario, parte anche Camilla;
3. se parte Alessandro, non parte Camilla.

Supponiamo inoltre di aver accertato senza ombra di dubbio che Beatrice non parte. Si vuole dimostrare che, date le condizioni specificate, anche Dario non parte di conseguenza. Non disponendo di una prova diretta di questo fatto, si ragiona come segue. Supponiamo che Dario parta. Se ciò fosse vero, si dovrebbe concludere, data 2, che anche Camilla parte. Ma se Camilla parte, allora Alessandro non parte perché da 3 segue che, se partisse quest'ultimo, Camilla non partirebbe. D'altra parte, se non parte Alessandro parte Beatrice per 1. Siccome al contrario Beatrice non parte e avendo noi raggiunto la conclusione che Beatrice parte dall'ipotesi che parta Dario, si conclude che quest'ultima ipotesi è in contraddizione con il fatto accertato che Beatrice non parte. Dal che si deduce che, dato quel fatto e date le assunzioni, Dario non parte davvero.

Cerchiamo ora di analizzare più nel dettaglio l'argomentazione che si è appena presentato per determinare quali informazioni può offrirci riguardo alla forma di ragionamento che la caratterizza. A un primo livello di generalità, il ragionamento parte da un insieme **I** di ipotesi date (le condizioni 1-3 di cui sopra) e da un secondo insieme **F** di fatti che possono anch'essi essere presentati come affermazioni, ma che traggono la loro legittimità dall'essere resi veri in virtù di certi 'stati di cose' del mondo (nel caso d'esempio, l'affermazione «Beatrice non parte» che è certamente vera sapendo che Beatrice, l'individuo del mondo menzionato nella frase, non parte). Alle ipotesi date e al fatto noto, si aggiunge l'**ipotesi per assurdo** «*A*» che consiste nella negazione logica dell'affermazione alla quale si sta cercando un sostegno razionale (nell'esempio l'ipotesi che «Dario parte», in quanto negazione dell'affermazione «Dario non parte» che si vuole sostenere).

Alle ipotesi e ai fatti vengono applicate delle regole logiche d'inferenza (*vedi* Parte C, Unità 2) che dipendono dalla forma logica degli enunciati corrispondenti. Nell'esempio, essendo le ipotesi tutte di forma **condizionale** (*vedi* Parte A, Unità 4) ed essendo l'unico fatto a disposizione un **enunciato atomico** (*vedi **Glossario***), si tratta perlopiù di applicare regola d'inferenza per cui, dato un enunciato condizionale e dato il suo **antecedente** (*vedi **Glossario***), si conclude da ciò che vale di essa il **conseguente** (*vedi **Glossario***, *vedi* Parte C, Unità 2, par. 3).

Tra le inferenze che fanno eccezione rispetto all'affermazione precedente, ce n'è una importante e che conviene ribadire, dato che si tratta di quella che incarna l'essenza stessa del ragionamento per assurdo. Nel ragionamento indicato, giunge nel momento in cui attraverso le inferenze logiche precedenti si arriva a una conclusione «C» che contraddice uno dei fatti «F» dell'insieme $\mathbf{F}$ di partenza (ovvero, l'affermazione che «Beatrice parte» che nega logicamente, per **doppia negazione** - *vedi* Parte A, Unità 2, par. 3 -, «Beatrice non parte»). La conclusione dell'argomento che si costruisce a partire da questa scoperta può essere allora riassunta come segue: dato che «C» segue da «A» per deduzione e dato che «C» contraddice «F», se ne deduce che la contraddizione raggiunta dipende dall'assunzione «A»; dunque, «A» non vale; ne consegue che vale la negazione logica di «A», ovvero quanto si voleva dimostrare come direbbero i matematici.

2. Il ragionamento per assurdo e l'impostazione classica della logica

Nell'attesa di dire qualcosa di più sui fondamenti del ragionamento per assurdo nell'unità dedicata alla formalizzazione degli argomenti (*vedi* Parte C, Unità 6) e prima di passare a qualche esercizio che ci aiuti a consolidare quanto si è detto fin qui a livello teorico, occorre almeno sottlineare il 'fatto logico' che giustifica la conclusione di un ragionamento di questo tipo. Intendiamo con ciò riferirsi al passaggio grazie al quale, avendo dimostrato come dall'ipotesi per assurdo «A» segue la contraddizione «C» di un fatto noto, si conclude che deve valere necessariamente la negazione logica di «A». A guardarla più da vicino, una simile conclusione si compone di due affermazione che conviene separare per poterle considerare più nel dettaglio. Si tratta, infatti, delle affermazioni secondo cui:

1. dato che dall'ipotesi «A» segue per logica una contraddizione, allora «A» non vale;
2. dato che «A» non vale, allora vale la negazione logica di «A».

La necessità di tenere distinte le due affermazioni dipende dal fatto che esse sembrano avere un grado molto diverso di legittimità. Se da un'affermazione «A» segue una contraddizione, infatti, è piuttosto naturale ritenere che quanto si afferma con essa non possa valere: dal momento che realizzandosi quanto «A» 'dice' ci si troverebbe di fronte a una situazione contraddittoria esattamente come nell'esempio, dove dal fatto che Dario parta per il mare seguirebbe che Beatrice parte e non parte allo stesso tempo, è piuttosto ovvio concludere che «A» sia falsa perché ciò che con essa si afferma non può accadere. Dunque, ad esempio, non è vero che «Dario parte per il mare».

Altra cosa, però, è sostenere che come conseguenza del fatto che «A» non vale, allora vale la negazione logica di «A». A dispetto del fatto che anche questa conclusione possa apparire ovvia in certi casi, come sembra del tutto legittimo affermare che se è falso che «Dario parte per il mare», allora «Dario non parte per il mare» è vero, sostenere che la stessa conclusione valga in tutti i casi possibili comporta un'assunzione non banale sul 'mondo' di cui si sta parlando. Si assume, ad esempio, che il venir meno delle condizioni per il realizzarsi di un evento corrisponda con il porsi delle condizioni perché si realizzi l'evento che corrisponde alla negazione logica del primo. Che l'assunzione non sia banale, o almeno che non lo sia sempre, si può dire dipenda dal fatto che l'universo è un luogo complicato e può apparire a dir poco semplicistico affermare che l'aver dimostrato che l'affermazione «A» è falsa dipende dal fatto che la sua negazione logica è vera. Dimostrare che «$\sqrt{2}$ è razionale» è contraddittorio, ad esempio, potrebbe non sembrare sufficiente ad alcuni per sostenere che «$\sqrt{2}$ è irrazionale», ovvero che «$\sqrt{2}$ non è razionale» di conseguenza. Questi 'alcuni', avendo escluso che $\sqrt{2}$ possa essere razionale, desidererebbero avere una dimostrazione diretta del fatto che ciò dipende giusto dall'irrazionalità di $\sqrt{2}$, anziché che dal fatto, ad esempio, che $\sqrt{2}$ è un numero complesso (cioè un numero non reale e dunque non razionale di conseguenza).

Allo stesso modo, giusto per fugare l'idea che il problema possa sorgere solo in corrispondenza di fatti 'non fisici', ovvero che riguardano concetti astratti come i numeri, l'aver dimostrato che «È falso che è scappata una tigre dallo zoo» potrebbe non apparire sufficiente ad altri per concludere che non ci sono animali feroci in circolazione. Questi 'altri' vorrebbero essere certi di essere davvero al sicuro, piuttosto che scoprire, invece, che di tigri dallo zoo ne sono scappate due.

3. Il ragionamento per assurdo e la legge di doppia negazione

Si sarà forse notata un'analogia tra le considerazioni che si sono offerte qui, a latere dell'introduzione al ragionamento per assurdo, e quelle che si è avuto modo di proporre in occasione dell'introduzione all'operazione logica di negazione e alle leggi logiche ad essa relative. In particolare, vi è un'analogia tra quanto si è sottolineato a proposito dei rapporti tra il ragionamento per assurdo e l'impostazione classica della logica e quelli tra quest'ultima e la legge logica di **doppia negazione** (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 3). La ragione dell'analogia sta nel fatto che l'assunzione di fondo che dà legittimità a un ragionamento per assurdo è la stessa che garantisce la verità della legge di doppia negazione, ossia i principi classici della **bivalenza** e di **non contraddizione** (*vedi* Parte A, Unità 1, par. 4) dai quali discende il fatto che la falsità di un enunciato e la verità della sua negazione logica sono, di fatto, una cosa sola.

Esercizi Unità 4

1. Si considerino gli enunciati:

(1) Alberto compra l'auto nuova.
(1) Alberto risparmia sulle spese.

Quali tra le proposte seguenti ha la forma corretta di un ragionamento per assurdo basato sulle affermazioni disponibili?

A. Se (1), allora (2); se non è vero (1), allora (1); dunque, non è vero (1).
B. Se (1), allora (2); se (1), allora non è vero (2), dunque, non è vero (1).
C. Se (2), allora (1); se (2), allora non è vero (1); dunque, non è vero (1).
D. Se (1), allora (2); se non è vero (2), allora (1); dunque (1).
E. Se non è vero (1), allora (2); se (1), allora (2); dunque, (1).

2. Si considerino gli enunciati:

(1) Il colpevole è un uomo e indossava dei guanti.
(2) Il colpevole non è un uomo oppure non indossava dei guanti.
(3) Il colpevole è entrato dalla finestra o dalla porta di servizio.
(4) Il colpevole non è entrato dalla finestra ed è entrato dalla porta di servizio.
(5) Il colpevole non è entrato dalla finestra né dalla porta di servizio.
(6) Il colpevole non è un uomo e non indossava dei guanti.

Quali tra le proposte seguenti ha la forma corretta di un ragionamento per assurdo basato sulle affermazioni disponibili?

A. Se (5), allora (1); se (3), allora (1); dunque, (2).
B. Se (3), allora (5); se (1), allora (6); dunque, (5) e (2).
C. Se (1), allora (5); se non (2), allora (3); dunque, (2).
D. Se (1), allora (4); se non (6), allora non (4); dunque, non (1).
E. Se (2), allora (6); se non (4), allora (3); dunque, (1).

3. Si considerino gli enunciati:

(1) Nessuna ragazza è amata da tutti i ragazzi.
(2) Ogni ragazzo ama una ragazza.
(3) Nessuna ragazza è amata da qualche ragazzo.
(4) Nessun ragazzo ama una ragazza.
(5) Per ogni ragazza c'è un ragazzo che non l'ama.
(6) Qualche ragazzo non ama una ragazza.

Quali tra le proposte seguenti ha la forma corretta di un ragionamento per assurdo basato sulle affermazioni disponibili?

A. Se (5), allora (6); se (5), allora (2); dunque, (6).
B. Se (1), allora (6); se (1), allora (2); dunque, (5).
C. Se (3), allora (4); se (3), allora (6); dunque, (5).
D. Se (4), allora (2); se (4), allora (1); dunque (6).
E. Se (2), allora (1); se (2), allora (5); dunque, (6).

4. Si consideri l'affermazione:

(1) Camilla viene in piscina, Elena va al cinema e Barbara non riesce a uscire in tempo da lavoro.

Supponiamo di aver ridotto (1) all'assurdo. Se ne deduce che:

A. se Camilla viene in piscina e Elena va al cinema, allora Barbara riesce a uscire in tempo da lavoro;
B. se Barbara non riesce a uscire in tempo da lavoro, allora Camilla non viene in piscina e Elena non va al cinema ;
C. se Camilla viene in piscina allora Elena va al cinema o Barbara non riesce a uscire in tempo da lavoro;
D. Camilla non viene in piscina oppure se Elena va al cinema allora Barbara non riesce a uscira in tempo da lavoro;
D. Camilla viene in piscina o Elena non va al cinema o Barbara non riesce a uscire in tempo da lavoro.

5. Si considerino gli enunciati:

(1) Lorenzo paga da bere.
(2) Sara non beve niente e Simone beve due birre.

Supponiamo che si riesca a ridurre l'affermazione (1) all'assurdo tramite (2). Quale delle affermazioni seguenti riproduce in modo esatto quanto si riesce a dimostrare?

A. Se Lorenzo paga da bere, allora se Sara non beve niente, Simone beve due birre e se Lorenzo paga da bere, allora se Simone beve due birre, Sara non beve biente.

B. Se Lorenzo paga da bere, allora Sara non beve niente e Simone beve due birre e se Lorenzo paga da bere, allora Sara beve una birra e Simone non beve due birre.

C. Se Lorenzo paga da bere o Lorenzo non paga da bere, allora Sara non beve niente e Simone beve due birre oppure Sara beve qualcosa o Simone non beve due birre.

D. Se Lorenzo paga da bere, allora Sara non beve niente e Simone beve due birre e se non è vero che Lorenzo non paga da bere allora Sara beve qualcosa o Simone beve una birra sola.

E. Se Lorenzo paga da bere, allora Sara non beve niente e Simone beve due birre e se Sara non beve niente e Simone beve due birre, allora Lorenzo non paga da bere.

6. Si considerino gli enunciati:

(1) La somma di due numeri primi è un numero primo.
(2) Ci sono almeno due numeri primi.

Supponiamo che si riesca a ridurre l'affermazione (1) all'assurdo tramite (2). Quale delle affermazioni seguenti riproduce in modo esatto quanto si riesce a dimostrare?

A. Se la somma di due numeri primi è un numero primo, allora ci sono almeno due numeri primi e se la somma di due numeri primi non è un numero primo, allora ogni coppia di numeri diversi tra loro contiene almeno un numero che non è primo.

B. Se la somma di due numeri primi è un numero primo, allora ci sono almeno due numeri primi e se la somma di due numeri primi è un numero primo, allora dato un qualsiasi numero primo e preso un numero diverso da esso, allora quest'ultimo non è primo.

C. Se la somma di due numeri primi è un numero primo, allora dati due numeri, se entrambi sono primi allora sono uguali e se la somma di due numeri primi non è un numero primo, allora ci sono almeno due numeri primi.

D. Se la somma di due numeri primi è un numero primo, allora ci sono almeno due numeri primi e se la somma di due numeri primi è un numero primo, allora ci sono esattamente due numeri primi.

E. Se ci sono almeno due numeri primi, allora esistono due numeri primi la cui somma è un numero primo e se la somma di due numeri primi è un numero primo, allora ci sono almeno due numeri primi.

Unità 5

Argomenti notevoli: l'induzione e l'induzione completa

Il metodo induttivo o **induzione** è una forma di ragionamento nota e discussa fin dall'antica Grecia che consente di dedurre una conclusione di tipo universale a partire da premesse di carattere particolare. Si distinguono due forme di induzione, un'**induzione semplice** o **enumerativa**, delle quali si possono trovare occorrenze e applicazioni nelle scienze sperimentali e nel discorso ordinario, e l'**induzione completa**, che si applica in modo specifico ai numeri naturali, cioè ai successori interi dello zero, fino a costituire di essi il principio più caratteristico.

1. L'induzione semplice e i suoi limiti

Dario è un bambino di due anni. Tutte la mattine, la mamma lo mette a sedere sul seggiolone, sposta il seggiolone di fronte alla grande finestra del soggiorno di casa e comincia a dargli la colazione. Dario, che pur essendo piccolo è molto perspicace, è solito sbirciare fuori dal vetro mentre la mamma lo imbocca. Egli nota allora che uno dopo l'altro, gli uccelli che passano davanti alla finestra hanno le piume degli stessi colori variopinti. Il fenomeno si ripete senza variazioni anche la mattina successiva, quella dopo, quella dopo ancora, fino a quando a un certo punto, nel bel mezzo della colazione di uno dei giorni successivi, Dario chiede: «Mamma, lo sai che tutti gli uccelli hanno le piume colorate?».

La conclusione di Dario nasce dall'aver applicato una delle forme con cui si presenta il ragionamento per induzione (semplice), quella **enumerativa**: all'interno di un certo dominio di riferimento si verifica che è una certa proprietà è goduta da ciascuno degli elementi del dominio che si sono esaminati e si conclude perciò che essa è goduta da tutti gli individui appartenenti al dominio prescelto. Dunque, avendo notato che:

L'uccello che passa per primo ha le piume colorate
L'uccello che passa per secondo ha le piume colorate
L'uccello che passa per terzo ha le piume colorate
...
L'uccello che passa per decimo ha le piume colorate
...

Dario conclude a un certo punto che

Tutti gli uccelli che passano hanno le piume colorate

Nella nostra storia, Dario è portato ingenuamente a credere che la sua esperienza giustifichi una conclusione persino più radicale secondo la quale «Tutti gli uccelli (del mondo) hanno le piume colorate». A dire il vero non occorre esasperare l'esempio fino a questo punto: già l'affermazione più cauta, relativa ai volatili che passano di fronte alla finestra davanti alla quale Dario consuma la colazione tutte le mattine, consente di metter in evidenza i limiti del ragionamento induttivo. In effetti, per quanto a lungo abbia atteso prima di trarre la conclusione dalle proprie osservazioni, è ovvio che Dario non può aver esaurito il proprio dominio di riferimento, neanche supponendo di limitare quest'ultimo agli uccelli che si trovano a volare nei pressi della finestra davanti alla quale siede ogni mattina. Dunque, la conclusione che tutti abbiano lo stesso piumaggio colorato appare quantomeno un azzardo e nessuno, probabilmente neanche Dario medesimo, si stupirebbe troppo nel veder passare magari un candido gabbiano dietro le spalle della mamma un giorno di questi.

2. I limiti dell’induzione enumerativa

L’induzione semplice nella sua forma enumerativa denuncia quindi i suoi limiti in situazioni nelle quali non si abbia accesso, per un motivo o per un altro, a tutti gli individui che compongono il dominio di riferimento delle nostre osservazioni. Eppure, il tipo di ragionamento che rappresenta sembra davvero vicino a quello che capita a tutti di mettere in atto nel discorso ordinario nelle circostanze più diverse e anche al modo di procedere nell’acquisizione di nuove conoscenze nell’ambito delle scienze sperimentali: si conducono una serie di esperimenti che danno risultati coerenti su uno o più campioni dello stesso tipo e si conclude da ciò che gli esperimenti condotti su tutti i campioni analoghi finiranno per produrre lo stesso risultato. Sfortunatamente, questo modo di procedere ricorda da vicino quello di Dario e si espone agli stessi rischi. La soluzione del problema più ovvia, che consiste nell’espandere la serie degli esperimenti fino a comprendere tutti gli individui di un dato dominio di riferimento, è critica per due ordini di ragioni. Il primo, di tipo concettuale, perché qualora fosse perseguibile renderebbe del tutto inutile il ragionamento di tipo induttivo. In effetti, l’induzione enumerativa quando è esatta è anche poco interessante: se dietro la mamma di Dario ci fosse una voliera contenente, diciamo, cinque pappagalli esotici anziché una finestra, la conclusione che tutti gli uccelli che vede Dario al mattino hanno le piume colorate apparirebbe senza dubbio più corretta, ma anche decisamente banale. Essa non assomiglierebbe più alle conclusioni a cui si giunge nelle scienze per via sperimentale, che sono tanto più importanti quanto più consentono di estrapolare dalla casistica degli esperimenti effettuati previsioni su come andranno a finire esperimenti e osservazioni che si devono ancora condurre.

Il secondo ordine di ragioni che rende discutibile la soluzione ‘esaustiva’ di cui sopra è di tipo pratico: perché portare a compimento tanti esperimenti quanti sono gli individui di un dato dominio può risultare impossibile (per ragioni di tempo o di opportunità). Lo stesso Dario, d’altra parte, anche volesse dedicare l’intera esistenza alla verifica sperimentale della propria conclusione, potrebbe avere seri problemi a portare a termine il compito.

Una soluzione praticabile che consente di non dover rinunciare del tutto alla pratica del ragionamento induttivo (per quanto non metta interamente al riparo dalle sua insidie), consiste invece, da un lato, nel limitarne l’uso a quei contesti nei quali gli esperimenti che si ha la possibilità di portare a termine, per numero e per tipologia degli enti coinvolti, hanno un’alta valenza di generalità rispetto al dominio di individui di riferimento nella sua interezza; dall’altro lato, nell’indebolire la conclusione raggiunta dando di essa una formulazione più cauta. In questa forma, l’induzione semplice può essere presentata come l’inferenza che, a partire da premesse della forma:

La proprietà A è goduta dall’elemento d_1 del dominio
La proprietà A è goduta dall’elemento d_2 del dominio
. . .
La proprietà A è goduta dall’elemento d_n del dominio

consente di concludere che:

La proprietà A è probabilmente goduta da ciascun elemento d del dominio

Lungi dall’esaurire le critiche che è possibile sollevare legate al ricorso alla pratica del ragionamento induttivo in campo sperimentale, la versione ‘emendata’ del ragionamento consente di apprezzare meglio la distanza che passa tra l’induzione nella sua forma enumerativa e la sua variante **completa**.

3. L'induzione completa

Il vantaggio del ricorso al ragionamento di tipo induttivo è legato a situazioni nelle quali è improbabile, se non impossibile, la verifica che una certa proprietà vale per tutti gli individui appartenenti a un dato dominio. L'esercizio di questo vantaggio rischia di esporre anche ai limiti di questa forma argomentativa, che dipendono proprio dal tentativo di estendere le conclusioni tratte in certi casi sperimentali a tutti i casi a essi analoghi.

Supponiamo adesso di considerare come dominio di riferimento l'insieme costruito a partire dai membri di una data famiglia in modo tale che se un certo individuo ne fa parte, allora gli appartiene anche il suo figlio primogenito. Supponiamo che si sia costruito l'insieme a partire da un antenato accertato a dei membri della famiglia presa in esame. Per come l'insieme è costruito, ciò significa allora che di esso fa parte anche b che è il primogenito di a, c che è il primogenito di b, d che lo è di c, e così via. Supponiamo adesso di voler stabilire se tutti gli individui appartenenti all'insieme così determinato siano affetti da una certa patologia, della quale si sa che se colpisce un individuo allora si trasmette con certezza al suo primo discendente diretto. Supponiamo anche di sapere, con analoga certezza, che a soffriva della patologia in questione. Ciò è sufficiente a concludere che tutti gli individui appartenenti al dominio preso in esame, per quanto grande esso possa essere, soffrono o hanno sofferto della stessa patologia. Questo significa che, rispetto alla proprietà in questione e al dominio prescelto, è possibile ovviare ai limiti che affliggono il ragionamento induttivo nel caso generale. Si sarà forse notato che ciò avviene attraverso la necessità di verificare che la proprietà vale in effetti in un solo caso, quello dell'antenato comune a tutti gli individui dell'insieme (l'individuo a, come lo si è indicato in precedenza), mentre la conclusione che tutti i membri dell'insieme possiedono la stessa proprietà dipende dall'insieme di individui dei quali si sta procedendo alla disamina e dalla peculiare modalità di trasmissione della patologia considerata.

Quello presentato è un caso nel quale il ragionamento induttivo è **completo** perché la sua conclusione si presenta con un grado di certezza assoluto che manca, invece, nel caso del ragionamento induttivo nella sua veste enumerativa. Come si notava, un ingrediente essenziale del ragionamento in questa forma è dato dalla natura del dominio di individui di riferimento. Esso è costruito sulla base di un **principio generativo** dei suoi elementi che ha le seguenti caratteristiche:

1. esiste un elemento del dominio che può essere considerato il 'primo' elemento dell'insieme (nell'esempio, l'antenato a comune a tutti gli individui della linea di discendenza considerata); 2. gli altri elementi dell'insieme sono 'generati' sulla base di una relazione che intrattengono con questo 'elemento primo' (nell'esempio, la relazione di primogenitura, iterata a partire da a).

Il caso d'uso più comune del ragionamento induttivo nella sua forma completa è rappresentato dall'insieme dei numeri naturali, che contiene i successori interi dello zero, e dove dunque: l'elemento 'primo' dell'insieme è il numero 0; il principio sulla base del quale gli elementi dell'insieme sono 'generati' è rappresentato dal passaggio da un numero al suo successore intero (dunque, da 0 a 1, da 1 a 2, da 2 a 3, e così via).

Dato un dominio costruito secondo le 'linee guida' indicate in precedenza, il ragionamento che consente di concludere che una certa proprietà A vale per tutti i suoi membri si compone allora di due passaggi:

A. la dimostrazione che la proprietà A vale per l'elemento 'primo' dell'insieme;
B. la dimostrazione del fatto che se la proprietà A vale per un elemento generico dell'insieme, allora essa si trasmette anche all'elemento che è 'generato' da esso nel senso dell'insieme dato.

Ciò significa, nel caso dell'insieme dei numeri naturali, dimostrare che A vale del numero 0 e che se essa vale di un certo numero naturale x, allora essa vale anche del suo proprio successore intero $x+1$. Date queste due condizioni, è lecito concludere con certezza assoluta che *A* vale allora di ogni numero naturale: perché essa vale di 0 e quindi vale del suo successore 1; ma allora vale anche di 2 e per questo motivo vale anche di 3, e così via per tutti gli elementi dell'insieme.

Esercizi Unità 5

1. Nel sacchetto che Dario tiene in mano ci sono dieci biglie, di cui cinque di colore rosso e cinque blu. Michele chiede a Dario se può prestargli tre delle sue biglie e, ricevuto da questi l'assenso, le pesca dal sacchetto senza guardare. Le prime due biglie che Michele pesca sono di colore rosso, quindi:

A. la terza biglia che pesca sarà di colore blu;
B. la terza biglia che pesca sarà probabilmente di colore rosso;
C. la terza biglia che pesca sarà di colore rosso;
D. non si può dire con quale probabilità la terza biglia che pesca sarà rossa o blu;
E. la terza biglia che pesca sarà più probabilmente di colore blu.

2. Alberto è un nuotatore molto scrupoloso, che prepara con molta attenzione i suoi allenamenti. Fino a questo momento a nuotato in modo tale che:

(1) Se ha nuotato una vasca a dorso, allora ha nuotato a rana le due precedenti.
(2) Se non ha nuotato una vasca a rana, allora ha nuotato a rana quella successiva.
(3) Se ha nuotato una vasca a rana, allora ha nuotato dopo una vasca a dorso oppure una vasca a stile libero.

Tenendo presente che Alberto ha appena finito di nuotare una vasca a delfino, se ne deduce che:

A. Alberto probabilmente non nuoterà a dorso la vasca successiva;
B. probabilmente Alberto nuoterà a rana la vasca successiva e a stile libero quella ancora dopo;
C. Alberto ha nuotato a dorso la vasca precedente e probabilmente nuoterà a dorso anche la successiva;
D. se Alberto non nuoterà a stile libero allora nuoterà a rana oppure a dorso;
E. non è possibile fare previsioni su come Alberto nuoterà la vasca successiva.

3. Il cuoco di un sushi bar mette le porzioni su un nastro trasportatore in modo che queste raggiungano facilmente i clienti del locale. Fino a questo momento ha disposto i cibi sul nastro secondo le 'mandate' seguenti:

(1) 10 al salmone, 5 al tonno, 8 al pesce spada 1 al granchio.
(2) 12 al salmone, 6 al tonno, 12 al pesce spada, 1 al granchio.
(3) 15 al salmone, 7 al tonno, 14 al pesce spada, 2 al granchio
(4) 19 al salmone, 8 al tonno, 16 al pesce spada, 4 al granchio.

Se ne deduce che, presumibilmente, la prossima mandata di cibo sarà così composta:

A. 23 al salmone, 9 al tonno, 18 al pesce spada, 8 al granchio;
B. 20 al salmone, 9 al tonno, 18 al pesce spada, 6 al granchio;
C. 28 al salmone, 9 al tonno, 20 al pesce spada, 7 al granchio;
D. 22 al salmone, 10 al tonno, 20 al pesce spada, 6 al granchio;
E. 24 al salmone, 9 al tonno, 18 al pesce spada, 8 al granchio.

4. Pietro è in auto, in attesa del verde in una strada dove semafori sono sistemati in modo tale che siano rispettate due semplici regole:

(1) a ogni semaforo ne segue un altro;
(2) preso un semaforo qualsiasi, il successivo diventa verde in modo tale che un automobilista che rispetti il limite di velocità non debba mai fermarsi.

Se Pietro percorre la strada mantenendo la velocità di 40 km/h, che è il limite consentito, e scatta al verde allora:

A. se Pietro si ferma al semaforo successivo, allora il precedente non è verde;
B. per ogni semaforo che Pietro incontra sulla sua strada, ce n'è uno successivo a cui non deve fermarsi;
C. ogni semaforo che Pietro incontra sulla sua strada è verde;
D. per ogni semaforo che Pietro incontra sulla sua strada, ce n'è un altro che non è verde;
E. se il semaforo successivo è verde, allora il semaforo che Pietro incontra è verde.

5. È tradizione che i nomi nella famiglia di Giorgio vengano dati sulla base di una regola secondo la quale:

(1) il maschio primogenito ha il nome del padre se tutti i maschi primogeniti che lo precedono nella stirpe hanno il nome del padre.

Il padre di Giorgio, che è il figlio primogenito, si chiama Antonio. Quindi:

A. c'è un figlio primogenito che precede Giorgio nella stirpe che se si chiama Giorgio, allora non si chiama come il padre;
B. per ogni figlio primogenito che precede Giorgio nella stirpe ce n'è un altro che si chiama Antonio;
C. il padre di Giorgio ha un maschio primogenito che lo precede nella stirpe che non si chiama Giorgio;
D. il nonno di Giorgio si chiama Antonio;
E. c'è un figlio primogenito che precede Giorgio nella stirpe che non si chiama come il padre.

6. Elena e le sue sorelle sono state sempre molto unite. Ognuna di loro, infatti, racconta sempre tutto alle sorelle più grandi così che vale di ciascuna che:

(1) Se la sorella minore sa qualcosa, allora anche lei la sa.

Laura, che ha due anni meno di Elena, sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema. Quindi:

A. la sorella minore di Laura sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema;
B. almeno una delle sorelle minori di Laura sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema;
C. se non c'è un'altra sorella di età intermedia tra Laura e Elena, Elena sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema;
D. Elena sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema;
E. se Elena non sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema, allora c'è una sorella minore di Laura che non sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema.

Unità 6

Formalizzare un argomento

Il procedimento di **formalizzazione** degli enunciati logici e lo strumento delle **tavole di verità**, che abbiamo visto rivelarsi utilissimo nel caso dello studio delle condizioni di verità di un enunciato (*vedi* Parte A, Unità 6 e Unità 7), possono svolgere un ruolo importante anche nello studio degli argomenti, tanto per evidenziarne la struttura quanto per valutarne poi la correttezza.

1. Formalizzare un'inferenza logica

Si consideri nuovamente una delle inferenze di tipo logico che si è avuto modo di esaminare in precedenza:

> Se aumenta il costo del denaro, sale anche la rata del nostro mutuo.
> Il costo del denaro aumenterà.
> Quindi, la prossima rata del mutuo sarà più alta dell'ultima.

Un'inferenza come quella presentata, è composta da enunciati di tipo dichiarativo che hanno la forma di un'asserzione logicamente complessa nel caso della prima **premessa** (*vedi* ***Glossario***), che è un enunciato di tipo **condizionale**, e di asserzioni **di tipo atomico** (*vedi* ***Glossario***), nel caso dell'altra premessa e della **conclusione** (*vedi* ***Glossario***) dell'inferenza.

Il primo passo per poter utilizzare proficuamente gli strumenti collegati alla formalizzazione degli enunciati logici che si sono introdotti (*vedi* Parte A, Unità 6), consiste nel determinare qual'è l'operazione logica 'oggetto' dell'inferenza, laddove con ciò si intende quale sia l'operazione logica su cui si fonda il passaggio argomentativo che l'inferenza realizza (*vedi* Parte C, Unità 2, par. 3). Nel caso presentato, ad esempio, l'operazione logica intorno alla quale ruota il ragionamento non può che essere il condizionale, che figura nella prima premessa, essendo l'altra un enunciato di tipo atomico. Portare a compimento questo passaggio preliminare serve a stabilire il successivo, in particolare se occorre procedere alla sola formalizzazione dei rapporti logici enunciativi occorrenti nelle premesse dell'inferenza, nel caso in cui l'operazione da cui ha origine l'inferenza sia un **connettivo logico** (*vedi* ***Glossario***), oppure se è necessario tenere conto anche della natura atomica degli enunciati e dell'eventuale occorrenza delle operazioni di **quantificazione individuale** (*vedi* Parte B, Unità 2-3). Il rischio da evitare è quello di formalizzare gli enunciati a un livello eccessivo di accuratezza, ad esempio perché le operazioni di quantificazione individuale delle premesse non svolgono alcun 'ruolo attivo' nel procedimento argomentativo che si realizza attraverso l'inferenza in esame, oppure in modo troppo superficiale, perché la considerazione dei soli rapporti logici tra gli enunciati non è sufficiente a spiegare quanto accade con l'inferenza in questione.

Una volta che si sia stabilita con certezza quale operazione logica caratterizza l'inferenza che si vuole valutare, si procede alla formalizzazione di premesse e conclusione secondo il procedimento che si è illustrato nell'unità dedicata ai rapporti logici enunciativi (*vedi* Parte A, Unità 6) e a quella dedicata alla formalizzazione degli enunciati atomici e delle operazioni di quantificazione individuale (*vedi* Parte A, Unità 7). Nel caso d'esempio, avendo stabilito che l'operazione di cui occorre tenere conto è il condizionale e dunque che non è necessario procedere alla formalizzazione dettagliata degli enunciati atomici che occorrono nell'inferenza, si tratta di sostituire a questi ultimi dei simboli generici opportunamente scelti e procedere in modo analogo con le operazioni logiche presenti. Ad esempio, posto:

A = «Aumenta il costo del denaro»
B = «Sale la rata del mutuo»

segue che l'inferenza considerata risponde al diagramma seguente:

$$\frac{A \to B \quad A}{B}$$

Rispetto alla rappresentazione dell'inferenza proposta, occorre notare due elementi: il modello grafico di riferimento è quello delle frazioni numeriche in matematica, con le premesse dell'inferenza poste al 'numeratore' e la conclusione posta al 'denominatore'; le premesse dell'inferenza, inoltre, sono disposte in orizzontale, una di fianco all'altra.

2. Dalla formalizzazione delle inferenze a quella degli argomenti

Si consideri adesso l'argomento più complesso:

Se aumentasse il costo del denaro, salirebbe anche la rata del nostro mutuo. Il superamento dello stato di stagnazione economica ha suggerito alla Banca Centrale Europea di aumentare i tassi di interesse e quindi il costo del denaro. Quindi, la prossima rata del mutuo sarà più alta dell'ultima. Se la prossima rata del mutuo dovesse essere più alta della precedente, non potremo permetterci il viaggio a Parigi che abbiamo programmato. Quindi, non andremo a Parigi.

Come si è già avuto modo di notare nella scheda dedicata alle inferenze logiche (*vedi* Parte C, Unità 2, par. 1), si tratta di un ragionamento nel quale occorre l'inferenza considerata in precedenza che, combinata con una seconda inferenza, viene utilizzata per giungere a una conclusione ulteriore. Prese separatamente, le due inferenze in questione sono le seguenti:

Se aumenta il costo del denaro, sale anche la rata del nostro mutuo.
Il costo del denaro aumenterà.
Quindi, la prossima rata del mutuo sarà più alta dell'ultima.

Se il mutuo aumenta non potremo andare a Parigi.
La prossima rata del mutuo sarà più alta dell'ultima.
Quindi, non andremo a Parigi.

Applicando il procedimento descritto in precedenza si giunge facilmente alla loro versione formale ponendo, ad esempio:

A = «Aumenta il costo del denaro»
B = «Sale la rata del mutuo»
C = «Andiamo a Parigi»

e riscrivendo le due inferenze di conseguenza come:

$$\frac{A \to B \quad A}{B} \qquad \frac{B \to C \quad B}{C}$$

A questo punto, le versioni formalizzate delle due inferenze possono essere combinate tra loro come nell'argomento originario, in modo da ottenere anche una versione formalizzata di quest'ultimo. A tale scopo, occorre notare come le due inferenze siano 'collegate tra loro' per il fatto che la conclusione della prima è una delle due premesse della seconda. Questo collegamento può essere reso evidente attraverso la grafica ponendo al di sopra della premessa in questione l'argomento che la legittima e che coincide con la prima delle due inferenze. Procedendo in tal senso si otterrà il seguente schema:

$$\frac{B \to C \quad \dfrac{A \to B \quad A}{B}}{C}$$

La rappresentazione grafica che si è raggiunta consente di mettere in evidenza le caratteristiche salienti di un argomento. Nel caso in esame, ad esempio, si nota che le premesse dell'argomento non coincidono con le premesse delle due inferenze che lo compongono prese separatamente: l'enunciato che corrisponde al simbolo B, infatti, è una premessa della seconda inferenza dell'argomento considerato, ma non è una premessa di quest'ultimo perché coincide con la conclusione della prima delle due inferenze di cui esso si compone. Questa osservazione ha un impatto non banale sulla valutazione del ragionamento. In effetti, non occorre assumere che B, o meglio che l'affermazione per rappresentare il quale si è scelto questo simbolo sia vera, perché la sua verità discende dalla correttezza dell'inferenza attraverso dalla quale la si desume; piuttosto, bisognerà assumere come vere le premesse di quest'ultima e verificare che la rendano legittima. Allo stesso tempo, B non rappresenta neanche la conclusione dell'argomento considerato. La conclusione di quest'ultimo infatti coincide con il simbolo C, per dedurre il quale si fa uso di B nella seconda inferenza. Ciò significa che le premesse dell'argomento sono le affermazioni corrispondenti alle formule $B \to C$, $A \to B$ e A (che coincidono con gli enunciati che 'non hanno niente sopra', segno che non possiedono alcuna giustificazione indipendente e si deve supporre siano vere affinché il ragionamento fili), la sua conclusione è C, mentre B rappresenta una conclusione intermedia, un passaggio utile alla prosecuzione del discorso.

3. Validità logica di un'inferenza

Nell'unità dedicata alle inferenze ci si è soffermati sulla proprietà di alcune di esse di essere **logicamente valide**, dunque tali che, assunte le premesse come vere, segue da ciò per logica la verità anche della conclusione (*vedi* Parte C, Unità 2, par. 2). Le inferenze logicamente valide sono dunque degli 'strumenti affidabili' per ottenere affermazioni vere a partire da affermazioni che si sia già appurato essere tali.

In che senso il passaggio dalle premesse alle conclusioni di un'inferenza sia di tipo logico, si è già cercato di spiegarlo nella stessa unità (*vedi* Parte C, Unità 2, par. 3) e se ne è fatto cenno anche nei paragrafi precedenti, ma sarà utile ribadirlo ancora una volta. La natura logica dell'inferenza dipende dal fatto che il passaggio argomentativo che si realizza con essa poggia, come si è detto e visto in precedenza, sulle proprietà delle operazioni logiche che sono coinvolte nelle premesse e di cui si fa uso per trarre la conclusione. Così, ad esempio, nelle inferenze prese in esame in precedenza se ne ricava la conclusione a partire dalle premesse in virtù della loro forma logica (in particolare, dall'essere l'una un enunciato condizionale, l'altra il suo l'antecedente).

Le proprietà delle operazioni logiche di cui si fa uso nel passaggio dalle premesse alla conclusione di un'inferenza sono legate alle condizioni di verità che un enunciato possiede alla luce della sua forma logica. Si consideri, ad esempio, una delle due inferenze considerate fin qui (le quali peraltro, come si sarà forse notato, replicano lo stesso 'modello' di inferenza come preciseremo nel seguito):

$$\frac{A \to B \quad A}{B}$$

La strategia per valutare le inferenze di cui si è fatto uso fin qui consiste nell'assumere le premesse come vere e cercare di desumere la verità della conclusione. Quanto si riesce a ricavare dall'ipotesi relativa alla verità delle premesse di un'inferenza dipende dalla loro forma logica, dal momento che quest'ultima determina le condizioni che devono essere soddisfatte affinché detti enunciati siano veri come si suppone. Le condizioni di verità di un enunciato la cui forma logica sia determinata dall'uso dei connettivi, sono codificate in forma schematica nelle **tavole di verità** (*vedi* Parte A, Unità 7). A questa osservazione occorre aggiungerne un'altra. Delle regole di inferenza è possibile offrire una lettura informale che sembra dare il senso del passaggio argomentativo che 'si consuma' mediante esse. Nel caso prescelto, tale lettura informale corrisponde all'affermazione secondo la quale: «Dalle premesse $A \rightarrow B$ e A segue B». Secondo questa lettura, quanto accade nell'inferenza in esame corrisponde al fatto che: «Se $A \rightarrow B$ e A sono vere, allora è vera B». Se volessimo formalizzare questo condizionale, che descrive il passaggio deduttivo dalle premesse dell'inferenza considerata alla sua conclusione, si otterrebbe la formula:

$$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$$

Detta formula corrisponde all'inferenza considerata dal momento che ne racchiude il senso logico, ovvero riproduce in forma statica, 'fotografa' si potrebbe dire, quanto con l'inferenza si realizza in senso dinamico. In questa versione 'enunciativa', il senso dell'inferenza, il passaggio argomentativo dalle premesse alla conclusione, è rappresentato dal condizionale che restituisce il senso della 'trasmissione della verità' dalle prime alla seconda. Se l'inferenza è logicamente valida, come si è ripetuto più volte, non è possibile che siano vere le premesse e falsa la conclusione, quindi in particolare non è possibile che siano vere le premesse $A \rightarrow B$ e A e che sia falsa B. Ma $A \rightarrow B$ e A sono entrambe vere se e solo se è vera la loro congiunzione $((A \rightarrow B) \wedge A)$. Quindi, se l'inferenza è valida non può darsi il caso che l'antecedente della formula che le corrisponde sia vero e il conseguente, la conclusione dell'inferenza, sia falso. Poiché detta formula ha la forma di un enunciato condizionale e il caso in cui l'antecedente sia vero e il conseguente falso è l'unico caso in cui l'**implicazione materiale** è falsa (*vedi* Parte A, Unità 7, par. 3), se ne deduce che se un'inferenza è valida, allora la formula che le corrisponde è una **verità logica** (*vedi* ***Glossario***).

D'altra parte, è vero anche il viceversa. Infatti, se una formula che corrisponde a un'inferenza logica nel senso suddetto è una verità logica, dunque è sempre vera qualsiasi sia il **valore di verità** (*vedi* ***Glossario***) delle sue componenti enunciative, allora non può darsi il caso che il suo antecedente sia vero e il conseguente falso, e dunque non può darsi il caso che le premesse delle inferenza che la formula rappresenta siano tutte vere e la conclusione sia invece falsa. Quindi, nel caso in cui questa formula sia sempre vera l'inferenza a cui essa corrisponde è logicamente valida. Quindi: un'inferenza logica di tipo enunciativo è valida se e solo se la formula che le corrisponde è una verità logica.

Questa osservazione consente di dare vita a un metodo alternativo a quello presentato fin qui per verificare la validità di un'inferenza logica in cui premesse e conclusione sono formule logiche di tipo enunciativo. Questo metodo prevede:

1. la formalizzazione dell'inferenza mediante la formula logica che le corrisponde;
2. la verifica che detta formula è una verità logica mediante le tavole di verità.

4. I 'modelli' di inferenza logica

Formalizzando un'inferenza logica si può prescindere dal contenuto di premesse e conclusione per evidenziarne la forma logica. È possibile in questo modo individuare alcuni 'modelli' di inferenza, in particolare dei modelli di inferenze logicamente valide, che si ripetono in argomenti diversi al di là delle differenze di contenuto delle affermazioni che le compongono. Ad esempio, le due inferenze dell'argomento discusso in precedenza nell'unità corrispondono allo stesso modello di inferenza nel quale occorrono due premesse di cui una ha la forma di un condizionale, l'altra coincide con il suo antecedente e la conclusione con il conseguente. Modelli analoghi possono essere individuati in relazione a inferenze che coinvolgono operazioni logiche diverse dal condizionale. Ce ne fosse ancora bisogno, dopo aver sottolineato già più volte il fatto, il ricorso alla formalizzazione e al processo di valutazione che si è brevemente introdotto in questa unità consentono di apprezzare come le ragioni della validità di un'inferenza non risiedano in ciò che 'dicono' premesse e conclusione, ma in come queste 'sono fatte'.

Esercizi Unità 6

1. Si consideri l'inferenza:

«Non è vero che lo smog cala.
Non piove e non tira vento, oppure lo smog cala.
Non piove e non tira vento.»

Si ponga:

A = «Piove»
B = «Tira vento»
C = «Lo smog cala»

Quali tra le seguenti proposte formalizza correttamente l'inferenza presentata?

A. $\dfrac{\neg C \quad (A \vee B) \to C}{\neg(A \vee B)}$

B. $\dfrac{\neg C \quad \neg A \wedge \neg B \to C}{\neg(A \wedge B)}$

C. $\dfrac{\neg C \quad \neg(A \wedge B) \vee \neg C}{(\neg A \wedge \neg B)}$

D. $\dfrac{\neg C \quad C \to (A \wedge B)}{\neg(A \wedge B)}$

E. $\dfrac{\neg C \quad (A \wedge B) \to C}{\neg(A \wedge B)}$

2. Si consideri l'inferenza:

«Non hai studiato o non hai capito il testo.
Avere studiato è una condizione necessaria perché tu sia pronto per l'esame.
O hai capito il testo o non sei pronto per l'esame.
Non sei pronto per l'esame.»

Si pone:

A = «Hai studiato»
B = «Hai capito il testo»
C = «Sei pronto per l'esame»

Quali tra le seguenti proposte formalizza correttamente l'inferenza presentata?

A. $\dfrac{\neg A \vee \neg B \quad A \to C \quad C \to B}{\neg C}$

B. $\dfrac{\neg(A \wedge B) \quad A \to \neg C \quad \neg C \to B}{\neg C}$

C. $\dfrac{\neg A \vee \neg B \quad \neg A \to \neg C \quad \neg B \to \neg C}{\neg C}$

D. $\dfrac{\neg A \vee \neg B \quad A \to C \quad \neg B \to \neg C}{\neg C}$

E. $\dfrac{\neg(A \vee B) \quad \neg A \to \neg C \quad C \to B}{\neg C}$

3. Si consideri l'inferenza:

«Che $\sqrt{2}$ sia razionale è condizione sufficiente perché esistano due numeri m e n tali che $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.
D'altra parte se $\sqrt{2}$ è razionale allora per ogni numero m e n non vale $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.
Quindi, $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.»

Si pone:

A = «Per ogni numero m e n vale $\frac{m}{n} \neq \sqrt{2}$»
B = «$\sqrt{2}$ è un numero razionale»

Quali tra le seguenti proposte formalizza correttamente l'inferenza presentata?

A. $\dfrac{B \to A \quad B \to A}{\neg\neg B}$
B. $\dfrac{A \to \neg B \quad \neg B \to \neg A}{\neg B}$
C. $\dfrac{A \to B \quad A \to \neg B}{\neg B}$
D. $\dfrac{A \to \neg B \quad \neg A \to B}{B}$
E. $\dfrac{B \to \neg A \quad B \to A}{\neg B}$

4. Si assuma che valgano:

«Se Linda ha il cellulare acceso, ha ricevuto il mio sms.»
«Se Linda ha sentito la suoneria del cellulare, allora ha letto il mio sms.»

Ricorrendo alla formalizzazione e alle tavole di verità, cerca di stabilire quali delle seguenti affermazioni segue logicamente dalle due premesse:

A. se Linda ha il cellulare acceso o ha sentito la suoneria, allora ha ricevuto il mio sms e lo ha letto;
B. se Linda non ha ricevuto il mio sms, allora non ha il cellulare acceso e non ha sentito la suoneria;
C. se Linda non ha letto il mio sms, allora ha il cellulare acceso ma non ha sentito la suoneria;
D. se Linda ha il cellulare acceso e ha sentito la suoneria, allora ha ricevuto il mio sms e lo ha letto;
E. se Linda non ha ricevuto il mio sms, allora non lo ha letto.

5. Nella versione formale dell'inferenza logica seguente mancano una o più premesse:

$$\frac{\qquad\qquad\qquad A \wedge B}{C}$$

Aiutandosi con le tavole di verità, si stabilisca quali tra le seguenti proposte rende l'inferenza logicamente valida:

A. $(A \wedge B) \to (C \vee \neg C)$;
B. $(\neg C \to A) \wedge (\neg C \to B)$;
C. $(A \wedge C) \to \neg C$;
D. $\neg C \to (A \wedge B)$;
E. $(A \vee B) \to C$.

6. Nella versione formale dell'inferenza logica seguente mancano una o più premesse:

$$\frac{\neg(A \leftrightarrow B)}{B \leftrightarrow C}$$

Aiutandosi con le tavole di verità, si stabilisca quali tra le seguenti proposte rende l'inferenza logicamente valida:

A. $(\neg A \leftrightarrow \neg C)$;
B. $\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A)$;
C. $\neg(A \rightarrow C)$;
D. $\neg C \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$;
E. $\neg(A \leftrightarrow C)$.

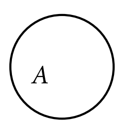
Unità 7

Formalizzare i sillogismi: i diagrammi di Eulero–Venn

Un **sillogismo** (*vedi* Parte C, Unità 3) è un tipo particolare di **argomento** (*vedi* ***Glossario***), costituito da due **premesse** (*vedi* ***Glossario***) e da una **conclusione** (*vedi* ***Glossario***) nelle quali occorrono in modo essenziale le operazioni di **quantificazione individuale** (*vedi* Parte B, Unità 2-3). Si tratta dunque di una forma argomentativa nella quale le affermazioni coinvolte sono enunciati logici di ordine superiore a quello semplicemente enunciativo. Come nel caso delle altre forme di ragionamento, lo scopo di un'indagine sistematica sulla modalità di argomentazione di tipo sillogistico è quello di isolare le forme **valide**, ovvero quelle nelle quali alla verità delle premesse corrisponde necessariamente la verità della conclusione, dalle forme non valide. I **diagrammi di Eulero–Venn**, che prendono il nome dal matematico svizzero Leonhard Euler (noto altresì come Eulero) e dal matematico inglese John Venn a cui si fa risalire la loro ideazione, sono un utile strumento per formalizzare le intuizioni necessarie allo scopo.

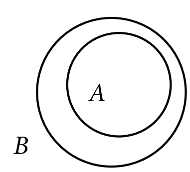
1. Rappresentare le proposizioni categoriche

Un diagramma di Eulero–Venn è la rappresentazione grafica di un insieme di cose o di una collezione di **individui** (*vedi* ***Glossario***) mediante una linea chiusa, ad esempio un cerchio. Quindi, indicata con A una certa collezione di riferimento (ad esempio, la popolazione di sesso femminile della città di Firenze), si intende che essa sia rappresentata dal diagramma seguente:



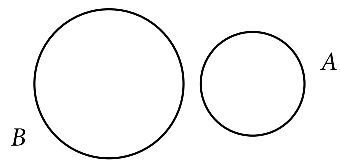
L'idea è dunque che tutti gli elementi della collezione A (nell'esempio, tutti i fiorentini di sesso femminile) siano compresi entro la linea che delimita il cerchio.

Supponiamo adesso di estendere questo sistema di visualizzazione all'insieme B della popolazione femminile d'Italia e di voler rappresentare il rapporto che la precedente collezione A intrattiene con B. Dato che B contiene A, perché la popolazione femminile di Firenze è una parte della popolazione femminile d'Italia, risulta estremamente naturale rappresentare la relazione tra A e B con il diagramma:



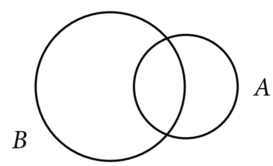
Il diagramma in questione raffigura in un modo immediato e intuitivo l'idea che la popolazione femminile della città di Firenze A sia inclusa nella popolazione femminile d'Italia. La conseguenza della relazione tra la collezione A e la collezione B e della sua rappresentazione è che, preso comunque un elemento a in A, questo appartiene anche alla collezione B, ovvero che vale che «Tutti gli A sono B» come si è imparato a dire nell'unità dedicata all'operazione logica di **quantificazione universale** (*vedi* Parte B, Unità 2). Se ne deduce quindi che il diagramma può essere utilizzato per visualizzare attraverso l'immagine il concetto espresso da un'affermazione di questa forma.

Date le osservazioni precedenti, in modo altrettanto immediato e intuitivo il diagramma:

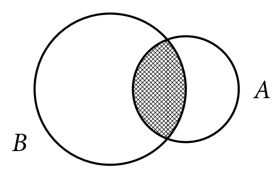


rappresenta la situazione in cui sono vere le affermazioni «Nessun *A* è *B*» (cioè - *vedi* Parte B, Unità 2, par. 1 - «Per ogni individuo, se questo è (o gode di) *A*, allora non è (o non gode di) *B*») e «Nessun *B* è *A*».

Consideriamo adesso la figura:

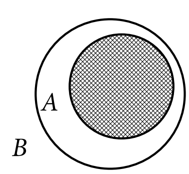


In questo caso, che un *a* in *A* sia anche elemento di *B* non vale per tutti gli *a*, ma solo per quelli appartenenti alla porzione di *A* che interseca *B*:



Per un *a* che appartiene alla porzione evidenziata di *A* vale in effetti che esso appartiene anche a *B*. Di conseguenza, il diagramma non rappresenta la situazione in cui vale che «Tutti gli *A* sono *B*», bensì quella in cui è vero che «Qualche *A* (quelli appartenenti alla porzione evidenziata di *A*) è *B*». Lo stesso diagramma, per ragioni ovvie, rappresenta anche la situazione in cui è vero che «Qualche *B* (quelli appartenenti alla porzione evidenziata di *B*) è *A*».

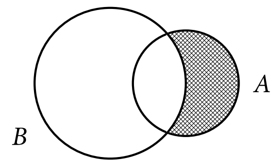
Si sarà forse notato che anche il diagramma precedentemente utilizzato per illustrare la situazione in cui vale che «Tutti gli *A* sono *B*» potrebbe essere una rappresentazione corretta della situazione in cui vale quest'ultima proposizione categorica, ovvero quella in cui «Qualche *B* (quelli appartenenti alla porzione evidenziata di *B* occupata da *A*) è *A*» è vero:



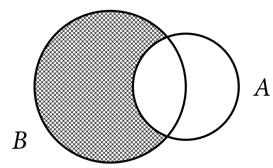
Nella stessa situazione è vero anche che, siccome «Tutti gli *A* sono *B*», allora «C'è almeno un *A* che è *B*» e quindi è vero pure che «Qualche *A* (un qualsiasi *a* che sta in *A*) è *B*». Il ragionamento è ineccepibile, ma l'illustrazione in questione raffigura una caso un po' particolare (quello in cui «Qualche *A* è *B*» è vero perché «Tutti gli *A* sono *B*»). Affinché le rappresentazioni grafiche delle proposizioni categoriche abbiano un grado maggiore di generalità, conveniamo qui di rappresentare la situazione in cui «Qualche *A* è *B*» e

«Qualche B è A» mediante il diagramma che illustra la situzione più generale, nella quale una parte ma non tutti degli elementi di A è anche elemento di B e viceversa.

Torniamo dunque a quella situazione. Se una parte ma non tutti gli A sono B, sarà anche vero che «Qualche A (quella appartenenti alla porzione rimanente dell'intero evidenziata di seguito) non è B»:



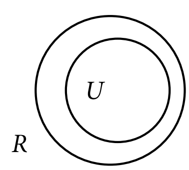
Inoltre, nella stessa situazione, sarà anche vero che «Qualche B (quelli che stanno nella porzione evidenziata qui sotto) non è A»:



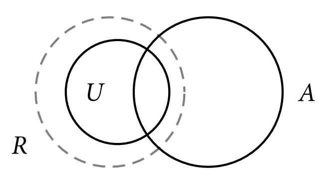
Ci si sarà forse accorti a questo punto che si è trovato un diagramma per ciascuna delle forme di proposizioni categoriche che sono coinvolte nella costruzione dei sillogismi (*vedi* Parte C, Unità 3, par. 3). In effetti, la rappresentazione delle proposizioni universali e particolari a cui si è dato vita in questo modo diventa uno strumento utile per il completamento e per la verifica della validità di questi ultimi. Cerchiamo di vedere il metodo all'opera con un paio di esempi per capire meglio come possa funzionare.

2. Rappresentare i sillogismi

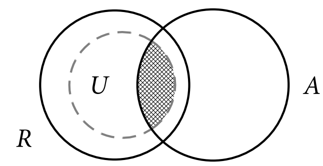
Supponiamo che ci si trovi di fronte al seguente problema: si assuma che «Tutti gli uomini sono razionali» e che «Qualche animale è uomo» siano vere; cosa si può correttamente concludere dalle due ipotesi? Dato che le due assunzioni hanno la forma di proposizioni categoriche, un modo per rispondere al quesito passa dalla loro rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero–Venn. Supponiamo perciò di rappresentare con U, R, A la collezione degli «uomini», dei «razionali» e degli «animali» rispettivamente. La prima premessa, secondo cui «Tutti gli uomini sono razionali» è allora rappresentata dal diagramma:



Nel rappresentare in modo analogo anche la seconda premessa del ragionamento, secondo cui «Qualche animale è uomo», si può sovrapporre questo secondo diagramma al primo così da visualizzare in modo immediato i rapporti tra le tre collezioni coinvolte come ci è richiesto dall'esercizio. In linea con quanto si è convenuto in precedenza, si ottiene il diagramma seguente:



Dato che l'argomento che ci viene chiesto di completare ha la forma di un sillogismo, essendo «uomo» è il **termine medio** (*vedi **Glossario***) che compare in entrambe le premesse (che si suppone ci siano date in un ordine tale per cui la **premessa maggiore** precede quella **minore** - *vedi* Parte C, Unità 3, par. 2), la conclusione che occorre trovare è un'affermazione sui rapporti tra *R* e *A* in cui il primo termine occorre come predicato e il secondo come soggetto. Il diagramma che rappresenta collettivamente le due premesse dell'argomento ci consente di stabilire con certezza l'esistenza di una porzione di *A* che è a comune con *U* in virtù della seconda premessa e che dunque appartiene all'insieme *R* come conseguenza della prima premessa:



Questa osservazione ci permette di concludere allora che «Qualche *A*(nimale) è *R*(azionale)» segue dalle due ipotesi ed è anche la soluzione al problema di partenza.

Si sarà forse notato che, nel diagramma, la porzione di *A* che interseca *R* è più ampia di quella evidenziata. Tuttavia, siamo legittimati a concludere dalle premesse del ragionamento che solo quella parte di *A* che interseca *U* fa parte di *R*. La parte eccedente di *A*, che pure fa parte di *R* nel diagramma dipende dalle caratteristiche 'accidentali' di quest'ultimo, in particolare dal fatto che si è deciso di rappresentare *U* in *R* in modo che si mantenesse una certa distanza dal bordo di quest'ultimo insieme, ma non è giustificata da quanto stabiliscono le premesse e non può dunque essere utilizzata per formulare una conclusione ad esse conseguente.

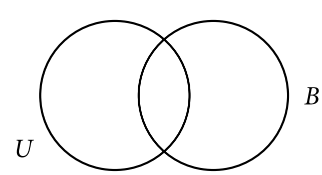
3. Rappresentare i sillogismi: un secondo esempio

Supponiamo invece che ci venga richiesto di verificare la correttezza del ragionamento seguente:

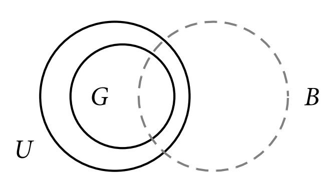
Qualche uomo è biondo.
Tutti i greci sono uomini.
Tutti i greci sono biondi.

Come nel caso precedente, per la risoluzione del problema si può procedere a rappresentare le premesse dell'argomento in un unico diagramma, sulla base del quale dovrebbe essere possibile valutare il fatto se la conclusione sia corretta o meno.

Il diagramma che rappresenta la prima premessa è il seguente:



Sovrapponendo a questo il diagramma che rappresenta la seconda premessa si ottiene:



Come si sarà già notato, l'analisi del diagramma complessivo consente di concludere al più che «Qualche greco è biondo», seppure per ragioni contingenti alla rappresentazione e indipendenti da quanto stabiliscono le premesse, ma certamente non offre alcuna giustificazione alla conclusione ben più forte che ci è chiesto di verificare e che dunque, alla luce del procedimento, appare del tutto destituita di fondamento.

La conclusione sarebbe stata legittimata se solo si fosse deciso di disegnare l'insieme dei «greci» tutto interno alla porzione comune tra quello degli «uomini» e quello dei «biondi». Tuttavia, si sarebbe giunti a un simile risultato attraverso una scelta arbitraria non giustificata dalle informazioni contenute nelle due premesse e pertanto inutilizzabile ai fini della valutazione della conclusione del ragionamento offerto. Questo suggerisce che, nel rappresentare le premesse di un sillogismo, occorre optare per il diagramma che raffigura correttamente quanto esprimono le premesse nel contesto più generale possibile, evitando così di aggiungere "nel disegno" qualcosa che non sia già nel discorso che esso rappresenta.

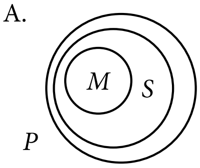
Esercizi Unità 7

1. Si consideri il sillogismo:

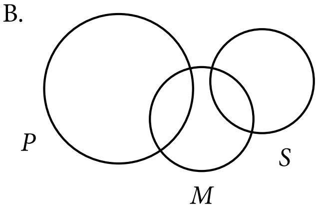
$$\begin{array}{c}\texttt{M a P}\\ \underline{\texttt{S a M}}\\ \texttt{S a P}\end{array}$$

Quale tra i diagrammi proposti rappresenta correttamente i rapporti tra le collezioni `M`, `S` e `P`?

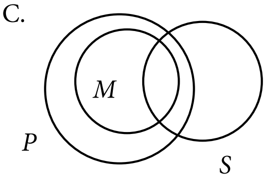
A.



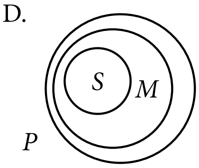
B.



C.



D.

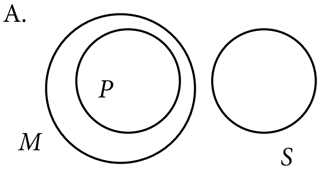


2. Si consideri il sillogismo:

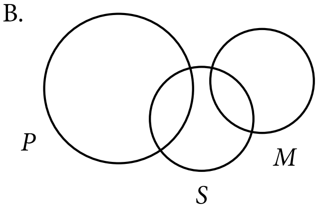
$$\begin{array}{c}\texttt{M e P}\\ \underline{\texttt{M i S}}\\ \texttt{S o P}\end{array}$$

Quale tra i diagrammi proposti rappresenta correttamente i rapporti tra le collezioni `M`, `S` e `P`?

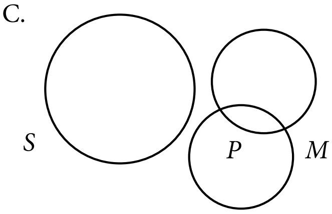
A.



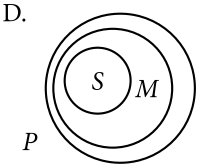
B.



C.



D.

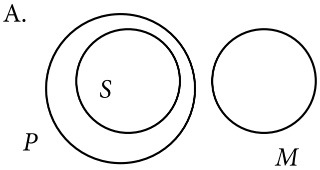


3. Si consideri il sillogismo:

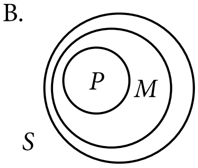
$$\begin{array}{c} \texttt{P e M} \\ \underline{\texttt{S a M}} \\ \texttt{S e P} \end{array}$$

Quale tra i diagrammi proposti rappresenta correttamente i rapporti tra le collezioni `M`, `S` e `P`?

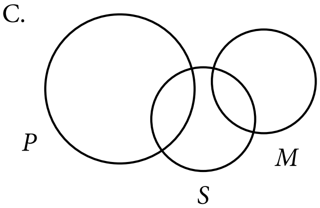
A.



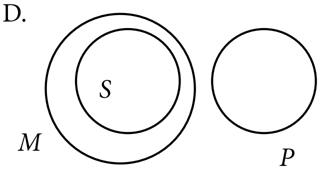
B.



C.



D.

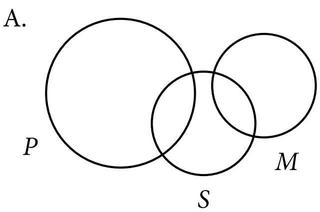


4. Si consideri il sillogismo:

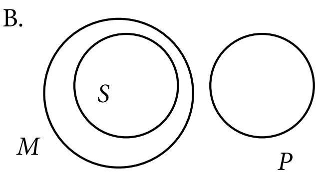
$$\begin{array}{c} \texttt{P e M} \\ \underline{\texttt{M i S}} \\ \texttt{S o P} \end{array}$$

Quale tra i diagrammi proposti rappresenta correttamente i rapporti tra le collezioni `M`, `S` e `P`?

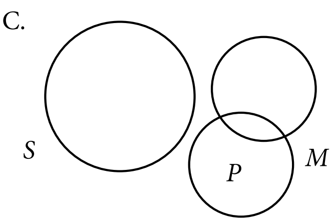
A.



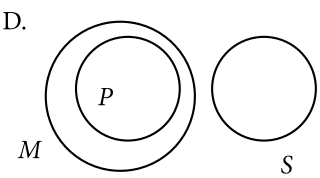
B.



C.



D.

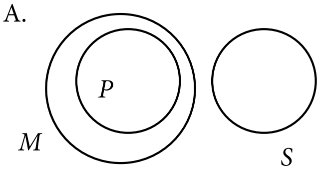


5. Si consideri il sillogismo:

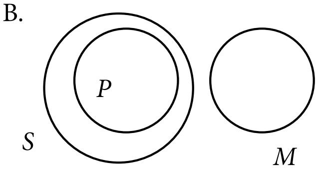
$$\begin{array}{c}\texttt{P a M}\\ \underline{\texttt{S o M}}\\ \texttt{S o P}\end{array}$$

Quale tra i diagrammi proposti rappresenta correttamente i rapporti tra le collezioni `M`, `S` e `P`?

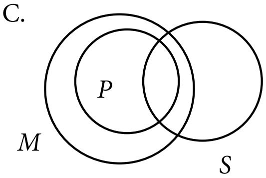
A.



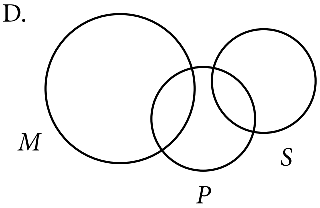
B.



C.



D.

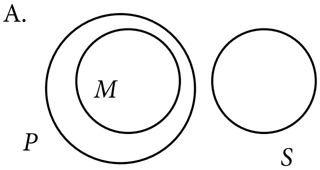


6. Si consideri il sillogismo:

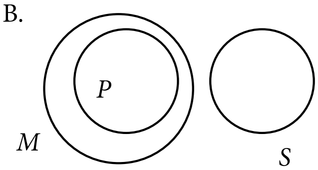
$$\begin{array}{c}\texttt{P a M}\\ \underline{\texttt{M e S}}\\ \texttt{S e P}\end{array}$$

Quale tra i diagrammi proposti rappresenta correttamente i rapporti tra le collezioni `M`, `S` e `P`?

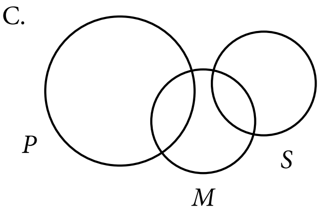
A.



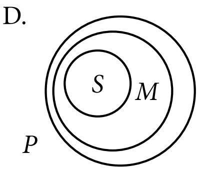
B.



C.



D.



Unità 8

Le fallacie

Una **fallacia** rappresenta l'altra faccia della medaglia di un **argomento corretto** (*vedi* Parte C, Unità 1, par. 1-2). Una fallacia infatti, per quanto conservi la struttura di un argomento, contiene uno o più errori di ragionamento che fanno sì che la conclusione non sia una conseguenza ineccepibile delle sue premesse. Il termine «fallacia» può avere un'accezione ampia e può riferirsi alla violazione di un vasto genere di 'norme' che costituiscono la base per l'argomentare corretto. In questa unità intendiamo concentrare l'attenzione su quelle forme argomentative che nascono dalla violazione dei principi logici usuali e dunque tratteremo nel dettaglio due tipi di fallacie in particolare: quelle **logiche** e quelle **sillogistiche**.

1. Fallacie logiche

Nella categoria delle **fallacie logiche** rientrano quegli argomenti nei quali si fa uso di inferenze contrarie ai principi logici di base. Si consideri il caso del ragionamento seguente:

> Se aumenta il costo del denaro, aumenta anche l'importo della rata del mutuo.
> L'importo della rata del mutuo aumenta.
> Quindi, è aumentato il costo del denaro.

Sulla base di quanto si è stabilito trattando il tema delle **inferenze logiche** (*vedi* Parte C, Unità 2, par. 2), un argomento che ha la struttura di quello presentato è **logicamente valido** se, assunte come vere le premesse, se ne deduce che è vera anche la conclusione (equivalentemente, se non è possibile che siano vere le premesse dell'argomento e che sia falsa invece la sua conclusione). Ora, la prima delle due premesse ha la forma di un enunciato **condizionale**, sulla base del quale si stabilisce un nesso tra il realizzarsi dell'**antecedente** (*vedi* ***Glossario***), l'aumento del costo del denaro, e quello del **conseguente** (*vedi* ***Glossario***), l'aumento dell'importo della rata del mutuo. L'idea intuitiva è che in un enunciato di questo tipo il verificarsi della prima condizione comporti il verificarsi della seconda. Questa idea si ritrova nelle **condizioni di verità** (*vedi* ***Glossario***) di un enunciato di questa forma logica (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 2), che è vero nel caso in cui il suo antecedente sia falso o il conseguente vero (e dunque è vero in particolare se antecedente e conseguente sono entrambi veri).

Se l'inferenza presentata fosse valida, supponendo che la sua premessa condizionale sia vera e che sia vera anche la seconda premessa, si dovrebbe dedurre, per logica, la verità della conclusione. Tuttavia, notando che la seconda premessa è il conseguente della prima, dall'ipotesi che sia vera si deduce che l'enunciato condizionale di cui essa è parte continua a essere vero anche se il suo antecedente fosse falso. Si noti che quest'ultimo, tuttavia, è la conclusione dell'argomento presentato. L'osservazione mostra così che il ragionamento presentato non è logicamente valido dal momento che è possibile che la sua conclusione sia falsa anche se le premesse sono vere.

Ricorrendo alla **formalizzazione** (*vedi* ***Glossario***) di premesse e conclusione di un argomento, si è potuto mostrare in quale senso vi sia una corrispondenza tra le inferenze logicamente valide e le **verità logiche** (*vedi* ***Glossario***). In particolare, vale che:

- una regola di inferenza è logicamente valida se e solo se la formula di tipo condizionale che si ottiene ponendo come antecedente la congiunzione delle premesse e come conseguente la conclusione è una verità logica (*vedi* Parte C, Unità 6, par. 3).

Al livello enunciativo, rispetto cioè alle regole di inferenza che riguardano i **connettivi logici** (*vedi* ***Glossario***), questo fatto consente di utilizzare le **tavole di verità** (*vedi* Parte A, Unità 7) per sottoporre a verifica le inferenze logiche, così da individuare quelle valide. Tenendo presente la corrispondenza di cui si è detto, e tenendo presente il fatto che una fallacia logica corrisponde a una regola di inferenza che non è valida, ossia tale che dalla verità delle premesse non segue l'impossibilità per la conclusione di essere falsa, se ne deduce che:

- una regola di inferenza è una fallacia logica se e solo se l'enunciato condizionale che si ottiene ponendo ad antecedente la congiunzione delle premesse e a conseguente la conclusione della regola non è una verità logica (dunque, se è una **contraddizione logica** - *vedi* ***Glossario***-, oppure se è un enunciato **logicamente neutro** - *vedi* ***Glossario***).

Dal momento che l'enunciato che corrisponde a una regola di inferenza in questo senso è di tipo condizionale, dunque è falso nel caso in cui l'antecedente sia vero e il conseguente falso (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 2), ciò significa che c'è almeno un'attribuzione di valori di verità alle sue componenti tale che la congiunzione delle premesse è vera ma la conclusione della regola è falsa.

2. Fallacie sillogistiche

Si consideri il ragionamento seguente:

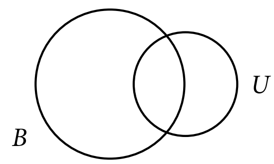
Qualche uomo è biondo.
Tutti gli italiani sono uomini.
Tutti gli italiani sono biondi.

Che ci sia qualcosa che non va sembra evidente anche solo leggendo l'ultima delle tre affermazioni considerate. Tuttavia, il fatto che la conclusione di un ragionamento suoni 'strana' non ha nulla a che fare con la sua validità. Questa dipende invece dal fatto che la verità non si trasmette a essa dalle premesse, dunque, se è possibile che l'affermazione in questione risulti falsa supponendo che le altre affermazioni del ragionamento siano vere. Ora, supponendo che la prima premessa sia vera, se ne deduce che esistono uomini biondi ma non è lecito dedurne che tutti gli uomini sono biondi e dunque sarà vero anche, fino a prova contraria, che qualche uomo non è biondo. Se tutti gli italiani sono uomini, non è possibile che esista un italiano che non è uomo. Da ciò non segue affatto, 'per logica' , che tutti gli italiani sono biondi: dato che qualche uomo potrebbe non essere biondo, supporre che vi siano degli italiani che non sono biondi non rende false le premesse ma rende falsa, invece, la conclusione. Se ne ricava che l'impressione che il ragionamento presentato potesse essere problematico, si conferma a un'analisi più attenta e consente di scartare l'inferenza presentata in quanto non valida.

Si sarà notato, per aver studiato l'unità a essi relativa (*vedi* Parte C, Unità 3), che l'argomento presentato rientra nella categoria dei **sillogismi** (*vedi* ***Glossario***). Si sarà anche notato forse che l'esempio discusso possiede tutte le caratteristiche formali che un sillogismo deve avere (occorrenza del **termine medio**, **premessa maggiore**, **premessa minore**, ecc. - *vedi* Parte C, Unità 3, par. 2). Dunque, non è tanto dalla mancanza di questa o quella di dette caratteristiche formali che dipende la non validità della costruzione presentata, ma proprio dal fatto che quanto si pone con le premesse non è sufficiente a giustificare la conclusione.

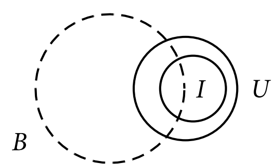
Come il caso in esame, sono esempi di **fallacie sillogistiche** quegli argomenti che, pur avendo l'apparenza di istanze di **modi sillogistici** e replicando correttamente le caratteristiche formali che questi devono avere, sono istanze di sillogismi non validi (dunque, formalmente corretti ma tali che dalla verità delle premesse del sillogismo non segue la verità della conclusione).

Come la formalizzazione dei connettivi logici con le fallacie logiche, gli strumenti per la formalizzazione dei sillogismi che si sono illustrati in precedenza (*vedi* Parte C, Unità 7), possono aiutare nell'analisi di un ragionamento come quello preso in esame. Si è mostrato in effetti che un sillogismo può essere esaminato utilizzando i **diagrammi di Eulero-Venn** che consentono di rappresentare le proposizioni categoriche in esso contenute. Tale 'formulazione grafica' di un sillogismo può aiutare a individuare quella condizione che costituisce un controesempio all'assunto che esso sia valido e può quindi aiutare a scoprire in esso un esempio di fallacia sillogistica. Secondo quanto si è stabilito (*vedi* Parte C, Unità 7, par. 1), il diagramma seguente coglie il senso dell'affermazione «Qualche uomo è biondo»:



interpretando il cerchio di sinistra come la collezione dei «biondi», quello di destra come quella degli «uomini» e la loro intersezione come la collezione degli «uomini biondi» di cui parla l'affermazione (e che non coincide con l'intero, volendo rappresentare la situazione più generale nella quale l'affermazione è vera ed evitare di 'mettere nel disegno' qualcosa che nella frase non c'è- *vedi* Parte C, Unità 7, par. 1).

Procedendo poi alla formalizzazione della seconda premessa e sovrapponendo il grafico corrispondente a quello precedente come si è suggerito di fare (*vedi* Parte C, Unità 7, par. 2), si ottiene:



dove la collezione U continua a rappresentare gli «uomini», la collezione I gli «italiani» e l'inclusione di quest'ultima nella prima il fatto che «Tutti gli italiani sono uomini», come afferma la seconda premessa del sillogismo in esame. Per quanto la collezione B dei biondi sia sullo sfondo, tratteggiata com'è, il diagramma è sufficiente a rappresentare nell'immagine il problema che si è illustrato a parole in precedenza: se, come recita la conclusione del ragionamento, tutti gli «italiani» fossero «biondi» come conseguenza delle due premesse considerate, allora il rapporto tra B e I nel disegno dovrebbe essere analogo a quello che sussiste tra I e U. Così non è invece, ed avendo rappresentato fin qui quanto dicono le premesse, il disegno offre un conforto visivo a quanto si era stati in grado di stabilire col raziocinio, ovvero che la verità di quelle premesse non è sufficiente a garantire la verità della conclusione.

Esercizi Unità 8

1. Si consideri l'argomento seguente:

> Se prendi una bibita e un panino, hai un dessert in omaggio.
> Quindi, se prendi un panino ho un dessert in omaggio.

Il ragionamento contiene un errore logico ed è un esempio di fallacia. Solo uno dei suggerimenti seguenti consente di correggerlo e trasformarlo in un'inferenza valida. Quale?

A. Sostituisci la prima premessa con «Se non prendi una bibita e prendi un panino hai un dessert in omaggio».

B. Sostituisci la prima premessa con «Se prendi una bibita o un panino hai un dessert in omaggio».

C. Sostituisci la prima premessa con «Se prendi una bibita o non prendi un panino hai un dessert in omaggio».

D. Sostituisci la conclusione con «Se prendi un panino e non prendi una bibita hai un dessert in omaggio».

E. Sostituisci la conclusione con «Non è vero che se prendi un panino hai un dessert in omaggio».

2. Si consideri l’argomento seguente:

Pietro non ha controllato la posta elettronica o ha deciso di non venire.
Pietro ha controllato la posta elettronica.
Quindi, Pietro ha deciso di venire.

Il ragionamento contiene un errore logico ed è un esempio di fallacia. Solo uno dei suggerimenti seguenti consente di correggerlo e trasformarlo in un’inferenza valida. Quale?

A. Sostituisci la prima premessa con «Pietro ha controllato la posta elettronica o ha deciso di non venire».

B. Sostituisci la prima premessa con «Se Pietro ha controllato la posta elettronica allora ha deciso di non venire».

C. Sostituisci la conclusione con «Pietro ha deciso di non venire».

D. Sostituisci la prima premessa con «Pietro ha controllato la posta elettronica se e solo se ha deciso di non venire».

E. Sostituisci la seconda premessa con «Pietro non ha controllato la posta elettronica».

3. Si consideri l’argomento seguente:

Dietro ogni grande uomo, c’è una grande donna.
Antonello non è un grand’uomo.
Quindi Lucia, moglie di Antonello, non è una grande donna.

Il ragionamento contiene un errore logico ed è un esempio di fallacia. Solo uno dei suggerimenti seguenti consente di correggerlo e trasformarlo in un’inferenza valida. Quale?

A. Sostituisci la prima premessa con «Qualche grande uomo non ha una grande donna dietro di sé».

B. Sostituisci la seconda premessa con «Qualche grande donna non sta dietro a qualche grande uomo».

C. Sostituisci la conclusione con «Quindi, c’è un grande uomo che non ha una grande donna dietro di sé».

D. Sostituisci la seconda premessa con «Lucia, moglie di Antonello, è una grande donna» e la conclusione con «Quindi Antonello è un grand’uomo».

E. Sostituisci la seconda premessa con «Lucia, moglie di Antonello, non è una grande donna» e la conclusione con «Quindi Antonello non è un grand’uomo».

4. Si consideri l’argomento seguente:

L’ozio è inutile.
La filosofia è inutile.
La filosofia è ozio.

Il ragionamento contiene un errore logico ed è un esempio di fallacia. Solo uno dei suggerimenti seguenti consente di correggerlo e trasformarlo in un'inferenza valida. Quale?

A. Sostituisci la prima premessa con «Qualche cosa inutile è ozio».
B. Sostituisci la seconda premessa con «Qualche cosa inutile è filosofia».
C. Sostituisci la conclusione con «L'ozio è filosofia».
D. Sostituisci la prima premessa con «Tutto ciò che è inutile è ozio».
E. Sostituisci la prima premessa con «Qualche ozio è inutile».

5. Si consideri l'argomento seguente:

Tutti i bambini amano i dolci.
Qualche pasticciere non è amante dei dolci.
Nessun pasticciere è un bambino.

Il ragionamento contiene un errore logico ed è un esempio di fallacia. Solo uno dei suggerimenti seguenti consente di correggerlo e trasformarlo in un'inferenza valida. Quale?

A. Sostituisci la seconda premessa con «Qualche amante di dolci è un pasticciere».
B. Sostituisci la conclusione con «Nessun bambino è un pasticciere».
C. Sostituisci la seconda premessa con «Tutti gli amanti di dolci sono pasticcieri».
D. Sostituisci la prima premessa con «Qualche bambino non ama i dolci».
E. Sostituisci la conclusione con «Qualche pasticciere non è un bambino».

6. Si consideri l'argomento seguente:

Nessun uomo è irrazionale.
Qualche uomo è intraprendente.
Ogni intraprendente è irrazionale.

Il ragionamento contiene un errore logico ed è un esempio di fallacia. Solo uno dei suggerimenti seguenti consente di correggerlo e trasformarlo in un'inferenza valida. Quale?

A. Sostituisci la conclusione con «Ogni irrazionale è intraprendente».
B. Sostituisci la conclusione con «Nessun intraprendente è irrazionale».
C. Sostituisci la seconda premessa con «Ogni uomo è intraprendente».
D. Sostituisci la conclusione con «Qualche intraprendente non è irrazionale».
E. Sostituisci la prima premessa con «Qualche uomo è irrazionale».

Parte D – Le estensioni della logica classica

R. Bruni, Dialogare: *compendio di logica*, ISBN (online) 978-88-6453-475-6, CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Unità 1

Gli operatori modali

«Gianni sa che l'esame sarà difficile da superare», «Chi entra nel centro storico deve esibire l'autorizzazione», «Non è permesso indossare pantaloni corti durante la visita al tempio». Le frasi citate sono solo alcuni esempi dove intervengono espressioni del linguaggio che rientrano nel novero di quelli che i logici chiamano gli **operatori modali**. Si tratta di locuzioni il cui senso non è interamente colto dall'analisi logica basata sui **connettivi logici** (*vedi **Glossario***) e sui **quantificatori individuali** (*vedi **Glossario***), ma che richiede invece lo sviluppo di una disamina a sè stante degli aspetti relativi al ruolo che le espressioni del genere ricoprono tanto rispetto alla costruzione della frase quanto rispetto al senso che contribuiscono ad assegnare alle affermazioni nelle quali occorrono.

1. La natura degli operatori modali

Si consideri la prima delle affermazioni menzionate in apertura:

Gianni sa che l'esame sarà difficile da superare

La frase si riferisce a quanto Gianni conosce relativamente all'esame che deve affrontare. Se dovessimo analizzarla come abbiamo imparato a fare con gli enunciati del linguaggio ordinario, non ravvisando in essa l'occorrenza di alcune delle operazioni logiche che si è avuto modo di introdurre e studiare fin qui, dovremmo concludere che l'affermazione non possiede alcuna complessità di ordine logico ed è pertanto un esempio di **enunciato atomico** (*vedi **Glossario***). Per quanto ineccepibile, tale conclusione appare del tutto insoddisfacente, come risulta più evidente dal fatto che essa non ci consente di apprezzare la differenza che pure si ravvisa tra le due 'varianti negative' che è possibile costruire a partire da essa. In un primo senso, si può pensare di negare la frase di partenza dicendo che:

Gianni non sa che l'esame sarà difficile da superare

In un secondo senso, invece, potremmo voler negare l'affermazione iniziale nel modo seguente:

Gianni sa che l'esame non sarà difficile da superare

Nel primo caso, si nega il fatto che, tra le cose che Gianni sa riguardo all'esame che deve svolgere, ci sia il fatto che la prova sarà difficile da superare. Con la seconda affermazione, invece, si rende noto che Gianni sa qualcosa riguardo all'esame dopotutto, ovvero che la prova non sarà complessa da superare. L'analisi logica delle affermazioni del linguaggio ordinario così come la si è condotta fino a questo momento, non offre strumenti utili a dare conto della situazione che si è venuta a determinare prendendo in esame espressioni come quella relativa a quel che Gianni sa o meno, che occorrono molto frequentemente nelle conversazioni. Quanto si evince da ciò che si è detto fin qui è che un'espressione come «sapere che» può essere assimilata a un connettivo nel senso che, data una qualsiasi affermazione «A», essa consente di costruire una nuova affermazione della forma «L'individuo x sa che A». Tuttavia, non c'è modo di rendere conto di questo fatto mediante gli strumenti che si sono introdotti fin qui. In particolare, essi non ci consentono di esprimere che x sa qualcosa in modo distinto da ciò che x sa, così da distinguere anche il fatto che x non sa dal fatto che x sa che qualcosa non vale. Questo fa pensare che una situazione come quella illustrata richieda lo sviluppo di un 'apparato logico' appositamente dedicato.

2. La varietà delle modalità

Una prima domanda piuttosto naturale riguardo agli **operatori** come il «sapere che» dell'esempio precedente è: quanti sono? Ovvero: quante locuzioni riusciamo a individuare che svolgono un ruolo analogo a quella indicata? La risposta è che le espressioni come quella non sono poche, al punto che potremmo persino abbozzare una tassonomia di ciò che, seguendo il lessico che si affermato nel settore, converremo di indicare come gli **operatori modali** o le **modalità** del linguaggio.

1. **Modalità aletiche**: appartengono a questo gruppo di operatori le modalità «è necessario che», «è possibile che». Esse consentono di esprimere l'ineluttabilità di una certa condizione, come nella frase «È necessario che piova o che non piova», o la semplice contingenza di un fatto, e dunque la mera 'possibilità' che esso accada, come nella frase «È possibile che si scateni un temporale». Si noti che l'accezione del «necessario» e del «possibile» chiamate in causa qui si riferiscono all'aspetto 'oggettivo', relativo cioè al verificarsi o meno di certi eventi, e non va confusa con l'accezione di queste espressioni legata a un elemento più soggettivo, ad esempio a quanto un certo individuo può o non può fare, deve o non deve fare. Quest'ultimo aspetto della questione rientra invece nell'analisi operata grazie alle modalità deontiche menzionate qui di seguito.

2. **Modalità epistemiche**: prendono questo nome espressioni come «sapere che» e «credere che», che chiamano in causa le sfera delle conoscenze e delle credenze di un soggetto raziocinante. Appartiene a questo ambito l'esempio relativo a Gianni e a ciò che egli sa dell'esame che deve affrontare discusso in precedenza, così come gli appartiene la variante «Gianni crede che l'esame sarà difficile da superare», che lo indebolisce e fa riferimento a quanto Gianni crede di sapere (e su cui Gianni potrebbe sbagliarsi), piuttosto che a quanto Gianni sa (e su cui si supppone non si sbagli).

3. **Modalità deontiche**: le espressioni che rientrano in questa accezione fanno riferimento a quanto «è fatto obbligo» o «è concesso» fare, ad esempio secondo uno statuto, un codice legislativo o anche solo in virtù di una convenzione o di una consuetudine in uso a una certa comunità. Sono esempi di questo genere l'affermazione «In Inghilterra si deve guidare tenendo la corsia di sinistra» (dove il «si deve» della frase sottintende «è obbligatorio sulla base del codice della strada»), oppure l'affermazione «Dentro il museo si possono fare foto senza il flash» (dove con il «poter fare» si intende «essere concesso sulla base del regolamento»).

4. **Modalità temporali**: come suggerisce il nome, appartengono al novero degli operatori modali di questo tipo le locuzioni che, come «accadrà», «è accaduto», «accadrà sempre» o «è accaduto sempre», rendono il verificarsi o meno di un evento relativo al tempo. Rientrano in questa casistica affermazioni come «Gli uomini hanno sempre dato vita a comunità regolate da norme sociali», oppure come «Con l'approvazione della nuova legge, chi sarà incriminato per falso in bilancio andrà in carcere» (che sottintende come «da oggi in poi» si verrà arrestati per quell'accusa).

Si sarà forse notato come per ciascuno dei gruppi menzionati si sono individuati (almeno) due operatori modali, espressione di concetti diversi ma strettamente legati dal fatto di rappresentare polarità opposte di un binomio (necessario/possibile, conoscere/credere, dovere/potere, passato/futuro). In effetti, una parte dell'interesse per le modalità e una parte degli obiettivi che ci si prefigge di conseguire con lo sviluppo logico delle considerazioni a cui qui si è solamente accennato, nasce proprio dall'esistenza di questi binomi e dalla possibilità di chiarire i rapporti tra i concetti che essi sottendono per mezzo degli strumenti formali della logica.

3. Cenni sulla formalizzazione

In che senso la considerazione degli operatori modali richiede un'estensione della logica? Una parte della risposta a questa domanda rimanda a quanto si è già detto: connettivi e quantificatori non sono in grado di 'rendere il senso' delle affermazioni considerate negli esempi ed è necessario pertanto aggiungere a essi nuovi strumenti di analisi, espressamente dedicati alle circostanze nelle quali intervengono gli operatori modali. Ciò che occorre chiarire, allora, riguarda come si può estendere la logica per raggiungere lo scopo. L'intuizione di fondo in questo senso è già stata menzionata: gli operatori modali possono essere visti come connettivi unari che, data una proposizione del linguaggio, si applicano a essa conferendogli il 'modo' che li caratterizza (aletico, epistemico, deontico, temporale). In un primo senso, l'estensione in questione riguarda quindi il linguaggio della logica, perché occorre dotarsi di simboli in quantità adeguata per rappresentare gli operatori modali di cui si intende occuparsi. Ad esempio, le due modalità del gruppo aletico si è soliti rappresentarle con $\Box A$ per «È necessario che A» e con $\Diamond A$ per «È possibile che A».

L'aggiunta dei nuovi simboli al linguaggio dovrà tenere conto delle diverse situazioni nelle quali possono essere coinvolti gli operatori modali. Ad esempio, lo studio delle modalità epistemiche potrebbe richiedere di renderle relativi ai membri di un dato gruppo di cui si vogliono analizzare più nel dettaglio le conoscenze, le credenze e le loro interazioni reciproche. Così, aggiungere ad esempio simboli $\mathsf{K}A$ per «conoscere A» e $\mathsf{C}A$ per «credere A» potrebbe non essere sufficiente se si vuole dare conto di situazioni nelle quali sia importante distinguere ciò che un individuo a sa rispetto a ciò che sa invece un altro individuo b. Si dovrà perciò fare in modo che vi sia un operatore di conoscenza e di credenza per ciascun individuo, scrivendo ad esempio $\mathsf{K}_a A$ e $\mathsf{K}_b A$ per «a sa che A» e «b sa che A» rispettivamente.

L'estensione del linguaggio in questo senso consente di formulare e quindi di studiare i rapporti tra le modalità, così come le loro interazioni con le altre operazioni logiche. Ad esempio, tenendo presente quanto si è detto e supponendo che g stia per «Gianni» e A per «l'esame è difficile superare», è possibile esprimere quelle che abbiamo chiamato le due 'varianti negative' della frase «Gianni sa che l'esame sarà difficile da superare», con:

$$\neg \mathsf{K}_g A$$

che esprime il fatto che «Gianni non sa che l'esame sarà difficile da superare» (cioè che «Non è vero che Gianni sa che l'esame sarà difficile da superare»), e con:

$$\mathsf{K}_g \neg A$$

che corrisponde invece all'affermazione secondo cui «Gianni sa che l'esame non sarà difficile da superare».

All'estensione 'linguistica' della logica ne corrisponde un'altra, legata allo studio rigoroso del significato dei simboli per gli operatori modali che vengono ad aggiungersi a quelli esistenti. Parlando di connettivi e quantificatori individuali, si è avuto modo di accennare più o meno approfonditamente al fatto che di ciascuna di queste operazioni la logica studia anche il 'senso', ovvero il modo con cui essi influiscono sulle **condizioni di verità** (*vedi* ***Glossario***) delle proposizioni del linguaggio nelle quali dette operazioni occorrono. Nel caso dei connettivi, questo studio è condensato nelle **tavole di verità** (*vedi* Parte A, Unità 7). Nel caso dei quantificatori, il 'senso' del loro impiego riguarda invece come si declina la validità di un'affermazione rispetto a una realtà composita di cui faccia parte un dominio di individui e quindi come essa possa valere «universalmente», di ciascuno di essi, o «esistenzialmente», per alcuni individui e non per altri (*vedi* Parte B, Unità 2-3).

Anche gli operatori modali, che 'si applicano' alle proposizioni né più né meno che connettivi e quantificatori, ne cambiano il senso e dunque anche di questo cambiamento di senso si richiede alla logica di dare conto. L'influenza degli operatori modali in questa direzione non è banale, come risulta dal fatto che richiede un cambio di paradigma analogo a quello che i quantificatori richiedono alla logica dei soli connettivi, rendendo necessario l'abbandono delle tavole di verità che non sono in grado di dare conto di una situazione nella quale la verità di una proposizione rispetto a un dominio di individui. Per citare solo il caso forse più celebre, lo studio delle modalità aletiche richiede lo sviluppo di una **semantica** (la teoria del 'senso' di cui sopra), basata sull'idea di una pluralità di **mondi**, rispetto ai quali una certa proposizione risulta che vale «necessariamente» se vale in ciascuno di essi, mentre risulta solo «possibile» se vale in alcuni mondi e non in altri.

Esercizi Unità 1

1. Si consideri l'affermazione:

È necessariamente falso che esista un quadrato rotondo

Se ne deduce che:

A. esiste un quadrato che non è rotondo;
B. non è possibile che esista un quadrato non rotondo;
C. non è possibile che esista un quadrato rotondo;
D. non è vero che esiste un quadrato che non è rotondo;
E. non è possibile che non esista un quadrato rotondo.

2. Si consideri l'affermazione:

Riccardo non sa che Dario non è preparato per l'interrogazione di inglese

Se ne deduce che:

A. non è vero che Riccardo sa che Dario non è preparato per l'interrogazione di inglese;
B. Riccardo sa che non è vero che Dario è preparato per l'interrogazione di inglese;
C. Riccardo crede che Dario non sia preparato per l'interrogazione di inglese;
D. non è vero che Riccardo sa che Dario è preparato per l'interrogazione di inglese;
E. Riccardo non crede che Dario sia preparato per l'interrogazione di inglese.

3. Si consideri l'affermazione:

Ciò che non è permesso è proibito, ciò che è proibito non è permesso

Se ne deduce che:

A. ciò che non è proibito non è permesso e ciò che è permesso è proibito;
B. non è vero che ciò che è proibito non è permesso;
C. c'è qualcosa che è permessa se e solo se è proibita;
D. non è vero che ciò che è permesso non è proibito;
E. ciò che è permesso non è proibito e ciò che non è proibito è permesso.

4. Si consideri l'affermazione:

È falso che accadrà in futuro ciò che non è mai accaduto in passato

Se ne deduce che:

A. nel passato non è accaduta mai una cosa che accadrà una volta in futuro;
B. in futuro non potrà mai accadere qualcosa che non sia accaduta in passato;
C. nel passato è accaduta sempre qualcosa che non accadrà mai in futuro;
D. in futuro accadrà sempre qualcosa che è sempre accaduta in passato;
E. in futuro accadrà una volta quello che è accaduto sempre in passato.

5. Si consideri l'affermazione:

Giovanni sa che Elena crede che lui sa

Assumendo che le conoscenze non siano fallaci, e quindi che se qualcuno sa qualcosa allora questa è vera, se ne deduce che:

A. Elena sa che Giovanni sa di lei;
B. Elena crede che Giovanni sappia che lei sa;
C. Elena crede che Giovanni sappia che lei crede;
D. Elena sa che Giovanni sa che lei crede;
E. Elena crede che Giovanni crede che lei sappia.

6. Si consideri l'affermazione:

È falso che Elena sappia che Giovanni non le creda

Se ne deduce che:

A. Giovanni non crede a Elena;
B. Giovanni crede che Elena non sappia;
C. Elena non sa che Giovanni le crede;
D. Elena non sa che Giovanni non le crede;
E. Elena crede che Giovanni non sappia.

Soluzioni degli esercizi

A – Logica Proposizionale
Unità 1 – Generalità

1D. Nel risolvere l'esercizio occorre tenere conto del fatto che, dati due enunciati qualsivoglia *A* e *B*, «Non non *A*» (o «È falso non *A*») equivale logicamente ad *A* (è la **legge di doppia negazione** - *vedi* Parte A, Unità 2) e che «È falso *A* o *B*» equivale logicamente a «È falso *A* ed è falso *B*» (*vedi* Parte A, Unità 3).
2B. Dati due enunciati qualsivoglia *A* e *B*, «*A* è condizione sufficiente di *B*» equivale a «Se *A*, allora *B*», mentre «*A* è condizione necessaria di *B*» equivale a «Se *B*, allora *A*» (*vedi* Parte A, Unità 4). Inoltre, una frase condizionale della forma «Se *A*, allora *B*» equivale logicamente a «Non *A* o *B*», dunque alla disgiunzione tra la negazione dell'**antecedente** (*vedi **Glossario***) e l'affermazione del **conseguente**(*vedi **Glossario***) (*vedi* Parte A, Unità 4). Infine, si tenga conto che «ma» e «nonostante che», che pure hanno la funzione di esprimere relazioni avversative e causali nell'italiano corrente, producono in realtà enunciati che sono logicamente equivalenti a una congiunzione (*vedi* Parte A, Unità 3).
3B. Per risolvere l'esercizio, oltre a quanto ricordato nelle soluzioni agli esercizi precedenti, occorre tenere conto del fatto che, secondo quanto afferma la frase contrassegnata dalla lettera (e), di Lorenzo e Cosimo si dice che almeno uno dei due dorme ma non entrambi. Quindi, si dice che «Se Lorenzo si sveglia, allora Cosimo dorme e se Cosimo dorme, allora Lorenzo si sveglia» che equivale logicamente alla soluzione proposta (*vedi* Parte A, Unità 5).
4C. La frase (b) dice che «Ogni studente può mangiare a mensa e nessuna persona che non sia uno studente può mangiare a mensa». Dunque: «Solo gli studenti della scuola possono mangiare a mensa». La frase (c), invece, si può riscrivere come l'affermazione secondo cui «Claudio ha uno, due o cinque euro». Siccome si tratta di una disgiunzione e almeno uno dei tre disgiunti è vero, Claudio non è senza soldi. Siccome è una disgiunzione e al massimo tutti e tre i due disgiunti sono veri, Claudio ha al massimo 5+2+1=8 euro e può avere 1, 2, 5, 1+2, 1+5 e 2+5 euro. Della situazione descritta dalla frase prescelta, si può dire con certezza che essa equivale a quella descritta da quella, più elegante, secondo cui «Claudio ha almeno un euro»: perchè dal fatto che che abbia uno, due o cinque euro, segue che possiede almeno un euro, mentre se quest'ultimo è il caso, allora è vera anche la disgiunzione che asserisce che Claudio ha un euro, o due euro o cinque euro. Dunque, «Claudio ha almeno un euro» è un modo logicamente equivalente e stilisticamente più elegante di esprimere il senso della frase originaria. Si noti che altrettanto non si può dire, ad esempio, delle frasi «Claudio ha almeno due euro» e «Claudio ha almeno cinque euro». Per quanto riguarda l'affermazione (d), in una forma linguisticamente più accettabile essa dice che «Claudio ha uno o due euro ma non ha sia uno che due euro». Quindi, se possiede monete per un totale di un euro non ne possiede due e, viceversa, se possiede una moneta da due euro non ne possiede anche una da un euro. Dunque, Claudio ha un euro o due euro ma non entrambi, cioè non ha tre euro. Ergo, «Claudio ha al massimo due euro». Infine, nel caso (e), Claudio ha un euro oppure due euro o una banconota da cinque euro ma Claudio non ha 1+2 euro, néha 1+5 euro, né ha 2+5 euro. Quindi: «Claudio ha esattamente un euro o esattamente due euro o esattamente 5 euro». Si ponga attenzione alla differenza tra questa frase e quella contrassegnata dalla lettera (c).
5D. Dato che «Una proposta è svantaggiosa» è vero se e solo se è vero che «Una proposta non è vantag-

R. Bruni, Dialogare: *compendio di logica*, ISBN (online) 978-88-6453-475-6, CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

giosa», se è falso che «La mia proposta non sia svantaggiosa», allora «Non si dà che la mia proposta non sia svantaggiosa». Dal momento che se una proposta non è svantaggiosa, allora «non è non vantaggiosa» e quindi è vantaggiosa per la legge logica della doppia negazione (*vedi* Parte A, Unità 2), segue dalla verità dell'antecedente del condizionale che la mia proposta è svantaggiosa. Se così è, la mia proposta non è vantaggiosa e il conseguente della frase data non può essere vero. Dunque, si tratta di una contraddizione logica. Invece, nella frase 2, posto che la mia proposta di affari sia vantaggiosa, Carlo potrebbe accettarla così come potrebbe rifiutarla per altre ragioni (ad esempio, perché non possiede la somma necessaria per aderirvi). Dunque, il fatto che la mia proposta sia vantaggiosa non è una ragione sufficiente perché Carlo la accetti. La frase in questione, dunque, non è una tautologia logica e neanche una contraddizione. Si tratta cioè di una formula logicamente neutra. L'enunciato 3, invece, ha la forma di un condizionale il cui antecedente è un condizionale a sua volta: «Se $\sqrt{2}$ è razionale implica che $\sqrt{2}$ è irrazionale, allora $\sqrt{2}$ è irrazionale». Supponiamo che esso sia falso. Dunque, che sia vero l'antecedente e falso il conseguente. Che valga quest'ultima condizione, significa che è falso che $\sqrt{2}$ è irrazionale, dunque è vero che $\sqrt{2}$ è razionale. D'altra parte, se l'antecedente della frase è vero e se $\sqrt{2}$ è razionale, significa che $\sqrt{2}$ è irrazionale. In altre parole, $\sqrt{2}$ è razionale e irrazionale allo stesso tempo. Siccome detta situazione è contraddittoria e siccome l'intero ragionamento scaturisce dall'ipotesi che il conseguente della frase considerata sia falso qualora sia vero il suo antecedente, se ne deduce che questo caso non può darsi e che la frase è sempre vera. Quindi, è una tautologia.

Unità 2 – La negazione

1C. Se è vera l'affermazione, allora è falso che il presidente del consiglio abbia negato il proprio appoggio alla mozione della maggioranza e dunque il presidente del consiglio non ha negato il proprio appoggio alla mozione in questione.

2D. Quanto Claudio afferma equivale a sostenere che «È falso che Giulia sapesse che guidare il motorino senza casco fosse proibito». Se questa frase è falsa, come da consegna, significa che «Non è falso che Giulia sapesse che guidare il motorino senza casco fosse proibito» e dunque che «(È vero che) Giulia sapeva che guidare il motorino senza casco fosse proibito».

3A. Se l'affermazione è falsa, allora è falsa l'affermazione che «È falso che la scaletta del concerto non fosse adatta all'occasione». Dunque, per il principio della doppia negazione, «È vero che la scaletta del concerto non fosse adatta all'occasione», che equivale a dire che «È falso che la scaletta del concerto fosse adatta all'occasione».

4D. Se l'affermazione è falsa, è falso ciò si afferma che Sara dica, mentre da quest'ipotesi nulla è dato sapere su ciò che Emanuele sa o meno sulle proprietà di $\sqrt{2}$.

5B. Siccome «due negazioni affermano», per parafrasare il principio logico della doppia negazione, «Non è vero non *A*» e «*A*» sono logicamente equivalenti ma non hanno la stessa **forma logica**, che l'esercizio chiede di individuare, e che dipende dall'occorrenza o meno dei connettivi nella frase (*vedi* ***Glossario***). Dunque, la frase contrassegnata dalla lettera (a) nel primo elenco ha la stessa forma logica di quella contrassegnata dal numero 2 nel secondo elenco (perchè «È vero che *A*» contiene gli stessi connettivi di «*A*», cioè neanche uno), pur essendo logicamente equivalente alla prima frase di quest'ultimo.

6D. Si ricordi che la **forma logica** di un enunciato (*vedi* ***Glossario***) dipende dal numero di enunciato atomici e dalle operazioni logiche che li legano fra loro. In particolare, hanno la stessa forma logica enunciati che possiedono lo stesso numero di **sottoenunciati** atomici (*vedi* ***Glossario***) ai quali sono applicate, nello stesso ordine, le stesse operazioni logiche.

Unità 3 – Congiunzione e disgiunzione

1A. Data la sua forma logica, l'avviso segnala che deve essere accompagnato ogni bambino di età pari o inferiore a 7 anni e che sia alto fino a 1m e 35 compreso. Dei tre bimbi del gruppo solo Lara possiede entrambe le caratteristiche.

2E. Dato che prevede che la temperatura calerà e non aumenteranno le precipitazioni nevose, l'esperto dice il falso se la temperatura non cala oppure se le nevicate aumentano.

3E. Delle due affermazioni, «Lucia non ha attivato la suoneria del telefono» e «Lucia ha lasciato il telefono a casa», deve risultarne vera almeno una perchè sia vero l'assunto. Quindi, o è vera la prima affermazione, o è vera la seconda o lo sono entrambe. Ciascuno dei tre casi smentisce l'affermazione «Lucia ha attivato la suoneria del telefono e (Lucia) lo ha con sé».

4B. Da quanto afferma Michele si ricava che il compito di matematica e quello di italiano sono andati bene e dei due casi, «Il compito di storia e quello di geografia sono andati male» e «Il compito di scienze è andato male», se ne verifica almeno uno. Quindi, se i compiti di storia e geografia sono andati bene, allora è andato male quello di scienze e che se quest'ultimo è andato bene, allora sono andati male i compiti di storia e geografia, oppure i compiti di storia, geografia e scienze sono andati tutti male.

5B. Il trabocchetto dell'esercizio dal quale bisogna guardarsi riguarda il fatto che ci sono enunciati della lista numerica che sono simili per contenuto ad altri della lista alfabetica senza che le combinazioni logiche che vi figurino consentano però di rifletterne il senso in modo logicamente ineccepibile come l'esercizio richiede. Forma logica e contenuto, però, sono due aspetti che occorre abituarsi a scindere per non commettere errori. La corrispondenza tra la'affermazione (b) e la 4 del secondo elenco, ad esempio, si spiega per il fatto che, secondo la prima, Anna ha pagato il biglietto e Marco ha pagato il biglietto, ma Anna non ha assistito allo spettacolo e Marco neppure. Giusto quello che dice la frase n. 4 di Piero, Carlo e del loro pesce, tenendo conto che l'ordine dei congiunti non conta (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 6.2). Delle due condizioni della frase (d), invece, «Tieni il tuo comportamento» e «Si svolge della lezione» si dice che sono incompatibili, dunque si dice che il realizzarsi dell'una è alternativo al realizzarsi dell'altra: quello che l'affermazione n. 7 dice di «Piove» e di «C'è il sole». Nel caso dell'enunciato contrassegnato dalla lettera (f), invece, se «al massimo uno» tra Dario e Tommaso potranno vincere la partita, accadrà una delle seguenti cose: né Dario, né Tommaso vinceranno la partita; Dario vincerà la partita e Tommaso non vincerà la partita; Dario non vincerà la partita e Tommaso vincerà la partita. Da qui la corrispondenza con la frase n. 3. Infine, l'affermazione alla lettera (g) dice che dei tre casi possibili, «Andrea è colpevole», «Matilde è colpevole» e «Lavinia è colpevole» se ne realizza uno, ma non più di uno. Proprio quello che consente di fare, rispetto alla partita di Dario e Tommaso, la frase n. 6.

6D. Se «Matilde ha preso 8 a scienze o Matidle ha preso meno di 8 a scienze» ma non è vero che «Matilde ha preso più di 8 a scienza» significa che «Matilde ha preso al massimo 8 a scienze». Invece, se ha preso 8 o più ma non meno, come si sostiene con l'affermazione (d), allora è vero che «Matilde ha preso almeno 8 a scienze». Infine, se ha preso 8 ma non è vero che abbia preso meno o più di quel voto, ha certamente preso «esattamente» 8. La corrispondenze rimanenti della risposta corretta (quella dell'affermazione (a) con la n. 5 e quella dell'affermazione (b) con la n. 1), non dovrebbero rappresentare un problema.

Unità 4 – Il condizionale

1D. Se alla festa sono mancate le bibite, è falso che Piero e Marco ci siano andati e le abbiano portate. Dunque, o non sono andati alla festa o non hanno portato le bibite. Dal momento che se il conseguente del condizionale è falso e il condizionale è vero come da ipotesi, allora deve essere falso anche l'antecedente, se ne deduce che o Piero non ha preso la macchina o non è passato a prendere Marco. Dunque, che se Piero ha preso la macchina, non è passato a prendere Marco.

2E. Dalle informazioni sui risultati di Vanessa si ricava che l'antecedente dell'affermazione condizionale del docente è falso nel suo caso. Da ciò non segue tuttavia che sia falso anche il conseguente. Anzi, se quanto

dice l'insegnate è vero potrebbe ancora essere possibile per lei iscriversi al corso di studi in questione e usufruire anche della borsa di studio.
3C. Se l'affermazione di Dario è falsa, avendo questa la forma di un condizionale, deve essere vero il suo antecedente ed essere falso il conseguente. Se ne deduce che «Tommaso non ha portato via le carte, Andrea non ha portato via le carte ed è falso che si possa giocare a briscola o a scopa». Dal che segue in particolare che Tommaso non ha portato via le carte, dato che la congiunzione è vera e sono veri tutti i suoi congiunti (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 2).
4A. Se l'affermazione di Francesca è vera, allora deve essere falso l'antecedente oppure vero il conseguente. Quindi, se quest'ultimo è falso (il che capita se uno dei due disgiunti è falso o se sono falsi entrambi come nella risposta corretta), deve essere falso l'antecedente che ha la forma di una disgiunzione («La richiesta dei biglietti per il concerto non cala o si decide di tenerlo in un teatro piccolo»). Quindi, se è falso il conseguente dell'affermazione di Francesca, allora, applicando la **legge di doppia negazione** (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 3) è vera la congiunzione «La richiesta dei biglietti per il concerto cala e si decide di non tenere il concerto in un teatro piccolo». In particolare, è vero allora, sotto l'ipotesi che il conseguente sia falso, che la richiesta di biglietti per il concerto cala.
5B. Che «*A*» è condizione necessaria di «*B*» significa che «Se *B*, allora *A*». Quindi, se è data la verità di «*B*», segue da essa quella di «*A*».
6B. Che «*A*» è condizione sufficiente di «*B*» significa che «Se *A*, allora *B*». Quindi, «*A*» è vera solo se è vera «*B*» (poiché se «*B*» è falsa, «*A*» deve essere falsa affinché l'implicazione rimanga vera).
7E.
8C. Secondo l'interpretazione proposta, due condizioni o due affermazioni sono incompatibili se data l'una non si può dare l'altra e se data quest'ultima non può darsi la prima.

Unità 5 – Il bicondizionale

1E. Un'equivalenza logica del tipo «*A* se e solo se *B*» è vera nel caso in cui i due sottoenunciati siano **logicamente equivalenti** (*vedi* ***Glossario***), ovvero entrambi veri o entrambi falsi. Dal fatto che un'equivalenza logica è falsa si può dedurre quindi che «*A*» e «*B*» non hanno lo stesso **valore di verità** (*vedi* ***Glossario***), il che significa che ci sono due casi possibili: «*A*» è vera e «*B*» è falsa (ovvero che vale l'affermazione «*A* e non *B*»), oppure che «*A*» è falsa e «*B*» è vera (quindi che vale «Non *A* e *B*»). Questa osservazione consente di stabilire che le risposte A e B non sono corrette (perché entrambe rimangono vere se le temperature calano e l'anticiclone si indebolisce, condizione alla quale è vera anche l'equivalenza logica di partenza contrariamente all'ipotesi che essa sia falsa invece). Le risposte C e D, invece, rappresentano proprio i due casi che possono verificarsi se l'equivalenza logica è falsa. Dei due casi possibili, tuttavia, non si può stabilire quale si verificherà in assenza di informazioni ulteriori.
2D. Se l'affermazione è vera, allora «Se chiamo, non vengo» e «Se non vengo, chiamo». Poichè valgono entrambe le circostanze, vale allora in particolare la prima condizione (secondo cui se chiamo allora ho deciso di non venire), da cui segue «Se decido di venire, allora non chiamo» (per **contrapposizione** - *vedi* Parte A, Unità 4, par. 3).
3B. Che «*A* è condizione necessaria e sufficiente di *B*» significa che «*A*» è vero se e solo se è vero «*B*». Quindi, «*A*» è vero se è vero «*B*» ma anche «*B*» è vero se è vero «*A*», dunque quest'ultimo è vero solo se è vero «*B*».
4C. Che «*A* è condizione necessaria e sufficiente di *B*» significa che «*A*» è vero se e solo se è vero «*B*», Quindi, per **contrapposizione**, «*B*» è falso se e solo se è falso «*A*» («*A*» e «*B*» sono **logicamente equivalenti** - *vedi* ***Glossario***-, dunque condividono le stesse condizioni di verità e falsità).
5A.
6C. Per quanto riguarda l'affermazione alla lettera (d), si noti che, il primo **congiunto** (*vedi* ***Glossario***) garantisce che almeno uno dei tre bicondizionali vale (dunque, almeno due tra *A*, *B* e *C* si implicano a

vicenda); il secondo congiunto stabilisce che non valgono tutti e tre. Segue, dalla logica del bicondizionale, che non ne valgono neanche due (e quindi che dei tre bicondizionali ne vale solo uno e due e solo due dei tre enunciati si implicano a vicenda): infatti, se ad esempio, vale «*A* se e solo se *B*» allora almeno uno tra «*A* se e solo se *C*» e «*B* se e solo se *C*» deve essere falso. Se solo uno dei due fosse falso ma non l'altro, ad esempio se fosse falso «*A* se e solo se *C*» ma non «*B* se e solo se *C*», si ricaverebbe una contraddizione: perchè se «*A*» è **logicamente equivalente** (*vedi* ***Glossario***) a «*B*» e «*B*» è logicamente equivalente a «*C*», allora «*A*» è logicamente equivalente a «*C*» e «*A* se e solo se *C*» sarebbe vero contrariamente a quanto si è supposto. Dunque, se almeno uno dei tre bicondizionali è vero e non sono veri tutti e tre, ne consegue che è vero solo uno di essi che corrisponde a quanto stabilisce l'enunciato (1).

Unità 6 – Formalizzare i connettivi

1D. Si ricordi che, per la legge logica di **doppia negazione** (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 3) «Non non *A*» è **logicamente equivalente** (*vedi* ***Glossario***) a «*A*» e che due enunciati logicamente equivalenti possono essere sostituiti l'uno all'altro mantenendo quindi inalterate le condizioni di verità dell'espressione di cui fanno parte (*vedi* Parte A, Unità 5, par. 2). Inoltre, si ricordi che una disgiunzione è falsa se e solo se è vera la congiunzione dei **disgiunti** (*vedi* ***Glossario***) negati (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 4).
2C. Dire che la presenza della corrente elettrica è condizione necessaria perché la luce si accenda, significa che se la corrente non ci fosse allora la luce non potrebbe essere accesa e dunque che se la luce accesa, la corrente deve esserci per forza. La frase ci dice poi anche che tale condizione non è sufficiente, dunque che potrebbe darsi che la corrente ci sia ma la luce sia comunque spesa (perché banalmente, non si è premuto l'interruttore).
3A. Dall'ipotesi che la benzina non manchi ($\neg A$) si conclude che se l'auto continuasse ad avere difficoltà di accensione ($\neg B$), allora dovrebbe essere guasto il carburatore (C).
4B. Due proposizioni sono incompatibili se non possono coesistere, dunque se l'una è falsa se è vera l'altra e viceversa (detto altrimenti, se la negazione dell'una è logicamente equivalente all'affermazione dell'altra). Una frase è falsa, invece, se è vera la sua negazione.
5E.
6E.

Unità 7 – Le tavole di verità

1E. Una volta formalizzata, $(\star)$ diventa una formula come $\neg(A \wedge \neg B)$, dove A sta per l'affermazione «Luca ci raggiunge» e B per «Nicola ci raggiunge». Occorre verificare quale tra le seguenti formule sia una tautologia:

A. $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg A \wedge B)$;
B. $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$;
C. $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$;
D. $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$;
E. $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

Di queste, l'ultima è la sola che dà origine a una tavola di verità i cui valori siano tutti 1.
2C. Le tre affermazioni, una volta formalizzate, corrispondono alle formule seguenti:

(1) $A \vee \neg B$ (oppure: $\neg A \rightarrow \neg B$);
(2) $C \leftrightarrow B$;

(3) $\neg(C \wedge A) \wedge (C \vee A)$.

Occorre poi verificare quale tra le seguenti sia una tautologia logica (dove ((1)∧(2)∧(3)) sta per la congiunzione delle tre formule precedenti):

A. $((1)\wedge(2)\wedge(3)) \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$;
B. $((1)\wedge(2)\wedge(3)) \rightarrow (C \rightarrow B)$;
C. $((1)\wedge(2)\wedge(3)) \rightarrow (\neg(C \vee B) \wedge A)$;
D. $((1)\wedge(2)\wedge(3)) \rightarrow (C \vee B)$;
E. $((1)\wedge(2)\wedge(3)) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

3E. Si noti che un'equivalente logico della formula che rappresenta la soluzione dell'esercizio è $(B \rightarrow (A \rightarrow C))$. La formula:

$$(\star) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$$

è nota come il principio di **scambio delle premesse** dal momento che consente di scambiare le premesse A e B da cui si ottiene C, salvaguardando la verità del condizionale.
4C. La tautologia in questione è più conosciuta nella sua versione logicamente equivalente:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$$

ed esprime il fatto che se da A segue logicamente B e se da A segue C, allora da A seguono sia B che C.
5B. La tautologia in questione, nella sua variante corrente:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

è uno dei principi logici fondamentale, noto come legge di **di contrapposizione (debole)** (laddove la sua versione forte è data dal condizionale nell'altro verso). A futura memoria (*vedi* Parte C, Unità 8), si prenda nota del fatto che $\star \rightarrow 1$, ovvero la formula:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$$

non è una verità logica.
6B. La formula che risolve l'esercizio è nota come la tautologia **di Chang-Meredith**. Si noti bene l'esercizio richiede di sottoporre a verifica le formule con questo antecedente:

$$((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A))$$

e come conseguente le formule A-D. È del tutto diverso, com'è ovvio, dal prendere come antecedente la congiunzione di (1) e (2). Tanto è vero che la formula con l'antecedente corretto e D come conseguente non è una verità logica, mentre lo è quella che possiede l'antecedente in versione congiuntiva e quello stesso conseguente.
7D. La tautologia in questione, nota nella sua forma equivalente:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

è una delle due fondamentali leggi **di De Morgan** (legate al nome e alle ricerche di Augustus De Morgan), che 'spiegano' i rapporti tra la negazione di una congiunzione e la disgiunzione della negazione dei congiunti (la formula in questione) e tra la negazione di una disgiunzione e la congiunzione della negazione dei disgiunti (l'altra legge che porta lo stesso nome, la duale: $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$).

B – Logica dei predicati e delle relazioni
Unità 1 – Gli enunciati atomici

1A. Si noti che sulla base delle informazioni date non sappiamo nulla dell'età di Maria Sofia, che potrebbe essere più grande, più piccola o addirittura gemella, quindi avere la stessa età, della sorella.
2B. Da (1) si ricava che x, il numero in questione, è maggiore di $42 = (2^2 \times 3^2) + (2 \times 3)$. Da (2) segue che $x < 45 = 7^2 - (2 + 3)$. Da (3), in fine, si deduce che $x > 43 = (7 \times (2 + 3 + 1)) + 1$.
3D. Da (1) e (3) segue che la sorella della madre di Laura e la sorella di Giorgio conoscono il figlio di Marco. Nessuna della altre opzioni è vera, anche aggiungendo a ciò l'informazione (2).
4B. La risposta è frutto delle seguenti osservazioni: in (1) occorrono le descrizioni «la madre di…» e «il fratello di…» di arietà 1; in (2), «Il compagno di banco di…», «il fratello di…», «il migliore amico di…» e «la sorella di…» di arietà 1; in (3), «la radice quadrata di…» di arietà 1, «il prodotto di…e…» e «la differenza di…e…» di arietà 2; in (4), «il vincitore della partita tra…e…» e «il perdente della partita tra…e…», entrambi di arietà 2; in (5) si ritrovano «il litigio tra…,…, e…» di arietà 3, «la pagella di…» e «il figlio di…» di arietà 1; in (6) «la distanza tra…e…» di arietà 2 più«il doppio di…» e «la lunghezza di…» di arietà 1; infine, in (7) ci sono «il successore di…», «il numero di…», «le pedine del…» e «l'età di…» di arietà 1, in aggiunta a «la somma di…e…» di arietà 2.
5D. La risposta dipende dal fatto che: in (1) c'è il predicato «essere liso» di arietà 1; in (2) la relazione «presentare…a…» che ha arietà 3 (conta infatti ai fini di quest'ultima anche l'individuo che «presenta»); in (3) c'è la relazione «essere maggiore di …» di arietà 2; in (4) «seguire da…» di arietà 2; in (5) «avverire» di arietà 2; in (6) «essere» di arietà 1 e in (7) «parlare» di arietà 2.

Unità 2 – I quantificatori individuali: l'universale

1C. La frase data è vera nel caso in cui, preso un qualunque bambino, se questo è ubbidiente allora fa ciò che gli dicono di fare i genitori. Il dominio del quantificatore universale è l'insieme dei bambini ubbidienti. La frase è falsa, quindi, se un individuo del dominio, quindi un bambino ubbidiente, non fa quello che la frase sostiene facciano tutti, ovvero non fa quello che dicono i genitori.
2A. Il dominio del quantificatore universale della frase originaria è l'insieme degli amici degli amici di Luca. Se la frase è falsa, ce un individuo tra questi di cui Antonella non è amica.
3E. La frase proposta coincide con l'affermazione secondo cui: «Per ogni individuo, se esso non è in malafede, allora non può pensare che tu sia nel giusto». Il dominio del quantificatore, allora, è dato dall'insieme degli uomini che non sono in malafede e di ciascuno di essi si dice che non pò pensare che la persona di cui si sta parlando sia nel giusto.
4B. Il dominio del quantificatore dell'affermazione di Paola è la collezione dei gatti che non hanno il naso umido. Di questi, Paola dice che tutti hanno qualcosa che non va. Se la frase è falsa, allora, alcuni di essi non hanno niente che non vada.
5D. La frase alla lettera (a) della lista alfabetica può essere riformulata dicendo «Tutto ciò che esiste scorre», dunque «Per ogni x, se x esiste allora scorre». Che Carlo sia l'ultimo a consegnare il tema significa che nessuno dei suoi compagni di classe consegna dopo di lui. Dunque, la frase (b) si può riformulare come: «Per ogni x, se x fa parte della classe di Carlo, allora non consegna il tema dopo di lui». La frase (c) può diventare: «Per ogni x, se x è un bambino, allora è abituato a essere oggetto di massima attenzione» da cui segue, utilizzando la legge logica di **contrapposizione** (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3), «Per ogni x, se x non è abituato a essere oggetto della massima attenzione, allora non è un bambino». Per quanto riguarda invece (f), la frase è più chiara riproponendola come l'affermazione secondo cui: «Se ognuno paga le tasse, allora ciascuno paga meno tasse». Da cui: «Per ogni individuo x, Per ogni individuo y, se x paga le tasse, allora y paga meno tasse». Infine, la frase (g) può essere riformulata come l'affermazione secondo cui «Per

ogni x, se x è un triangolo ed è isoscele, allora x ha due lati uguali e se x è un triangolo e ha tre lati uguali, allora x è equilatero».

6C. Se A è «essere adulto» e B è «comportarsi in questo modo», allora la frase contrassegnata dalla lettera (a) può servire per riformulare «Per ogni individuo, se questo è adulto allora non si comporta in questo modo». Nella frase (b), invece, A sta per «essere un numero» (si ricordi che x sta per un individuo generico, nel senso logico dell'espressione - *vedi* ***Glossario***-, del quale occorre precisare la natura), B per «essere perfetto» e C per «essere uguale alla somma dei propri divisori interi diversi da uno». In (c), B può stare per «amare bagnarsi» e A per «essere un gatto». Si può così riformulare la frase numero (3) usando la sua versione **contrapposta** (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3): «Per ogni individuo, se non è vero che non ama bagnarsi, allora non è un gatto». In (d), A è «essere incensurati» e B sta per «partecipare al concorso». Si ricordi inoltre che «B è condizione necessaria di A» se vale «Se A, allora B», mentre «B è condizione sufficiente di A» significa che «Se B vale, allora vale A» (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 1). In (e), invece, si interpreti A come «essere incensurati», B come «possedere la laurea» e C come «partecipare al concorso». In (f) A è «essere logici» e B «essere noiosi», mentre in (g), infine, A «essere il successore di» e B «essere minore di».

Unità 3 – I quantificatori individuali: l'esistenziale

1D. Tenendo presente quanto si è avuto modo di dire sull'uso del termine «individuo» in logica (*vedi* Parte B, Unità 2, par. 2), quanto la mamma di Giulia dice a quest'ultima può essere riformulato dicendo: «C'è un individuo, che è una maglietta, è pulita, è nel tuo armadio e tu la puoi mettere». La frase è falsa se nessun individuo del **dominio** del quantificatore (*vedi* ***Glossario***) possiede tutte le proprietà coinvolte. Dunque, posto che esista una maglietta pulita che Giulia può mettersi, questa non può stare nel suo armadio; se esiste una maglietta pulita nell'armadio, allora Giulia non può indossarla; se ci sono magliette nell'armadio che Giulia può mettersi, allora queste non sono pulite. Questo basta a giustificare la risposta, non a esaurire le combinazioni possibili delle proprietà coinvolte, che potremmo invece continuare a elencare.

2E. Quanto dice Pietro è che «Non è vero che almeno una delle cose che ha detto Paolo non sia falsa». Dunque, secondo Pietro, non è vero che ci sia qualcosa che ha detto Paolo che «non sia falsa» (cioè sia vera per l'assunzione proposta). Quindi, Paolo sostiene che tutto ciò che è stato detto da Paolo sia falso.

3E. Il Professore sta dicendo che l'affermazione «Esiste un numero x tale che x è soluzione dell'equazione numero 3 e x è un numero reale e x è un numero trascendente» è falsa. Quindi, non esiste un numero che ha tutte e tre le proprietà indicate. Di ogni numero dato deve quindi essere vera almeno una delle tre alternative: detto numero non è soluzione dell'equazione; non è un numero reale; non è un numero trascendente. Se si dà la prima alternativa, allora l'equazione numero 3 non ammette soluzioni. Se si dà la seconda alternativa, non ammette soluzioni reali. Se si dà la terza alternativa, non ammette soluzioni trascendenti. Se ne deduce che almeno una delle risposte 1-3 è vera e quindi una di esse è certamente vera.

4B. L'affermazione di Barbara è vera se esiste un esercizio del compito che viene risolto da Lavinia e non da Matilde. Se l'affermazione è falsa, allora tutti gli esercizi del compito risolti da Lavinia sono risolti anche da Matilde. Quindi nessuno di essi è risolto da Lavinia e non da Matilde.

5C. L'affermazione (a) nasconde un tranello. Apparentemente l'informazione che fornisce è univoca: su Marte c'è un individuo. In realtà con quell'affermazione si intende dire che «Esiste un individuo che sta su Marte e possiede la proprietà di essere in vita», ovvero che «C'è un individuo che sta su Marte e vive (o è vivente)». Le frasi (b) e (c) coinvolgono combinazioni di quantifcatore esistenziale e negazione logica che si sono ampiamente trattate nel testo (*vedi* Parte B, Unità 3, par. 3), mentre quella dalla (d) alla (g) introducono la novità della menzione di individui specifici dell'universo del discorso per via diretta, attraverso il loro nome proprio, o per via indiretta, mediante una **descrizione definita** («il gatto di Marco», «Claudio», «le amiche di Sandra», «tu», «Claudia» - *vedi* Parte B, Unità 1, par. 4). Come specificato nella consegna dell'esercizio, si è cercato di restituire la differenza che passa dal menzionare un individuo 'generico' mediante una variabile, a menzionarne uno ‘costante’, ossia un individuo specifico, lui e nessun altro, utilizzando per quest’ultimo caso le lettere a e b.

6A. In (a) si legga A come «essere male» e B come «venire per nuocere». Nel caso dei numeri, dati m e n, si ha che p «sta tra» essi, se, ad esempio, p è maggiore di m e p è minore di n. Data l’osservazione, A in (b) sta per «essere maggiore di» e B per «essere minore», mentre a e b indicano i due individui specifici m e n. Si potrebbe restituire il senso della frase (6) anche per mezzo di un bagaglio concettuale più semplice, che preveda ad esempio la sola relazione di «essere minore (maggiore) di». In (c) A sta per «essere un gatto», a per l’individuo «Aldo», B sta per «avere» e C per «curare come un figlio». In (d), A sta per «essere» o «esserci», B sta per «desiderare», a per «tu» e C per «poter comprare». In (e), A sta per «essere alto» e B per «essere bello». In (f) e in (g), A sta per «essere logico» e B sta per «essere famoso». Le due frasi, prese assieme, enunciano un principio apparentemente banale ma fondamentale della logica delle relazioni: se c’è almeno individuo che gode di entrambe le proprietà A e B allora esiste un individuo che gode di ciascuna di esse (un individuo che gode di A e un individuo, lo stesso, che gode di B), ma non vale il viceversa (perché se un individuo gode di A e un individuo gode di B ma non si tratta dello stesso individuo, allora è possibile che non ci sia un individuo che gode di A e B insieme).

Unità 4 – Combinare i quantificatori individuali

1C. La frase che Michele nega sia vera è l’affermazione secondo cui:

Due coniugi che fanno lo stesso lavoro non hanno conseguenze negative per il loro rapporto

Più precisamente, il ‘senso logico’ della frase di cui parla Michele è espresso dalla frase:

Per ogni individuo x, per ogni individuo y, se x è coniuge di y e x e y fanno lo stesso lavoro, allora x e y non hanno conseguenze negative per il loro rapporto

Si tratta dunque di un’affermazione costruita mediante due quantificatori universali il cui dominio è rappresentato dagli individui che sono «coniugi». Di una qualsiasi coppia di essi si dice che fare lo stesso lavoro non porta conseguenze negative al loro rapporto. Dire che la frase è falsa come fa Michele equivale ad affermare che almeno due coniugi che fanno lo stesso lavoro hanno per questo fatto avuto conseguenze negative per il proprio rapporto.

2E. La frase che Andrea nega sia vera corrisponde all’affermazione:

Ci sono due e solo due individui diversi che conosco e che sanno risolvere il cubo di Rubik

ovvero, in altri termini, l’affermazione:

Ci sono almeno due individui diversi che conosco e che sanno risolvere il cubo di Rubik e per ogni altro individuo che conosco, se è diverso da essi allora non sa risolvere il cubo di Rubik

Dovrebbe risultare chiaro che questa congiunzione è falsa nel caso di Andrea in uno dei seguenti casi:

1. se non è vero che ci siano almeno due individui diversi che Andrea conosce e che sanno risolvere il cubo di Rubik (quindi, se Andrea conosce meno di due persone che sanno risolvere il cubo di Rubik);
2. se non è vero che Andrea conosce solo due individui che sanno risolvere il cubo di Rubik (dunque, se c’è almeno un’altra persona che egli conosce e che lo sa risolvere).

3A. Se non è vero che c’è almeno un candidato che possiede tutti i requisiti per vincere il concorso, allora tutti i candidati mancano di almeno un requisito per poterlo fare.

4C. L’affermazione di Mattia ha la forma logica di un condizionale il cui antecedente (la frase «Tutti danno un passaggio a qualcuno») è costruito combinando un quantificatore universale con un esistenziale, e il cui conseguente (la frase «Qualcuno dà un passaggio a tutti») è costruito invece combinando un quantificatore esistenziale con un universale. Se Mattia si sbaglia, allora l'antecedente del condizionale deve essere vero ma il conseguente falso (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 2). Quindi in particolare, per ognuno del gruppo che si offre per portare gli altri ci deve essere qualcuno di coloro che hanno bisogno di un passaggio che non porta.

5E. Supponiamo che l'affermazione di Matteo sia vera. Dato che tutte le altre affermazioni di Giuseppe sono vere, quella in esame non può essere tale, in linea con quanto asserisce Matteo. Ma Giuseppe dice in effetti che ogni affermazione di Matteo è vera, dal che segue che esiste un'affermazione di Matteo che non è vera. Avendo supposto che tutte le altre cose che Matteo ha avuto modo di dire siano vere, se ne deduce che, contrariamente a quanto supposto, la frase di Matteo non può essere vera dopotutto. Dunque, non è vero che Giuseppe ha detto almeno una cosa non vera, quindi che tutto ciò che Giuseppe ha detto è vero inclusa l'affermazione citata. Dalla verità di quest'ultima segue che anche Matteo ha sempre detto la verità e che la frase presa in esame deve essere vera contrariamente a quanto si è supposto.

Ripetendo il ragionamento partendo dall'assunzione che l'affermazione di Giuseppe sia o non sia vera conduce a un risultato analogo rispetto a quest'ultima.

Le due conclusioni raggiunte consentono di stabilire che:

1. la frase di Matteo è vera (falsa) se e solo se non è vera (falsa);
2. la frase di Giuseppe è vera (falsa) se e solo se non è vera (falsa).

Di nessuna delle due affermazioni, quindi, siamo in grado di stabilire se essa sia vera o meno.

6B. La frase alla lettera (a) può essere riformulata come l'affermazione secondo cui «Per ogni x, se x esiste allora esiste un y tale che y è una causa e y è causa di x». La frase (b) come l'affermazione secondo cui «Esiste un x tale che x è una persona e per ogni y, se y è una casa, allora x non possiede y». La frase (c) in forma logicamente più ineccepibile diventa: «Non è vero che per ogni x, per ogni y, se x è fratello di y, allora per ogni z, se z è genitore di x, allora z è genitore di y e se z è genitore di y, allora z è genitore di x», da cui segue la versione semplificata proposta, che fa uso del bicondizionale (*vedi* Parte A, Unità 5, par. 1). Per quanto concerne la frase (d), si tenga conto del fatto che se tutti i candidati meno uno hanno superato la prova, allora vale che c'è solo un candidato che non l'ha superata e viceversa. Quindi, «Di tutti meno un x vale A» è vera se e solo se è vero che «Di esattamente un x vale non A». La versione logicamente più rigorosa della frase in quest'ultima versione è la seguente: «Esiste un x tale che x è un candidato e non è vero che x ha superato la prova e per ogni y, se y è un candidato diverso da x allora y ha superato la prova». Nel riformulare la frase in modo logicamente ineccepibile occorre tenere conto della menzione di un individuo specifico dell'universo del discorso («la prova», l'«a» di (6)) e dell'uso dell'identità. Per quanto riguarda infine le frasi (e)-(g), queste possono essere rispettivamente riformulate come le affermazioni secondo cui: «Per ogni x, se x ha diritto al voto allora esiste un y che è una preferenza e x esprime y.»; «Per ogni x, se x ha diritto al voto, allora non è vero che esiste y ed esiste z tali che y è una preferenza e z è una preferenza e y non è identico a z e x esprime y e x esprime z.»; «Per ogni x, se x ha diritto al voto, allora esiste y tale che y è una preferenza e x esprime y e non è vero che esiste z tale che z è una preferenza e z non è identico a y e x esprime z.».

7A. In (a) il simbolo A sta per «essere un'automobile», B per «essere proprietario di…» e a indica «Carlo». In (b), A sta per «essere cugino di…», B per «essere genitore di…» e C per «essere zio di…». In (c), A sta per «essere numero primo» e B per «essere la somma di…e…». In (d), A sta per «essere figlio di…» e B per «essere nipote di…». In (e) e (f), A sta per «essere un esercizio», B sta per «essere soluzione di…» e C sta per «essere esatto». Nella frase numero (7), «arrivare ultimo» significa «arrivare dopo tutti» e «arrivare primo» significa «arrivare prima di tutti», quindi come «non arrivare dopo qualcun'altro». Fatta questa precisazione, (g) rappresenta correttamente la logica di (7) leggendo A come «arrivare dopo…».

Unità 5 – Formalizzare enunciati atomici e quantificatori individuali

1E. L'affermazione di partenza, infatti, può essere riformulata in modo equivalente tanto come la frase «Per ogni individuo, se questi è amico di Luca allora conosce il padre di Claudia» quanto come «Non esiste un individuo che è amico di Luca e non conosce il padre di Claudia». Questo spiega intanto la correttezza delle risposte C e D che formalizzano le frasi precedenti. Quanto alla risposta A, di essa si può offrire una giustificazione intuitiva oppure logica. Intuitivamente, infatti, se tutti gli amici di Luca conoscono il padre di Claudia come si è stabilito affermi la frase considerata in origine, allora vale anche che «Preso un qualunque individuo, o questo non è amico di Luca o lo è e conosce il padre di Claudia». Viceversa, se questa disgiunzione è soddisfatta da qualsiasi individuo dell'universo del discorso, allora vale anche che ciascuno di essi che sia amico di Luca conosce il padre di Claudia. Ciò dimostra che le due affermazioni sono **logicamente equivalenti** (*vedi **Glossario***) e dunque che la formalizzazione proposta in A, che formalizza l'enunciato in questa variante equivalente, è una versione formale corretta della frase originaria. Da un punto di vista logico, invece, è sufficiente notare che un'affermazione della forma «Se *A*, allora *B*» equivale logicamente all'affermazione della forma «Non è vero *A* oppure è vero *B*» (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3). Poichè enunciati logicamente equivalenti possono essere sostituiti gli uni con l'altri salvaguardando le condizioni di verità delle affermazioni nelle quali occorrono (*vedi* Parte A, Unità 5, par. 2), se ne ricava che la formalizzazione della risposta A equivale logicamente alla C e dunque, come quest'ultima, è corretta.
2B. L'affermazione di partenza, in linea con quanto si è avuto modo di dire relativamente alla trattazione logica delle espressioni «condizione necessaria» e «condizione sufficiente» tramite il condizionale (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 1), coincide con la frase: «Per ogni x, se x è un numero ed è primo, allora x è dispari». La soluzione indicata è **logicamente equivalente** (*vedi **Glossario***) alla versione formalizzata di quest'ultima per la **legge di contrapposizione** (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3)
3B. L'affermazione presa in esame contiene un'occorrenza implicita di uno dei quantificatori 'numerici' di cui si è detto (*vedi* Parte B, Unità 4, par. 5). Infatti, dovrebbe essere ovvio che quanto si afferma corrisponde a dire che: «Per ogni confezione, esistono esattamente due penne a sfera che essa contiene». Quindi, più precisamente: «Per ogni confezione esistono due penne diverse che essa contiene e la confezione non contiene alcune penna diversa da esse».
4A. Per restituire in modo compiuto il senso della frase proposta in questo esercizio occorre combinare in modo opportuno l'uso dei quantificatori con la relazione di identità. Questa necessità si collega con la seconda parte della frase sulla base della quale il gatto nero alla destra di Silvia risulta essere «il più grande degli altri (gatti)». Come si è visto (*vedi* Parte B, Unità 4, par. 1), il senso di un'espressione del genere può essere parafrasato dicendo: «C'è un gatto nero alla destra di Silvio e per ogni altro gatto diverso da esso, il primo risulta essere più grande».
5D. Per facilitare l'esercizio, le scelte dei simboli dell'alfabeto simbolico sono state fatte in modo da richiamare, attraverso le iniziali, le proprietà e le relazioni a cui corrispondono (così, ad esempio, in (6) $cs(x)$ è «il campo a sinistra di x», $cd(x)$ è «il campo alla destra di x», $pa(y)$ è «la partita del campo y», $v(z)$ è «il vincitore della partita z» e $G(x,y)$ è «x gioca con y».)
6D. Di nuovo, le scelte dei simboli dell'alfabeto sono facilitate in modo da richiamare, attraverso le iniziali, le proprietà e le relazioni a cui corrispondono. Così, in (1), $P(x)$ è «x è presente», $E(x)$ è «x è un esame» e $S(x,y)$ è «x ha sostenuto y». In (2), $A(x,y)$ è «x è amico di y» e $S(z,w)$ è «z sta simpatico a w». In (3), $N(x)$ sta per «x è un numero», $P(x)$ sta per «x è primo», $Min(x,y)$ sta per «x è minore di y». In (4), $Pe(x)$ sta per «x è una persona», $P(x,y)$ è «x parla con y», $I(x)$ è «x è inglese», $Pr(x)$ sta per «x è presente» e $A(x,y)$ sta per «x è più alto di y». In (5), $Ca(x,y)$ sta per «x occupa la carica di y» e $pr(y)$ sta per «Presidente della Repubblica di y». In (6), $P(x)$ sta per «x è presente», $L(x)$ è «x è logico» (ovvero «x conosce la logica»). In (7), $P(x,y)$ sta per «x è il padre di y», $M(x,y)$ è «x è la madre di y», $N(x,y)$ è «x è il nonno di y». In (8), $I(x)$ sta per «x è inglese», $P(x,y)$ sta per «x parla con y», $C(x,y)$ sta per «x

conosce y». In (9) $Rc(x)$ sta per «x ripara caldaie» e $C(x, y)$ per «x conosce y». In (10), $A(x)$ sta per «x è un asso», $M(x)$ sta per «x sta nel mazzo».

C – La logica dell'argomentazione
Unità 1 – Gli argomenti

1B. Dal momento che non c'è modo nel caso presentato di costruire inferenze che consentano di ottenere come conclusione un enunciato logicamente complesso utilizzando tutti gli altri come premesse, la conclusione del ragionamento deve avere la forma di un enunciato atomico. Quindi deve trattarsi dell'affermazione n. 1, della 2 o della 4. Di queste, solo per la prima si riesce a costruire un argomento che usi tutti i 'pezzi' disponibili. Questo ragionamento parte dalla premessa n. 5, sulla base della quale si stabilisce che di due casi, «La batteria è scarica» e «Il caricabatteria non funziona», se ne verifica almeno uno. Da questa premessa e dalla n. 2, secondo cui il caricabatteria funziona, segue che deve essere vero l'altro caso, cioè che la batteria è scarica. Dunque, segue la frase n. 4. Da essa e dall'assunto condizionale n. 3, di cui 4 è l'antecedente, segue infine che è vero il suo conseguente 1.
2E. Nel caso del ragionamento proposto qui, occorre notare come non si riesca a far concludere l'argomento con uno dei tre enunciati atomici presenti (2, 4 o 5) utilizzando in modo logicamente coerente tutte le affermazioni proposte. Degli enunciati complessi presenti, esiste un'inferenza logicamente plausibile per dedurre il n. 1, che ha la forma di una congiunzione, e che è il seguente:

Il governo non approva la legge.
Il tasso di disoccupazione è destinato ad aumentare.
Quindi, il governo non approva la legge e il tasso di disoccupazione è destinato ad aumentare.

Infatti, assunte le premesse come vere se ne deduce la verità della conclusione (che è vera, appunto, quando sono veri entrambi i congiunti - *vedi* Parte A, Unità 3, par. 2). Resta da trovare una percorso logico per arrivare ad (1). Supponendo che valga (3), che ha la forma di un condizionale del tipo «Se A, allora B», e che valga (4), cioè che«Non è vero B», segue che «Non è vero A» (per **contrapposizione** - *vedi* Parte A, Unità 4, par. 3), quindi vale (5) (poiché se A valesse, dato che vale (3), seguirebbe B). Da (5) e da (6) segue (2). Quindi, (5) vale e vale anche (2). Segue che vale (1) che le congiunge.
3C. Nell'argomento presentato, (3) segue da (1) e da (2) per l'inferenza seguente:

Se non A, allora B.
Se B, allora C.
Quindi, se non A allora C.

È facile verificare, in effetti, che questo passaggio è logicamente giustificato dato che, supponendo che le premesse dell'inferenza siano vere se ne deduce che non può essere falsa la conclusione: essendo quest'ultima un'affermazione di forma condizionale, è falsa se è vero l'antecedente «Non A» ed è falso «C». Ma se «C» è falso e le premesse sono vere, deve essere falsa anche «B». Altrimenti, per la seconda premessa che si è supposto essere vera, da «B» seguirebbe «C» che si è detto che non vale. Quindi, è vero «Non A» ed è falso «B», dal che seguirebbe che è falsa la prima premessa, contrariamente all'ipotesi.

Ciò significa che la premessa mancante dell'esercizio è quella che serve per passare da (3) a (4), ovvero che «La polizia non ha preso il colpevole», dal che si conclude (4) poichè se il colpevole non avesse indossato i guanti allora la polizia lo avrebbe preso come afferma (3).
4B. La premessa mancante è quella che serve per concludere (4), data (3). Avendo stabilito che il cibo non era avariato, si è legittimati a concludere per logica che la vittima è stata avvelenata se si assume che queste due eventualità esauriscono il novero dei casi possibili, dunque se vale che «Il cibo del buffett era avariato,

oppure la vittima è stata avvelenata» (da cui, avendo stabilito che il primo disgiunto è falso, segue che è vero il secondo). Si fa così uso di un'inferenza che risponde allo schema:

Non è vero (3)
(4) oppure (3)
Quindi (4)

5E. Da (1) segue, per logica, che se Lucia non viene alla festa, allora viene Serena (perché «*A* o *B*» vale se e solo se «Se non *A*, allora *B*» - *vedi* Parte A, Unità 4, par. 3). D'altra parte, dato che per (5) non viene Giovanni, allora segue, sempre per logica, che è vera l'affermazione «Non viene Giovanni o viene Serena» (dato che se vale un enunciato «*A*», allora vale anche «*A* o *B*», qualunque sia «*B*», perché è vero almeno uno dei due disgiunti). Se ne deduce, da (3), che Lucia non viene e, da (1), che viene Serena. Siccome se Lucia non viene, allora viene Francesca (è la premessa (4)). Si deduce da quanto si è stabilito fin qui che Francesca viene alla festa. Dal che segue, infine, che vale (6) avendo dimostrato che valgono tutti e tre i congiunti di cui essa si compone.
6A. Da (5) e da (3) segue che Giulio usa un uovo delle sei che possiede per cucinare il primo piatto. Quindi, data (4), le uova rimaste sono cinque. Dunque, Giulio non ha sei uova e da (1) segue che non cucina sia il secondo che il dolce (poiché un enunciato «*A*» è condizione necessaria di «*B*» nel caso in cui valga «Se *B*, allora *A*» - *vedi* Parte A, Unità 4, par. 1). Quindi, si conclude (6) senza aver fatto alcun uso della premessa (2).

Unità 2 – Le inferenze logiche

1D. Assumendo che «Se esistessero palazzi più alti dello stadio, allora si potrebbe guardare la partita senza pagare il biglietto» si deduce, dall'ipotesi che non si può guardare la partita senza pagare il biglietto, che allora non esistono palazzi più alti dello stadio per **contrapposizione** (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3). Nessuna delle altre proposte, invece, consente di ottenere la conclusione desiderata attraverso un'inferenza logicamente giustificabile.
2E. Assumendo che «Se la macchina non si ferma, la benzina non finisce» segue che «Se la benzina finisce, la macchina si ferma» (poiché un enunciato del tipo «Se *A*, allora *B*» equivale logicamente a «Se non *B*, allora non *A*» per **contrapposizione** - *vedi* Parte A, Unità 4, par. 3 -, da cui si ottiene la conclusione del caso in esame congiuntamente alla legge logica di **doppia negazione** - *vedi* Parte A, Unità 2, par. 3). D'altra parte, data quest'ultima affermazione e dato l'altro assunto, se ne deduce che «Se la benzina finisce o il motore si guasta, la macchina si ferma» come si desiderava (poiché dalle due premesse segue che la macchina si ferma in ciascuno dei due casi e dunque si ferma se di essi ne vale almeno uno). Nessuna delle altre proposte consente di ottenere la conclusione in modo logicamente giustificato.
3E. Se, oltre all'affermazione di Riccardo, che ha la forma di un condizionale, vale anche il suo antecedente, cioè che il numero sette segna il tiro libero, allora vale di esso il conseguente, ovvero che l'Italia batte la Francia. Quindi, se (A) vale, quanto sostiene Dario discende dalle premesse per logica. D'altra parte, se l'Italia batte la Francia anche nel caso in cui il numero sette non segna il tiro libero, come recita la seconda delle affermazioni proposte (perché, ad esempio, la distanza tra i punti delle due squadre è già incolmabile), allora l'Italia batte la Francia comunque (dato che o il numero sette segna il tiro libero e l'Italia vince o non lo segna e l'Italia vince lo stesso). Inoltre, se il numero sette segna il tiro libero e il tempo scade, allora in particolare vale che il numero sette segna il tiro libero e da ciò segue la conclusione per il ragionamento proposto rispetto ad (A). Infine, se vale (D), da essa segue che se il numero sette non segna il tiro libero, allora l'Italia batte la Francia (dato che da «Se *A*, allora non *B*» segue «Se *B*, allora non *A*» - *vedi* Parte A, Unità 4, par. 3). Dal ciò segue l'affermazione di Dario per il ragionamento proposto analizzando il caso di (B).

4D. Che superare due compiti scritti su tre sia condizione sufficiente per superare l'esame significa che «Se si superano due compiti scritti su tre, allora si passa l'esame» (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 1). La seconda premessa dell'argomento proposto coincide quindi con l'affermazione per cui «Se si risolve il 75% degli esercizi proposti, allora si superano due compiti scritti su tre». Quindi, se vale l'antecedente di quest'ultimo enunciato condizionale vale anche il conseguente del primo (perché l'antecedente in questione implica che valga la condizione da cui dipende il realizzarsi di quanto enuncia quest'ultimo, ossia il superamento dell'esame). Si tratta di un'inferenza basata sulla proprietà **transitiva** (o di **concatenazione**) del condizionale, descritta, a livello formale, dalla formula:

$$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

Impratichendosi degli strumenti di formalizzazione degli enunciati dichiarativi, è facile convincersi che essa 'descrive' quanto accade con l'inferenza proposta (*vedi* Parte A, Unità 6) e che l'inferenza è valida perché detta formula è una **verità logica** (*vedi* Parte C, Unità 7, par. 3).
5B. Un'affermazione della forma «Se *A*, allora *B*» equivale logicamente all'affermazione «Non *A* o *B*» (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 2). Quindi, l'enunciato condizionale dichiarato falso nella premessa equivale logicamente a, e ha come conseguenza logica l'affermazione «Ci sono ostacoli sui binari, oppure il treno rischia di deragliare». Se il condizionale di partenza è falso, sarà tale anche quest'ultima affermazione. Ma di un'asserzione della forma «*A* o *B*» si sa che se è falsa, allora è vera la sua negazione, ovvero l'affermazione che «Non *A* e non *B*» (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 4). Nel caso in questione, se ne deduce che vale: «È falso che ci sono ostacoli sui binari ed è falso che il treno rischia di deragliare».
6C. Assumendo la prima premessa si accetta che delle due possibilità di cui essa tratta, che il frigorifero non funzioni o che sia mancata la corrente, è vera almeno una (poiché un'affermazione della forma «*A* o *B*» è vera se e solo se è vero almeno un enunciato tra «*A*» e «*B*» - *vedi* Parte A, Unità 3, par. 3). Assumendo la seconda premessa, si accetta il fatto che il secondo dei due disgiunti è falso. Dunque, per logica, deve essere vero il primo e quindi il frigorifero non funziona.

Unità 3 – Argomenti notevoli: i sillogismi

1A. Il sillogismo proposto ha «(essere) disonesto» come termine medio, che occorre infatti in entrambe le premesse. Di queste, la prima, che contiene il predicato della conclusione, ha la forma di una proposizione universale negativa, indicata quindi dalla prima vocale della parola «*nego*» (*vedi* Parte C, Unità 3, par. 6), e risponde alla forma schematica `P e M`. La seconda premessa, nella quale occorre il soggetto della conclusione, è una proposizione universale affermativa che si indica con la vocale «a» di «*adfirmo*». Dunque, essa è rappresentata dalla forma `S a M`. La conclusione, infine, è di nuovo una proposizione di tipo universale negativa e corrisponde alla forma `S e P`.
2C. Delle due premesse del sillogismo, la prima ha la forma di una proposizione universale negativa, quindi indicata mediante la vocale «e» di «*nego*», la seconda di una particolare affermativa, indicata mediante la «i» di «*adfirmo*». Il termine medio, a comune tra le due premesse, è «(essere) cattivo», il che vuol dire che la prima proposizione risponde alla forma `P e M`, la seconda a `M i S`. La conclusione, infine, è una proposizione particolare negativa, quindi della forma `S o P`.
3B. La prima premessa del sillogismo, il cui termine medio è «(essere) cretese», è una proposizione universale affermativa e dunque risponde alla forma `M a P`. La seconda premessa, che è una particolare affermativa, è invece della forma `S i M`. La conclusione, infine, è nuovamente una proposizione particolare affermativa e quindi del tipo `S i P`.
4D. Le due proposizioni che si chiede di assumere, in quanto premesse di un argomento sillogistico, rivelano che il termine medio è «(essere) fortuito», il soggetto della conclusione è «(essere un) errore» e il predicato è «(essere un) incidente». Se tutti gli incidenti sono fortuiti e nessun errore è fortuito, se ne de-

duce quindi che nessun errore è un incidente (si noti che nella soluzione (B) soggetto e predicato risultano inveriti rispetto all'ordine determinato dalle premesse - *vedi* Parte C, Unità 3, par. 2).

5C. Dalle due premesse si evince che il termine medio dell'argomento è «(essere una) cura», il soggetto della conclusione è «(essere un) male necessario» e il predicato è «(essere) doloroso». Se qualche cura è dolorosa e tutte le cure sono mali necessari ci saranno dei mali necessari, quelli che coincidono con le cure dolorose, che sono dolorosi.

6E. Dalle premesse si ricava l'informazione che il termine medio dell'argomento è «(essere) oviparo», il soggetto della conclusione è «(essere) animale» e il predicato è «(essere) cavallo». Se nessun cavallo è oviparo ma d'altra parte tutti gli ovipari sono animali, se ne deduce che qualche animale, tutti quelli che sono ovipari, non sono cavalli.

Unità 4 – Argomenti notevoli: il ragionamento per assurdo

1B. Ragionando per assurdo si cerca di concludere che una certa affermazione vale mostrando che la sua negazione porta a una contraddizione (*vedi* Parte C, Unità 4, par. 1). Nel caso dei due enunciati proposti, si conclude ad esempio che vale (1) perché la sua negazione «Non (1)» porta a una contraddizione in quanto da essa segue (2) e anche la sua negazione logica «Non (2)». Oppure, si conclude che (2) vale perché assumendo «Non (2)» si ottiene sia (1), sia la sua negazione «Non (1)». Discorso analogo vale per le loro negazioni, «Non (1)» e «Non (2)», rispetto alle quali si deve solo avere l'accortezza di tenere presente quale sia l'affermazione che occorre mostrare essere contraddittoria e che coincide con (1) e (2) rispettivamente per la legge logica di **doppia negazione** (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 3).

2C. La forma corretta di un ragionamento per assurdo prevede che da una certa assunzione, l'**ipotesi per assurdo** (*vedi* Parte C, Unità 4, par. 1), si deduca una contraddizione, ad esempio nella forma di un'affermazione e della sua negazione logica. Dunque, data l'analogia che sussiste tra il dedurre logicamente un'asserzione da un'altra e la validità del nesso condizionale tra esse (*vedi* Parte C, Unità 7, par. 3), 'eseguire' correttamente un ragionamento per assurdo significa dimostrare che vale l'enunciato condizionale che lega l'ipotesi per assurdo a una data affermazione e che vale anche il condizionale che la lega alla negazione logica di quest'ultima. Tra i ragionamenti proposti, solo quello corrispondente alla risposta indicata, ha questa forma. Per verificarlo occorre tenere presente le leggi logiche che riguardano la negazione di una **congiunzione** e di una **disgiunzione**. In particolare, occorre tenere presente che la negazione di una congiunzione equivale logicamente alla disgiunzione delle negazioni dei **congiunti** (*vedi* ***Glossario***- dunque, che «Non è vero A e B» equivale a «Non è vero A, oppure non è vero B» - *vedi* Parte A, Unità 3, par. 4), ragion per cui (2) è la negazione logica di (1). Inoltre, occorre tenere presente che la negazione di una disgiunzione equivale alla congiunzione delle negazioni dei **disgiunti** (*vedi* ***Glossario***- per cui «Non è vero A oppure B» equivale a «Non è vero A e non è vero B» - *vedi* Parte A, Unità 3, par. 4), dal che segue che (3) è la negazione logica di (5).

3E. Per stabilire quali tra i ragionamenti proposti ha la forma corretta di un ragionamento per assurdo, occorre tenere presenti le leggi logiche relative alla negazione degli enunciati sui quali operano i **quantificatori individuali** (*vedi* Parte B, Unità 2-4). Si ricordi in particolare che la negazione di un enunciato quantificato universalmente equivale alla quantificazione esistenziale della negazione dell'enunciato in questione (dunque, «Non è vero che per ogni x, A vale di x» equivale logicamente a «Esiste un x tale che A non vale di x» - *vedi* Parte B, Unità 2, par. 5). In modo analogo, la negazione di un enunciato quantificato in modo esistenziale equivale alla quantificazione universale della negazione dell'enunciato stesso (ovvero, «Non è vero che esiste un x tale che A vale di x» equivale a «Per ogni x, A non vale di x» - *vedi* Parte B, Unità 3, par. 4). Da questi rapporti fondamentali si ricavano quelli relativi alle negazioni di enunciati ove compaiono combinazioni di quantificatori (*vedi* Parte B, Unità 4, par. 4), per cui la negazione di «Non è vero che per ogni x esiste un y tale che A vale di x e y» equivale a «Esiste un x tale per ogni y A non vale

di x e y» e «Non è vero che esiste un x tale che per ogni y, A vale di x e y» equivale a «Per ogni x, esiste un y tale che A non vale di x e y».
4A. Riuscire a ridurre all'assurdo l'affermazione (1) significa che dall'ipotesi che essa valga segue una contraddizione (dunque, che da (1) segue tanto un'affermazione «B» che la negazione logica di quest'ultima). A queste condizioni, si è legittimati a concludere che la negazione logica di (1) vale. Dato che essa ha la forma di una congiunzione, la sua negazione logica sarebbe la disgiunzione delle negazione dei **congiunti** (*vedi* ***Glossario***- *vedi* Parte A, Unità 3, par. 4): dunque, essendo (1) della forma «A e B e non C» (dove quest'ultimo congiunto è la negazione di «Barbara riesce a uscire in tempo da lavoro»), si potrebbe concludere «Non A oppure non B oppure C». Sfruttando l'equivalenza logica tra una disgiunzione e un enunciato **condizionale** (per cui «A o B» equivale a «Se non A, allora B» - *vedi* Parte A, Unità 4, par. 3), quella conclusione equivale a «Se non è vero (non A o non B), allora C». Da questo, e dal fatto che la negazione di una disgiunzione equivale alla congiunzione delle negazioni dei disgiunti (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 4), si è legittimati a concludere che «Se A e B, allora C».
5E. Per ridurre all'assurdo (1) tramite (2) bisogna mostrare che assumendo che (1) vale segue che vale (2), ovvero che vale l'enunciato condizionale «Se (1), allora (2)», e che da (1) segue anche la negazione logica di (2), quindi che vale l'enunciato «Se (1), allora non (2)». Quest'ultima affermazione, per **contrapposizione** (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3), equivale logicamente all'affermazione che «Se (2), allora non (1)».
6B. Riducendo (1) all'assurdo tramite (2), si dimostra che da (1) segue (2) e da (1) segue anche la negazione di (2). La forma logica di quest'ultima affermazione è: «Esiste un numero x ed esiste un numero y tali che x è diverso da y, x è primo e y è primo» (*vedi* Parte B, Unità 4). La negazione di quest'affermazione, quindi, è l'enunciato: «Per ogni numero x, per ogni numero y, x è uguale a y oppure x non è primo oppure y non è primo» (*vedi* Parte B, Unità 4, par. 4). Quest'ultima può essere riscritta in vari modi, utilizzando l'equivalenza logica tra un enunciato della forma «Non A o B» e uno della forma «Se A, allora B» (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3). Tra questi modi equivalenti di riscrivere la frase c'è anche quello per cui «Per ogni x, per ogni y, se x è primo e x è diverso da y, allora y non è primo».

Unità 5 – Argomenti notevoli: l'induzione e l'induzione completa

1E. Se non avessimo alcuna informazione circa il contenuto del sacchetto di Dario, potremmo azzardare, ragionando per induzione semplice, che questo contiene solo biglie di colore rosso avendo visto che Michele ha pescato due biglie di quel colore. Tuttavia, sapendo che in origine le biglie erano dieci, suddivise equamente nei due colori e vedendo che Michela ne pesca due rosse, sappiamo che le biglie rimaste sono 8, di cui 5 sono blu e tre rosse. La probabilità che Michele peschi per ultima una biglia blu sono quindi superiori a quella che la peschi di nuovo rossa, benché non si possa avere nessuna certezza assoluta al riguardo.
2B. Se Alberto ha nuotato a delfino significa che non ha nuotato a rana. Quindi, avendo notato che (2) vale, si conclude che nuoterà probabilmente a rana la vasca successiva. Allora, valendo (3), Alberto probabilmente nuoterà a dorso o a stile libero la vasca ancora dopo. Poiché sulla base di (1) ha nuotato a dorso solo dopo aver nuotato a rana le due vasche precedenti e avendo nuotato a delfino prima di fare la vasca a rana, probabilmente nuoterà a stile libero la vasca successiva.
3A. Supponendo che il cuoco del sushi bar stia davvero seguendo uno schema numerico preciso, si nota che ha preparato la nuova mandata al granchio sommando quelle precedenti: 1 in (1), $0+1 = 1$ in (2), $0+1+1 = 2$ in (3), $0+1+1+2 = 4$ in (4). Ciò significa che probabilmente ne preparerà $0+1+1+2+4 = 8$ nella successiva. Ha preparato la mandata al tonno incrementando di un'unità quella precedente, il che vuol dire che ne preparerà probabilmente 9 nella nuova. Quanto al pesce spada, ne ha preparato il doppio della mandata di tonno dal che si deduce che ne farà uscire probabilmente 18. Per il salmone sembra aver seguito uno schema più complesso: ne ha preparati la metà delle porzioni preparate in totale nella mandata precedente, se queste erano in numero pari (come in (2) e (4), dato che le porzioni erano $10 + 5 + 8 + 1 = 24$ in (1) e

15+7+14+2 = 38 in (2)), mentre ne ha preparati la metà delle porzioni precedenti meno una se il loro numero totale era dispari (come in (3), dato che le porzioni preparate in (2) erano 12 + 6 + 12 + 1 = 31 − 1 = 30). Dato che le porzioni preparate in (4) sono 19+8+16+4 = 47, si deve presumere che ne prepareà 47−1 = 46 : 2 = 23 nella mandata successiva.

4C. Dato che Pietro parte quando il semaforo diventa verde e mantiene la velocità consentita ci sono le condizioni perché tutti i semafori che egli incontra siano verdi (perché quello da cui parte è verde, il successivo è verde dato che Pietro rispetta il limite di velocità e vale la condizione (2), quindi anche il terzo semaforo che incontra è verde per lo stesso motivo, e così via). Applicando il principio di induzione si conclude quindi che tutti i semafori che Pietro incontra saranno verdi. Questo aiuta Pietro solo in parte dal momento che, valendo la condizione (1), la fila di semafori che si parano davanti a lui è infinita visto che per ogni semaforo che Pietro supera se ne trova un altro davanti.

5E. Data la regola (1), fin tanto che il nome dei figli primogeniti nella famiglia di Giorgio rimane lo stesso del padre, allora i maschi primogeniti successivi mantengono lo stesso nome del proprio padre (quindi varrebbe che tutti i maschi primogeniti della famiglia di Giorgio, dunque anche Giorgio stesso, hanno lo stesso nome del padre). Dal momento che Giorgio non ha lo stesso nome del padre, significa che la regola (1) non vale e dunque che un maschio primogenito che lo precede nella stirpe non ha lo stesso nome del proprio padre. La conclusione raggiunta (che consente di rispondere al quesito) non è la sola che si può dedurre a proposito della famiglia di Giorgio. Questi, infatti, possiede infiniti maschi primogeniti che lo precedono nella stirpe dato che ce n'è uno che non si chiama come il padre e quindi per ciascun maschio primogenito che precede Giorgio nella stirpe ce n'è un altro che non si chiama come il padre.

6D. Posto anche che ci siano una o ci siano più sorelle di età intermedia tra Laura e Elena, ciascuna di queste sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema dato che Laura lo sa e che vale (1). Quindi Elena sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema. Se invece Laura è la sorella minore di Elena, segue da (1) che Elena sa che Andrea ha chiesto a Patrizia di andare al cinema. Si noti invece che non è necessario che le sorelle minori di Laura sappiano alcunché dato che la regola (1) si applica solo da una qualsiasi delle sorelle 'in avanti', cioè da una sorella nei confronti di quelle maggiori senza che le minori debbano essere al corrente di quanto loro sanno.

Unità 6 – Formalizzare un argomento

1A. La prima premessa dell'inferenza corrisponde chiaramente alla forma $\neg C$. La seconda premessa ha la forma di una disgiunzione, nella quale il primo **disgiunto** (*vedi* ***Glossario***) è a sua volta la negazione dei due enunciati, «Non piove», $\neg A$, e «Non tira vento», $\neg B$. Ciò significa che corrisponde formalmente all'enunciato $(\neg A \wedge \neg B)$. A sua volta, quest'ultimo equivale logicamente alla negazione della disgiunzione delle due affermazioni, cioè all'enunciato $\neg(A \vee B)$ (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 4). La seconda premessa, quindi, si può formalizzare con $\neg(A \vee B) \vee C$. Tuttavia, sappiamo che un enunciato del tipo $\neg D \vee E$ equivale logicamente a $D \rightarrow E$ (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3). Quindi, una versione logicamente equivalente della seconda premessa è data dalla formula $(A \vee B) \rightarrow C$.

2C. Delle tre premesse presentate, la prima ha la forma di una disgiunzione i cui disgiunti sono le negazioni delle affermazioni A e B. Dunque, la si può formalizzare letteralmente come $(\neg A \vee \neg B)$, o eventualmente come $\neg(A \wedge B)$ (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 4). Di un enunciato come D si dice che esso è la condizione necessaria di E se vale $E \rightarrow D$ (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 1). Ciò significa che la seconda premessa si formalizza con la formula $C \rightarrow A$ che è logicamente equivalente a $\neg A \rightarrow \neg C$ per contrapposizione (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3) . La terza premessa, inoltre, corrisponde alla formula $(B \vee \neg C)$ che equivale logicamente a $(\neg B \rightarrow \neg C)$ (poiché quest'ultima equivale a $(\neg\neg B \vee \neg C)$ e $(\neg\neg B)$ equivale logicamente a B per il principio di **doppia negazione** - *vedi* Parte A, Unità 2, par.3). La conclusione dell'inferenza, infine, ha ovviamente la forma $\neg C$.

3E. Che C sia condizione sufficiente di D, significa che vale $C \to D$ (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 1). Inoltre, «Esistono due numeri m e n tali che $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$» (cioè $sqrt2$ è razionale) è vero se e solo se non è vero che «Per ogni m e per ogni n vale $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$» (*vedi* Parte B. Unità 4, par. 4). Ciò significa che la prima premessa dell'inferenza si formalizza con $B \to \neg A$. La seconda premessa, invece, corrisponde alla formula $B \to A$, mentre la conclusione, che non è altro che l'affermazione per cui «Non è vero che $\sqrt{2}$ sia razionale», si formalizza con $\neg B$.
4D. Posto:

A = «Linda ha il cellulare acceso»
B = «Linda ha ricevuto il mio sms»
C = «Linda ha sentito la suoneria del cellulare»
D = «Linda ha letto il mio sms»

la prima premessa dell'argomento corrisponde alla formula $(A \to B)$. La seconda invece corrisponde a $(C \to D)$. Delle conclusioni proposte, solo quella indicata, una volta che sia stata correttamente formalizzata, dà vita a una **verità logica** (*vedi* ***Glossario***) se opportunamente combinata con le premesse (*vedi* Parte C, Unità 6, par. 3). Essa corrisponde alla formula $(A \wedge C) \to (B \wedge D)$. In effetti, utilizzando le tavole di verità si può verificare che la formula:

$$((A \to B) \wedge (C \to D)) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge D))$$

che corrisponde all'argomento proposto, è una verità logica.
5E. In effetti, la formula:

$$(((A \vee B) \to C) \wedge (A \wedge B)) \to C$$

è una verità logica, come si può verificare mediante la tavola di verità del condizionale (*vedi* Parte A, Unità 7, par. 3).
6E. La formula

$$\neg(A \leftrightarrow B) \wedge \neg(A \leftrightarrow C) \to (B \leftrightarrow C)$$

è l'unica verità logica a cui si riesce a dare vita a partire dalle premesse proposte.

Unità 7 – Formalizzare i sillogismi: i diagrammi di Eulero-Venn

1D. La prima premessa del sillogismo ha la forma di un'affermazione del tipo «Ogni `M` è `P`», che si formalizza disegnando l'insieme degli `M` tutto incluso in quello dei `P`. La seconda premessa ha la stessa forma e corrisponde all'affermazione secondo cui «Ogni `S` è `M`», formalizzata mediante un diagramma nel quale l'insieme degli `S` è incluso in quello degli `M`. Si conclude che «Ogni `S` è `P`», ovvero che l'insieme degli `S` è completamente incluso in quello dei `P`.
2B. La prima premessa del sillogismo è un'affermazione della forma «Nessun `M` è `P`», dunque tale da richiedere che, formalizzandola, si disegnino gli insiemi degli `M` e dei `P` come disgiunti. Sulla base della seconda premessa, invece, «Qualche `M` è `S`» e dunque l'insieme degli `M` interseca quello degli `S` senza includerlo completamente e senza essere incluso completamente in esso. Si conclude che «Qualche `S` non è `P`», che vale con certezza degli elementi dell'insieme degli `S` che sono `M` (si noti che l'intersezione tra l'insieme degli `S` e quello dei `P` del diagramma è da considerarsi un aspetto accidentale legato al disegno e non a quanto compare nelle premesse del ragionamento).
3D. Sulla base della prima premessa vale che «Nessun `P` è `M`». Quindi, l'insieme dei `P` e quello degli `M` sono disgiunti. Sulla base della seconda premessa, invece, «Tutti gli `S` sono `M`» e dunque l'insieme degli `S` è incluso in quello degli `M`. Si conclude che «Nessun `S` è `P`», ovvero che l'insieme degli `S` è disgiunto da quello dei `P`.

4A. Sulla base della prima premessa del sillogismo «Nessun `P` è `M`». Dunque, l'insieme dei `P` e l'insieme degli `M` non hanno elementi a comune. Sulla base della seconda premessa, invece, «Qualche `M` è `S`». Quindi, l'insieme degli `M` interseca l'insieme degli `S`, senza che l'uno sia interamente compreso nell'altro e viceversa. Si conclude da ciò che «Qualche `S` non è `P`». Il diagramma che formalizza questa condizione è quello nel quale l'insieme degli `S` interseca eventualmente l'insieme dei `P` ma non lo comprende, né vi è compreso. Avendo osservato che la premessa maggiore del sillogismo si ottiene dalla premessa maggiore del sillogismo proposto all'esercizio n. 2 scambiando il soggetto con il predicato (scambio che non influisce sul diagramma che rappresenta correttamente la proposizione categorica in questione), si sarebbe potuti giungere più rapidamente alla risposta corretta dell'esercizio. Si noti che, in questo caso, è l'intersezione tra l'insieme degli `S` e quello degli `M` a rappresentare un accidente del diagramma che non è giustificato da quanto si evince dalle premesse del sillogismo.
5C. La prima premessa del sillogismo è una proposizione universale affermativa del tipo «Tutti i `P` sono `M`». Sulla base di questa asserzione, l'insieme dei `P` è interamente contenuto nell'insieme degli `M`. La seconda premessa, invece, è una proposizione particolare negativa della forma «Qualche `S` non è `M`». Dato quanto si è stabilito (*vedi* Parte C, Unità 7, par. 1), per garantire la massima generalità al diagramma, il modo corretto di formalizzare un'asserzione di questa forma è disegnare l'insieme degli `S` in modo che intersechi l'insieme degli `M` senza che sia interamente compreso in esso. Si conclude su questa base che «Qualche `S` non è `P`», dunque che l'insieme degli `S` eventualmente interseca ma non è interamente compreso nell'insieme dei `P`.
6B. La premessa maggiore del sillogismo, che contiene il predicato della conclusione, corrisponde a una proposizione universale affermativa del tipo «Tutti i `P` sono `M`». La seconda premessa, invece, è una proposizione universale negativa del tipo «Nessun `M` è `S`». Sulla base della prima premessa l'insieme dei `P` è tutto contenuto nell'insieme degli `M`. Sulla base della seconda premessa l'insieme degli `M` e quello degli `S` non hanno elementi a comune. Si conclude su questa base che «Nessun `S` è `P`» e quindi che anche l'insieme degli `S` è disgiunto dall'insieme dei `P`.

Unità 8 – Le fallacie

1B. L'argomento così com'è indicato richiede che si assuma sia vero che prendendo una bibita e un panino il cliente riceve un dessert in omaggio. La conclusione non segue perché prendere un panino non è sufficiente per avere il dessert, dato che occorre prendere anche una bibita (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 2). Delle due l'una, o si modifica la conclusione o si modifica la premessa. Tuttavia, nessuna delle proposte per cambiare la conclusione del ragionamento conduce a una versione logicamente valida di quest'ultimo. Se invece si modifica la premessa sostituendo la «e» con la «o» si fa sì che il solo acquisto di una bibita o anche il solo acquisto di un panino siano sufficienti a ottenere l'omaggio e a rendere perciò valida la conclusione (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 3).
2C. Sulla base della prima premessa del ragionamento, delle due l'una: o Pietro non ha controllato la posta, o ha deciso di non venire. La seconda premessa del ragionamento ci informa che Pietro ha controllato la posta, dunque che la prima opzione della disgiunzione precedente non ha avuto luogo dal momento che «Pietro ha controllato la posta elettronica» equivale logicamente, per la legge logica di **doppia negazione** (*vedi* Parte A, Unità 2, par. 3), a «Non è vero che Pietro non ha controllato la posta elettronica». Questo fatto renderebbe legittimo concludere allora che deve verificarsi l'altra opzione, dal momento che la prima premessa del ragionamento ha la forma logica di una disgiunzione e dunque è vera se e solo se è vero almeno uno dei suoi **disgiunti** (*vedi* Parte A, Unità 3, par. 3). Questo non è quanto afferma la conclusione, visto che «Pietro ha deciso di venire» è la negazione logica di «Pietro ha deciso di non venire», che segue dalle premesse sulla base di quanto stabilito. Dunque, è sufficiente cambiare la conclusione con la sua negazione per ottenere un ragionamento logicamente corretto.
3E. Contrariamente alle apparenze, la fallacia logica insita nel ragionamento proposto non dipende dal fatto che le affermazioni che ne fanno parte abbiano una natura logica di ordine superiore e si faccia uso

nella loro formulazione dell'operazione di **quantificazione universale** (*vedi* Parte B, Unità 2). Il riferimento agli individui, insomma, non è all'origine della fallacia. Questa dipende piuttosto dalla forma logica enunciativa delle premesse. La prima di esse, infatti, non è altro che un **condizionale** del tipo «Se A (x è un grande uomo), allora B (c'è un y che è una grande donna e sta dietro a x)». La seconda premessa stabilisce che la proprietà di cui tratta A non vale dell'individuo di nome «Antonello» e si conclude da ciò che la proprietà di cui tratta B non vale di Lucia, sua moglie. Sarebbe come dire che, assunto che se A vale, allora vale B, dal fatto che di A vale la negazione logica segue che vale la negazione logica di B. Tuttavia, come si è già avuto modo di notare (*vedi* Parte C, Unità 8, par. 1), se dalla verità dell'**antecedente** (*vedi* ***Glossario***) di un condizionale segue la verità del suo **conseguente** (*vedi* ***Glossario***), non è detto invece che dal fatto che l'antecedente sia falso (dunque, che valga di esso la negazione), segue che anche il conseguente deve essere falso (anzi: un'affermazione di forma condizionale è vera anche se l'antecedente è falso e il suo conseguente è vero - *vedi* Parte A, Unità 4, par. 2). In particolare, se Antonello non è un grand'uomo, non è detto che Lucia non sia una grande donna dal momento che la prima premessa stabilisce solo che quest'ultimo caso è inevitabile, invece, nel caso in cui Antonello sia una grand'uomo. Al contrario, supposto che un'affermazione di tipo condizionale sia vera, dalla falsità del conseguente segue necessariamente la falsità dell'antecedente, dal momento che un condizionale è vero se il suo conseguente è vero oppure se il suo antecedente è falso (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 2).

4D. Seppure di un tipo un po' inconsueto (premesse e conclusione del ragionamento sono proposizioni **singolari** –*vedi* Parte C, Unità 3, par. 1), l'argomento presentato è un esempio di sillogismo non valido dal momento che dal fatto che la filosofia è inutile e l'ozio è inutile non segue necessariamente che la filosofia sia ozio. Anzi, dal fatto che l'**individuo** (*vedi* ***Glossario***) singolare «ozio» sia inutile e che tale sia anche «filosofia» non sembra si possa concludere alcunchè sui rapporti tra essi. Per farlo occorre un'affermazione di carattere generale, universale o particolare che sia. Tra quelle proposte, l'unica che consente di costruire un ragionamento valido è quella indicata. Se infatti tutto ciò che è inutile è ozio e la filosofia è inutile, segue naturalmente che la filosofia è ozio.

5E. Nonostante la plausibilità della conclusione, il ragionamento presentato è una fallacia sillogistica: dal fatto che tutti i bambini amano i dolci e che qualche pasticciere non li ama, non segue che nessun pasticciere è un bambino, dato che rimane possibile che tra i pasticcieri che amano i dolci potrebbe esserci proprio qualche bambino. L'unico sillogismo valido che è possibile costruire seguendo i suggerimenti dati è quello che si ottiene dalla risposta n. 5, che è quella corretta: infatti, se tutti i bambini amano i dolci e qualche pasticciere non li ama, nessuno di questi è un bambino; rimanendo possibile che vi siano altri pasticcieri che amano i dolci (tra i quali, appunto, non si può escludere ci siano dei bambini), è certo che ci siano pasticcieri che non sono bambini. Utilizzando i **diagrammi di Eulero-Venn** (*vedi* Parte C, Unità 7), si può verificare che nessuno dei sillogismi alternativi è logicamente valido.

6D. Se nessun uomo è irrazionale e qualche uomo è intraprendente, non è possibile che ogni intraprendente sia irrazionale perché altrimenti lo sarebbero anche quegli uomini che sono intraprendenti, contraddicendo quanto stabilito dalla prima premessa del sillogismo. Trovato il passaggio dove si annida il problema del ragionamento, occorre individuare la pezza per porvi rimedio. Tra quelle proposte, solo il suggerimento di sostituire la conclusione originale con «Qualche intraprendente non è irrazionale» dà vita a un sillogismo valido: perché, tra tutti gli intraprendenti, alcuni sono uomini sulla base della seconda premessa e quelli non sono irrazionali per ciò che asserisce la prima premessa del sillogismo. Utilizzando i **diagrammi di Eulero-Venn** (*vedi* Parte C, Unità 7), si può verificare che il sillogismo che si ottiene effettuando la sostituzione proposta è valido, mentre nessuno dei sillogismi alternativi lo è.

D – Le estensioni della logica classica
Unità 1 – Gli operatori modali

1C. L'affermazione che si chiede di considerare equivale a dire che:

Necessariamente, non è vero che esiste un quadrato rotondo

la quale esprime il fatto che l'assunzione che esista un quadrato rotondo non è solo falsa ma necessariamente tale, dunque tale che non è proprio possibile pensare il contrario (l'affermazione è falsa in ogni **mondo possibile**, si direbbe esercitando l'intuizione alla base della semantica delle modalità aletiche a cui si è fatto cenno nell'unità - *vedi* Parte D, Unità 1, par. 3). Utilizzando i cenni alla **formalizzazione** delle modalità (*vedi* Parte D, Unità 1, par. 3), si potrebbe rendere l'affermazione dell'esercizio con:

$$\Box\neg A$$

dove A sta per «Esiste un quadrato rotondo» e $\Box$ per «È necessario che». Dalla soluzione dell'esercizio si ricava che da essa segue logicamente:

$$\neg \Diamond A$$

dove $\Diamond$ sta per «È possibile che». Generalizzando l'analisi a una qualsiasi affermazione A, ciò significa che se A è necessariamente vero, allora non è possibile che sia vera la sua negazione, che è una dei principi logici di base delle modalità aletiche.

2A. L'affermazione che si chiede di considerare dice di Riccardo che egli ignora il fatto che Dario non è preparato per l'interrogazione di inglese. In altre parole, dice che è falso che Riccardo sa che Dario non è preparato per l'interrogazione di inglese, ovvero che chi affermasse che Dario è preparato a sostenere l'interrogazione d'inglese, affermerebbe il falso. Dal momento che questo è tutto ciò che si riesce a dedurre dall'affermazione in esame (perché da ciò che Riccardo non sa sulla preparazione in inglese di Dario non segue alcuna certezza relativamente a ciò che egli crede o non crede al riguardo), se ne conclude che la risposta corretta è quella indicata.

3E. Prima di iniziare a ragionare sui rapporti relativi alle **modalità** (*vedi* ***Glossario***) che l'affermazione chiama in causa (essere proibito/essere permesso), può convenire intanto analizzare la forma logica della frase. Un modo **logicamente equivalente** (*vedi* ***Glossario***) di restituirne il senso è dire che:

Se qualcosa non è permessa, allora è proibita e se qualcosa è proibita, allora non è permessa

Dal primo congiunto della frase, per **contrapposizione** (*vedi* Parte A, Unità 4, par. 3), segue che:

Se qualcosa non è proibita, allora è permessa

Dal secondo congiunto, sempre per contrapposizione, segue invece che:

Se qualcosa è permessa, allora non è proibita

Rimettendo insieme i due 'pezzi' della congiunzione e riformulando il tutto in modo più informale come nella frase originaria si ottiene che:

Ciò che è permesso non è proibito e ciò che non è proibito è permesso

Quindi, la risposta corretta è la E.

4B. Consideriamo per un istante quanto si dice con la frase che, nell'affermazione considerata, viene dichiarata falsa. Si tratta dell'asserzione secondo cui:

Accadrà in futuro ciò che non è mai accaduto in passato

Si afferma quindi che accadrà in futuro (almeno una volta) qualcosa che non è mai accaduta prima. Se essa è falsa, si intende affermarne la **negazione** (*vedi* Parte A, Unità2, par. 1), ovvero che tutto ciò che accadrà in futuro sarà già accaduto almeno una volta in passato, quindi che in futuro non potrà mai accadere qualcosa che non sia già accaduta una volta in passato.

5C. Per risolvere l'esercizio si chiede di ragionare sotto l'ipotesi che:

Se un dato individuo sa che A, allora A è vero

Questo vale in particolare di Giovanni e di ciò che lui sa. Ma Giovanni sa che «Elena crede che lui sa». Dunque, Elena crede che Giovanni sappia (che lei crede).

6D. Come spesso accade con le frasi negative, conviene partire innanzi tutto da ciò che si afferma essere falso. In questo caso, si tratta del fatto che:

Elena sa che Giovanni non le crede

Che questo sia falso, significa semplicemente che:

Elena non sa che Giovanni non le crede

Quindi, la risposta corretta è la D.

Glossario

antecedente
In un enunciato dichiarativo che ha la forma di un condizionale del tipo «Se *A*, allora *B*», lo si dice della componente enunciativa di esso che segue il «se» e precedene l'«allora» (dunque, di *A*).

argomento
È un insieme di enunciati, suddivisi in **premesse** e **conclusione**, che intende stabilire l'esistenza di un nesso deduttivo tra le prime e la seconda; dunque tale che, date le premesse, da esse segue, o si deduce, la conclusione. Può essere **logicamente valido** quando tale nesso non può essere messo in discussione (perchè fondato su principi logici veri), oppure **fallace** in caso contrario.

arietà
Si tratta del numero di **individui** a cui si applica un certo **predicato** o una certa **relazione**. Stabilito che un predicato è un'espressione che si riferisce a una proprietà di un singolo individuo (e che dunque possiede sempre a. 1), una relazione può avere a. 2 se coinvolge due individui alla volta (come la relazione aritmetica di «essere maggiore di»), 3 se coinvolge tre individui, 4, ecc.

combinazioni base (dei quantificatori individuali)
Si tratta delle quattro combinazioni possibili dei due **quantificatori individiduali**, ovvero quella che si ravvisa in un'affermazione nella quale il quantificatore di tipo universale occorre congiuntamente a un quantificatore di tipo esistenziale ma precedendo quest'ultimo nella struttura della frase, quella in cui invece è il quantificatore esistenziale a precedere un quantificatore universale, quella in cui un quantificatore di tipo universale precede un altro quantificatore dello stesso tipo e quella in cui un quantificatore esistenziale precede un altro quantificatore, sempre di tipo esistenziale.

conclusione
In un argomento, è l'affermazione che si deduce dalle **premesse** del ragionamento.

condizioni di verità
Lo stato di cose o l'insieme degli stati di cose che rendono vero un dato enunciato dichiarativo.

congiunto
In un enunciato dichiarativo che la forma di una congiunzione, come «*A* e *B*», lo si dice dei due enunciati connessi dall'operazione logica «e» (quindi, di *A* e *B* in questo caso).

connettivo logico
Locuzione che applicata a una o più enunciati del linguaggio, dà vita a un enunciato diverso e logicamente più complesso di quello di partenza.

R. Bruni, Dialogare: *compendio di logica*, ISBN (online) 978-88-6453-475-6, CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

connettivo principale (di un enunciato)
Tra tutti i connettivi che compaiono in una data affermazione, è p. quello che ne determina la 'natura logica', ovvero il fatto che la frase sia una negazione o una congiunzione o una disgiunzione o un condizionale o un bicondizionale.

conseguente
In un enunciato dichiarativo che ha la forma di un condizionale del tipo «Se *A*, allora *B*», lo si dice della componente enunciativa di esso che segue l'«allora» (dunque, di *B*).

contraddizione logica
Lo si dice di un enunciato che è falso comunque stiano le cose. Dunque, falso in virtù della sola forma logica che possiede.

disgiunto
In un enunciato dichiarativo che la forma di una disgiunzione, come «*A* o *B*», lo si dice dei due enunciati connessi dall'operazione logica «o» (quindi, di *A* e *B* in questo caso).

dominio
Il d. di un **quantificatore individuale** è l'insieme degli **individui** su cui si quantifica, ossia dei quali si dice, rispetto a una data proprietà se ce n'è almeno uno che ne gode o se tutti ne godano.

enunciato atomico
Enunciato dichiarativo semplice, nel quale non occorrono alcun **connettivo logico**, con il quale ci si limita ad attribuire una data proprietà a un soggetto logico o a menzionare una relazione sussistente tra certi soggetti.

fallace
È la proprietà caratteristica di un argomento che sia una **fallacia logica**.

fallacia logica
Indica un **argomento** in cui dalla verità delle **premesse** non segue la verità della **conclusione**. Si contrappone a un argomento **logicamente valido**.

forma logica
È la struttura che l'enunciato possiede in virtù del numero di **enunciati atomici** da cui è composto e da come essi si combinano tra loro mediante i **connettivi logici**. Hanno la stessa forma logica due enunciati determinati dallo stesso numero di enunciati atomici combinati tra loro mediante le stesse operazioni logiche. Si noti la differenza che corre tra questa relazione e quella che sussiste tra due enunciati **logicamente equivalenti**.

formalizzare, formalizzazione
È il processo di sostituzione delle espressioni verbali mediante i simboli di un linguaggio appositamente scelto, in modo da mettere in risalto la **forma logica** degli enunciati del linguaggio.

formula
È l'espressione simbolica che corrisponde a un'affermazione del linguaggio ordinario che ne esprime la **forma logica**.

implicazione materiale o filoniana

Deve il nome al filosofo greco Filone di Megara, vissuto nel III sec. a.C., a cui si deve l'individuazione e lo studio del condizionale in questa forma. Indica l'operazione logica corrispondente alla forma italiana «Se *A*, allora *B*» secondo l'**interpretazione classica dei connettivi**. L'elemento che la distingue è dato dalle **condizione di verità** assegnate a un enunciato di quella forma, sulla base delle quali è falso solo nel caso in cui *A* è vero e *B* è falso e vero in tutti gli altri casi possibili.

individuo

In logica, è detto i. qualunque elemento dell'**universo del discorso** di un enunciato dichiarativo, dunque qualunque 'cosa' sia fatta oggetto di un'affermazione, a prescindere dal suo genere di appartenenza (umana, animale, inanimata o concettuale), che abbia tuttavia una natura individuale (che sia cioè dotata di un'identità precisa, cosa che possiedono anche certi gruppi di individui).

inferenza logica

È un insieme di enunciati, suddivisi in (una o più) **premesse** e **conclusione**, che costituisce un''unità argomentativa' di un **argomento**. È di tipo logico quando il passaggio deduttivo dalle premesse alla conclusione si fonda su una **verità logica**, ovvero se è tale il condizionale il cui **antecedente** è dato dalla congiunzione delle premesse dell'inferenza e il cui **conseguente** è la sua conclusione.

interpretazione classica (dei connettivi)

L'insieme dei principi che 'regolano' la logica classica e sulla base dei quali: tutti gli enunciati sono veri o falsi in alternativa; nessun enunciato è sia vero che falso; il **valore di verità** di un enunciato logicamente complesso dipende esclusivamente da (o è funzione di) i valori di verità degli enunciati che lo compongono.

istanza

Lo si dice di un'affermazione nel linguaggio corrente rispetto all'espressione simbolica che ne rappresenta la **forma logica**: la prima è i. di quest'ultima nel senso che la esemplifica nel linguaggio ordinario (poiché è una 'realizzazione' di quella forma). Data una certa espressione simbolica, essa avrà dunque in generale più di un'i.: tutti gli enunciati della lingua corrente che possiedono la forma logica rappresentata dall'espressione.

logicamente corretto

Lo si dice di un argomento in cui il passaggio dalle **premesse** alla **conclusione** sia ineccepibile, data la loro **forma logica**.

logicamente equivalenti

Lo si dice di due enunciati, *A* e *B*, che sono veri alle stesse **condizioni di verità**, dunque tali che se *A* è vero, allora *B* è vero e, viceversa, se *A* è falso, allora *B* è falso. Si noti allora che, data la definizione, due enunciati possono essere logicamente equivalenti senza avere la stessa **forma logica**.

logicamente neutro

Lo si dice di un enunciato il cui **valore di verità** dipende in modo essenziale dallo 'stato delle cose'. Dunque, in particolare, di un enunciato che non è una **verità logica**, non è una **contraddizione logica** ma è vero o falso perchè contiene un pronunciamento corretto o sbagliato sul proprio **universo del discorso**.

logicamente valido
Lo si dice di un **argomento** nel quale da **premesse** vere si ottiene una **conclusione** vera. Un argomento l.v. si contrappone a una **fallacia logica**.

modalità
Si tratta di una locuzione come «sapere che» che, come un **connettivo logico**, data una proposizione *A* consentono di dare vita a una nuova proposizione (nel caso «sapere che *A*), ma la cui 'azione' non può essere espressa attraverso una combinazione delle operazioni logiche note e che richiede lo sviluppo di un'analisi opportunamente dedicata.

operatore modale
Vedi **modalità**.

predicato
In campo logico, l'espressione è normalmente limitata a quelle espressioni del linguaggio che si riferiscono alle proprietà di singoli **individui**. Vedi anche **relazione**.

premessa
In un argomento, lo si dice delle affermazioni poste a ipotesi dalle quali si deduce la **conclusione** del ragionamento.

proposizione categorica
È la tipologia di affermazioni che occorrono in qualità di **premesse** e **conclusione** in un **sillogismo**. Le p.c. rispondono alla struttura soggetto-copula-predicato e sono in generale costruite mediante il ricorso ai **quantificatori individuali**. Le più rilevanti per lo studio dei sillogismi sono le p.c. universale affermativa («Tutti gli *A* sono *B*»), particolare affermativa («Qualche *A* è *B*»), universale negativa («Nessun *A* è *B*») e particolare negativa («Qualche *A* non è *B*»).

quantificatori individuali
Sono le operazioni caratteristiche della logica di predicati e relazioni e consentono, di una data proprietà e rispetto a un certo **dominio** di **individui**, di stabilire quanti di questi godano o meno della proprietà suddetta; in particolare, consentono di asserire se c'è almeno un individuo del dominio che gode o non gode della proprietà in questione, o se tutti gli individui del dominio ne godano o non ne godano.

relazione
Indica un'espressione del linguaggio che si riferisce a proprietà che coinvolgono e legano tra loro (in un nesso relazionale, appunto) due o più individui. Vedi anche **predicato**.

semantica
Indica l'insieme delle regole che stabiliscono, delle espressioni di un linguaggio, il loro significato. Dalla s., oltre che dalla logica, dipende la verità o la falsità delle affermazioni **logicamente neutre**.

sillogismo
Tipo di **argomento** costituito da due **premesse** e da una **conclusione** che sono **proposizioni categoriche**, dunque affermazioni della forma soggetto-copula-predicato.

sintassi
Indica l'insieme delle regole per mezzo delle quali si costruiscono espressioni dotate di senso di un linguaggio, come i nomi e le proposizioni.

sottoenunciato
Componente enunciativa di un'affermazione dotata di 'senso logico', dunque comprensiva di soggetto, predicato ed eventuali **connettivi**, che costituisce un enunciato a sé stante e a cui si applicano i connettivi che determinano l'affermazione data (eventualmente combinandola con altri sottoenunciati).

sottoformula
In una espressione formale ottenuta mediante la procedura di **formalizzazione** di un enunciato, è una s. ogni parte dell'espressione che costituisce la versione formale di un enunciato a sé stante. Le s. sono per le espressioni formalizzate quello che i **sottoenunciati** sono per gli enunciati di una lingua corrente.

tautologia
Vedi **verità logica**.

termine medio
In un **sillogismo**, si tratta dell'unico termine che occorre in entrambe le **premesse** di cui si compone questa forma di ragionamento ma non nella sua **conclusione**.

universo del discorso
L'insieme di tutti gli individui, gli oggetti, i concetti e le loro proprietà che sono chiamate in causa da un dato enunciato dichiarativo.

validità logica
È la proprietà distintiva di un argomento **logicamente valido**.

valore di verità
Il valore che un enunciato dichiarativo assume in virtù della sua forma logica o del determinarsi o meno delle proprie **condizioni di verità**. Nel caso usuale, quello della logica classica, i valori di verità sono soltanto due, il «vero» e il «falso».

variabile individuale
In una espressione simbolica ottenuta applicando il processo di **formalizzazione** a espressioni nelle quali si faccia uso dei **quantificatori individuali**, una v.i. rappresenta un **individuo** 'generico' del loro dominio, ovvero un individuo qualsivoglia di una collezione di elementi dell'universo del discorso sulla quale 'si quantifica' (a cui si applica un quantificatore di tipo universale o di tipo esistenziale).

verità logica
Lo si dice di un enunciato che è vero a prescindere dagli stati cose, dunque che è vero in virtù della sola forma logica che esso possiede.